

UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MODELAGEM MATEMÁTICA E
COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO

Derivadas Deformadas e Aplicações

Wanderson Rosa

2019



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM
MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

DERIVADAS DEFORMADAS E APLICAÇÕES

WANDERSON ROSA

Sob orientação de
José Weberszpil

e co-orientação de
Cláudia Mazza Dias

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre** no Curso de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, Área de Concentração em Modelagem Matemática e Computacional.

Seropédica, RJ, Brasil
Agosto de 2019

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R788d Rosa, Wanderson, 1986-
Derivadas Deformadas e Aplicações / Wanderson Rosa.
- Seropédica, 2019.
123 f.: il.

Orientador: José Weberszpil.
Coorientadora: Claudia Mazza Dias.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal
Rural do Rio de Janeiro, PPGMMC, 2019.

1. Modelagem Matemática. 2. Derivadas Deformadas.
3. Derivadas Deformadas Duais. 4. Métodos
Variacionais Deformados. 5. Métodos Variacionais
Deformados Duais. I. Weberszpil, José, 1963-, orient.
II. Mazza Dias, Claudia, 1969-, coorient. III
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. PPGMMC.
IV. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E
COMPUTACIONAL

WANDERSON ROSA

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre** no Curso de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, Área de Concentração em Modelagem Matemática e Computacional.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 26/08/2019.

José Weberszpil. D. Sc UFRRJ
(Presidente)

Carlos Andrés Reyna Vera-Tudella. D. Sc UFRRJ

José Abdalla Helayël-Neto. D. Sc CBPF

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil(CAPES)-Código de Financiamento 001. Agradeço em primeiro lugar a UFRRJ, pela excelência em ensino. Ao meu orientador José Weberszpil por ter me dado toda a base para a elaboração desta dissertação, acreditando na minha capacidade (que muitas vezes cheguei à duvidar), sendo paciente e não desistindo de mim, nem nos meus piores dias. A minha coorientadora Cláudia Mazza Dias, por todo apoio e ajuda dados durante esta pós graduação. Agradeço também ao Doutor Oscar Sotolongo-Costa por ter disponibilizado os dados de tratamento de câncer utilizados nesta dissertação.

Agradeço a minha namorada Juliana Marys Bernardo da Silva, por estar ao meu lado em toda esta jornada, me dando apoio, conselhos e broncas quando necessário. A minha irmã Wallerya Gonçalves Rosa pelo ombro amigo, cedido tantas vezes. Agradeço a minha psicóloga, que me ajudou a lembrar; quem eu sou, o que eu quero e o quão longe consigo ir. Agradecimento especial ao meu grande amigo Tarik que me ajudou financeiramente quando eu estava sem ter a quem recorrer. Agradeço a todos que me ajudaram de algum modo nesta longa jornada até aqui, mesmo os não citados nestes agradecimentos, cada um deles foi uma peça importante nesta jornada.

*“ As nuvens não são esferas, as
montanhas não são cones, as linhas
costeiras não são círculos, e o latido do
cão não é contínuo, nem os relâmpagos se
propagam em linha reta.
Mandelbrot, 1983*

RESUMO GERAL

ROSA, Wanderson. **Derivadas Deformadas e Aplicações**. 2019. 123f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional, Interdisciplinar). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2019.

Nas últimas décadas, diversos formalismos foram usados para descrever sistemas complexos. Dentre os quais, podem ser citados o cálculo fracionário e as derivadas deformadas. Ambos mostraram resultados positivos na modelagem de sistemas complexos. No entanto, o cálculo fracionário é definido a partir de operadores não locais e, portanto, não satisfaz algumas propriedades das derivadas usuais; como, por exemplo, a regra do produto e a regra da cadeia. As derivadas deformadas são operadores locais e se apresentam como um pré-fator multiplicado por uma derivada usual. No caso de uma deformação no espaço das variáveis, este pré-fator depende da variável independente e de um parâmetro de deformação. Se a deformação for no espaço das funções o pré-fator será dependente da função que está sendo derivada e do parâmetro de deformação. Os operadores gerados nesses dois casos são duais entre si. Os operadores gerados no primeiro caso tem conexão com a derivada de Hausdorff, com o mapeamento no fractal contínuo e satisfazem todas as propriedades básicas de derivada. Aqui, estes serão tratados como derivadas deformadas. Os operadores gerados no segundo caso serão tratados como derivadas deformadas duais. Neste trabalho serão propostos formalismos de cálculo deformado. Como ponto de partida será tomado um operador generalizado de derivada deformada e de dois de seus casos particulares, bem como as formas duais dos mesmos. Serão propostas derivadas, integrais e funções deformadas e após isso serão propostas abordagens variacionais deformadas. Por fim, aplicações tanto em física quanto em outras áreas serão propostas a partir dos formalismos de cálculo deformado e deformados duais.

Palavras-chave: Derivadas Deformadas, Método Variacional Deformado, Derivadas Duais.

GENERAL ABSTRACT

ROSA, Wanderson. **Deformed Derivatives and Some Applications**. 2019. 123p. Dissertation (Master in Mathematical and Computational Modeling, Interdisciplinary). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2019.

In the last decades, several formalisms have been used to describe complex systems. Among them, the fractional calculation and the deformed derivatives can be mentioned. Both showed positive results in the modeling of complex systems. However, the fractional calculation is defined from non-local operators and, therefore, does not satisfy some properties of the usual derivatives; such as the product rule and the chain rule. The deformed derivatives are local operators and are presented as a pre-factor multiplied by a usual derivative. In the case of a deformation in the space of variables, this pre-factor depends on the independent variable and a deformation parameter. If the deformation is in the space of the functions the pre-factor will be dependent on the function being derived and the parameter of deformation. The operators generated in these two cases are dual to each other. The operators generated in the first case have a connection with the Hausdorff derivative, with the mapping in the continuous fractal and satisfy all the basic properties of the derivative. Here, these will be treated as deformed derivatives. The operators generated in the second case will be treated as dual deformed derivatives. In this work will be proposed formalisms of deformed calculation. As a starting point a generalized operator of deformed derivative and two of its particular cases will be taken, as well as the dual forms thereof. Derivatives, integrals, and deformed functions will be proposed, and then deformed variational approaches will be proposed. Finally, applications in both physics and other areas will be proposed from the deformed and deformed dual formalisms of calculation.

Keywords: Deformed Derivatives, Deformed Variational Methods, Dual Derivatives.

LISTA DE FIGURAS

1.1	Poeira de Cantor.....	18
1.2	Mapeamento no contínuo fractal(A figura retirada de (BALANKIN, 2015))	20
2.1	Exponencial Esticada.....	28
2.2	q-exponencial.	29
2.3	Logaritmo Natutal Conforme.	30
2.4	q-logaritmo.	31
2.5	Cosseno Conforme.....	33
2.6	Seno Conforme.....	33
2.7	q-cosseno	35
2.8	q-seno	35
2.9	Autofunção q-deformada dual.	42
4.1	Posição de um OHS Conforme, em função do tempo.....	60
4.2	Frequência Angular de um OHS Conforme, como função do tempo.	61
4.3	Frequência angular de um OHS Conforme, em função do parâmetro α de deformação.....	62
4.4	Posição em função do tempo, para o oscilador q-deformado.....	65
4.5	Frequência de Oscilação q-deformado em função do tempo.....	67
4.6	Posição em função do tempo, oscilador Conforme Abordagem 3.....	69
4.7	Análise de Energia do OHS Conforme Opção 3	70
4.8	Posição em função do tempo, para o oscilador q-deformado Abordagem 3.	71
4.9	Análise de Energia do OHS q-deformado Opção 3.....	72
4.10	Parte Real e Imaginaria da Solução Analítica do OHS conforme dual Opção 3	75
4.11	Posição em função do tempo, para o oscilador Conforme Dual.	75
4.12	Análise de Energia do OHS Conforme Dual Opção 3	76
4.13	Parte Real e Imaginaria da Solução Analítica do OHS q-deformado dual Opção 3	77
4.14	Posição em função do tempo, para o oscilador q-deformado Dual.	78
4.15	Análise de Energia do OHS q-Deformado Dual Opção 3.....	79
4.16	Fator de sobrevivência conforme para células de rim humano.	82
4.17	Fator de sobrevivência q-Deformado para células de rim humano.	83
4.18	Fator de sobrevivência conforme dual para células de rim humano.	85
4.19	Fator de sobrevivência q-Deformado Dual.	86
4.20	Viscosidade Conforme.	87
4.21	Viscosidade q-deformada.	88
4.22	Viscosidade Conforme Dual em Função da Deformação.	89
4.23	Viscosidade q-Deformada Dual em Função da Deformação.....	90
7.1	Posição em Função do Tempo no MRU Conforme Opção 1	99
7.2	Posição em Função do Tempo no MRU q-Deformado Opção 1	100
7.3	Velocidade em Função do Tempo no MRUV Conforme Opção 1.	101
7.4	Posição em função do tempo no MRUV Conforme Opção 1.....	102

7.5	Velocidade em Função do Tempo no MRUV q -Deformado Opção 1.	103
7.6	Posição em Função do Tempo no MRUV q -Deformado Opção 1.	104
7.7	Posição em Função do Tempo no MRU Conforme Opção 3.	105
7.8	Posição em Função do Tempo no MRU q -Deformado Opção 3.	106
7.9	Posição em Função do Tempo no MRUV Conforme Opção 3.....	108
7.10	Posição em Função do Tempo no MRUV q -Deformado Opção 3.	109
7.1	Posição em Função do Tempo no MRU Conforme Dual.....	116
7.2	Posição em Função do Tempo no MRU q -Deformado Dual.....	117
7.1	Comparação Analítico Numérica.....	120

LISTA DE APÊNDICES

APÊNDICE A – MÉTODO VARIACIONAL USUAL	97
APÊNDICE B – CINEMÁTICA NAS ABORDAGENS CONFORME E q -DEFORMADAS OPÇÃO 1 E CINEMÁTICAS DEFORMADAS OPÇÃO 3	99
APÊNDICE C – SEGUNDA LEI DE NEWTON ABORDAGEM CON- FORME E q -DEFORMADA OPÇÃO 3.....	111
APÊNDICE D – SEGUNDA LEI DE NEWTON DEFORMADA DUAL	113
APÊNDICE E – CINEMÁTICA DEFORMADA DUAL	115
APÊNDICE F – MÉTODO NUMÉRICO DE EULER	118
APÊNDICE G – ROTINAS NUMÉRICAS	121

LISTA DE ABREVIACOES E SIGLAS

RJ	Rio de Janeiro
UFRuralRJ	Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
MRU	Movimento Retilíneo e Uniforme
MRUV	Movimento Retilíneo Uniformemente Variado
OHS	Oscilador Harmônico Simples

LISTA DE SÍMBOLOS

D_{Ψ}^p	Derivada deformada generalizada
D_{α}	Derivada conforme
D_q	q-derivada
D_{Ψ}^p	Derivada deformada dual generalizada
\tilde{D}_{α}	Derivada conforme dual
\tilde{D}_q	q-derivada Dual
I_{Ψ}^p	Integral deformada generalizada
I_{α}	Integral conforme
I_q	Integral q-deformada
\tilde{I}_{Ψ}^p	Integral deformada dual generalizada
\tilde{I}_{α}	Integral conforme dual
\tilde{I}_q	Integral q-deformada dual
e_p^x	Exponencial deformada generalizada
e_{α}^x	Exponencial conforme
e_q^x	q-exponencial
\ln_p	Logaritmo natural deformado generalizado
\ln_{α}	Logaritmo natural conforme
\ln_q	Logaritmo natural q-deformado
$\sin_p(x)$	Seno deformado generalizado
$\cos_p(x)$	Cosseno deformado generalizado
$\sin_{\alpha}(x)$	Seno deformado conforme
$\cos_{\alpha}(x)$	Cosseno deformado conforme
$\sin_q(x)$	Seno q-deformado
$\cos_q(x)$	Cosseno q-deformado
$J(y, y')$	Funcional de uma função e sua derivada de primeira ordem
$J(y, D_{\Psi}^p y')$	Funcional de uma função e de uma derivada deformada generalizada
$J(y, D_{\alpha} y')$	Funcional de uma função e de uma derivada conforme
$J(y, D_q y')$	Funcional de uma função e de uma q-derivada
$J(y, \tilde{D}_{\Psi}^p y')$	Funcional de uma função e de uma derivada deformada dual generalizada
$J(y, \tilde{D}_{\alpha} y')$	Funcional de uma função e de uma derivada conforme dual
$J(y, \tilde{D}_q y')$	Funcional de uma função e de uma derivada q-deformada generalizada

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Geometria Euclidiana e Geometria Fractal	17
1.2	Espaços Métricos e as Derivadas Deformadas	18
1.3	Mapeamento no Fractal Contínuo	19
1.4	Sobre os Próximos Capítulos	21
2	CÁLCULO DEFORMADO	23
2.1	Derivada Deformada Generalizada	23
2.1.1	Integral Deformada Generalizada	26
2.1.2	Equações de Autovalores Deformadas	26
2.1.2.1	Funções Trigonométricas Deformadas Generalizadas	31
2.2	Derivada Deformada Dual Generalizada	35
2.2.1	Propriedades	38
2.2.2	Integral Deformada Dual Generalizada	40
2.2.3	Equações de Autovalores, para o Operador de Derivada Deformada Dual Generalizada	40
3	MÉTODO VARIACIONAL COM DERIVADAS DEFORMADAS	43
3.1	Abordagem Variacional com Derivadas Deformadas	43
3.1.1	Opção 1	43
3.1.2	Opção 2	46
3.1.3	Opção 3	47
3.2	Método Variacional Dual	48
4	APLICAÇÕES	51
4.1	Segunda Lei de Newton	51
4.1.1	Modelos Deformados da Mecânica Newtoniana	52
4.1.1.1	Modelos com Lagrangianas Deformadas não Duais	52
4.1.1.2	Cinemática Deformada Generalizada, pela Opção 1	54
4.1.1.3	MRU Deformado Deneralizado	55
4.1.1.4	MRUV Deformado generalizado	55
4.1.1.5	Modelos da Mecânica Newtoniana com Lagrangianas Deformadas Duais	56
4.2	Oscilador Harmônico Simples Deformado	57
4.2.1	Oscilador Harmônico Simples Usual	57
4.2.2	Modelos Deformados de Osciladores	57
4.2.2.1	Modelos de Osciladores, a partir de Lagrangianas Deformadas não Duais Opção 1	57
4.2.2.2	Modelos de Osciladores, a partir de Lagrangianas Deformadas não Duais, Opção 3	68
4.2.2.3	Modelos de Osciladores, a partir de Lagrangianas Deformadas Duais-Opção 3 do método variacional dual	73

4.3 Modelos deformados para Fator de Sobrevivência de Células Cancerígenas	79
4.3.1 Modelos Usuais	80
4.3.2 Modelos Deformados	81
4.3.2.1 Modelos com Derivadas Deformada não Duais	81
4.3.2.2 Modelos Deformados com Derivadas Duais	84
4.4 Modelos Deformados para Reologia dos Fluidos	86
4.4.1 Modelos Deformados não Duais	87
4.4.2 Modelos Deformados Duais	88
5 CONCLUSÕES	91
6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	93
7 APÊNDICE	96
G.1 Rotina Numérica para o OHS Conforme Opção 3	121
G.2 Rotina Numérica para o OHS q-Deformada Opção 3	121
G.3 Rotina Numérica para o OHS Conforme Dual Opção 3	122
G.4 Rotina Numérica para o OHS q-Deformada Dual Opção 3	123

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo apresentar e discutir as derivadas deformadas bem como algumas aplicações. As derivadas deformadas se apresentam como uma alternativa para a descrição de sistemas complexos. Muitas definições de derivadas deformadas surgiram nos últimos 30 anos, como por exemplo a derivada de Hausdorff (CHEN, 2006), a q-derivada no contexto da mecânica estatística de Tsallis (BORGES, 2004b), a derivada conforme (KHALIL et al., 2014) e recentemente a derivada conforme geral (ZHAO; LUO, 2017).

Um sistema é um todo formado por um conjunto de partes e desempenha alguma função(BERTALANFFY, 1975). Para se estudar um fenômeno, primeiro definimos o sistema onde o fenômeno acontece como, por exemplo, o sistema terra, sol e lua, para estudar os fenômenos dos eclipses solares e lunares. Em geral, quando se define um sistema, todo o resto é desconsiderado para o estudo. Isto caracteriza um sistema fechado(PRIMO, 1999). Também é comum quando se define um sistema para estudo de algum fenômeno, utilizar o segundo preceito do Descartes que consiste em dividir o problema em partes, a fim de que com a compreensão delas se obtenha conhecimento do todo(DESCARTES; DESCARTES, 1973). Porém, nem todos os sistemas podem ser descritos pela soma de suas partes individuais.

Sistemas fechados e que obedecem ao segundo preceito de Descartes são chamados sistemas simples(BORGES, 2004a). Como por exemplo, um gás ideal, que pode ser descrito pelo comportamento individual de cada molécula que o compõe.

Sistemas complexos são sistemas abertos que não podem ser descritos por suas partes em separado. Os formalismos mais avançados da mecânica clássica não conseguem descrever sistemas abertos. Porém no mundo real é impossível isolar um sistema por completo(RIEWE, 1996). O fato das propriedades de um sistema complexo não poderem ser descritas pelas propriedades das partes em separado que o compõe, se deve às interações entre as mesmas(GLERIA; MATSUSHITA; SILVA, 2004). Essas interações geram comportamentos não esperados, chamados propriedades coletivas emergentes (BORGES, 2004a).

Um exemplo irrefutável de sistema complexo foi apresentado na referência (NUSSENZVEIG, 1999), onde o autor cita o cérebro humano. O mesmo é composto por bilhões de neurônios, onde cada neurônio em separado é uma estrutura muito simples, estando ou inativo ou emitindo uma pequena corrente elétrica aos neurônios próximos. Todavia, quando se analisa o cérebro como um todo, ele exhibe propriedades que vão muito além do esperado para os neurônios individuais.

A ciência em geral tem como missão descrever e explicar fenômenos de origem física, biológica ou social(BRUGGER, 2004). Dentre as possíveis abordagens para se descrever um fenômeno, existem os modelos matemáticos. Alguns fenômenos são descritos por equações diferenciais, outros por abordagem estatística e vários desses exigem simulação computacional. Quanto mais complexo o fenômeno analisado, menos é possível descrevê-lo com o conhecimento de uma área isoladamente. Neste caso é necessário analisá-lo de forma multidisciplinar(VELHO, 2010).

Muitos resultados foram alcançados devido às interações entre física, biologia, química, medicina, geologia, dentre outras ciências. Nesse trabalho estamos interessados em modelos descritos por equações diferenciais. Mais exatamente modelos deformados, oriundos de deformações em modelos já existentes na literatura.

O termo deformações, diz respeito às derivadas deformadas ou derivadas métricas. Modelos deformados são modelos onde se utilizam derivadas deformadas. As mesmas serão descritas melhor no capítulo seguinte. O objetivo nesse momento é justificar a utilização das mesmas. Para tal é necessário discutir a geometria do mundo em que vivemos.

1.1 Geometria Euclidiana e Geometria Fractal

Até o século XIX a geometria euclidiana era tida como a que melhor descrevia o mundo em que vivemos. Até aquele momento se acreditava que objetos com irregularidades eram imperfeitos e tidos como uma exceção. Entretanto, atualmente se sabe que objetos irregulares são a regra e a perfeição euclidiana é apenas uma abstração(MANDELBROT, 1982). Imagine um objeto real visivelmente reto. Ao pegar uma pequena parte dele, e ampliar ao tamanho do original e repetir o processo um número n de vezes, a cada repetição o objeto antes reto começa a apresentar cada vez mais detalhes(irregularidades)(ASSIS et al., 2008a). Isto mostra que a geometria euclidiana (que possui dimensão inteira, tendo um ponto dimensão 0, uma reta dimensão 1, uma superfície dimensão 2 e um sólido dimensão 3) não é o bastante para descrever o mundo real(MUCHERONI, 2017). Em meados do século XIX este fato começou a se tornar visível(SILVA; SOUZA, 2010). Tal fato levou ao surgimento das geometrias não-euclidianas(BARRETO; TAVARES, 2010).

Dentre as geometrias não-euclidianas, a geometria fractal tem se mostrado eficaz na descrição de estruturas do mundo real, inclusive para fenômenos onde a geometria euclidiana falha (SILVA; SOUZA, 2010). A propriedade de apresentar cada vez mais detalhes conforme se aumenta a escala de observação, é inerente aos fractais. Esta propriedade recebe o nome de complexidade. Fractais matemáticos possuem outra propriedade chamada invariância de escala(auto-similaridade)(ASSIS et al., 2008b). Tal propriedade diz que o fractal carrega cópias dele mesmo em escalas menores em sua estrutura. Em fractais reais esta propriedade se apresenta de forma mais "fraca", mantendo características do objeto original. Porém não sua forma exata (MENDONÇA et al., 2007). Deste modo, a geometria fractal descreve objetos porosos, fissurados, granulados, dentre outros.

Fractais matemáticos podem ser gerados por métodos iterativos. Por exemplo, a poeira de cantor, que é gerada da seguinte forma:

- 1 Pegue uma reta de comprimento L ;
- 2 Divida a reta em 3 partes iguais;
- 3 Remova a reta do meio;
- 4 Repita o processo para as retas restantes.

O resultado pode ser visto na figura (1.1):

Ao contrário dos objetos euclidianos, os fractais possuem dimensão não inteira. Esta dimensão pode ser calculada pela dimensão de Hausdorff(SILVA; SOUZA, 2010):

$$D_h = \frac{\log(N)}{\log(L/U)}, \quad (1.1)$$

onde N é a quantidade de partes após cada iteração, L é o comprimento inicial do lado do objeto e U é o comprimento de cada parte após cada iteração. Deste modo, a poeira de cantor possui dimensão $D_h = \log(2)/\log(3)$.



Figura 1.1: Poeira de Cantor.

A dimensão de Hausdorff funciona perfeitamente para fractais matemáticos (invariantes de escala). Todavia, para fractais reais não funciona do mesmo modo, isto porque fractais reais não possuem auto-similaridade. Para estes fractais, a dimensão pode ser calculada pela dimensão "box-counting" (contagem de caixas) (BACKES; BRUNO, 2005). Este método calcula a dimensão de fractais, tanto matemáticos quanto reais, e é descrito da seguinte forma:

- 1 Coloque o objeto fractal em uma grade com malha de tamanho U ;
- 2 Conte o número N de caixas (cujo lado tem comprimento U) da grade que contém parte do objeto;
- 3 Repita o processo para um novo comprimento U , menor que o original. Isto fará o número de caixas aumentar, uma vez que você reduziu o lado delas;
- 4 Construa um gráfico no plano $\log(N(U)) \times \log(1/U)$. Marque os pontos $(\log(N_n), \log(1/U_n))$, $(\log(N_{n+1}), \log(1/U_{n+1}))$, ... para $N = 1, 2, 3, \dots$;
- 5 Trace uma reta passando pelos pontos do gráfico recém construído. A medida da inclinação desta reta é a dimensão box-counting.

Ou na seguinte forma:

$$D_b = \frac{\log(N_{n+1}(U)) - \log(N_n(U))}{\log(1/U_{n+1}) - \log(1/U_n)} = \frac{\log(N_{n+1}(U)/N_n(U))}{\log(U_n/U_{n+1})}. \quad (1.2)$$

Agora está definido o conceito de geometria fractal, bem como o conceito de dimensão fractal. Na próxima seção será discutido o conceito espaços métricos.

1.2 Espaços Métricos e as Derivadas Deformadas

Dado um conjunto não vazio M , pode-se definir uma métrica em M como sendo uma função $d : M \times M \rightarrow \mathfrak{R}^+$ que associa cada par ordenado $x, y \in M$ a um número real positivo $d(x, y)$, que é a distancia entre x e y . Satisfazendo as seguintes propriedades (LIMA, 1983)

- 1 $d(x, y) = 0$ se $x = y$;
- 2 $d(x, y) = d(y, x)$;

$$3 \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Um espaço métrico é um par (M, d) . Os elementos de um espaço métrico podem ser de natureza variada (MACEDO, 2015).

Neste trabalho estamos interessados em espaços métricos constituídos de vetores, como por exemplo, o espaço vetorial euclidiano n -dimensional \mathfrak{R}^n , cujos pontos são definidos pelas coordenadas $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ e $y = y_1, y_2, \dots, y_n$ vetores no \mathfrak{R}^n . Este espaço é definido pela métrica euclidiana:

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}. \quad (1.3)$$

A distancia a qualquer dois pontos x e y é dada pela equação 1.3.

Agora pode-se relacionar a métrica (1.3) a definição da derivada usual, dada por:

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (1.4)$$

Com $x = x_0 + \Delta x$. Δx se relaciona com a métrica euclidiana da seguinte forma:

$$\Delta x = \begin{cases} |x - x_0| & \text{se } x \geq x_0, \\ -|x - x_0| & \text{se } x < x_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Se o limite (1.4) existir, a função $f(x)$ é diferenciável no ponto x_0 . Quando isso ocorre pode-se dizer que $f(x) - f(x_0)$ é proporcional a $x - x_0$. Em muitos casos, esta relação não ocorre com objetos fractais, uma vez que os mesmos possuem uma quantidade infinita de detalhes (complexidade). Com isso apresentam muitas vezes: descontinuidades, pontos de bico e pontos de tangente vertical, tornando-os não diferenciáveis no sentido clássico (LIMA, 2010). Por isso, se faz necessário definir uma variação $\Delta^H x$ com uma métrica diferente.

$$\Delta^H x = \begin{cases} d(x - x_0) & \text{se } x \geq x_0, \\ -d(x - x_0) & \text{se } x < x_0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Agora pode-se definir uma derivada deformada ou métrica:

$$D^H f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta^H x}. \quad (1.7)$$

Se o limite (1.7) existir dizemos que $f(x)$ é H-diferenciável no ponto x_0 .

1.3 Mapeamento no Fractal Contínuo

Na referência (BALANKIN; ELIZARRARAZ, 2012) é feito um mapeamento de um fluxo em um meio poroso fractal. O processo consistiu em projetar as características do fractal em um espaço euclidiano de encaixe. O mesmo foi feito através do método de contagem de caixas. Gerando um espaço euclidiano porém mantendo a métrica fractal. Como pode ser visto na figura (1.2):

Dentre todas as características de um fractal, as quatro a seguir se fazem suficientes para caracterizar as propriedades de escala e a invariância de escala nos fractais (BALANKIN, 2015):

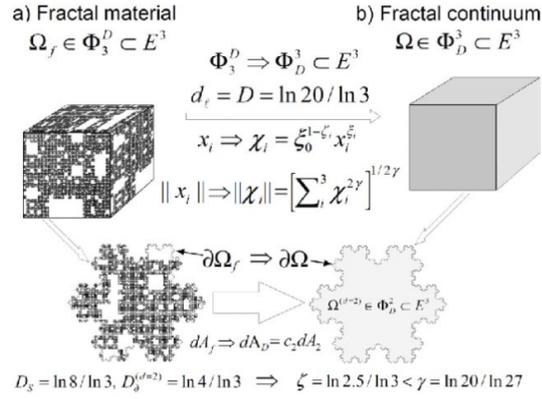


Figura 1.2: Mapeamento no contínuo fractal (A figura retirada de (BALANKIN, 2015))

1 Dimensão topológica d :

Esta dimensão caracteriza a topologia e a conectividade do fractal.

2 Dimensão métrica intrínseca do fractal d_f :

Também conhecida como dimensão química ou de espalhamento. Esta é a dimensão que quantifica a forma como as unidades elementares do fractal são "coladas" de modo a formar o fractal inteiro. Também determina o número de direções independentes, simultaneamente ortogonais no fractal. Um análogo a dimensão topológica euclidiana.

3 Dimensão fractal D :

Esta dimensão caracteriza a medida fractal, ou seja, a distribuição de massa do objeto no espaço (box-counting ou Hausdorff).

4 Dimensão fractal da intercessão entre o domínio fractal e o plano cartesiano D_s

Esta dimensão define a rugosidade dos poros e/ou as fraturas nas superfícies.

Através das dimensões acima podem ser definidos as características do fractal, como a co-dimensão $\xi = D - D_s$, que controla a métrica do espaço fractal (BALANKIN, 2015). Uma vez que a métrica fractal $d(x, x_0)$ é dependente de ξ , a variação $\Delta^H x$ também é dependente do mesmo. Ou seja, $\Delta^H x$ é uma função que depende da variável x e de um parâmetro fractal ξ . Para fractais completamente desconectados, a dimensão D_s é igual a dimensão D , de modo que o parâmetro ξ é nulo. Isto implica em dizer que todos os pontos do fractal interceptam o espaço euclidiano de encaixe. O outro caso extremo é quando o objeto não possui rugosidade, poros ou fissuras. Quando isto ocorre, a dimensão de massa D é inteira e igual a dimensão euclidiana do espaço de encaixe e a dimensão D_s é nula. Levando ao fato $\xi = D - n$, onde n é a dimensão euclidiana.

Na referência (BALANKIN; ELIZARRARAZ, 2012) é mostrado que uma variação $\Delta^H x$ relacionada a uma métrica definida através de um mapeamento no fractal contínuo, pode levar à derivada de Hausdorff definida na referência (CHEN, 2006).

Nesta dissertação, todo o estudo será feito a partir do conceito da derivada conforme geral definida em (ZHAO; LUO, 2017). É proposto que sua abrangência vai além de uma generalização da derivada conforme. Por este motivo, nesta dissertação, foi nomeada derivada deformada generalizada. A partir da derivada deformada generalizada, aqui será proposto o operador derivada deformada dual generalizada.

Dentre os casos particulares da derivada deformada generalizada, neste trabalho escolhemos a derivada conforme e a q -derivada.

A derivada conforme proposta por Khalil (KHALIL et al., 2014), foi apresentada como uma extensão natural da derivada usual e uma alternativa ao uso do cálculo fracionário. A derivada conforme é uma derivada deformada, ou seja, um operador local que satisfaz todas as propriedades básicas da derivada usual. A utilização da derivada conforme se justifica pelo mapeamento no fractal contínuo, feito na referência (BALANKIN; ELIZARRARAZ, 2012), uma vez que a mesma tem conexão com a derivada de Hausdorff.

A q -derivada emerge da mecânica estatística não extensiva de Tsallis. Sendo que o operador deformado possui a q -exponencial elevada a um parâmetro λ , como auto-função (BORGES, 2004b). A mesma é uma derivada deformada que também é conectada com a derivada de Hausdorff. Deste modo, a utilização da q -derivada é justificada, tanto pelo mapeamento no fractal contínuo quanto pela conexão com a estatística não extensiva.

A seguir serão descritos os próximos capítulos. Todos os procedimentos nos capítulos a seguir serão feitos com a abordagem deformada generalizadas e a partir dela, nas abordagens deformadas citadas acima.

1.4 Sobre os Próximos Capítulos

O capítulo 2 tem como objetivo apresentar as derivadas deformadas, integrais deformadas e também algumas funções deformadas. Também serão apresentadas as formas deformadas duais. No Capítulo 3 são apresentadas e discutidas abordagens variacionais deformadas e deformadas duais. Para as abordagens não duais, são deduzidas equações de Euler-Lagrange a partir das três opções de abordagem variacional, descritas na referência (WEBERSZPIL; HELAYËL-NETO, 2016). Dentre as abordagens duais, obtivemos as equações de Euler Lagrange, através da opção 3 da abordagem variacional da referência citada. O capítulo 4 é destinado a apresentação e discussão de modelos deformados e deformados duais. As aplicações escolhidas foram:

- 1 Segunda Lei de Newton;
- 2 Oscilador Harmônico Simples;
- 3 Fator de Sobrevivência de Célula Cancerígena Sujeita a Radiação;
- 4 Reologia de Fluidos.

As primeiras duas aplicações acima, são fenômenos físicos que possuem uma função lagrangiana conhecida. Por este motivo, os modelos deformados e deformados duais para estes fenômenos, serão definidos a partir das abordagens variacionais, definidas no capítulo 3. Esse procedimento gera uma gama de modelos que serão discutidos um a um, conforme os mesmos forem apresentados.

Na sequência de aplicações, 3 e 4, os fenômenos estão fora do escopo da mecânica clássica e foram escolhidas com a finalidade de mostrar o caráter multidisciplinar das derivadas deformadas. Os modelos deformados gerados serão definidos a partir da substituição da derivada usual por operadores deformados e deformados duais.

E por fim, no capítulo 5, são apresentadas as conclusões e perspectivas para trabalhos futuros.

Após as referências serão apresentados apêndices. Os mesmos foram retirados do texto principal com o objetivo de aliviar o leitor de procedimentos repetitivos e resultados

semelhantes. O apêndice A é uma revisão do método variacional usual. No apêndice B, está uma cinemática deformada através da terceira opção de abordagem variacional apresentada na referência ([WEBERSZPIL; HELAYËL-NETO, 2016](#)). No apêndice C, tem-se uma segunda lei de Newton deformada através de operadores deformados duais. O apêndice D apresenta uma cinemática deformada com operadores duais. No apêndice E, é apresentado o método numérico que foi utilizado para a obtenção de soluções de algumas equações diferenciais desta dissertação. No apêndice F, estão as rotinas numéricas utilizadas neste trabalho.

2 CÁLCULO DEFORMADO

Embora sistemas reais possuam dissipação desde o nível macroscópico até o nível microscópico, a mecânica clássica não consegue lidar de forma satisfatória com sistemas não conservativos (WEBERSZPIL; LAZO; HELAYËL-NETO, 2015). A saída adotada é utilizar variáveis específicas para dissipação, de modo a tratar o sistema como isolado. Porém, é impossível isolar um sistema por completo. Os operadores usuais de derivada são definidos em uma topologia euclidiana. No entanto, a geometria euclidiana não é a satisfatória para descrever as formas do mundo real. A geometria fractal proposta por Mandelbrot descreve o mundo real de forma mais precisa. O que leva aos operadores de derivadas fracionárias. Os mesmos são definidos em uma topologia fractal com métrica euclidiana (BALANKIN et al., 2013). Porém, estes operadores são não locais e definidos por integro diferenciação e, por este motivo, possuem problemas operacionais que os tornam difíceis trabalhar.

Com o objetivo de descrever o funcionamento de sistemas complexos, sem os problemas operacionais inerentes da derivada fracionária, uma opção que se apresenta é o uso de derivadas deformadas. Operadores locais, definidos em uma topologia euclidiana, com métrica fractal (BALANKIN et al., 2013). Através do mapeamento proposto na referência (BALANKIN; ELIZARRARAZ, 2012), os autores obtiveram uma derivada deformada relacionada com o fluxo de um fluido em meio fractal, a hoje chamada derivada de Hausdorff. Existem ainda outras definições de derivadas deformadas como, por exemplo, a q -derivada (BORGES, 2004b) e a derivada conforme (KHALIL et al., 2014). Derivadas deformadas, em sua forma não dual, se apresentam como um pré-fator dependente da variável independente e de um parâmetro. Além disso, as mesmas satisfazem todas as propriedades básicas de derivada. Na referência (WEBERSZPIL; LAZO; HELAYËL-NETO, 2015), os autores mostraram que tanto a q -derivada quanto a derivada conforme, possuem uma conexão com a derivada de Hausdorff. A mesma pode ser obtida através do mapeamento no contínuo fractal proposto por Balankin, na referência (BALANKIN; ELIZARRARAZ, 2012). A conexão entre a derivada de Hausdorff e as derivadas deformadas mostra que pode-se utilizá-las para estudos de problemas em meios com métrica fractal.

2.1 Derivada Deformada Generalizada

Recentemente, surgiu uma definição de derivada deformada que generaliza os operadores deformados. Na referência (ZHAO; LUO, 2017), esta recebe o nome de derivada estendida linear de Gâteaux ou derivada conforme geral. Neste trabalho, ela será tratada por derivada deformada generalizada, e pode ser definida como:

$$D_{\Psi}^p f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \epsilon \Psi(x, p)) - f(x)}{\epsilon}. \quad (2.1)$$

Aqui, $\Psi(x, p)$ é uma função que depende de x e do parâmetro de deformação p . Aplicando a substituição $\epsilon' = \epsilon \Psi(x, p)$, obtêm-se:

$$D_{\Psi}^p f(x) = \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \Psi(x, p) \frac{f(x + \epsilon') - f(x)}{\epsilon'} = \Psi(x, p) \frac{df(x)}{dx}. \quad (2.2)$$

Todas as derivadas deformadas se apresentam nesta forma. Agora, será mostrado

que o operador D_{Ψ}^p satisfaz todas as regras básicas de derivada, independente de qual seja a função $\Psi(x, p)$:

1-Linearidade:

$$D_{\Psi}^p(Cf(x) \pm Dg(x)) = \Psi(x, p) \left(\frac{d}{dx}(Cf(x) \pm Dg(x)) \right). \quad (2.3)$$

Na equação (2.3), se for aplicada a regra da soma da derivada usual, obtêm-se:

$$D_{\Psi}^p(Cf(x) \pm Dg(x)) = \Psi(x, p) \left(C \frac{d}{dx}f(x) \pm D \frac{d}{dx}g(x) \right). \quad (2.4)$$

Na equação (2.4), se for aplicada a propriedade distributiva, obtêm-se:

$$D_{\Psi}^p(Cf(x) \pm Dg(x)) = C\Psi(x, p) \frac{d}{dx}f(x) \pm D\Psi(x, p) \frac{d}{dx}g(x) = CD_{\Psi}^p f(x) \pm DD_{\Psi}^p g(x). \quad (2.5)$$

2- Regra do produto:

$$D_{\Psi}^p(f(x)g(x)) = \Psi(x, p) \frac{d}{dx}(f(x)g(x)). \quad (2.6)$$

Na equação (2.6), se for Aplicada a regra do produto da derivada usual, obtêm-se:

$$D_{\Psi}^p(f(x)g(x)) = \Psi(x, p) \left(g(x) \frac{d}{dx}f(x) + f(x) \frac{d}{dx}g(x) \right). \quad (2.7)$$

Na equação (2.7), se for aplicada a propriedade distributiva, obtêm-se:

$$D_{\Psi}^p(f(x)g(x)) = g(x)\Psi(x, p) \frac{d}{dx}f(x) + f(x)\Psi(x, p) \frac{d}{dx}g(x) = g(x)D_{\Psi}^p f(x) + f(x)D_{\Psi}^p g(x). \quad (2.8)$$

3- Regra do quociente:

$$D_{\Psi}^p \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \Psi(x, p) \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right). \quad (2.9)$$

Na equação (2.9), se for aplicada a regra do quociente da derivada usual, obtêm-se:

$$D_{\Psi}^p \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \Psi(x, p) \left(\frac{g(x) \frac{df(x)}{dx} - f(x) \frac{dg(x)}{dx}}{g^2(x)} \right). \quad (2.10)$$

Na equação (2.10), se for aplicada a propriedade distributiva, obtêm-se:

$$D_{\Psi}^p \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x)\Psi(x, p) \frac{df(x)}{dx} - f(x)\Psi(x, p) \frac{df(x)}{dx}}{g^2(x)} = \frac{g(x)D_{\Psi}^p f(x) - f(x)D_{\Psi}^p g(x)}{g^2(x)}. \quad (2.11)$$

4- Regra da cadeia:

$$D_{\Psi}^p(f(g(x))) = \Psi(x, p) \frac{d}{dx}(f(g(x))). \quad (2.12)$$

Na equação (2.12), se for aplicada a regra da cadeia da derivada usual, obtêm-se:

$$D_{\Psi}^p(f(g(x))) = \Psi(x, p) \frac{df(g(x))}{dg(x)} \frac{d(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg(x)} D_{\Psi}^p g(x). \quad (2.13)$$

Deste modo, a derivada deformada generalizada satisfaz todas as propriedades de derivada. Estes resultados podem se vistos também na referência (ZHAO; LUO, 2017)

Obviamente não é para qualquer função $\Psi(x, p)$ que o operador D_{Ψ}^p é derivada deformada. Existem algumas condições a serem observadas:

- 1- Quando $p = 1$, a função $\Psi(x, p)$ é igual a 1 e o operador D_{Ψ}^p degenera para o operador derivada usual.
- 2- Deve existir uma interpretação física ou geométrica para o operador D_{Ψ}^p .
- 3- Neste trabalho é acrescentada a condição de uma conexão entre o operador D_{Ψ}^p e a derivada de Hausdorff. Esta condição tem como finalidade garantir que este operador seja apto a lidar com problemas em meios com métrica fractal.

A interpretação física para o operador D_{Ψ}^p , atuando sobre uma função $f(x)$, é uma taxa de variação deformada da função $f(x)$. Quando a função $f(x)$ for a posição de um sistema físico, esta taxa de variação deformada é entendida como uma modificação da velocidade, tanto em direção quanto em modulo. Isto pode ser visto claramente quando é analisado um problema bidimensional, com deformação em apenas uma das dimensões ou ainda com diferentes deformações em cada direção.

A interpretação geométrica é um produto interno entre $\Psi(x, p)$ e o operador derivada usual $\frac{d}{dx}$, ou seja, a projeção da derivada usual sobre $\Psi(x, p)$.

Deste modo, a derivada deformada generalizada é a generalização de todos os operadores deformados; cada operador deformado difere dos demais apenas pelo pré-fator $\Psi(x, p)$ correspondente.

• Derivada Conforme

Nesta abordagem, o parâmetro de deformação p é identificado como um parâmetro de deformação α , possivelmente ligado à fractalidade. Quando $\Psi(x, \alpha) = x^{1-\alpha}$ o operador D_{Ψ}^p é a derivada conforme D_{α} :

$$D_{\alpha} = x^{1-\alpha} \frac{d}{dx}. \quad (2.14)$$

Este resultado pode ser encontrado na referência (KHALIL et al., 2014).

• q-derivada

Nesta abordagem, o parâmetro de deformação p é identificado como índice entropico q . Quando $\Psi(x, q) = 1 + (1 - q)x$, o operador D_{Ψ}^p é a q-derivada (no contexto da mecânica estatística de Tsallis) D_q :

$$D_q = (1 + (1 - q)x) \frac{d}{dx}. \quad (2.15)$$

Como pode ser visto na referência (BORGES, 2004b). Na próxima seção será mostrada a integral deformada generalizada.

2.1.1 Integral Deformada Generalizada

Através do conceito de derivada deformada generalizada, pode-se obter uma integral deformada generalizada. I_{Ψ}^P .

$$\Psi(x, p) \frac{d}{dx} (I_{\Psi(x, p)}^P) = f(x).. \quad (2.16)$$

Separando as variáveis:

$$d(I_{\Psi(x, p)}^P) = f(x)\Psi^{-1}(x, p)dx.. \quad (2.17)$$

Aplicando a integral usual em ambos os lados:

$$I_{\Psi(x, p)}^P = \int f(x)\Psi^{-1}(x, p)dx = \int f(x)d_px., \quad (2.18)$$

onde $d_px = \Psi^{-1}(x, p)dx$.

Válido para todo p , onde $\Psi(x, p) \neq 0$ e para todo $f(x)$. Como pode ser visto em (ZHAO; LUO, 2017).

A integral conforme e a q-integral podem ser obtidas a partir da equação (2.18).

- **Integral Conforme:**

Na abordagem conforme, a equação (2.18) é a integral conforme $I_{\alpha}[f(x)]$:

$$I_{\alpha}[f(x)] = \int f(x)x^{\alpha-1}dx = \int f(x)d_{\alpha}(x), \quad (2.19)$$

onde $d_{\alpha}(x) = x^{\alpha-1}dx$. Como pode ser visto na referência (KHALIL et al., 2014).

- **q-integral:**

Na abordagem q-deformada, a equação (2.18) é a q-integral $I_q[f(x)]$:

$$I_q[f(x)] = \int f(x) \frac{1}{(1 + (1 - q)x)} dx = \int f(x)d_q(x), \quad (2.20)$$

onde $d_q(x) = \frac{dx}{(1 + (1 - q)x)}$. Este resultado foi obtido em (BORGES, 2004b).

No próxima seção serão discutidas equações de autovalores deformadas e funções relacionadas às autofunções de cada abordagem.

2.1.2 Equações de Autovalores Deformadas

Equações de autovalores são importantes para a descrição de muitos fenômenos. Tendo aplicações desde a física até fenômenos biológicos, como crescimento populacional. A seguir, vamos deduzir as equações de autovalores e as respectivas autofunções associadas a cada abordagem deformada, aqui considerada. Iniciando pelo caso generalizado, têm-se:

$$\Psi(x, p) \frac{df(x)}{dx} = \lambda f(x), \quad (2.21)$$

sob à condição inicial $f(0) = f_0$.

A equação (2.21), pode ser resolvida por separação de variáveis. Deste modo:

$$\frac{df(x)}{f(x)} = \lambda(\Psi(x, p))^{-1}dx. \quad (2.22)$$

Calculando a integral e considerando a condição inicial, obtêm-se:

$$\ln(f(x))\Big|_{f_0}^{f(x)} = \ln(f(x)) - \ln(f_0) = \lambda \int_0^x (\Psi(x, p))^{-1}dx. \quad (2.23)$$

Na equação (2.23), através da propriedade de subtração de logaritmos obtêm-se:

$$\ln\left(\frac{f(x)}{f_0}\right) = \lambda \int_0^x (\Psi(x, p))^{-1}dx, \quad (2.24)$$

que pode ser reescrita como:

$$f(x) = f_0 \exp\left(\lambda \int_0^x (\Psi(x, p))^{-1}dx\right). \quad (2.25)$$

A equação (2.25) é autofunção para equações de autovalores generalizadas. Quando $f_0 = 1$ e $\lambda = 1$ obtêm-se:

$$f(x) = \exp\left(\int_0^x (\Psi(x, p))^{-1}dx\right). \quad (2.26)$$

Que é uma função exponencial dependente da integral da função $\Psi^{-1}(x, p)$. Esta função generaliza o conceito de função exponencial associada a operadores deformados e aqui será chamada "exponencial deformada generalizada", e_p^x . Agora esses resultados serão analisados nas abordagens conforme e q-deformada.

- **Autofunção Conforme:**

Na abordagem conforme a equação (2.25) é escrita:

$$f(x) = f_0 \exp\left(\lambda \int_0^x (\Psi(x, \alpha))^{-1}dx\right) = f_0 \exp\left(\lambda \int_0^x x^{\alpha-1}dx\right). \quad (2.27)$$

Na equação (2.27), Resolvendo a integral nos limites de integração considerados, obtêm-se:

$$f(x) = f_0 \exp\left(\lambda \frac{x^\alpha}{\alpha}\right). \quad (2.28)$$

A equação (2.28) é autofunção para equações de autovalores conforme. Quando $f_0 = 1$ e $\lambda = 1$, obtêm-se:

$$f(x) = \exp\left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right), \quad (2.29)$$

que é uma exponencial esticada e_α^x , como pode ser visto na referência (ELTON, 2018). A equação (2.29) é exatamente a exponencial usual quando $\alpha = 1$.

No gráfico da figura (2.1), pode-se analisar o comportamento das curvas da exponenciais esticadas e_α^x , para valores distintos de α . Todas são curvas exponenciais, variando apenas em sua curvatura.

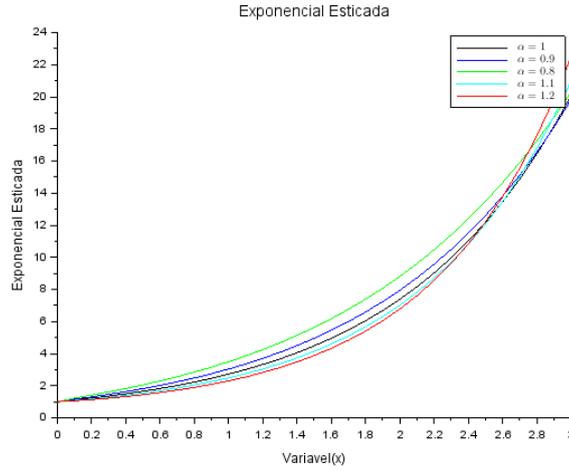


Figura 2.1: Exponencial Esticada.

- **Autofunção q-deformada:**

Na abordagem q-deformada a equação (2.25) é:

$$f(x) = f_0 \exp \left(\lambda \int_0^x (\Psi(x, q))^{-1} dx \right) = f_0 \exp \left(\lambda \int_0^x \frac{1}{(1 + (1 - q)x)} dx \right). \quad (2.30)$$

Na equação (2.30), a integral pode ser resolvida por substituição simples. Definindo a variável de mudança, $u = (1 + (1 - q)x)$, obtêm-se que $du = (1 - q)dx$. Deste modo:

$$f(x) = f_0 \exp \left(\lambda \int_1^u \frac{1}{u(1 - q)} du \right) = f_0 \exp \left(\lambda \frac{\ln(u)}{(1 - q)} \right). \quad (2.31)$$

Na equação (2.31), explicitando u , obtêm-se:

$$f(x) = f_0 \exp \left(\lambda \frac{\ln(1 + (1 - q)x)}{(1 - q)} \right) = f_0 \exp \left(\ln(1 + (1 - q)x)^{\lambda/(1 - q)} \right). \quad (2.32)$$

Ou ainda:

$$f(x) = f_0 (1 + (1 - q)x)^{\lambda/(1 - q)}. \quad (2.33)$$

A equação (2.33) é autofunção para equações de autovalores q-deformadas. Quando $f_0 = 1$ e $\lambda = 1$ obtêm-se:

$$f(x) = (1 + (1 - q)x)^{1/(1 - q)}. \quad (2.34)$$

Que é uma q-exponencial, e_q^x . Podendo ser vista também na referência (BORGES, 2004b). A equação (2.34) não está definida em $q = 1$. Porém, pode-se mostrar que a mesma converge no limite $q \rightarrow 1$ para uma exponencial usual. Deste modo:

$$\lim_{q \rightarrow 1} e_q^x = \lim_{q \rightarrow 1} (1 + (1 - q)x)^{1/(1-q)}. \quad (2.35)$$

Na equação (2.35), aplicando a substituição $(1 - q)x = 1/n$ obtêm-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{xn} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^x. \quad (2.36)$$

Observe que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad (2.37)$$

A equação (2.37), é o conhecido limite que dá origem a exponencial. Logo:

$$\lim_{q \rightarrow 1} (1 + (1 - q)x)^{1/(1-q)} = e^x. \quad (2.38)$$

A figura (2.2) apresenta o gráfico de uma q-exponencial, para diversos valores de q , em comparação com a exponencial usual. Na figura é possível ver que para as curvas q-exponenciais quando $q < 1$, a curva resultante se afasta da curva da exponencial usual, crescendo mais devagar no tempo. Para valores $q > 1$, a q-exponencial cresce mais rápido no tempo, quando comparada à exponencial usual.

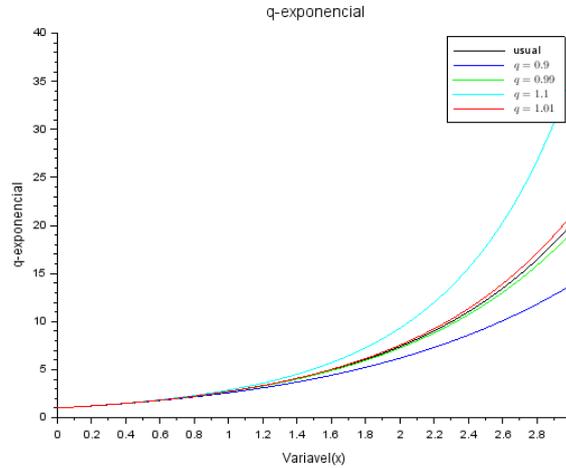


Figura 2.2: q-exponencial.

Vejam agora como fica a função inversa da exponencial deformada generalizada e_p^x , dada pela equação (2.26). Em face da definição geral de operação inversa, podemos escrever:

$$f(g(x)) = \exp \left(\int_0^{g(x)} (\Psi(x, p))^{-1} dx \right) = e_p^{g(x)} = x. \quad (2.39)$$

Este resultado é uma generalização de funções logarítmicas, associadas às derivadas deformadas, que aqui será tratada como "logaritmo natural generalizado" $\ln_p(x)$. Investiguemos agora como fica a função inversa em cada abordagem, ou seja, na conforme e na q-deformada.

- **Logaritmo Natural Conforme:**

Na abordagem conforme a equação (2.39) é:

$$\exp\left(\frac{(g(x))^\alpha}{\alpha}\right) = x. \quad (2.40)$$

Da equação (2.40), resulta que $g(x)$ será dado por:

$$g(x) = (\alpha \ln(x))^{1/\alpha}. \quad (2.41)$$

Nomearemos a equação (2.41) como o logaritmo natural conforme, $\ln_\alpha(x)$. O logaritmo natural usual é recuperado quando $\alpha = 1$.

No gráfico abaixo está esboçado o comportamento da função $\ln_\alpha(x)$, para diversos valores de α :

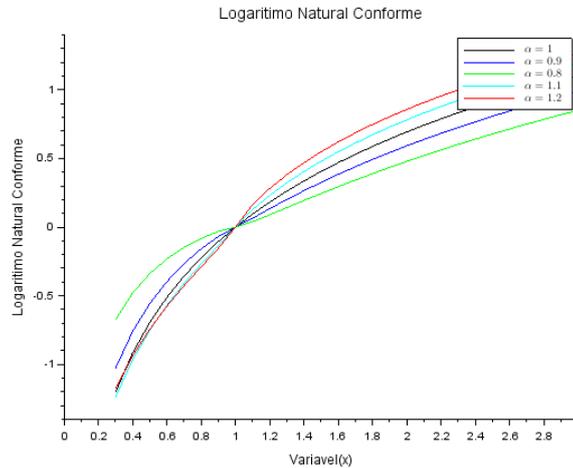


Figura 2.3: Logaritmo Natutal Conforme.

No gráfico da figura (2.3), pode-se analisar o comportamento das curvas do logaritmo natural conforme, \ln_α , para valores distintos de α . Ambas são curvas estritamente crescentes e iguais a zero, em $x = 1$.

- **q-logaritmo:**

Na abordagem q-deformada, a equação (2.39) é dada por:

$$(1 + (1 - q)g(x))^{(1/(1-q))} = x. \quad (2.42)$$

Isolando $g(x)$ na equação (2.42), obtêm-se:

$$g(x) = \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}, \quad (2.43)$$

que é o q-logaritmo $\ln_q(x)$ da referência (BORGES, 2004b). Mesmo a equação (2.43) não estando definida para $q = 1$, será mostrado a seguir que ela converge no limite

$q \rightarrow 1$, para o logaritmo natural usual.

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}. \quad (2.44)$$

Na equação (2.44), aplicando a substituição $1 - q = a$, obtemos:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{x^a - 1}{a} = \ln(x). \quad (2.45)$$

Na figura (2.4), o gráfico de um q-logaritmo natural é apresentado e comparado com a curva de um logaritmo natural usual:

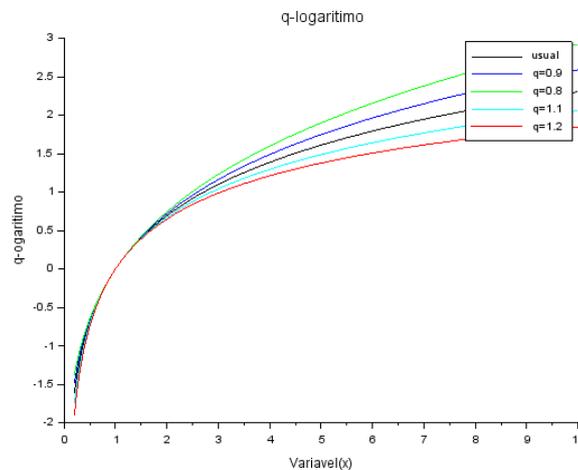


Figura 2.4: q-logaritmo.

O logaritmo natural usual é apresentado na curva em preto. As curvas acima dele são para $q < 1$ e as abaixo para $q > 1$. Para valores de $t < 1$ as curvas deformadas se aproximam de curva usual, conforme o tempo se aproxima de 1. Na sequência de t , as curvas deformadas começam a se afastar da curva usual.

A seguir serão apresentadas as funções trigonométricas deformadas gerais.

2.1.2.1 Funções Trigonométricas Deformadas Generalizadas

Nesta etapa, através da equação (2.26) e, utilizando a fórmula de Euler usual, com expoente imaginário, i , podemos escrever:

$$(e_p^x)^i = \exp\left(i \int_0^x (\Psi(x, p))^{-1} dx\right) = \cos\left(\int (\Psi(x, p))^{-1} dx\right) + i \sin\left(\int (\Psi(x, p))^{-1} dx\right). \quad (2.46)$$

Baseado nas equação complexa, dada pela equação (2.46), definir uma fórmula de Euler deformada:

$$(e_p^{(x)})^i = \cos_p(x) + i \sin_p(x). \quad (2.47)$$

Na equação (2.47), nomeamos $\cos_p(x)$ e $\sin_p(x)$, respectivamente como "cosseno deformado generalizado" e "seno deformado generalizado".

Igualando (2.46) e (2.47) obtêm-se:

$$\cos_p(x) = \cos \left(\int_0^x (\Psi(x, p))^{-1} dx \right), \quad (2.48)$$

$$\sin_p(x) = \sin \left(\int_0^x (\Psi(x, p))^{-1} dx \right). \quad (2.49)$$

As equações (2.48) e (2.49) são as formas explícitas dos cosseno e seno deformados generalizados.

Na sequência, serão apresentadas as equações (2.48) e (2.49), nas abordagens conforme e q-deformada:

- **Cosseno e Seno Conforme:**

Considerando a equação (2.48) na abordagem conforme têm-se o cosseno conforme, $\cos_\alpha(x)$:

$$\cos_\alpha(x) = \cos \left(\int_0^x x^{\alpha-1} dx \right) = \cos \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right). \quad (2.50)$$

Analogamente, a equação (2.49) na abordagem conforme é o seno conforme, $\sin_\alpha(x)$:

$$\sin_\alpha(x) = \sin \left(\int_0^x x^{\alpha-1} dx \right) = \sin \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right). \quad (2.51)$$

Estas funções foram apresentadas na referência (KHALIL et al., 2014), como as funções que satisfazem as propriedades de derivada de senos e cossenos para a derivada conforme. Porém sem a utilização dos termos seno e cosseno conforme, como é nomeado nesta dissertação.

Tanto o seno quanto o cosseno conformes são exatamente os senos e cossenos usuais para $\alpha = 1$. Além disso, as propriedades de derivadas de senos e cossenos se mantêm para as derivadas conformes. O que será visto na sequência.

Aplicando a derivada conforme ao seno conforme, vem que:

$$D_\alpha \sin_\alpha(x) = x^{1-\alpha} \frac{d}{dx} \sin \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right). \quad (2.52)$$

Calculando a derivada usual, resulta em:

$$D_\alpha \sin_\alpha(x) = x^{1-\alpha} x^{\alpha-1} \cos \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right) = \cos \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right) = \cos_\alpha(x). \quad (2.53)$$

Procedendo analogamente ao caso acima e aplicando a derivada conforme ao cosseno conforme, obtêm-se que:

$$D_\alpha \cos_\alpha(x) = x^{1-\alpha} \frac{d}{dx} \cos \left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right). \quad (2.54)$$

Calculando a derivada usual:

$$D_\alpha \cos_\alpha(x) = -x^{1-\alpha} x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) = -\sin\left(\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) = -\sin_\alpha(x). \quad (2.55)$$

Na figura 2.5, está esboçado o comportamento da função cosseno conforme, $\cos_\alpha(x)$, para diversos valores de α . Pode ser visto que o comportamento das curvas dos cossenos conformes é semelhante a curva de um cosseno usual, porém com variação em seu período de oscilação. Quando $\alpha < 1$, as oscilações demoram cada vez mais tempo para ocorrer. Quando $\alpha > 1$ elas demoram cada vez menos tempo.

Na figura (2.6), está esboçado o comportamento da função seno conforme, $\sin_\alpha(x)$, para diversos valores de α . Pode-se observar que o comportamento das curvas dos senos conformes é similar ao das curvas cosseno conforme, com uma defasagem angular, para qualquer que seja o α .

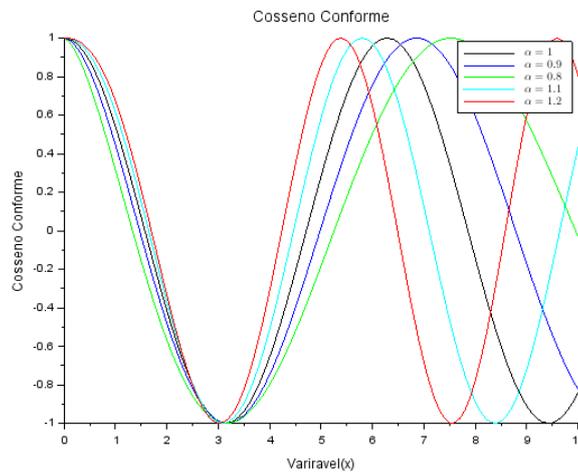


Figura 2.5: Cosseno Conforme.

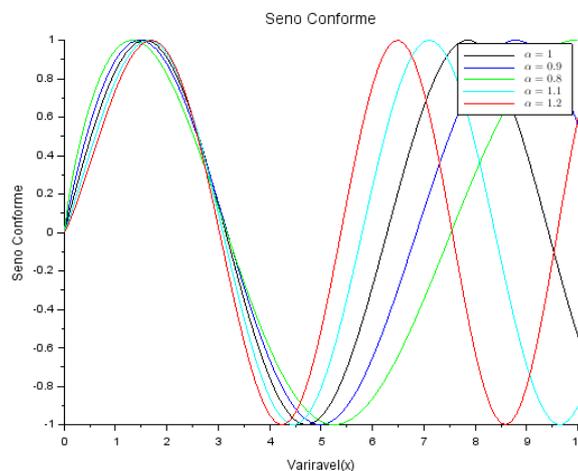


Figura 2.6: Seno Conforme.

• **q-seno e q-cosseno:**

Na abordagem q-deformada, as equações (2.48) e (2.49), se tornam o q-cosseno $\cos_q(x)$:

$$\cos_q(x) = \cos \left(\int \frac{1}{(1 + (1 - q)x)} dx \right) = \cos \left(\ln \frac{(1 + (1 - q)x)}{1 - q} \right) \quad (2.56)$$

e, o q-seno $\sin_q(x)$, respectivamente.

$$\sin_q(x) = \sin \left(\int \frac{1}{(1 + (1 - q)x)} dx \right) = \sin \left(\ln \frac{(1 + (1 - q)x)}{1 - q} \right). \quad (2.57)$$

Esta definição para o q-cosseno e o q-seno coincide com uma das apresentadas na tese (COSTA, 2015), onde o autor apresentou, além dessa, outras definições de senos e cossenos q-deformados. Os q-cossenos e q-senos, aqui definidos, satisfazem a propriedade de derivadas de senos e cossenos para o operador q-derivada, como será mostrado em seguida.

Aplicando a q-derivada à função $\sin_q(x)$:

$$D_q \sin_q(x) = (1 + (1 - q)x) \frac{d}{dx} \sin \left(\ln \frac{(1 + (1 - q)x)}{1 - q} \right). \quad (2.58)$$

Na equação (2.58), aplicando a derivada usual:

$$D_q \sin_q(x) = \frac{1 + (1 - q)x}{(1 - q)} \frac{(1 - q)}{(1 + (1 - q)x)} \cos \left(\ln \frac{(1 + (1 - q)x)}{1 - q} \right). \quad (2.59)$$

Assim, procedendo com simples operações de simplificação, obtêm-se que:

$$D_q \sin_q(x) = \cos \left(\ln \frac{(1 + (1 - q)x)}{1 - q} \right) = \cos_q(x). \quad (2.60)$$

De maneira análoga ao caso anterior, aplicaremos a q-derivada ao $\cos_q(x)$:

$$D_q \cos_q(x) = (1 + (1 - q)x) \frac{d}{dx} \cos \left(\ln \frac{(1 + (1 - q)x)}{1 - q} \right). \quad (2.61)$$

E o resultado é:

$$D_q \cos_q(x) = -\sin \left(\ln \frac{(1 + (1 - q)x)}{1 - q} \right) = -\sin_q(x). \quad (2.62)$$

Este resultado coincide com o apresentado na referência (COSTA, 2015).

No gráfico da figura (2.7) esboçada a função $\cos_q(x)$, para diversos valores de q . É possível observar no fenômeno oscilatório da função q-cosseno, o aumento do período de oscilação, quando $q < 1$. Também pode-se perceber a redução do período de oscilação, quando $q > 1$. Este resultado é similar ao que ocorre com o cosseno conforme.

A figura (2.8) apresenta o gráfico de uma função $\sin_q(x)$, para diversos valores de q . Como esperado da relação de senos e cossenos, o mesmo fenômeno que ocorre no gráfico da figura (2.7) ocorre na figura (2.8). As curvas diferem apenas por uma defasagem angular.

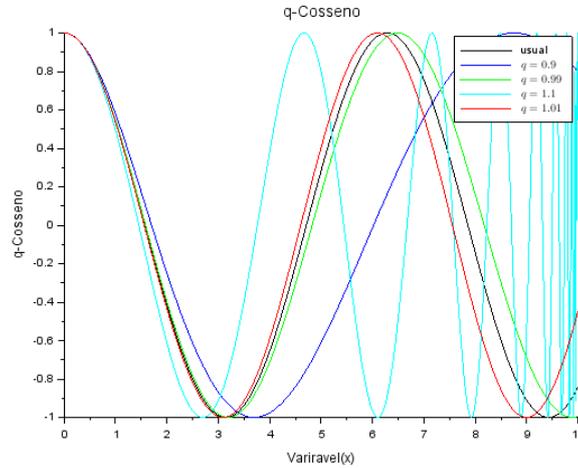


Figura 2.7: q-cosseno .

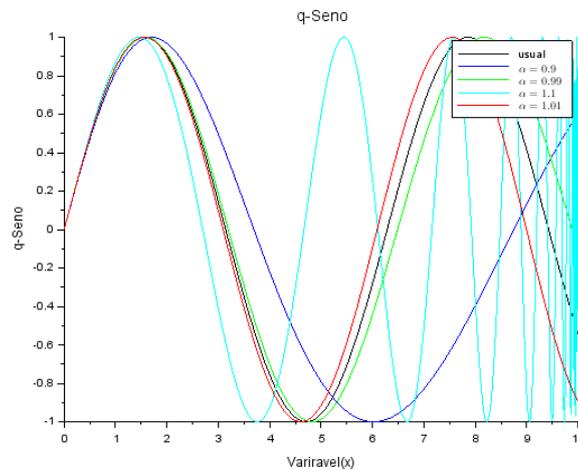


Figura 2.8: q-seno .

Nesta seção foram apresentados os operadores derivadas deformadas, bem como funções especiais a eles associadas, tais como as funções trigonométrica e logarítmicas deformadas. Na próxima seção serão apresentados os operadores duais, relacionados com as derivadas deformadas. Começando com o operador derivada dual, relacionado com a derivada deformada generalizada . Em seguida, serão estudados os operadores duais específicos, relacionados ao operador derivada conforme e ao operador q -derivada.

2.2 Derivada Deformada Dual Generalizada

Até o presente instante, as deformações do operador de derivada foram feitas no espaço das variáveis independentes. Nesta seção, o operador de derivada será deformado

no espaço das funções. Para isso será, definido uma diferença ou subtração deformada generalizada, conforme feito na Referência (ROSA; WEBERSZPIL, 2018), mas aqui para o caso generalizado.

$$\epsilon = \frac{\epsilon'}{\Psi(y, p)} = \frac{y - x}{\Psi(y, p)} = y \ominus_p x. \quad (2.63)$$

Onde $y = x + \epsilon'$.

Assim, o operador derivada deformada generalizada fica escrito como:

$$D_{\Psi}^p = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y \ominus_p x}. \quad (2.64)$$

Pode-se ainda definir um operador deformado, através de uma subtração deformada no espaço das funções $f(y) \ominus_p f(x)$ e não no espaço das variáveis. Tal procedimento leva ao operador derivada deformada dual generalizada \tilde{D}_{Ψ}^p .

$$\tilde{D}_{\Psi}^p f(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) \ominus_p f(x)}{y - x}. \quad (2.65)$$

Na equação (2.65), explicitando a subtração deformada generalizada $f(y) \ominus_p f(x)$, obtêm-se:

$$\tilde{D}_{\Psi}^p f(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \Psi^{-1}(f(y), p) = \Psi^{-1}(f(x), p) \frac{df(x)}{dx}. \quad (2.66)$$

Agora será analisada a dualidade entre os operadores.

Dualidade entre Operadores

Um operador derivada de $y(x)$, em relação a x , é representado por $D_x y$. O operador dual a esse operador é $\tilde{D}_x y$, e satisfaz a seguinte relação (COSTA, 2015; ROSA; WEBERSZPIL, 2018):

$$D_x y \tilde{D}_y x = 1. \quad (2.67)$$

Ou seja, a relação de dualidade fica escrita como:

$$\tilde{D}_y x = [D_x y]^{-1}. \quad (2.68)$$

Agora será mostrado que o operador derivada usual é auto-dual. Considere a equação (2.68), para a derivada usual:

$$D_x^1 y \tilde{D}_y^1 x = 1. \quad (2.69)$$

Na equação (2.69), explicitando o operador derivada usual:

$$\frac{dy}{dx} \tilde{D}_y^1 x = 1. \quad (2.70)$$

O que leva ao operador:

$$\tilde{D}_y^1 x = \frac{dx}{dy}. \quad (2.71)$$

Assim, é natural escrever para o operador dual da derivada usual a relação:

$$\tilde{D}_x^1 y = \frac{dy}{dx} = D_x y. \quad (2.72)$$

O que mostra que o operador usual de derivada, D_x^1 , é seu próprio auto-dual. Agora, serão feitos os mesmos procedimentos para o operador derivada deformada generalizada, D_Ψ^p :

$$D_{\Psi x}^p y \tilde{D}_{\Psi y}^p x = 1. \quad (2.73)$$

Explicitando o operador derivada deformada generalizada, obtêm-se:

$$\Psi(x, p) \frac{dy}{dx} \tilde{D}_{\Psi y}^p x = 1. \quad (2.74)$$

O que leva ao operador:

$$\tilde{D}_{\Psi y}^p x = \Psi^{-1}(x, p) \frac{dx}{dy}. \quad (2.75)$$

Assim, o operador dual generalizado, pode ser escrito como:

$$\tilde{D}_{\Psi x}^p y = \Psi^{-1}(y, p) \frac{dy}{dx}. \quad (2.76)$$

A equação (2.76) é idêntica à equação (2.66), sendo que a última foi , encontrada através da subtração deformada, $f(y) \ominus_\alpha f(y)$. Ou seja o operador \tilde{D}_Ψ^p é dual da derivada deformada generalizada. Isto implica dizer que todas as derivadas deformadas tem uma dual associada.

Em seguida, serão apresentadas as derivadas duais, mas agora especificamente nas abordagens conforme e q-deformada.

- **Derivada Conforme Dual:**

Na abordagem conforme, o operador (2.66) é o operador derivada conforme dual:

$$\tilde{D}_\alpha f(x) = f^{\alpha-1}(x) \frac{df(x)}{dx}. \quad (2.77)$$

Este resultado pode ser visto também na referência (ROSA; WEBERSZPIL, 2018):

- **q-derivada Dual:**

Na abordagem q-deformada, o operador (2.66) é o operador q-derivada dual:

$$\tilde{D}_q f(x) = \left(\frac{1}{(1 + (1 - q)f(x))} \right) \frac{df(x)}{dx}. \quad (2.78)$$

Este resultado pode ser visto também na referência (COSTA, 2015):

A seguir, será mostrado que a derivada dual generalizada não satisfaz as propriedades usuais de derivada.

2.2.1 Propriedades

O operador derivada dual generalizada é não linear, como será mostrado a seguir.

- **Multiplicação por Escalar:**

$$\tilde{D}_{\Psi}^p(kf(x)) = \Psi^{-1}(kf(x), p) \frac{d[kf(x)]}{dx} = \Psi^{-1}(kf(x), p) k \frac{df(x)}{dx}. \quad (2.79)$$

O que é diferente de:

$$k\tilde{D}_{\Psi}^p f(x) = k\Psi^{-1}(f(x), p) \frac{df(x)}{dx}. \quad (2.80)$$

O que mostra que o operador \tilde{D}_{Ψ}^p não satisfaz a propriedade de multiplicação por escalar.

- **Regra da Soma:**

$$\tilde{D}_{\Psi}^p(f(x) \pm g(x)) = \Psi^{-1}((f(x) \pm g(x)), p) \frac{d(f(x) \pm g(x))}{dx}. \quad (2.81)$$

Na equação (2.81), aplicando a regra da soma usual:

$$\tilde{D}_{\Psi}^p(f(x) \pm g(x)) = \Psi^{-1}((f(x) \pm g(x)), p) \left(\frac{df(x)}{dx} \pm \frac{dg(x)}{dx} \right). \quad (2.82)$$

O que é diferente de:

$$\tilde{D}_{\Psi}^p(f(x)) \pm \tilde{D}_{\Psi}^p(g(x)) = \Psi^{-1}(f(x), p) \frac{df(x)}{dx} \pm \Psi^{-1}(g(x), p) \frac{dg(x)}{dx}. \quad (2.83)$$

A regra da soma também não é satisfeita.

- **Regra do Produto:**

$$\tilde{D}_{\Psi}^p(f(x)g(x)) = \Psi^{-1}(f(x)g(x), p) \left(\frac{d(f(x)g(x))}{dx} \right). \quad (2.84)$$

Na equação (2.84), aplicando a regra do produto usual:

$$\tilde{D}_{\Psi}^p(f(x)g(x)) = \Psi^{-1}(f(x)g(x), p) \left(g(x) \frac{df(x)}{dx} + f(x) \frac{dg(x)}{dx} \right). \quad (2.85)$$

O que é diferente de:

$$g(x)\tilde{D}_{\Psi}^p f(x) + f(x)\tilde{D}_{\Psi}^p g(x) = g(x)\Psi^{-1}(f(x), p) \frac{df(x)}{dx} + f(x)\Psi^{-1}(g(x), p) \frac{dg(x)}{dx}. \quad (2.86)$$

Também não cumprindo a regra do produto.

- **Regra do Quociente:**

$$\tilde{D}_{\Psi}^p \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \Psi^{-1} \left(\frac{f(x)}{g(x)}, p \right) \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right). \quad (2.87)$$

Na equação (2.87), aplicando a regra usual do quociente:

$$\tilde{D}_{\Psi}^p \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \Psi^{-1} \left(\frac{f(x)}{g(x)}, p \right) \left(\frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \right). \quad (2.88)$$

Que é diferente de:

$$\frac{g(x)\tilde{D}_{\Psi}^p f(x) - f(x)\tilde{D}_{\Psi}^p g(x)}{g^2(x)} = \frac{1}{g^2(x)} \left(g(x)\Psi^{-1}(f(x), p) \frac{df(x)}{dx} \right) - \frac{1}{g^2(x)} \left((x)\Psi^{-1}(g(x), p) \frac{dg(x)}{dx} \right) \quad (2.89)$$

Não cumprindo a regra do quociente.

- **Regra da Cadeia:**

Ao contrario das demais regras de derivada, será mostrado que a derivada dual generalizada satisfaz a regra da cadeia. Deste modo:

$$\tilde{D}_{\Psi}^p f(g(x)) = \Psi^{-1}(f(g(x)), p) \frac{df(g(x))}{dx}. \quad (2.90)$$

Na equação (2.90), aplicando a regra da cadeia usual:

$$\tilde{D}_{\Psi}^p f(g(x)) = \Psi^{-1}(f(g(x)), p) \frac{df(g(x))}{dg(x)} \frac{dg(x)}{dx} = \tilde{D}_{\Psi}^p g(x) [f(g(x))] \frac{dg(x)}{dx}. \quad (2.91)$$

Cumprindo assim a regra da cadeia. Sendo a única propriedade operacional satisfeita pelo operador derivada deformada dual generalizada. Trabalhar com operadores não lineares não é algo simples, saber que ao menos uma propriedade de derivada é satisfeita, já pode indicar um caminho para a utilização desses operadores.

Estas dificuldades operacionais podem ser contornadas redefinindo adequadamente o operador deformado dual, \tilde{D}_{Ψ}^p , sobre uma função $f(x)$ específica. Aqui, manteremos a mesma notação para esse operador dual, a fim de evitar sobre carga de notações. Deste modo:

$$\tilde{D}_{\Psi}^p f(x) = \Psi(f(x), p)^{-1} \frac{df(x)}{dx}. \quad (2.92)$$

Uma vez que o mesmo foi definido sobre uma $f(x)$ específica, o operador mantém a forma, quando aplicado a outras funções:

$$\tilde{D}_{\Psi}^p g(x) = \Psi(f(x), p)^{-1} \frac{dg(x)}{dx}. \quad (2.93)$$

Deste modo, vai satisfazer as propriedades operacionais adequadas.

2.2.2 Integral Deformada Dual Generalizada

A partir do operador derivada deformada dual generalizada é possível obter a integral deformada dual generalizada. Deste modo:

$$\Psi^{-1}(f(x), p) \frac{d}{dx} \left(\tilde{I}_{\Psi}^p \right) = f(x). \quad (2.94)$$

Na equação (2.94), multiplicando por $\Psi(f(x), p)$ em ambos os lados obtêm-se:

$$\frac{d}{dx} \left(\tilde{I}_{\Psi}^p \right) = \Psi(f(x), p) f(x). \quad (2.95)$$

O que leva a expressão:

$$d \left(\tilde{I}_{\Psi}^p \right) = \Psi(f(x), p) f(x) dx. \quad (2.96)$$

Na equação (2.96), integrando em ambos os lados:

$$\tilde{I}_{\Psi}^p = \int \Psi(f(x), p) f(x) dx = \int f(x) \tilde{d}_{px}. \quad (2.97)$$

A partir da expressão acima, pode ser definida a integral nas abordagens conforme a q-deformada. Como será mostrado a seguir:

- **Integral Conforme Dual:**

Na abordagem conforme, a equação (2.97) é a integral conforme dual. Dada por:

$$\tilde{I}_{\alpha} = \int f^{1-\alpha}(x) f(x) dx = \int f(x) \tilde{d}_{\alpha} x. \quad (2.98)$$

- **q-integral Dual:**

Na abordagem q-deformada, a equação (2.97) é a q-integral dual. Dada por:

$$\tilde{I}_q = \int (1 + (1 - q)f(x)) f(x) dx = \int f(x) \tilde{d}_q x. \quad (2.99)$$

Resultado que coincide com o encontrado na tese de doutorado (COSTA, 2015).

2.2.3 Equações de Autovalores, para o Operador de Derivada Deformada Dual Generalizada

Pode-se definir a autofunção para equações de autovalores deformadas duais. Deste modo:

$$\tilde{D}_{\alpha} f(x) = \lambda f(x). \quad (2.100)$$

Com a condição inicial $f(0) = f_0$.

Na equação (2.100), explicitando \tilde{D}_{α} :

$$\Psi^{-1}(f(x), p) \frac{df(x)}{dx} = \lambda f(x). \quad (2.101)$$

Separando as variáveis e integrando ambos os lados:

$$\int_{f_0}^{f(x)} \frac{\Psi^{-1}(f(x), p) df(x)}{f(x)} = \lambda \int_0^x dx = \lambda x. \quad (2.102)$$

A partir de agora, será definida a autofunção para equações de autovalores deformadas duais, através da equação (2.102), mas agora especificamente para nas abordagens conforme e q-deformada:

- **Autofunção Conforme Dual:**

A autofunção para o operador derivada conforme dual é obtida pela equação (2.102) na abordagem conforme. Deste modo:

$$\int_{f_0}^{f(x)} f^{\alpha-2}(x) df(x) = \left(\frac{f^{\alpha-1}(x)}{\alpha-1} \right) \Big|_{f_0}^{f(x)} = \lambda x. \quad (2.103)$$

Na equação (2.103), usando os limites de integração, obtêm-se:

$$\frac{f^{\alpha-1}(x)}{\alpha-1} - \frac{f_0^{\alpha-1}}{\alpha-1} = \frac{f^{\alpha-1}(x) - f_0^{\alpha-1}}{\alpha-1} = \lambda x. \quad (2.104)$$

O resultado para $f(x)$, após uma álgebra simples, é obtido prontamente como:

$$f(x) = ((\alpha-1)\lambda x + f_0^{\alpha-1})^{1/\alpha-1}. \quad (2.105)$$

Fazendo $f_0 = 1$ e $\lambda = 1$, obtêm-se:

$$f(x) = (1 + (\alpha-1)x)^{1/\alpha-1} = e_{(q=2-\alpha)}(x). \quad (2.106)$$

Ou seja, a q-exponencial reparametrizada é auto-função do operador derivada conforme dual, como pode ser visto na referência (ROSA; WEBERSZPIL, 2018).

- **Autofunção q-deformada Dual:**

A autofunção do operador q-derivada dual é obtida a partir da equação (2.102), para a abordagem de q-derivadas duais. Deste modo:

$$\int_{f_0}^{f(x)} \frac{df(x)}{(1 + (1-q)f(x))f(x)} = \lambda x. \quad (2.107)$$

Na equação (2.107), evidenciando a função $f(x)$, que está multiplicando $(1-q)$, obtêm-se:

$$\int_{f_0}^{f(x)} \frac{df(x)}{[f^{-1}(x) + (1-q)]f^2(x)} = \lambda x. \quad (2.108)$$

A integral (2.108) pode ser resolvida por substituição simples. Fazendo $u = [f^{-1}(x) + (1-q)]$, obtêm-se $du = -f^{-2}(x)$. Desse modo, a equação (2.108) pode ser reescrita como:

$$- \int_{f_0^{-1}+(1-q)}^{f^{-1}(x)+(1-q)} \frac{du}{u f^{-2}(x) f^2(x)} = - \int_{f_0^{-1}+(1-q)}^{f^{-1}(x)+(1-q)} \frac{du}{u} = \lambda x. \quad (2.109)$$

Na equação (2.109), resolvendo a integral:

$$(\ln(u)) \Big|_{f_0^{-1}+(1-q)}^{f^{-1}(x)+(1-q)} = -\lambda x. \quad (2.110)$$

Na equação (2.110), considerando os limites de integração:

$$\ln(f^{-1}(x) + (1 - q)) - \ln(f_0^{-1} + (1 - q)) = \ln\left(\frac{f^{-1}(x) + (1 - q)}{f_0^{-1} + (1 - q)}\right) = -\lambda x. \quad (2.111)$$

Após uma algebrismo simples, obtêm-se para $f(x)$:

$$f(x) = \frac{\exp(\lambda x)}{(f_0^{-1} + (1 - q)) - (1 - q) \exp(\lambda x)}. \quad (2.112)$$

Que é a autofunção q -deformada dual. Fazendo $f_0 = 1$ e $\lambda = 1$, obtêm-se:

$$f(x) = \frac{\exp(x)}{(2 - q) - (1 - q) \exp(x)}. \quad (2.113)$$

A equação (2.113) é exatamente uma exponencial usual quando $q = 1$ e seu gráfico para diversos valores de q pode ser visto na figura (2.9):

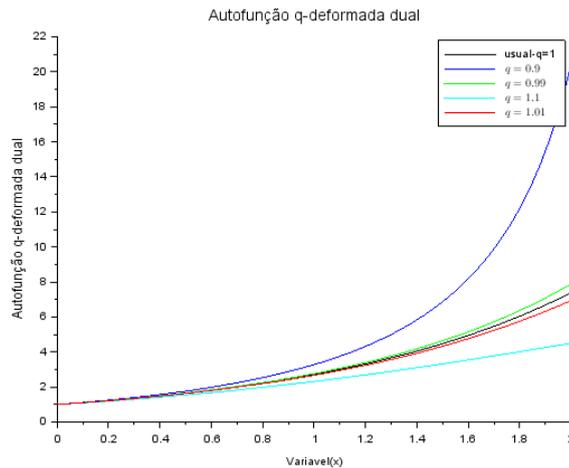


Figura 2.9: Autofunção q -deformada dual.

No gráfico da figura (2.9), pode ser visto que as curvas, para valores de $q < 1$, crescem mais rápido em relação a x do que a curva da exponencial usual ($q = 1$). Ainda, as curvas para valores de $q > 1$, crescem mais lentamente em relação a x do que a curva com por $q = 1$.

3 MÉTODO VARIACIONAL COM DERIVADAS DEFORMADAS

O cálculo variacional ou método variacional, consiste em achar a função para a qual o funcional de ação é extremo. Segundo o princípio da mínima ação, a natureza sempre opta pelo caminho que extremiza a ação (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2002). Um funcional de ação é definido como uma integral entre dois pontos, x_1 e x_2 , da lagrangiana do sistema. Uma revisão do método variacional usual, pode ser vista no apêndice (A). Nas seções desse capítulo, será apresentado o método variacional generalizado para derivadas deformadas.

3.1 Abordagem Variacional com Derivadas Deformadas

Nessa seção será apresentada uma extensão do cálculo de variações, para sistemas contendo derivadas deformadas embutidas nas Lagrangiana, para sistemas clássicos. Os resultados estendem as equações clássicas de Euler-Lagrange, de acordo com a Referência (WEBERSZPIL; HELAYËL-NETO, 2016). serão consideradas as 3 opções de métodos, como destacado na referência citada, porém ampliado para tratar da derivada deformada generalizada. Essa opções são:

Opção 1– Derivadas deformadas embebidas na lagrangiana, integral deformada e taxa de variação usual do funcional em, função de ϵ .

Opção 2– Derivadas deformadas embebidas na lagrangiana, integral deformada e taxa de variação deformada do funcional, em função de ϵ .

Opção 3– Derivadas deformadas embebidas na lagrangiana, integral usual e taxa de variação usual do funcional, em função de ϵ .

3.1.1 Opção 1

Com essa opção, será obtida a equação de Euler-Lagrange para uma lagrangiana na forma:

$$L(x, y, D_{\Psi x}^p y). \quad (3.1)$$

Onde $y = y^* + \epsilon \eta(x)$. e $D_{\Psi x}^p y = \Psi(x, p)y'$. Com $y' = y'^* + \epsilon \eta'(x)$.

Será utilizada a integral deformada, de modo que a ação se escreve como:

$$J(y, D_{\Psi x}^p y) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, D_{\Psi x}^p y) d_p x. \quad (3.2)$$

ou ainda:

$$J(y, D_{\Psi x}^p y) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, D_{\Psi x}^p y) \Psi^{-1}(x, p) dx. \quad (3.3)$$

Considerando a taxa de variação usual do funcional, em função de ϵ e considerando o princípio fundamental do cálculo das variações, obtêm-se:

$$\left(\frac{dJ(y, D_{\Psi x}^p y)}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d}{d\epsilon} L(x, y, D_{\Psi x}^p y) \Psi^{-1}(x, p) \right)_{\epsilon=0} dx = 0. \quad (3.4)$$

Na equação (3.4), aplicando a regra da cadeia, obtêm-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial L}{\partial y} \frac{dy}{d\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi xy}^p} \frac{dD_{\Psi xy}^p}{d\epsilon} \right]_{\epsilon=0} \Psi^{-1}(x, p) dx = 0. \quad (3.5)$$

Na equação (3.5), explicitando $D_{\Psi x}^p$ obtêm-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial L}{\partial y} \frac{dy}{d\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi xy}^p} \Psi(x, p) \frac{dy'}{d\epsilon} \right]_{\epsilon=0} \Psi^{-1}(x, p) dx = 0. \quad (3.6)$$

Na equação (3.6), explicitando y e y' , obtêm-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial L}{\partial y} \frac{d}{d\epsilon} (y * + \epsilon \eta(x)) + \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi xy}^p} \Psi(x, p) \frac{d}{d\epsilon} (y' * + \epsilon \eta'(x)) \right]_{\epsilon=0} \Psi^{-1}(x, p) dx = 0. \quad (3.7)$$

Na equação (3.7), resolvendo as derivadas com relação a ϵ :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi xy}^p} \Psi(x, p) \eta'(x) \right]_{\epsilon=0} \Psi^{-1}(x, p) dx = 0. \quad (3.8)$$

Na equação (3.8), considerando $\epsilon = 0$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi xy}^p} \Psi(x, p) \eta'(x) \right] \Psi^{-1}(x, p) dx = 0. \quad (3.9)$$

Na equação (3.9), aplicando a regra algébrica distributiva, obtêm-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\Psi^{-1}(x, p) \frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi xy}^p} \eta(x)' \right) dx = 0. \quad (3.10)$$

A integral da equação (3.10), pode ser transformada em duas, pela regra da soma para integrais. Assim, podemos escrever:

$$\int_{x_1}^{x_2} \Psi^{-1}(x, \alpha)(x, p) \frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi xy}^p} \eta(x)' dx = 0. \quad (3.11)$$

Na equação (3.11), aplicando integração por partes na segunda integral, com $u = \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi xy}^p}$ e $dv = \eta(x)'$, obtêm-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \Psi^{-1}(x, p) \frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) dx + \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi xy}^p} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi xy}^p} dx = 0. \quad (3.12)$$

Uma vez que $\eta(x)$ se anula nos extremos, a equação (3.12) torna-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \Psi^{-1}(x, p) \eta(x) \frac{\partial L}{\partial y} - \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi xy}^p} dx = 0. \quad (3.13)$$

Colocando $\eta(x)$, em evidência obtêm-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left[\Psi^{-1}(x, p) \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi xy}^p} \right] dx = 0. \quad (3.14)$$

O lema fundamental do cálculo das variações leva então a seguinte equação de Euler-Lagrange deformada:

$$\Psi^{-1}(x, p) \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi x}^p y} = 0. \quad (3.15)$$

Na equação (3.15), para todo Ψ^{-1} diferente de zero, pode-se dividir ambos os lados por $\Psi^{-1}(x, p)$. Obtendo:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \Psi(x, p) \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi x}^p y} = 0. \quad (3.16)$$

Ou ainda:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - D_{\Psi x}^p \left[\frac{\partial L}{\partial D_{\Psi x}^p y} \right] = 0. \quad (3.17)$$

Esta é a forma deformada generalizada da equação de Euler-Lagrange, deduzida através do proposto na opção 1, para a lagrangiana dada por (3.1). Agora será mostrada a equação (3.16) tanto na abordagem conforme quanto na q-deformada:

- **Equação de Euler-Lagrange conforme (opção 1)**

$$\frac{\partial L}{\partial y} - D_{\alpha x} \left[\frac{\partial L}{\partial D_{\alpha x} y} \right] = 0. \quad (3.18)$$

Explicitando $D_{\alpha x}$:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - x^{1-\alpha} \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial D_{\alpha x} y} = 0. \quad (3.19)$$

Este resultado foi obtido na opção 1, da referência ([WEBERSZPIL; HELAYËL-NETO, 2016](#)).

- **Equação de Euler-Lagrange q-deformada (opção 1)**

$$\frac{\partial L}{\partial y} - D_{qx} \frac{\partial L}{\partial D_{qx} y} = 0. \quad (3.20)$$

Explicitando D_{qx} :

$$\frac{\partial L}{\partial y} - (1 + (1 - q)x) \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial D_{qx} y} = 0. \quad (3.21)$$

O mesmo resultado da referência ([WEBERSZPIL; HELAYËL-NETO, 2016](#)). A aplicação deste processo à lagrangianas dependentes de derivada de outras ordens geram outras equações de Euler-Lagrange.

3.1.2 Opção 2

Nesta opção, será obtida a equação de Euler-Lagrange para uma lagrangiana na forma:

$$L(x, y, D_{\Psi x}y). \quad (3.22)$$

Será utilizada a integral deformada, de modo que a ação se escreve como:

$$J(y, D_{\Psi x}y) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, D_{\Psi x}y) d_px. \quad (3.23)$$

Ou ainda:

$$J(y, D_{\Psi x}y) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, D_{\Psi x}y) \Psi^{-1}(x, p) dx. \quad (3.24)$$

Consideraremos a taxa de variação deformada em ϵ . Deste modo:

$$(D_{\Psi \epsilon} J(y, D_{\Psi x}y))_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} (D_{\Psi \epsilon} L(x, y, D_{\Psi x}y) \Psi^{-1}(x, p))_{\epsilon=0} dx = 0. \quad (3.25)$$

Ou ainda:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\Psi(\epsilon, p) \frac{d}{d\epsilon} L(x, y, D_{\Psi x}y) \Psi^{-1}(x, p) \right)_{\epsilon=0} dx = 0. \quad (3.26)$$

No integrando da equação, aplicando a regra da cadeia, obtêm-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\Psi(\epsilon, p) \left(\eta(x) \Psi^{-1}(x, p) \frac{\partial L}{\partial y} + \eta'(x) \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi x}y} \right) \right)_{\epsilon=0} dx = 0. \quad (3.27)$$

Fazendo $\epsilon = 0$ na equação (3.27):

$$\int_{x_1}^{x_2} \Psi(0, p) \left(\eta(x) \Psi^{-1}(x, p) \frac{\partial L}{\partial y} + \eta'(x) \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi x}y} \right) dx = 0. \quad (3.28)$$

Uma vez que $\Psi(0, p)$ é uma constante pode-se retirar a mesma da integral ():

$$\Psi(0, p) \int_{x_1}^{x_2} \left(\eta(x) \Psi^{-1}(x, p) \frac{\partial L}{\partial y} + \eta'(x) \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi x}y} \right) dx = 0. \quad (3.29)$$

Que para todo $\Psi(0, p) \neq 0$, pode ser escrita como:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\eta(x) \Psi^{-1}(x, p) \frac{\partial L}{\partial y} + \eta'(x) \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi x}y} \right) dx = 0. \quad (3.30)$$

Sendo idêntica a equação (3.11). Seguindo os mesmos passos da passagem (3.11-3.16), chega-se a mesma equação de Euler-Lagrange da opção 1.

3.1.3 Opção 3

Agora será obtida a equação de Euler-Lagrange para uma lagrangiana na forma:

$$L(x, y, D_{\Psi x}y). \quad (3.31)$$

Consideraremos aqui a integral usual, de modo que a ação se escreve como:

$$J(y, D_{\Psi x}y) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, D_{\Psi x}y) dx. \quad (3.32)$$

Calculando a taxa de variação usual do funcional J em função de ϵ , obtêm-se:

$$\left(\frac{dJ(y, D_{\Psi x}y)}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d}{d\epsilon} L(x, y, D_{\Psi x}y) \right)_{\epsilon=0} dx = 0. \quad (3.33)$$

Usando a regra da cadeia, a equação (3.33) pode ser reescrita como:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \frac{dy}{d\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi x}y} \frac{dD_{\Psi x}y}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} dx = 0. \quad (3.34)$$

Explicitando $D_{\Psi x}y$, obtêm-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \frac{dy}{d\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi x}y} \Psi(x, p) \frac{dy'}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} dx = 0. \quad (3.35)$$

Explicitando y e y' , a equação (3.35) fica reescrita na forma:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi x}y} \Psi(x, p) \eta(x)' \right)_{\epsilon=0} dx = 0. \quad (3.36)$$

Fazendo $\epsilon = 0$ na equação (3.36) obtêm-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi x}y} \Psi(x, p) \eta(x)' dx = 0. \quad (3.37)$$

Aplicando a regra da soma para integrais obtêm-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \Psi(x, p) \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi x}y} \eta(x)' dx = 0. \quad (3.38)$$

Tendo em conta a integração por partes na segunda integral, com $u = \Psi(x, p) \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi x}y}$ e $dv = \eta(x)'$, podemos reescrever a equação (3.38) da seguinte forma:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) dx + \Psi(x, p) \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi x}y} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left[\Psi(x, p) \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi x}y} \right] dx = 0. \quad (3.39)$$

Uma vez que $\eta(x)$ se anula nos extremos, a equação (3.39) torna-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{\partial L}{\partial y} - \eta(x) \frac{d}{dx} \left[\Psi(x, p) \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi x}y} \right] dx = 0. \quad (3.40)$$

Colocando $\eta(x)$ em evidência obtêm-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\Psi(x, p) \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi x} y} \right] \right] dx = 0. \quad (3.41)$$

Tendo em conta, mais uma vez, o lema fundamental do cálculo das variações, obtêm-se a seguinte equação de Euler-Lagrange deformada:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\Psi(x, \alpha) \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi x} y} \right] = 0 \quad (3.42)$$

Esta é a forma deformada generalizada da equação de Euler-Lagrange, através do proposto na opção 3, para a lagrangiana dada por (3.1). mostrado como ficam as equações de Euler-Lagrange, considerando a equação (3.41) resultante da opção 3, mas especificamente nas abordagens conforme e q-deformada.

- **Equação de Euler-Lagrange conforme (opção 3)**

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[x^{1-\alpha} \frac{\partial L}{\partial D_{\alpha x} y} \right] = 0. \quad (3.43)$$

O mesmo resultado da opção 3 na referência ([WEBERSZPIL; HELAYËL-NETO, 2016](#)).

- **Equação de Euler-Lagrange q-deformada (opção 3)**

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[(1 + (1 - q)x) \frac{\partial L}{\partial D_{qx} y} \right] = 0. \quad (3.44)$$

O mesmo resultado pode ser visto na referência ([WEBERSZPIL; HELAYËL-NETO, 2016](#)).

Lagrangianas dependentes de outras ordens de derivada dão origem a outras equações de Euler-Lagrange, para esta opção. Na referência ([WEBERSZPIL; HELAYËL-NETO, 2017](#)), onde o autor mostra que equações de Euler-Lagrange, obtidas através de abordagens variacionais deformadas, podem descrever a dinâmica de diferentes sistemas físicos.

3.2 Método Variacional Dual

Consideraremos nesta seção uma extensão do cálculo de variações, para sistemas contendo derivadas deformadas duais, embutidas nas Lagrangiana. Nesse sentido, consideremos uma lagrangiana contendo uma derivada deformada dual, numa forma simples e utilizaremos o análogo da opção 3 do método. Seja então a lagrangiana:

$$L(y, \tilde{D}_{\Psi x} y, x). \quad (3.45)$$

Aqui, consideraremos o operador de derivada dual redefinido adequadamente, para contornar os aspectos da não-linearidade, conforme a definição dada pela equação (2.92).

$$\tilde{D}_{\Psi x} y = \Psi^{-1}(y, p) \frac{d}{dx} (y * + \epsilon \eta(x)) = \Psi^{-1}(y, p) (y *' + \epsilon \eta'(x)). \quad (3.46)$$

Uma vez que está sendo usada a integral usual, o funcional de ação será dado por:

$$J(y, \tilde{D}_{\Psi x} y) = \int_{x_1}^{x_2} L(y, \tilde{D}_{\Psi x} y, x) dx. \quad (3.47)$$

Calculando a taxa de variação usual do funcional J , em função de ϵ , obtêm-se:

$$\left(\frac{d}{d\epsilon} J(y, \tilde{D}_{\Psi x} y) \right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d}{d\epsilon} L(y, \tilde{D}_{\Psi x} y, x) \right)_{\epsilon=0} dx = 0. \quad (3.48)$$

Considerando a regra da cadeia, obtêm-se:

$$\left(\frac{d}{d\epsilon} J(y, \tilde{D}_{\Psi x} y) \right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \frac{dy}{d\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \tilde{D}_{\Psi x} y} \frac{d\tilde{D}_{\Psi x} y}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} dx = 0. \quad (3.49)$$

Calculando $\frac{d\tilde{D}_{\Psi x} y}{d\epsilon}$, obtêm-se:

$$\frac{d\tilde{D}_{\Psi x} y}{d\epsilon} = \frac{d(\Psi^{-1}(y, p)(y^{*'} + \epsilon \eta'(x)))}{d\epsilon}. \quad (3.50)$$

Aplicando a regra do produto e da cadeia, obtêm-se:

$$\frac{d\tilde{D}_{\Psi x} y}{d\epsilon} = (-1)(\Psi(y, p))^{-2} \eta(x) (y') + \Psi^{-1}(y, p) \eta'(x) = \frac{d\Psi^{-1}(y, p) \eta(x)}{dx}. \quad (3.51)$$

Deste modo, a equação (3.49) fica reescrita como:

$$\left(\frac{d}{d\epsilon} J(y, \tilde{D}_{\Psi x} y) \right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial \tilde{D}_{\Psi x} y} \frac{d\Psi^{-1}(y, p) \eta(x)}{dx} \right)_{\epsilon=0} dx = 0. \quad (3.52)$$

Tendo em conta o limite adequado para "epsilon", $\epsilon = 0$ obtêm-se:

$$\left(\frac{d}{d\epsilon} J(y, \tilde{D}_{\Psi x} y) \right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial \tilde{D}_{\Psi x} y} \frac{d\Psi^{-1}(y, p) \eta(x)}{dx} \right) dx = 0. \quad (3.53)$$

Realizando a integração por partes, obtêm-se:

$$\left(\frac{d}{d\epsilon} J(y, \tilde{D}_{\Psi x} y) \right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) - \Psi^{-1}(y, p) \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \tilde{D}_{\Psi x} y} \right) dx = 0. \quad (3.54)$$

Como $\eta(x)$ é zero nos extremos, o resultado é:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \Psi^{-1}(y, p) \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \tilde{D}_{\Psi x} y} \right) = 0. \quad (3.55)$$

Esta é a forma deformada dual generalizada da equação de Euler-Lagrange, deduzida através do proposto na opção 3, para a lagrangiana dada por (3.45). Agora será explicitada a equação (3.55), tanto na abordagem conforme quanto na q-deformada:

- **Euler-Lagrange conforme dual:**

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y} - y^{\alpha-1} \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \tilde{D}_{\alpha x}} y \right) = 0. \quad (3.56)$$

- **Euler-Lagrange q-deformada dual:**

$$\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{1}{(1 + (1 - q)y)} \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial \tilde{D}_{qx}} y \right) = 0. \quad (3.57)$$

No próximo capítulo serão apresentadas aplicações para o uso das derivadas deformadas. Começando com modelos deformados da segunda lei de Newton, o que leva a cinemáticas deformadas, em especial **MRU** e **MRUVs** deformados. Em seguida apresentaremos modelos de **OHSs** deformados. A diante, saindo do escopo da física clássica, serão tratados modelos deformados de fator de sobrevivência de células cancerígenas sujeitas a radiação. Por último, modelos deformados sobre comportamento reológico de fluidos sujeitos a tensão.

4 APLICAÇÕES

Neste capítulo objetivamos apresentar e discutir aplicações de derivadas deformadas. Nosso método de abordagem se iniciará com modelos usuais, tanto em física quanto em outras áreas e, na sequência, tratará com modelos em que a deformação se é considerada através das derivadas embebidas nas lagrangianas. Como resultado, modelos com derivadas deformadas emergirão, a partir das equações de Euler-Lagrange resultantes. O foco de possíveis aplicações para a abordagem via derivadas deformadas está em considerar os sistemas como complexos (WEBERSZPIL; HELAYËL-NETO, 2017). As primeiras aplicações são em problemas dentro da física onde já se conhece a lagrangiana que descreve o modelo usual, outros serão aplicações em áreas diversas, mostrando o carácter multidisciplinar das derivadas deformadas.

Uma vez que as derivadas deformadas são indicadas para problemas em meios com métrica fractal, as interações com o meio devem se mostrar presentes nos resultados das aplicações.

4.1 Segunda Lei de Newton

Para efeitos de comparação e clareza no que se seguirá em termos de aplicações, considere primeiramente a lagrangiana, da qual a segunda lei de Newton (unidimensional, por simplicidade) pode ser obtida através do cálculo variacional usual:

$$L = \frac{m(\dot{x})^2}{2} - V(x(t)). \quad (4.1)$$

Aqui, m é a massa de uma partícula pontual e $V(x)$ um potencial associado a forças conservativas. Com método variacional usual (A), a seguinte equação de Euler-Lagrange emerge:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (4.2)$$

Considerando a lagrangiana dada pela equação(4.1), a equação de Euler-Lagrange (4.2) resulta em:

$$-\frac{\partial V(x(t))}{\partial x} - m\ddot{x} = 0. \quad (4.3)$$

Identificando $F = -\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}$, a equação (4.3) resultante é a expressão da segunda lei de Newton:

$$F = m\ddot{x} = ma. \quad (4.4)$$

Onde F é a resultante das forças em uma dimensão ($1D$) e $a = \ddot{x}$ é a aceleração do sistema.

4.1.1 Modelos Deformados da Mecânica Newtoniana

Propomos nesta seção deformações da segunda lei de Newton, a partir de lagrangianas deformadas e com lagrangianas deformadas duais. As equações de Euler-Lagrange são as que foram obtidas pela opção 1 e opção 3 do capítulo anterior. Utilizaremos aqui as abordagens conforme e q-deformada, bem como suas formas duais.

4.1.1.1 Modelos com Lagrangianas Deformadas não Duais

No intuito de obtermos generalizações da segunda lei de Newton, através da deformação dessa equação, propomos a seguinte lagrangiana (unidimensional), com a derivada deformada generalizada embebida:

$$L = \frac{m(D_{\Psi t}(x(t)))^2}{2} - V(x(t)). \quad (4.5)$$

Na equação (4.5), temos a presença do termo cinético deformado $\frac{m(D_{\Psi t}(x(t)))^2}{2}$ e do potencial $V(x(t))$.

1- Primeira opção de abordagem variacional:

Através da abordagem variacional introduzida no capítulo 3, obtivemos a equação de euler-Lagrange (3.10) que escrevemos novamente para clareza:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - D_{\Psi t} \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi t} x} = 0. \quad (4.6)$$

Considerando a lagrangiana dada pela eq. (4.5), a equação (4.6) implica em uma equação que descreve uma dinâmica em que as derivadas são as deformadas gerais. Ou seja,

$$-\frac{\partial V(x(t))}{\partial x} - mD_{\Psi t}((D_{\Psi t}(x(t)))) = 0. \quad (4.7)$$

A equação acima pode ser reescrita com a derivada geral explicitada, como segue:

$$-\frac{\partial V(x(t))}{\partial x} - m\Psi(t, p) \frac{d}{dt} \left((\Psi(t, p) \frac{d(x(t))}{dt}) \right) = 0. \quad (4.8)$$

Mais uma vez, se identificarmos $F = -\frac{\partial V(x(t))}{\partial x}$, podemos então associar essa força a uma forma generalizada da segunda lei de Newton, que se escreve como:

$$F = m\Psi(t, p) \frac{d}{dt} \left((\Psi(t, p) \frac{d(x(t))}{dt}) \right) = ma_p. \quad (4.9)$$

Onde $a_p = D_{\Psi t}(D_{\Psi t}(x))$ é a aceleração deformada generalizada. Com base na eq. (4.9), podemos especificar como a segunda lei de Newton poderia ser reescrita, quando vista no contexto das duas abordagens de derivadas aqui tratados. A saber, a conforme e a q-deformada. É o que faremos na sequência.

- **Segunda Lei de Newton na Abordagem Conforme, pela Opção 1.**

A equação (4.9) na abordagem conforme fica escrita como:

$$F = mt^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \left(t^{1-\alpha} \frac{d(x(t))}{dt} \right) = ma_\alpha. \quad (4.10)$$

Onde $a_\alpha = D_{\alpha t}(D_{\alpha t}(x))$ é a generalização da aceleração nessa abordagem. Quando $\alpha = 1$, nota-se prontamente que a equação (4.10) retoma a forma usual da segunda lei de Newton.

Outro caso interessante é quando α é próximo de 1. Fazendo $\epsilon = 1 - \alpha$, com ϵ muito pequeno, obtêm-se:

$$F = mt^\epsilon \frac{d}{dt} \left(t^\epsilon \frac{d(x(t))}{dt} \right). \quad (4.11)$$

Resolvendo o operador derivada usual, obtêm-se:

$$F = mt^\epsilon (\epsilon t^{\epsilon-1} \dot{x} + t^\epsilon \ddot{x}). \quad (4.12)$$

Colocando t^ϵ em evidência, obtêm-se:

$$F = mt^{2\epsilon} (\epsilon t^{-1} \dot{x} + \ddot{x}). \quad (4.13)$$

O termo $t^{2\epsilon}$ pode ser expandido em série de Taylor em torno de $\epsilon = 0$. Deste modo:

$$t^{2\epsilon} = 1 + 2\epsilon \ln(t) + O(\epsilon^2). \quad (4.14)$$

Desconsiderando os termos da ordem de ϵ^2 ou superiores a equação (4.13) fica reescrita:

$$F = m(1 + 2\epsilon \ln(t)) (\epsilon t^{-1} \dot{x} + \ddot{x}). \quad (4.15)$$

Aplicando a distributiva e desconsiderando termos de ordem ϵ^2 :

$$F = m\epsilon t^{-1} \dot{x} + m(1 + 2\epsilon \ln(t)) \ddot{x}. \quad (4.16)$$

Ou ainda:

$$F - m\epsilon t^{-1} \dot{x} = m(t) \ddot{x}. \quad (4.17)$$

Onde $m(t) = m(1 + 2\epsilon \ln(t))$. A equação (4.17), para o caso $\epsilon > 0$, descreve um sistema mecânico com atrito e massa dependentes do tempo. Este resultado foi anteriormente encontrado em (CHUNG, 2015).

- **Segunda Lei de Newton na Abordagem q-deformada, pela Opção 1.**

A equação (4.9) na abordagem q-deformada assume a seguinte forma:

$$F = m(1 + (1 - q)t) \frac{d}{dt} \left((1 + (1 - q)t) \frac{d(x(t))}{dt} \right) = ma_q. \quad (4.18)$$

Onde $a_q = D_{qt}(D_{qt}(x))$ é a q-aceleração. Quando $q = 1$, a equação (4.18) também retoma a forma usual da segunda lei de Newton.

Pode-se analisar o caso em que q é próximo de 1. Fazendo $\epsilon = 1 - q$ e tomando ϵ muito pequeno obtêm-se:

$$F = m(1 + \epsilon t) \frac{d}{dt} \left((1 + \epsilon t) \frac{d(x(t))}{dt} \right) = ma_q. \quad (4.19)$$

Resolvendo a derivada usual obtêm-se:

$$F = m(1 + \epsilon t) (\epsilon \dot{x} + (1 + \epsilon t) \ddot{x}) \quad (4.20)$$

Aplicando a distributiva e desconsiderando os termos da ordem ϵ^2 ou superiores:

$$F = m\epsilon \dot{x} + m(1 + 2\epsilon t)\ddot{x}. \quad (4.21)$$

Ou ainda:

$$F - m\epsilon \dot{x} = m(t)\ddot{x}. \quad (4.22)$$

Onde $m(t) = m(1 + 2\epsilon t)$. A equação (4.22), para o caso $\epsilon > 0$, descreve um movimento com atrito mecânico e massa dependente do tempo.

Como modelo ilustrativo, um "toy model", serão apresentados os casos particulares que dão origem a uma cinemática deformada, que generalizaria os movimentos retilíneo e uniforme (MRU) e movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV).

4.1.1.2 Cinemática Deformada Generalizada, pela Opção 1

A cinemática é o ramo da física que estuda o movimento do corpo sem se preocupar com as causas do mesmo. Através dela é possível definir a posição (x), velocidade (v) e aceleração (a) de um corpo em cada instante de tempo. A abordagem usual define a velocidade como sendo a derivada da posição. Deste modo:

$$v = \frac{dx}{dt}. \quad (4.23)$$

E a aceleração é definida como a derivada da velocidade. Deste modo:

$$a = \frac{dv}{dt}. \quad (4.24)$$

Na abordagem deformada, definida pela opção 1, define a velocidade deformada como:

$$v_p = D_{\Psi t}(x). \quad (4.25)$$

E a aceleração deformada:

$$a_p = D_{\Psi t}(v_p). \quad (4.26)$$

Agora é possível definir as formas generalizadas do **MRU** e do **MRUV**.

4.1.1.3 MRU Deformado Deneralizado

Neste momento será analisado o caso em que a velocidade deformada, equação (4.25), é constante, o que dá origem a uma possível generalização do **MRU**.

$$v_p = D_{\Psi t}(x) = v. \quad (4.27)$$

Explicitando o operador derivada deformada generalizada:

$$\Psi(t, p) \frac{dx}{dt} = v. \quad (4.28)$$

Separando as variáveis e integrando:

$$x(t) = v \int_0^t \Psi^{-1}(t, p) dt + x(0). \quad (4.29)$$

Podemos agora descrever este **MRU** deformado em cada um das abordagens deformadas, conforme e q-deformada. Como os cálculos são repetitivos e simples, optamos por descrever essas cinemáticas alternativas no apêndice B .

4.1.1.4 MRUV Deformado generalizado

Seja agora o caso em que aceleração deformada. dada pela equação (4.26), é constante.

$$a_p = D_{\Psi t}(v_p) = a. \quad (4.30)$$

Explicitando $D_{\Psi t}$:

$$\Psi(t, p) \frac{dv}{dt} = a. \quad (4.31)$$

Utilizando passos idênticos aos das passagens (4.27 - 4.29), pode-se obter a velocidade deformada:

$$v_p(t) = a \int_0^t \Psi^{-1}(t, p) dt + v(0). \quad (4.32)$$

Através da equação (4.25), pode-se obter a posição em função do tempo. Seja então a velocidade deformada definida abaixo:

$$\Psi(t, p) \frac{dx}{dt} = v_p(t). \quad (4.33)$$

Após uma álgebra simples, é obtida a posição:

$$x = \int_0^t \Psi^{-1} v_p(t) dt + x(0). \quad (4.34)$$

Pode-se descrever este resultado em cada uma das abordagens, conforme e q-deformada. Lembrando que estamos tratando da opção 1 do método variacional. Mais uma vez, para aliviar a leitura, levamos esses resultados ao apêndice B.

A seguir, repetiremos procedimentos análogos, para tratar o problema através da opção 3 do método variacional proposto.

2- Terceira opção de abordagem variacional:

Através da abordagem variacional apresentada na opção 3, tem-se a equação de Euler-Lagrange (3.42), dada por:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[\Psi^2(t, p) \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi t} x} \right] = 0. \quad (4.35)$$

A Lagrangiana se escreve de maneira análoga à dada pela (4.5).

Procedendo analogamente ao que foi realizado com o uso da opção 1, obtemos outra possibilidade de generalização da segunda lei de Newton. Note que essa forma generalizada resulta de um variante do método variacional, a opção 3, e tem forma diferente do caso anterior.

$$F = m \frac{d}{dt} [\Psi^2(t, p) \dot{x}] = m a_p. \quad (4.36)$$

Onde a_p é a aceleração deformada generalizada nesta abordagem variacional. No apêndice C essa mecânica Newtoniana deformada são apresentados para as abordagens conforme e q-deformada, de maneira análoga ao já realizado na opção 1.

No apêndice (B) foi incluída uma generalização da cinemática a partir da opção 3 de abordagem variacional.

4.1.1.5 Modelos da Mecânica Newtoniana com Lagrangianas Deformadas Duais

É possível obter uma equação de Euler-Lagrange deformada para uma lagrangiana do tipo:

$$L = \frac{m(\tilde{D}_{\Psi t}(x(t)))^2}{2} - V(x(t)). \quad (4.37)$$

Como foi mostrado no capítulo anterior, pode-se obter uma equação de Euler-Lagrange com lagrangiana dependente de derivadas deformadas duais a partir da opção 3 de abordagem variacional, (3.55):

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \Psi^{-1}(x, p) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \tilde{D}_{\Psi t} x} \right) = 0. \quad (4.38)$$

Considerando a lagrangiana (4.37), obtemos a equação para a força generalizada por derivadas conformes duais:

$$F = m \Psi^{-1}(x, p) \frac{d}{dt} (\Psi^{-1}(x, p) \dot{x}) \tilde{a}_p. \quad (4.39)$$

Onde \tilde{a}_p é a aceleração deformada dual. No apêndice (D) esta lei generalizada está especificada, tanto para a abordagem conforme quanto na q-deformada em suas versões duais. No referido apêndice D, uma mecânica Newtoniana com massa dependente da posição emerge, a partir de lagrangianas deformadas duais. E no apêndice (E) pode ser visto uma cinemática generalizada a partir de derivadas deformadas duais.

4.2 Oscilador Harmônico Simples Deformado

Fenômenos oscilatórios estão presentes em toda natureza. Sendo estudados tanto em física quanto em geologia, astronomia e ciência biológicas. Deste modo o estudo de osciladores se faz importante para compreensão do mundo em que vivemos. Antes de abordar modelos deformados apresentaremos o OHS usual.

4.2.1 Oscilador Harmônico Simples Usual

A lagrangiana que se segue descreve o modelo do oscilador harmônico simples. Nela notam-se os termos cinético e o potencial elástico usual.

$$L = \frac{m(\dot{x})^2}{2} - \frac{k(x(t))^2}{2}. \quad (4.40)$$

Tendo em conta a equação de Euler-Lagrange usual, que escrevemos:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (4.41)$$

As equações (4.40) e (4.41) fornecem a equação do oscilador harmônico simples, sem o termo de dissipação.

$$m \frac{d\dot{x}(t)}{dt} + k(x(t)) = 0. \quad (4.42)$$

A solução geral é dada por:

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t). \quad (4.43)$$

Onde a , b e $\omega = \sqrt{k/m}$ são constantes.

Na próxima seção serão apresentados osciladores desenvolvidos através de lagrangianas deformadas e lagrangianas deformadas duais, tanto na abordagem conforme quanto na q-deformada.

4.2.2 Modelos Deformados de Osciladores

Nesta subseção, serão apresentadas deformações do oscilador harmônico simples a partir de lagrangianas deformadas e com lagrangianas deformadas duais. Serão apresentados modelos deformados a partir de equações de Euler-Lagrange obtida através do métodos variacional deformado, no se refere às opções 1 e 3 do capítulo 3. Os modelos duais serão definidos a partir de equações de Euler-Lagrange deformadas duais, Aqui, novamente iniciaremos pela abordagem geral e, em seguida especificaremos nas abordagens conforme e na q-deformada.

4.2.2.1 Modelos de Osciladores, a partir de Lagrangianas Deformadas não Duais Opção 1

Pode-se obter uma deformação da equação para o oscilador harmônico simples através de seguinte lagrangiana deformada generalizada:

$$L = \frac{m(D_{\Psi t}(x(t)))^2}{2} - \frac{k(x(t))^2}{2}. \quad (4.44)$$

Considerando o método variacional com a opção 1, a equação de Euler-Lagrange resultante se escreve como:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \Psi(t, p) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi t} x} = 0. \quad (4.45)$$

tendo em conta a lagrangiana (4.44), a equação que descreve a dinâmica desse oscilador deformado geral fica:

$$\Psi(t, p) \frac{d}{dt} \left[\Psi(t, p) \frac{x(t)}{dt} \right] = -\frac{k(x(t))}{m}. \quad (4.46)$$

A seguir, descreveremos os osciladores conformes e q-deformados

- **OHS Conforme:**

A equação (4.46) na abordagem conforme é:

$$t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \left[t^{1-\alpha} \frac{dx(t)}{dt} \right] = -\frac{kx(t)}{m}. \quad (4.47)$$

A equação (4.47) descreve a dinâmica do oscilador deformado conforme. Iremos a seguir solucioná-la. Para isso, vale lembrar aspectos da autofunção da derivada deformada conforme.

Sabe-se que a exponencial esticada, $e_\alpha(t)$, é autofunção do operador derivada conforme, de acordo com a (2.29), Sendo assim, têm-se:

$$D_{\alpha t} e_\alpha(\lambda t) = D_{\alpha t} e^{\lambda \frac{t^\alpha}{\alpha}} = \lambda e^{\lambda \frac{t^\alpha}{\alpha}}. \quad (4.48)$$

Vamos agora considerar um ansatz de possíveis soluções da equação (4.47), na forma:

$$x = A e^{\lambda \frac{t^\alpha}{\alpha}}, \quad (4.49)$$

Com essa solução tentativa em (4.47), vem que:

$$D_t^\alpha (D_{\alpha t} A e^{\lambda \frac{t^\alpha}{\alpha}}) = -\frac{kx}{m}. \quad (4.50)$$

Aplicando os operadores de derivada conforme, em seqüência, obtêm-se:

$$\lambda^2 \left(A e^{\lambda \frac{t^\alpha}{\alpha}} \right) = \lambda^2 x = -\frac{kx}{m}. \quad (4.51)$$

Para todo $x \neq 0$, segue que:

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m}. \quad (4.52)$$

Tomando a raiz quadrada em ambos os membros obtêm-se:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i. \quad (4.53)$$

Substituindo (4.53) em (4.49), obtêm-se a expressão para a amplitude x do oscilador:

$$x = Ae^{\pm \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{t^\alpha}{\alpha} i}, \quad (4.54)$$

podendo ser escrita na forma:

$$x = Ae^{\pm \omega_\alpha t i}, \quad (4.55)$$

onde definimos a frequência angular dependente do tempo como:

$$\omega(t) = \omega_0 \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha}. \quad (4.56)$$

Pela equação (4.55), vemos que existem duas possíveis soluções para descrever a equação (4.47). Como o operador derivada conforme é linear, temos que a combinação linear dessas soluções também é solução. Deste modo:

$$x = Ae^{\omega t i} + Be^{-\omega t i}, \quad (4.57)$$

que pode ser escrito na forma de funções senoidais, através da formula de Euler, dada por:

$$e^{\pm \omega t i} = \cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t). \quad (4.58)$$

Reescrevendo a equação (4.57), obtêm-se:

$$x = Ae^{\omega t i} + Be^{-\omega t i} = A \cos(\omega t) + Ai \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) - Bi \sin(\omega t). \quad (4.59)$$

Agrupando em termos semelhantes obtêm-se:

$$x = (A + B) \cos(\omega t) + (A - B)i \sin(\omega t). \quad (4.60)$$

Fazendo $A + B = A' \cos(\phi)$ e $(A - B)i = -A' \sin(\phi)$, obtêm-se:

$$x = A' \cos(\phi) \cos(\omega t) - A' \sin(\phi) \sin(\omega t). \quad (4.61)$$

Através da propriedade de senos e cossenos, $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$ obtêm-se:

$$x = A' \cos(\omega t + \phi). \quad (4.62)$$

Um resultado similar pode ser encontrado na referencia (CHUNG, 2015). Esse resultado se diferencia daquele obtido por meio de derivadas usuais inteiras, apenas no que se refere à frequência angular (ω), que agora é dependente do tempo. Sendo $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ a frequência angular para o caso inteiro e $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{t^{\alpha-1}}{\alpha}$ a frequência angular conforme.

A figura (4.1), representa a posição x em função do tempo, para α assumindo valores distintos:

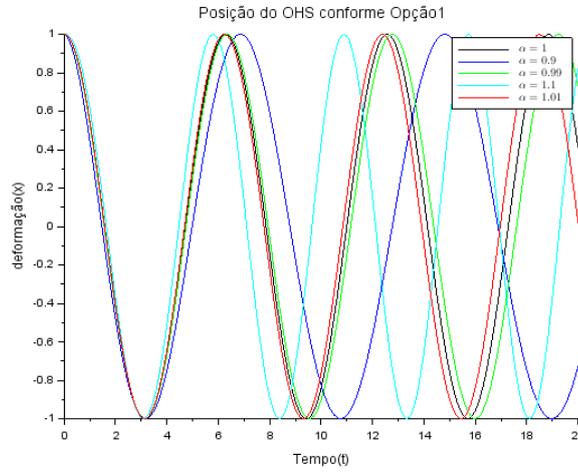


Figura 4.1: Posição de um OHS Conforme, em função do tempo.

O gráfico da figura (4.1), foi gerado utilizando $A' = 1$, $k = 1$ e $m = 1$. Pode-se perceber que a amplitude não varia com o tempo, e é independente do valor de α . Também se pode notar que a frequência de oscilação varia no tempo exceto para o caso usual em que $\alpha = 1$.

Neste momento será analisada a energia do OHS conforme.

A energia cinética conforme é dependente do quadrado da velocidade deformada, que é dada pela equação (4.28), na abordagem conforme e é escrita como:

$$T_\alpha = \frac{m(D_{\alpha t}(x(t)))^2}{2} = \frac{mA'^2}{2} (D_\alpha \cos(\omega(t)t + \phi))^2 = \frac{kA'^2}{2} \sin^2(\omega(t)t + \phi). \quad (4.63)$$

Sendo similar a energia cinética do OHS usual, exceto por sua frequência de oscilação variar no tempo.

A energia potencial conforme é dependente do quadrado da posição. Sendo escrita da seguinte forma:

$$U_\alpha = kx^2 = \frac{kA'^2}{2} \cos^2(\omega(t)t + \phi). \quad (4.64)$$

Semelhante ao que ocorre com a energia cinética conforme, a energia potencial conforme também difere da energia potencial do OHS usual apenas por sua frequência de oscilação variar no tempo.

Tanto a energia cinética conforme quanto a potencial conforme são funções oscilatórias de mesma amplitude $kA'^2/2$. A energia total do sistema é:

$$E = T + U = \frac{kA'^2}{2} (\sin^2(\omega(t)t + \phi) + \cos^2(\omega(t)t + \phi)) = \frac{kA'^2}{2}. \quad (4.65)$$

Deste modo, pode-se dizer que o sistema é hamiltoniano, de modo que a energia total se conserva. Além disso, a energia total deste sistema é idêntica a energia total do OHS usual. A energia do sistema se conservar não significa que estamos lidando com um sistema isolado. A interação com o meio conserva a energia total do sistema, mas altera a frequência de oscilação fazendo a mesma variar no tempo.

No próximo tópico, analisaremos com mais detalhes a frequência de oscilação do OHS conforme.

• Frequência e Período de Oscilação

A frequência angular de um oscilador harmônico deformado, descrita pela (4.56) é uma função polinomial de ordem $\alpha - 1$. Nota-se ainda que sua frequência angular torna-se idêntica a de um OHS usual, ou seja, para quando $\alpha = 1$.

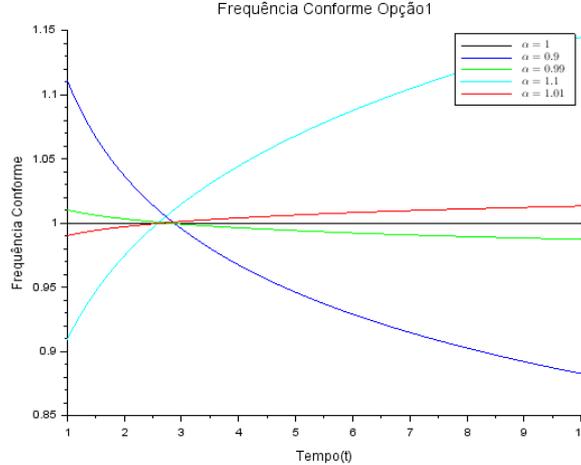


Figura 4.2: Frequência Angular de um OHS Conforme, como função do tempo.

No gráfico (4.2), a frequência angular de um OHS conforme é traçada em função do tempo, para diferentes valores de α , usando $m = 1$ e $k = 1$. Quando $\alpha = 1$, recupera-se o valor de frequência angular de um OHS usual $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Para valores de α menores que 1, temos que a frequência angular cai com o tempo. Quanto menor o α maior a velocidade com que cresce o afastamento entre a frequência angular deformada ω e a frequência angular usual ω_0 . Para valores de α maiores que 1, temos que a frequência angular cresce com o tempo. Quanto maior o α maior a velocidade com que cresce a separação entre a frequência angular deformada ω e a frequência angular usual ω_0 .

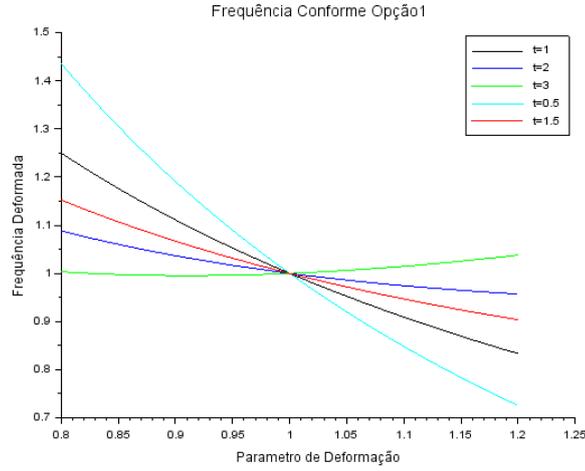


Figura 4.3: Frequência angular de um OHS Conforme, em função do parâmetro α de deformação.

Podemos ainda esboçar um gráfico da frequência angular em função do parâmetro α para tempos constantes.

O gráfico (4.3) foi gerado com $k = 1$, $m = 1$. Pode ser visto que para valores de tempo fixos, as curvas são a representação de funções exponenciais e todas se cruzam em $\alpha = 1$. Este resultado é esperado, uma vez que em $\alpha = 1$, a função $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$, que não depende de t .

A frequência de oscilação pode ser obtida através da relação:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\omega_0} \frac{t^{\alpha-1}}{2\pi\alpha}. \quad (4.66)$$

Que é proporcional a frequência angular ω . Deste modo, variando da mesma forma com o tempo. Uma redução em ω implica em uma redução proporcional em f .

Pode ser obtido o período de oscilação através da relação:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{1}{\omega_0}} \frac{2\pi\alpha}{t^{\alpha-1}}. \quad (4.67)$$

Podemos ainda escrever o período de oscilação, através da diferença de tempo entre dois máximos consecutivos da equação (4.62), o que equivale aos tempos em que o $\cos(\omega t + \phi) = 1$ um procedimento análogo ao feito na referência (CHUNG, 2015). Ou seja os tempos para os quais:

$$\omega t + \phi = \omega_0 \frac{\tau^\alpha}{\alpha} + \phi = 2\pi n. \quad (4.68)$$

Onde τ é um tempo onde o oscilador atinge seu valor máximo. Isolando τ , obtêm-se:

$$\tau(n) = \left(\frac{(2\pi n - \phi)\alpha}{\omega_0} \right)^{1/\alpha} = \left(\frac{2\pi \left(n - \frac{\phi}{2\pi} \right) \alpha}{\omega_0} \right)^{1/\alpha}. \quad (4.69)$$

Podendo ser escrito na forma:

$$\tau(n') = \left(\frac{2\pi\alpha n'}{\omega_0} \right)^{1/\alpha}. \quad (4.70)$$

Onde $n' = n - \phi/2\pi$.

No intuito de determinar o período de oscilação T . Será tomada a subtração de dois máximos consecutivos. Se denotarmos $\tau_{(n'+1)}$ como o intervalo de tempo transcorrido entre dois máximos consecutivos, têm-se:

$$\tau_{(n'+1)} = \tau(n' + 1) - \tau(n') = \left(\frac{2\pi\alpha(n' + 1)}{\omega_0} \right)^{1/\alpha} - \left(\frac{2\pi\alpha n'}{\omega_0} \right)^{1/\alpha}. \quad (4.71)$$

Explicitando os termos n' , obtêm-se:

$$\tau_{(n'+1)} = \tau(n' + 1) - \tau(n') = \left(\frac{2\pi\alpha}{\omega_0} \right)^{1/\alpha} (n' + 1)^{1/\alpha} - \left(\frac{2\pi\alpha}{\omega_0} \right)^{1/\alpha} n'^{1/\alpha}. \quad (4.72)$$

Que pode ser reescrito como:

$$\tau_{(n'+1)} = \left(\frac{2\pi\alpha}{\omega_0} \right)^{1/\alpha} \left((n' + 1)^{1/\alpha} - n'^{1/\alpha} \right). \quad (4.73)$$

Ou seja:

$$\frac{\tau_{n'+1}}{T_{n'}} = \frac{n'^{1/\alpha} \left((1 + 1/n')^{1/\alpha} - 1 \right)}{n'^{1/\alpha} \left(1 - (1 - 1/n')^{1/\alpha} \right)} = \frac{\left((1 + 1/n')^{1/\alpha} - 1 \right)}{\left(1 - (1 - 1/n')^{1/\alpha} \right)}. \quad (4.74)$$

A equação (4.74) é maior que 1 para todo $\alpha < 1$, ou seja, o período de oscilação aumenta a cada ciclo. Este resultado pode ser visto na referência (CHUNG, 2015). Para todo $\alpha > 1$ a equação (4.74) é menor que 1, apresentando redução do período de oscilação a cada ciclo.

- **OHS q-deformado:**

A equação (4.46), na abordagem q-deformada pode ser escrita como:

$$(1 + (1 - q)t) \frac{d}{dt} \left[(1 + (1 - q)t) \frac{x(t)}{dt} \right] = -\frac{kx(t)}{m}. \quad (4.75)$$

Sabe-se que a q-exponencial elevada a um fator λ , $(e_q(t))^\lambda$, é autofunção do operador q-derivada. Isso significa dizer que:

$$D_{qt}(e_q(t))^\lambda = D_{qt} (1 + (1 - q)t)^{\lambda/(1-q)} = \lambda (1 + (1 - q)t)^{\lambda/(1-q)}. \quad (4.76)$$

Então, adotando soluções na forma:

$$x = A (1 + (1 - q)t)^{\lambda/(1-q)}, \quad (4.77)$$

obtêm-se:

$$D_{qt} \left[D_{qt} \left(A (1 + (1 - q)t)^{\lambda/(1-q)} \right) \right] = -\frac{kx}{m}. \quad (4.78)$$

Aplicando os operadores q-derivada, em sequência, obtêm-se:

$$\lambda^2 (1 + (1 - q)t)^{\lambda/(1-q)} = \lambda^2 x = -\frac{kx}{m}. \quad (4.79)$$

Para todo $x \neq 0$, segue que:

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m}. \quad (4.80)$$

Aplicando a raiz quadrada a ambos os membros obtêm-se:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i. \quad (4.81)$$

Aplicando (4.81) em (4.77) obtêm-se a expressão para a amplitude x do oscilador:

$$x = A (1 + (1 - q)t)^{\pm \frac{1}{(1-q)} \sqrt{\frac{k}{m}} i}. \quad (4.82)$$

Através da formula de Euler deformada (2.46) e com o auxílio das equações (2.56) e (2.57), pode-se escrever:

$$(e_q^x)^{\pm \sqrt{\frac{k}{m}} i} = \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \frac{\ln(1 + (1 - q)t)}{(1 - q)} \right) \pm i \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \frac{\ln(1 + (1 - q)t)}{(1 - q)} \right). \quad (4.83)$$

Ou ainda:

$$(e_q^x)^{\pm \sqrt{\frac{k}{m}} i} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t). \quad (4.84)$$

Onde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{\ln(1 + (1 - q)t)}{(1 - q)t}$.

Existem duas possíveis soluções. Como o operador q-derivada é linear, temos que a combinação linear dessas soluções também é solução. Deste modo:

$$x = A (e_q^x)^{\frac{k}{m} i} + B (e_q^x)^{-\frac{k}{m} i}. \quad (4.85)$$

Explicitando $(e_q^x)^{\frac{k}{m} i}$ e $(e_q^x)^{-\frac{k}{m} i}$:

$$x = A \cos(\omega t) + iA \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) - B \sin(\omega t) \quad (4.86)$$

Agrupando em termos semelhantes, obtêm-se:

$$x = (A + B) \cos(\omega t) + (A - B)i \sin(\omega t). \quad (4.87)$$

Fazendo $A + B = A' \cos(\phi)$ e $(A - B)i = -A' \sin(\phi)$: obtêm-se:

$$x = A' \cos(\phi) \cos(\omega t) - A' \sin(\phi) \sin(\omega t). \quad (4.88)$$

Através da propriedade de senos e cossenos, $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(a)$ obtêm-se:

$$x = A' \cos(\omega t + \phi). \quad (4.89)$$

Nota-se que a solução obtida para esse caso de oscilador, se diferencial daquela para o oscilador usual, apenas pela função que representa a frequência angular (ω). Aqui, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ é a frequência angular para o caso inteiro e $\omega = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{\ln(1 + (1 - q)t)}{(1 - q)t}}$ a frequência angular conforme.

A figura (4.4), representa a variação da amplitude em função do tempo para, q assumindo valores distintos:

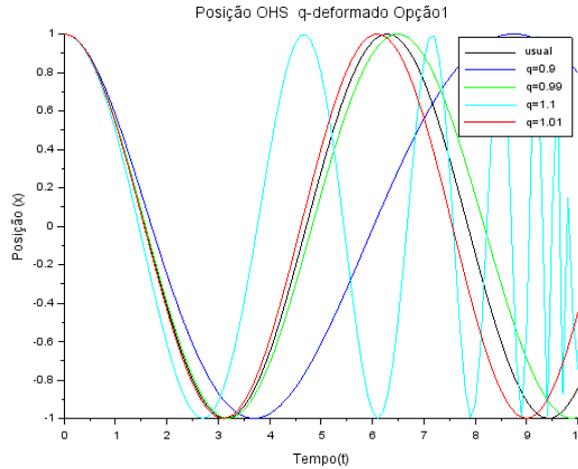


Figura 4.4: Posição em função do tempo, para o oscilador q-deformado.

O gráfico representado pela figura (4.4) foi gerado utilizando $A' = 1$, $K = 1$ e $m = 1$. pode-se perceber que a amplitude máxima não varia com o tempo e é independente do valor de q . Também se pode notar que a frequência de oscilação varia no tempo, exceto para o caso usual, com $q=1$.

Neste momento será analisada a energia do OHS q-deformado.

A energia cinética q-deformada é dependente do quadrado da velocidade deformada, que é dada pela equação (4.28), na abordagem q-deformada e é escrita como:

$$T_q = \frac{m(D_{qt}(x(t)))^2}{2} = \frac{mA'^2}{2} (D_{qt} \cos(\omega(t)t + \phi))^2 = \frac{kA'^2}{2} \sin^2(\omega(t)t + \phi). \quad (4.90)$$

Sendo similar a energia cinética do OHS usual, exceto por sua frequência de oscilação variar no tempo.

A energia potencial q-deformada é dependente do quadrado da posição. Sendo escrita da seguinte forma:

$$U_q = kx^2 = \frac{kA'^2}{2} \cos^2(\omega(t)t + \phi). \quad (4.91)$$

Tanto a energia cinética q-deformada quanto a energia potencial q-deformada diferem das energias cinéticas e potenciais do OHS usual, apenas por sua frequência de oscilação variar no tempo, sendo ambas funções oscilatórias de mesma amplitude $kA'^2/2$. A energia total do sistema é:

$$E = T_q + U_q = \frac{kA'^2}{2} (\sin^2(\omega(t)t + \phi) + \cos^2(\omega(t)t + \phi)) = \frac{kA'^2}{2}. \quad (4.92)$$

Deste modo, pode-se dizer que o sistema é conservativo, a energia total se conserva. A interação com o meio conserva a energia total do sistema, embora altere a frequência de oscilação fazendo a mesma variar no tempo.

A seguir será analisada a frequência de oscilação do OHS q-deformado.

- **Frequência e Período de Oscilação q-deformados**

A frequência de oscilação pode ser obtida através da relação:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{\ln(1 + (1 - q)t)}{2(1 - q)\pi t}}. \quad (4.93)$$

O gráfico da frequência f em função do tempo pode ser visto na figura (4.5):

É possível perceber pelo gráfico da figura (4.5) que, para $q = 1$, a frequência é constante, $q < 1$, a mesma decresce com o tempo, e para $q > 1$ ela cresce com o tempo.

Pode ser obtido o período de oscilação através da relação:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{m}{k} \frac{2(1 - q)\pi t}{\ln(1 + (1 - q)t)}}. \quad (4.94)$$

Podemos ainda escrever o período de oscilação, através da diferença de tempo entre dois máximos consecutivos da equação (4.89) isso equivale aos instantes em que o $\cos(\omega t + \phi) = 1$. Ou seja, os tempos para os quais:

$$\omega t + \phi = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{\ln(1 + (1 - q)\tau_n)}{(1 - q)}} + \phi = 2\pi n. \quad (4.95)$$

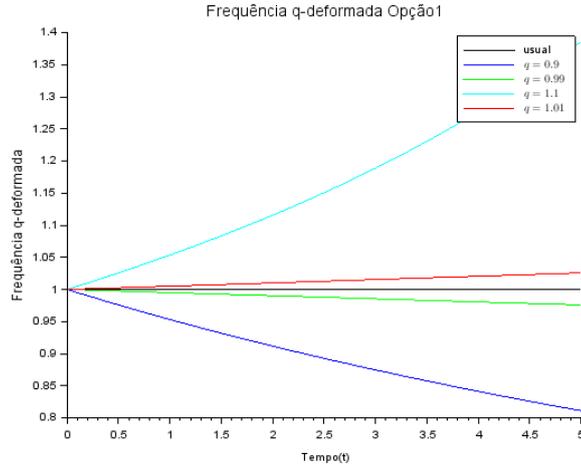


Figura 4.5: Frequência de Oscilação q-deformado em função do tempo.

Onde τ_n é instante de máximo. Um algebrismo simples nos permite escrever para $\tau(n)$:

$$\tau(n) = \frac{\exp \left[\sqrt{\frac{m}{k}} (1-q) (2\pi n - \phi) \right] - 1}{(1-q)} = \frac{\exp \left[\sqrt{\frac{m}{k}} (1-q) (2\pi(n - \phi/(2\pi))) \right] - 1}{(1-q)}. \quad (4.96)$$

Ou simplesmente, como:

$$\tau(n') = \frac{\exp \left[\sqrt{\frac{m}{k}} (1-q) (2\pi n') \right] - 1}{(1-q)}, \quad (4.97)$$

onde $n' = n - \phi/2\pi$.

Como no caso do oscilador conforme, se denotarmos $\tau(n+1)$ como o intervalo de tempo transcorrido entre dois máximos consecutivos, têm-se:

$$\tau_{n'+1} = \frac{\exp \left[\sqrt{\frac{m}{k}} (1-q) (2\pi(n'+1)) \right] - \exp \left[\sqrt{\frac{m}{k}} (1-q) (2\pi(n')) \right]}{(1-q)}, \quad (4.98)$$

o período de oscilação.

Podemos analisar a variação do período, ciclo após ciclo. Para tal fim, tomemos a razão entre $\tau(n'+1)$ e $\tau(n')$, que pode ser escrita como:

$$\frac{\tau_{n'+1}}{\tau_{n'}} = \frac{\exp \left[\sqrt{\frac{m}{k}} (1-q) (2\pi(n'+1)) \right] - \exp \left[\sqrt{\frac{m}{k}} (1-q) (2\pi(n')) \right]}{\exp \left[\sqrt{\frac{m}{k}} (1-q) (2\pi(n')) \right] - \exp \left[\sqrt{\frac{m}{k}} (1-q) (2\pi(n'-1)) \right]}. \quad (4.99)$$

Evidenciando a exponencial, $\exp \left[\sqrt{\frac{m}{k}}(1-q)(2\pi(n')) \right]$, no numerador e no denominador da razão em (4.99), resulta finalmente na expressão:

$$\frac{\tau_{n'+1}}{\tau_{n'}} = \frac{\exp \left[\sqrt{\frac{m}{k}}(1-q)(2\pi) \right] - 1}{1 - \exp \left[-\sqrt{\frac{m}{k}}(1-q)(2\pi) \right]}. \quad (4.100)$$

Percebe-se que, quando $q < 1$, a equação (4.100) é maior do que 1 e o período cresce com o tempo. Quando $q > 1$, a equação (4.100) é menor do que 1 e o período decresce com o tempo. Um comportamento similar ao que acontece com o período definido através de derivadas conformes. Porém, sem a dependência do número de ciclos n' .

4.2.2.2 Modelos de Osciladores, a partir de Lagrangianas Deformadas não Duais, Opção 3

Agora serão estudadas equações de osciladores harmônicos oriundas de equações de Euler-Lagrange, deduzidas através da terceira opção de abordagem variacional para a lagrangiana da equação (4.44). A Euler-Lagrange em questão é dada pela equação (3.42) e esta escrita abaixo:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[\Psi(t, p) \frac{\partial L}{\partial D_{\Psi t} x} \right] = 0. \quad (4.101)$$

Considerando novamente a lagrangiana dada pela equação (4.44 e a equação de Euler Lagrange (4.130), isso leva a seguinte equação de movimento:

$$\frac{d}{dt} \left[\Psi^2(t, p) \frac{d(x(t))}{dt} \right] = -\frac{k}{m}(x(t)). \quad (4.102)$$

A equação (4.102) conduz a um novo oscilador harmônico deformado, não apenas com a derivada deformada geral, mas obtido via método variacional da nomeada opção 3. Soluções analíticas para equações nesta forma são, em geral, de difícil obtenção. Por este motivo, as soluções nas abordagens conforme e q-deformada serão obtidas via método numérico. O método numérico adotado foi o método de Euler Duplo, que está descrito no apêndice (F).

É interessante notar que se a massa for dependente do tempo na forma $m(t) = m_0 \Psi^2(x, p)$, a equação (4.102) assume a forma:

$$\Psi^2(t, p) \frac{d}{dt} \left[\Psi^2(t, p) \frac{d(x(t))}{dt} \right] = -\frac{k}{m_0}(x(t)). \quad (4.103)$$

Será visto mais adiante que nas abordagens conforme e q-deformada, reobtem-se as equações definidas pela opção 1, com algumas redefinições de parâmetros. A seguir, a equação (4.102) será apresentada nas abordagens conforme e q-deformada.

- **OHS conforme, pela Opção 3:**

A equação (4.102) na abordagem conforme, se escreve da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left[t^{2-2\alpha} \frac{d(x(t))}{dt} \right] = -\frac{k}{m}(x(t)). \quad (4.104)$$

A solução numérica da equação (4.104), via Euler duplo(ver apêndice (F)). Na figura (4.6) apresentamos o gráfico relativo a solução numérica para essa equação, com a posição versus tempo.

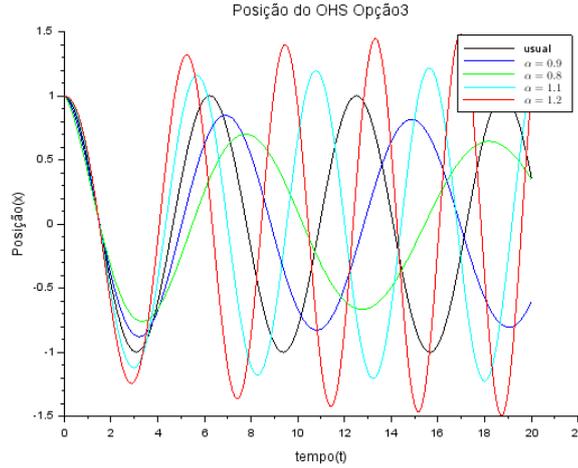


Figura 4.6: Posição em função do tempo, oscilador Conforme Abordagem 3.

A seguir, será feita a análise de energia para este oscilador. A energia cinética deformada é dada por:

$$T_\alpha = \frac{m}{2} \left(t^{2-2\alpha} \frac{d(x(t))}{dt} \right)^2, \quad (4.105)$$

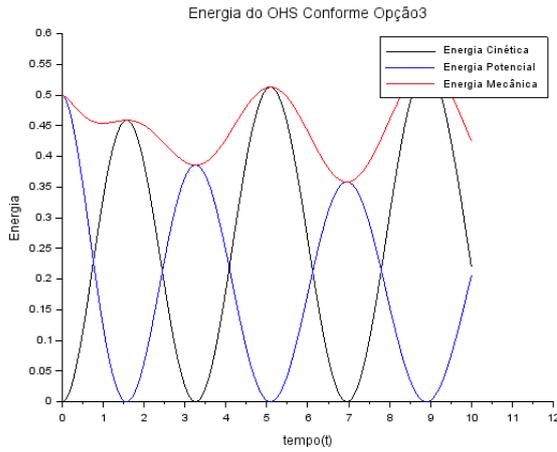
e a energia potencial:

$$U_\alpha = \frac{kx^2}{2}. \quad (4.106)$$

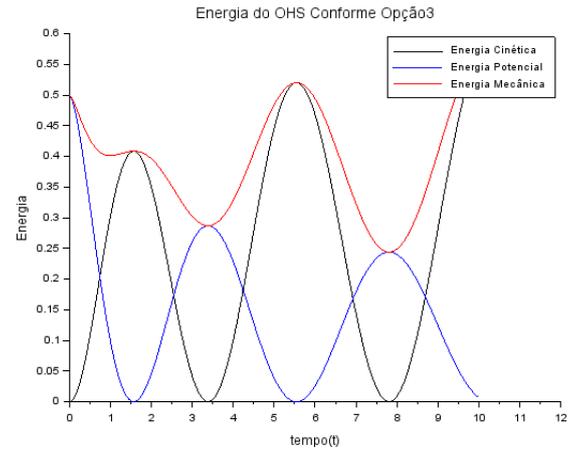
A energia mecânica do sistema é dada pela soma de T_α e U_α . A mesma rotina numérica usada para gerar o gráfico da posição em função do tempo, pode ser usada para gerar os gráficos das energias cinética, potencial e mecânica em função do tempo, uma vez que a velocidade conforme é calculada como parte da rotina (ver apêndice (G)). Na figura (4.7), temos quatro gráficos comparando as energias cinética, potencial e mecânica de um OHS conforme, deformado a partir da opção 3: dois com $\alpha < 1$ e dois com $\alpha > 1$.

Nos gráficos (a) e (b) da figura (4.7), temos que a energia cinética e a energia potencial são funções oscilatórias. Sendo que a energia cinética possui valor mínimo igual à zero e valor máximo aumentando a cada ciclo, enquanto que a energia potencial possui valor mínimo também zero e o valor máximo diminui a cada ciclo.

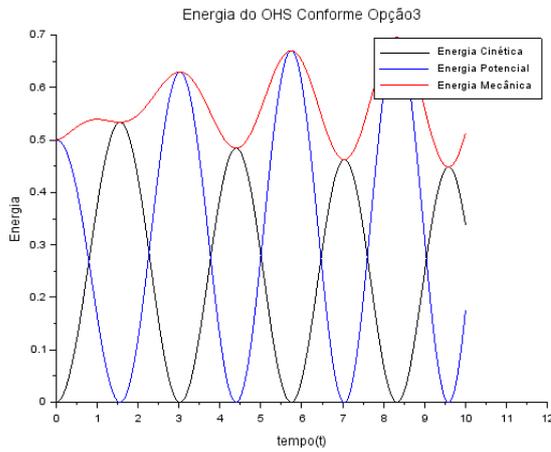
O aumento de valor máximo da energia cinética é maior ciclo à ciclo que a queda de valor máximo da energia potencial, dando origem a uma energia mecânica oscilatória que entre o tempo de 0 a 3 segundos está em queda e após este tempo começa a



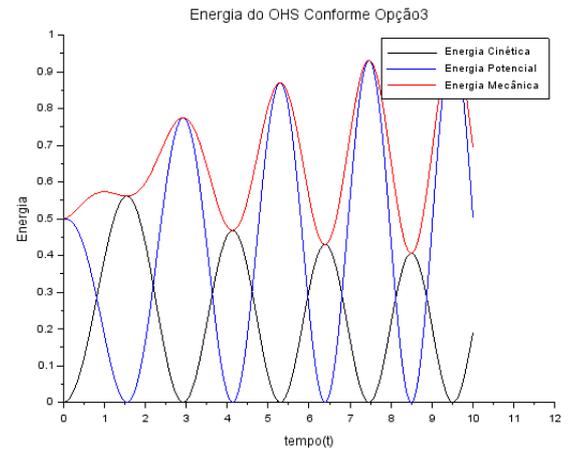
(a) Energia OHS Usual em função do tempo, $\alpha = 0.9$



(b) Energia OHS em função do tempo, $\alpha = 0.8$



(c) Energia OHS em função do tempo, $\alpha = 1.1$



(d) Energia OHS em função do tempo, $\alpha = 1.2$

Figura 4.7: Análise de Energia do OHS Conforme Opção 3

apresentar oscilações harmônicas com aumento de amplitude. Como consequência, a figura (4.6) com $\alpha < 1$ possui uma queda de amplitude muito maior no primeiro ciclo que nos demais. O fenômeno oposto para energia cinética e potencial é observado nos gráficos (c) e (d): nos tempos 0 a 3 segundos ocorre aumento da energia mecânica. Após isso é observado novamente oscilações com aumento de amplitude. Deste modo, a figura (4.6) com $\alpha > 1$ possui um aumento de amplitude muito maior no primeiro ciclo que nos demais.

Usando o que já conhecemos de casos anteriores, pode-se obter uma solução analítica para um caso particular, com a massa $m = m(t) = m_0 t^{2-2\alpha}$. Assim, a equação (4.104) fica reescrita, para esse caso particular, como:

$$t^{2-2\alpha} \frac{d}{dt} \left[t^{2-2\alpha} \frac{d(x(t))}{dt} \right] = -\frac{k}{m_0} (x(t)). \quad (4.107)$$

Fazendo $\alpha = \frac{1 + \beta}{2}$, a equação (4.107) fica escrita:

$$t^{1-\beta} \frac{d}{dt} \left[t^{1-\beta} \frac{d(x(t))}{dt} \right] = -\frac{k}{m_0}(x(t)). \quad (4.108)$$

Retomando a equação (4.47) e cuja solução analítica foi obtida anteriormente.

- **OHS q-deformado, pela Opção 3:**

A equação (4.102) na abordagem q-deformada, da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left[(1 + (1 - q)t)^2 \frac{d(x(t))}{dt} \right] = -\frac{k}{m}(x(t)). \quad (4.109)$$

A solução numérica, via Euler duplo(ver apêndice (F)) pode ser visto no gráfico da figura (4.8):

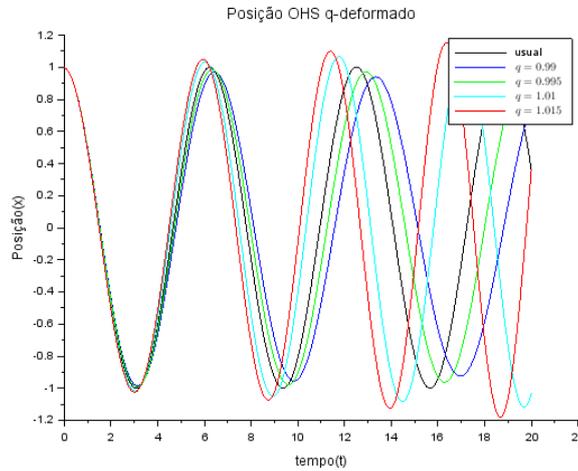


Figura 4.8: Posição em função do tempo, para o oscilador q-deformado Abordagem 3.

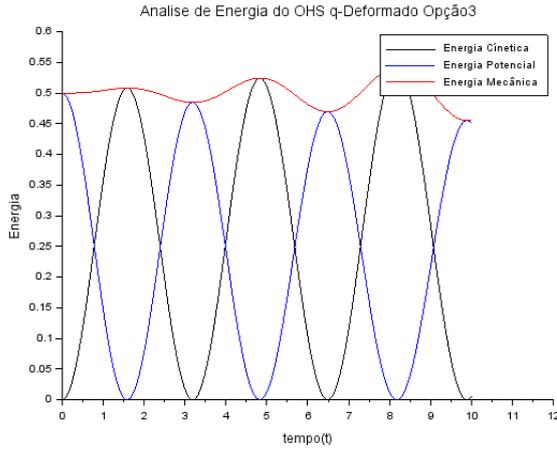
A seguir, será feita a análise de energia para este oscilador. A energia cinética q-deformada é dada por:

$$T_q = \frac{m}{2} \left((1 + (1 - q)t)^2 \frac{d(x(t))}{dt} \right)^2, \quad (4.110)$$

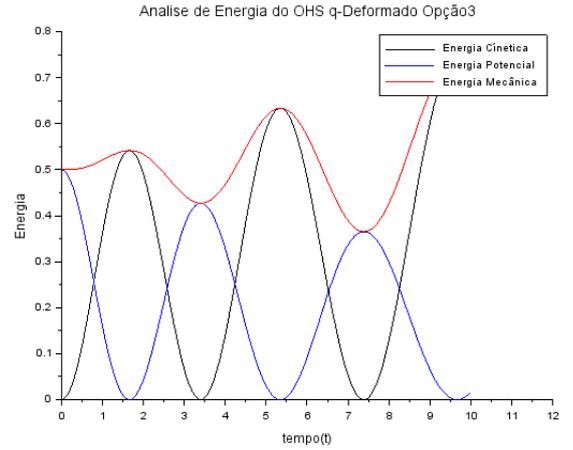
e a energia potencial:

$$U_q = \frac{kx^2}{2}. \quad (4.111)$$

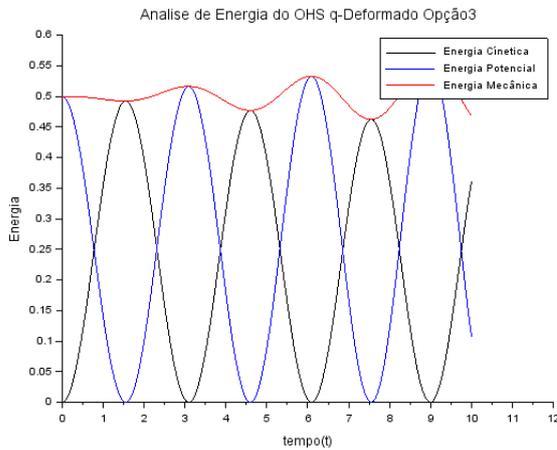
A energia mecânica do sistema é dada pela soma de T_q e U_q . A mesma rotina numérica, usada para gerar o gráfico da posição em função do tempo nesta abordagem, pode ser utilizada para gerar os gráficos das energias cinética, potencial e mecânica q-deformadas em função do tempo, uma vez que a velocidade q-deformada é calculada como parte da rotina (ver apêndice (G)). Na figura (4.9), temos quatro gráficos comparando as energias cinética, potencial e mecânica de um OHS q-deformado (opção 3): dois com $q < 1$ e dois com $q > 1$.



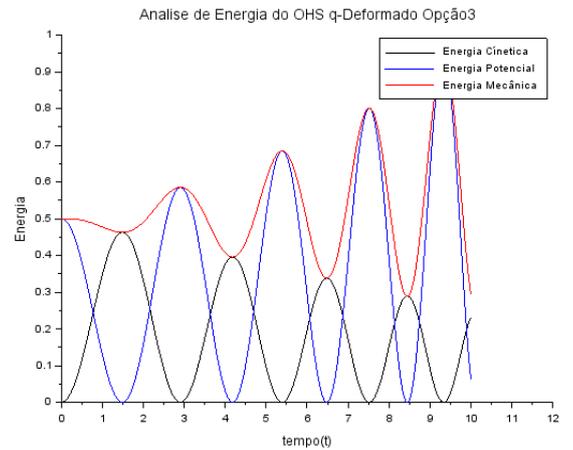
(a) Energia OHS Usual em função do tempo, $q = 0.99$



(b) Energia OHS em função do tempo, $q = 0.95$



(c) Energia OHS em função do tempo, $q = 1.01$



(d) Energia OHS em função do tempo, $q = 1.05$

Figura 4.9: Análise de Energia do OHS q-deformado Opção 3

Na figura (4.9), as energias cinética e potencial são funções oscilatórias, possuindo valor mínimo igual a zero. Nos gráficos (a) e (b) a energia cinética aumenta seu valor máximo a cada ciclo e a energia potencial reduz. O aumento de valor máximo da energia cinética é maior ciclo à ciclo que a queda de valor máximo da energia potencial. O fenômeno oposto para energia cinética e potencial é observado nos gráficos (c) e (d). A energia mecânica q-deformada dual possui características similares a sua análoga conforme, bem como as consequências quanto a posição.

Como no caso anterior, consideremos uma massa dependente do tempo, caso $m = m(t) = m_0 (1 + (1 - q)t)^2$. A equação (4.109) se torna:

$$(1 + (1 - q)t)^2 \frac{d}{dt} \left[(1 + (1 - q)t)^2 \frac{d(x(t))}{dt} \right] = -\frac{k}{m_0} (x(t)). \quad (4.112)$$

Para o limite de q tendendo a 1, pode-se desconsiderar os termos $(1 - q)^2$. Deste modo, a equação (4.112) fica escrita:

$$(1 + 2(1 - q)t) \frac{d}{dt} \left[(1 + 2(1 - q)t) \frac{d(x(t))}{dt} \right] = -\frac{k}{m_0}(x(t)). \quad (4.113)$$

Fazendo $q = \frac{1 + q'}{2}$. A equação (4.113) fornece a nova equação, válida para valores de q próximos de 1::

$$(1 + (1 - q')t) \frac{d}{dt} \left[(1 + (1 - q')t) \frac{d(x(t))}{dt} \right] = -\frac{k}{m_0}(x(t)). \quad (4.114)$$

Notando que apesar dessa equação retomar a forma da equação (4.75), ela é válida apenas para q próximo de 1.

4.2.2.3 Modelos de Osciladores, a partir de Lagrangianas Deformadas Duais- Opção 3 do método variacional dual

Consideremos agora uma lagrangiana para um oscilador, em que o termo cinético está escrito através de uma derivada deformada geral dual. Utilizamos aqui a extensão do cálculo de variações, para sistemas contendo derivadas deformadas duais, embutidas nas Lagrangiana. Seja então a seguinte lagrangiana:

$$L = \frac{m(\tilde{D}_{\Psi t}(x(t)))^2}{2} - \frac{k(x(t))^2}{2}. \quad (4.115)$$

Utilizando a opção 3 do método variacional dual (Cap.3, seção 3.2), obtivemos a equação de Euler-Lagrange (3.55), a qual reescrevemos aqui para maior clareza:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \Psi^{-1}(x, p) \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \tilde{D}_{\Psi t} x} \right] = 0. \quad (4.116)$$

Considerando então a lagrangiana (4.115), obtêm-se a equação que descreve a dinâmica desse oscilador, em que a derivada deformada geral, em sua versão dual, está presente. Ou seja,

$$\Psi^{-1}(x, p) \frac{d}{dt} \left[\Psi^{-1}(x, p) \frac{d(x(t))}{dt} \right] = -\frac{k(x(t))}{m}. \quad (4.117)$$

Especificaremos agora, utilizando a equação (4.117), os casos dos osciladores deformados conforme dual e q -deformado dual.

- **OHS Conforme Dual:**

A equação (4.117), na abordagem conforme dual, pode ser estabelecida como:

$$x^{\alpha-1} \frac{d}{dt} \left[x^{\alpha-1} \frac{d(x(t))}{dt} \right] = -\frac{kx(t)}{m}. \quad (4.118)$$

Para a obtenção de possíveis soluções analíticas da equação (4.118), vamos procurar por ansatz de soluções, seguindo a linha de raciocínio de equações de autovalores e autovetores. sabe-se que a q -exponencial reparametrizada é autofunção do operador

derivada conforme dual , de acordo com as eqs. (2.100) e (2.107). Considerando essas equações, podemos supor ansatz de soluções na forma:

$$x = Ae_{q=2-\alpha}^{(i\omega t+\phi)}. \quad (4.119)$$

Substituindo essa proposta de solução na equação que descreve a dinâmica desse oscilador, equação(4.118), resulta em:

$$A^{\alpha-1} \left(e_{q=2-\alpha}^{(i\omega t+\phi)} \right)^{\alpha-1} \frac{d}{dt} \left[A^{\alpha-1} \left(e_{q=2-\alpha}^{(i\omega t+\phi)} \right)^{\alpha-1} \frac{d}{dt} Ae_{q=2-\alpha}^{(i\omega t+\phi)} \right] = -\frac{kx}{m}. \quad (4.120)$$

Como a amplitude A é independente do tempo, podemos evidenciá-la na equação (4.120).

$$A^{2\alpha-1} \left(e_{q=2-\alpha}^{(i\omega t+\phi)} \right)^{\alpha-1} \frac{d}{dt} \left[\left(e_{q=2-\alpha}^{(i\omega t+\phi)} \right)^{\alpha-1} \frac{d}{dt} e_{q=2-\alpha}^{(i\omega t+\phi)} \right] = -\frac{kx}{m}. \quad (4.121)$$

Uma vez que a equação (4.119) é autofunção do operador derivada conforme dual à aplicação em sequencia desse operador resulta em:

$$-\omega^2 A^{2\alpha-1} \left[e_{q=2-\alpha}^{(i\omega t+\phi)} \right] = \lambda^2 A^{2(\alpha-1)} x = -\frac{kx}{m}. \quad (4.122)$$

Para $x \neq 0$, a equação (4.121) é satisfeita se na condição:

$$\omega^2 A^{2(\alpha-1)} = k/m. \quad (4.123)$$

Assim, obtêm-se os possíveis valores para a frequência angular:

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} A^{1-\alpha}. \quad (4.124)$$

Este modelo apresenta frequência dependente da amplitude. As possíveis soluções da equação (4.118) podem ser escritas como:

$$x = Ae_{q=2-\alpha}^{\left(\pm i \sqrt{\frac{k}{m}} A^{1-\alpha} \right) t + \phi}. \quad (4.125)$$

Percebe-se que duas soluções particulares são possíveis para a equação (4.125). Ambas se tratam de q-exponenciais complexas, possuindo parte real e parte imaginaria. Os gráficos da figura (4.10) apresentam as partes reais e imaginarias da solução dada por ω positivo:

As funções trigonométricas q-deformadas, que dão origem as curvas acima, podem ser vistas na referência (BORGES, 2004a). Porém as partes reais e imaginarias da equação (4.125), em separado, não são soluções da equação (4.117). Então pode-se trabalhar paralelamente utilizando métodos numéricos para se obter uma solução da equação (4.117). O método numérico escolhido foi o método Euler duplo, sendo a solução gerada por ele pode ser vista na figura (4.11).

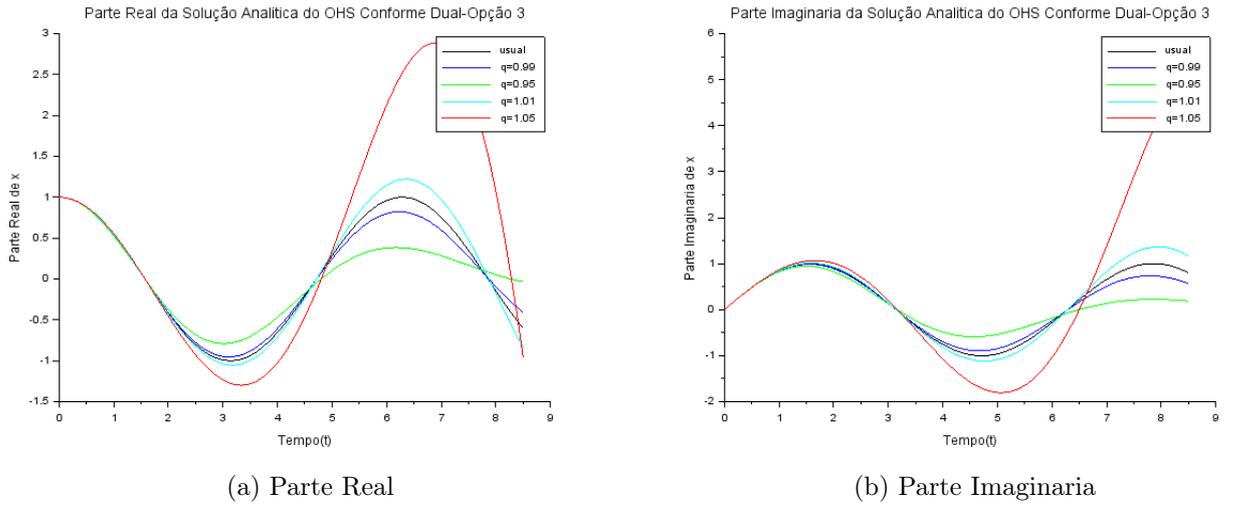


Figura 4.10: Parte Real e Imaginaria da Solução Analítica do OHS conforme dual Opção 3

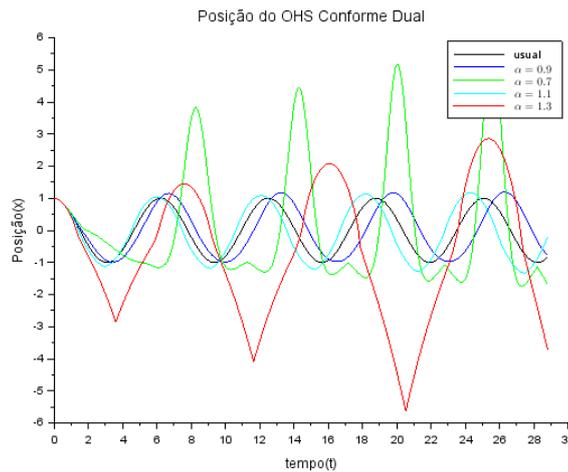


Figura 4.11: Posição em função do tempo, para o oscilador Conforme Dual.

A seguir será feita a análise de energia para este oscilador. A energia cinética conforme dual é dada por:

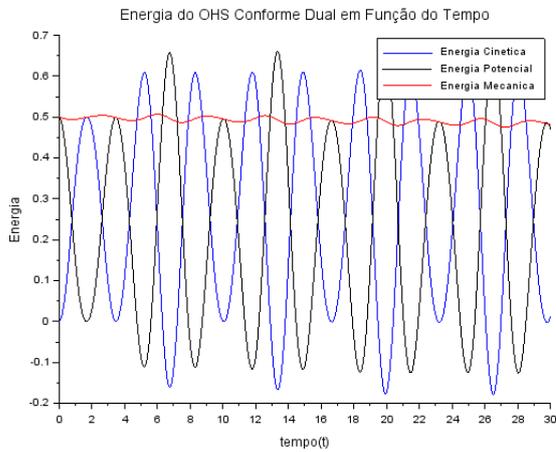
$$\tilde{T}_\alpha = \frac{m}{2} \left(x^{\alpha-1} \frac{d(x(t))}{dt} \right)^2, \quad (4.126)$$

e a energia potencial conforme dual:

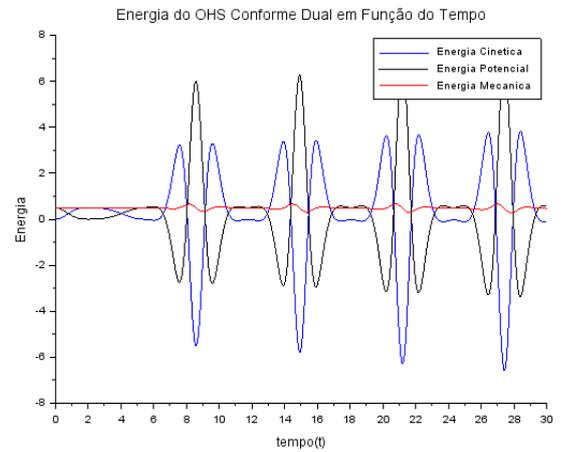
$$\tilde{U}_\alpha = \frac{kx^2}{2}. \quad (4.127)$$

A energia mecânica do sistema é dada pela soma das energias cinética conforme dual e pela energia potencial conforme dual. A mesma rotina numérica usada para gerar o gráfico da posição em função do tempo nesta abordagem, pode ser usada para gerar os gráficos dessas energias em função do tempo, uma vez que a velocidade

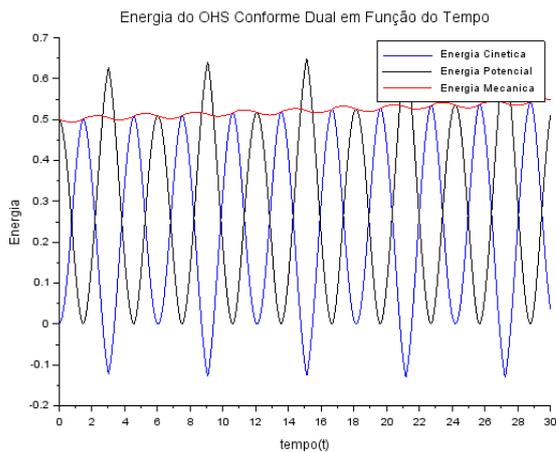
conforme dual é calculada como parte da rotina (ver apêndice (G)). Na figura (4.12), temos quatro gráficos comparando as energias cinética, potencial e mecânica de um OHS conforme dual (opção 3): dois com $\alpha < 1$ e dois com $\alpha > 1$.



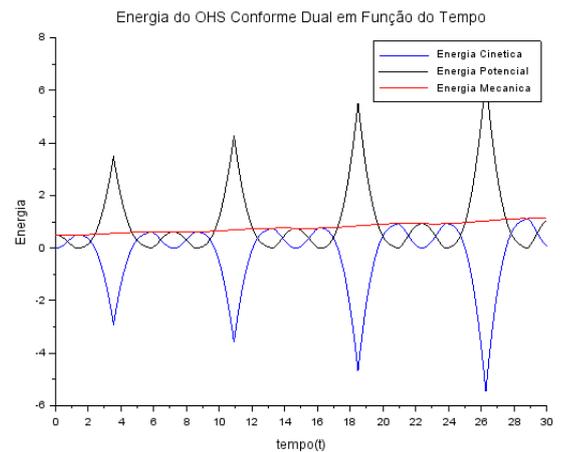
(a) Energia OHS em função do tempo, $\alpha = 0.9$



(b) Energia OHS em função do tempo, $\alpha = 0.7$



(c) Energia OHS em função do tempo, $\alpha = 1.1$



(d) Energia OHS em função do tempo, $\alpha = 1.3$

Figura 4.12: Análise de Energia do OHS Conforme Dual Opção 3

Os gráficos da figura (4.12) apresentam energias cinéticas e potenciais que, em determinados intervalos, assumem valores negativos. O que é uma inconsistência física do modelo e ocorreu devido ao fato de, tanto a velocidade conforme dual quanto a posição serem funções complexas.

- **OHS q-deformado Dual:**

A equação (4.117) na abordagem q-deformada é:

$$\frac{1}{(1 + (1 - q)x)} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{(1 + (1 - q)x)} \frac{dx(t)}{dt} \right] = -\frac{kx(t)}{m}. \quad (4.128)$$

A equação (2.112) é autofunção do operador q-derivada dual. Então pode-se propor ansatz de solução na forma:

$$x = \frac{\exp(\lambda t)}{(A^{-1} + (1 - q)) - (1 - q) \exp(\lambda t)}. \quad (4.129)$$

A substituição da equação (4.129) na equação (4.128), resulta em:

$$\lambda^2 x(t) = -\frac{kx(t)}{m}. \quad (4.130)$$

Que para $x \neq 0$ é satisfeita por:

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m}. \quad (4.131)$$

As possíveis soluções ficam:

$$x(t) = \frac{\exp\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}}it\right)}{(A^{-1} + (1 - q)) - (1 - q) \exp\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}}it\right)}. \quad (4.132)$$

Levando a duas soluções que satisfazem (4.128). Ambas possuem exponenciais complexas, possuindo parte real e parte imaginaria. Os gráficos da figura (4.13) apresentam as partes reais e imaginarias da solução dada por λ positivo:

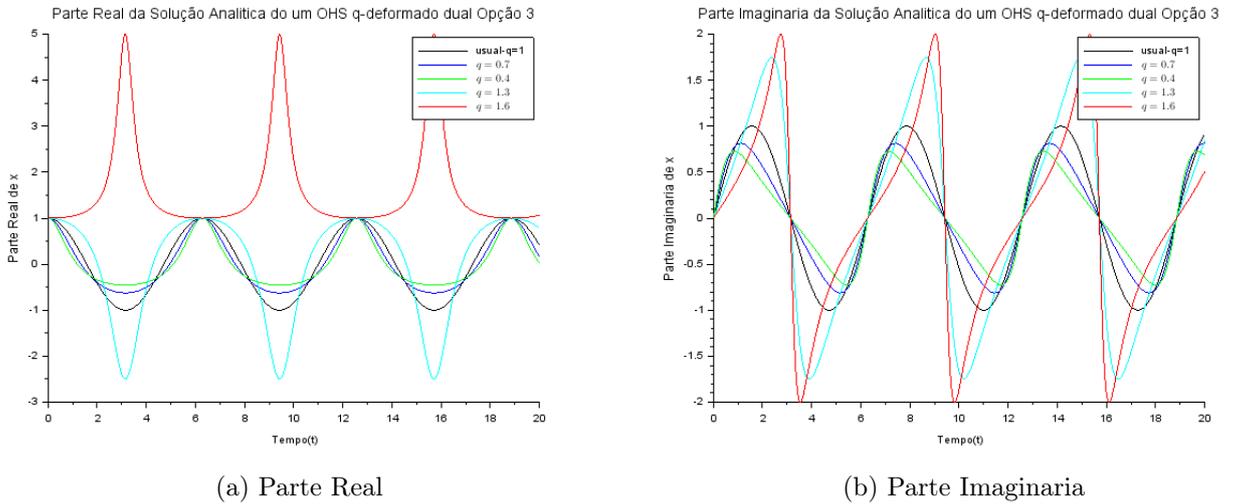


Figura 4.13: Parte Real e Imaginaria da Solução Analítica do OHS q-deformado dual Opção 3

As partes reais e imaginarias da equação (4.125), em separado, não são soluções da equação (4.128). Então pode-se trabalhar paralelamente utilizando métodos numéricos para se obter uma solução da equação (4.128), e a solução gerada por ele pode ser vista na figura (4.14).

A seguir, será feita a análise de energia para este oscilador. A energia cinética q-deformada dual é dada por:

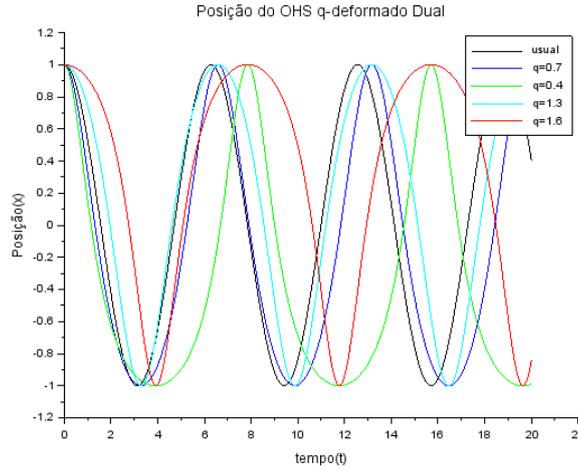


Figura 4.14: Posição em função do tempo, para o oscilador q-deformado Dual.

$$\tilde{T}_q = \frac{m}{2} \left[\left(\frac{1}{(1 + (1 - q)x)} \right) \frac{d(x(t))}{dt} \right]^2, \quad (4.133)$$

e a energia potencial:

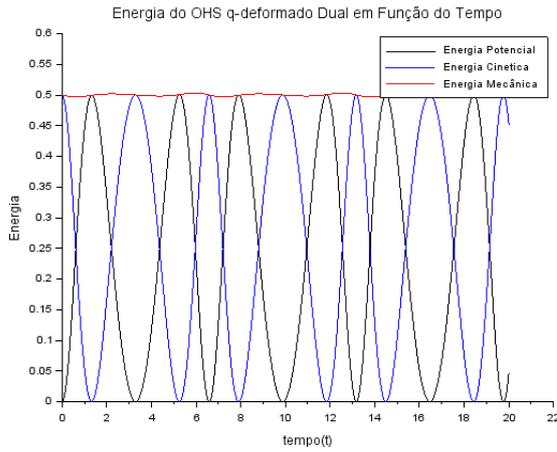
$$\tilde{U}_q = \frac{kx^2}{2}. \quad (4.134)$$

A energia mecânica do sistema é dada pela soma das energias cinética e potencial q-deformada duais. A mesma rotina numérica usada para gerar o gráfico da posição em função do tempo nesta abordagem, pode ser usada para gerar os gráficos dessas energias, uma vez que a velocidade q-deformada dual é calculada como parte da rotina (ver apêndice (G)). Na figura (4.15), temos quatro gráficos comparando as energias cinética, potencial e mecânica de um OHS q-deformado dual (opção 3): dois com $q < 1$ e dois com $q > 1$.

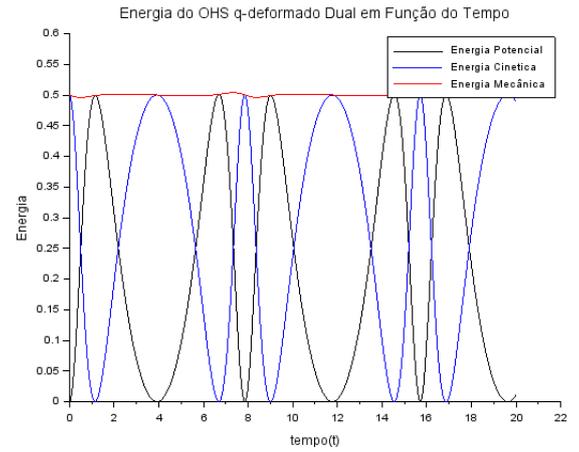
Os gráficos da figura (4.15), mostram que o sistema em questão conserva energia mecânica. As energias cinética e potencial q-deformadas duais apresentam variações de frequência de oscilação de forma cíclica e, como consequência disso, o gráfico da posição no tempo apresentado na figura (4.14) apresenta variações de frequência de oscilação e não de amplitude.

No apêndice (G) podem ser encontradas as rotinas numéricas utilizadas nessa seção.

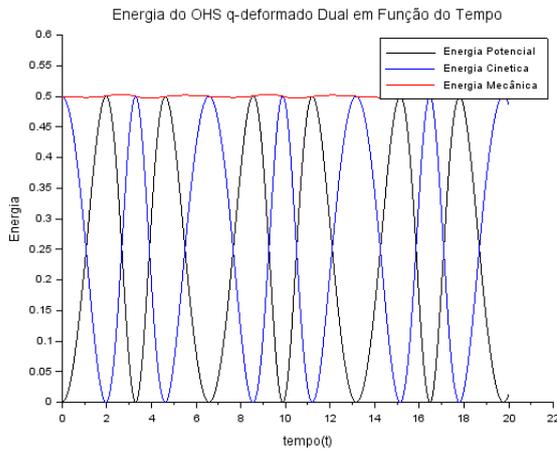
Na próxima seção, tratará de uma aplicação em radiobiologia. Onde serão apresentados modelos deformados e deformados duais para o calculo do fator de sobrevivência de células cancerígenas sujeitas a radiação.



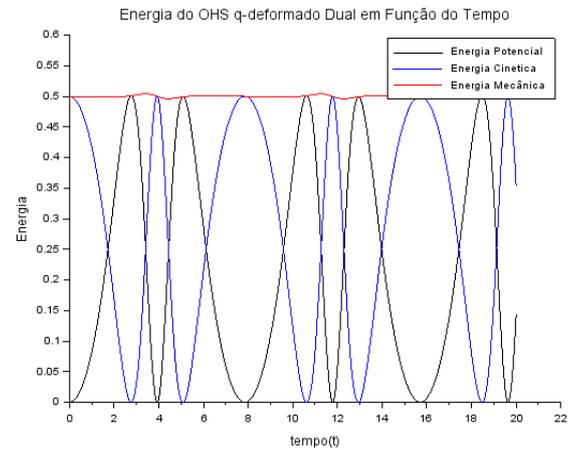
(a) Energia OHS em função do tempo, $q = 0.7$



(b) Energia OHS em função do tempo, $q = 0.4$



(c) Energia OHS em função do tempo, $q = 1.3$



(d) Energia OHS em função do tempo, $q = 1.6$

Figura 4.15: Análise de Energia do OHS q-Deformado Dual Opção 3

4.3 Modelos deformados para Fator de Sobrevivência de Células Cancerígenas

Em radiobiologia é importante saber a fração de células que sobrevive após a aplicação de uma determinada dose D de radiação. Esta fração recebe o nome de fator de sobrevivência (F_s) (WEBERSZPIL; SOTOLONGO-COSTA, 2017). Nesta seção serão apresentados e discutidos modelos deformados para F_s de células cancerígenas, sujeitas a radiação. A dose mínima de radiação para aniquilação da célula cancerígena, D_0 , é a dose acima da qual nenhuma célula sobrevive (SOTOLONGO-GRAU et al., 2010). Ou seja, a dose D é uma fração da dose D_0 . Na referência (SOTOLONGO-GRAU et al., 2011), existem valores tabelados de D_0 para diferentes tipos de radiação, aplicadas a diferentes tipos de tecido. Nesse contexto, iremos introduzir uma dose normalizada, $x = D/D_0$. Com o objetivo de embasar o leitor, primeiro serão abordados modelos usuais presentes na literatura. Em seguida, serão tratados modelos com derivadas deformadas e derivada deformadas duais.

4.3.1 Modelos Usuais

Na literatura é possível encontrar modelos usuais para o cálculo do F_s . Dentre esses modelos, temos o modelo linear e o modelo linear quadrático. Estes modelos serão discutidos a seguir.

Modelo linear (SOTOLONGO-GRAU et al., 2010):

Esse modelo foi desenvolvido a partir de mecânica estatística de Boltzmann-Gibbs (BG). No referido modelo, a quantidade de células sobreviventes, $N(x)$, após uma aplicação de uma dose x de radiação, pode ser calculada pela equação diferencial que representa o decaimento de células cancerígenas:

$$\frac{dN(x)}{dx} = -aN(x). \quad (4.135)$$

Com a condição inicial $N(0) = N_0$, onde N_0 é a quantidade de células antes da aplicação da radiação, a equação (4.135) pode ser resolvida por separação de variáveis. Desse modo:

$$\frac{dN(x)}{N(x)} = -adx. \quad (4.136)$$

Integrando a equação (4.136), obtêm-se:

$$\ln(N(x)) = -ax + c. \quad (4.137)$$

Aplicando a condição inicial, resulta que a constante c será dada por:

$$\ln(N_0) = c. \quad (4.138)$$

A equação final para o número de células sobreviventes em função da dose de radiação aplicada, resulta em:

$$N(x) = \exp(-ax + \ln(N_0)) = N_0 \exp(-ax). \quad (4.139)$$

Uma vez que a quantidade de células é da ordem do número de Avogadro, é mais simples trabalhar com a fração de células sobreviventes após a aplicação da radiação, que é o fator de sobrevivência F_s , a fração F_s resulta da equação (4.140) como:

$$F_s = \frac{N(x)}{N_0} = e^{-ax}. \quad (4.140)$$

Nesse modelo, os efeitos da radiação são cumulativos, ou seja, a aplicação de duas doses de radiação em separado é equivalente a aplicação de uma quantidade de radiação igual a soma delas. O modelo linear é eficaz para tratar dados experimentais relacionados apenas a alguns tecidos e para pequenas doses de radiação (SOTOLONGO-GRAU et al., 2010). Outro modelo existente na literatura é o modelo linear quadrático, cujo fator de sobrevivência, F_{s2} , dado por:

$$F_{s2} = e^{-ax+bx^2}. \quad (4.141)$$

Para doses moderadas, esse modelo se ajusta mais adequadamente o dados experimentais. Porém, nenhum dos dois modelos descreve bem os efeitos para altas doses. O que indicaria a possibilidade de elaboração de modelos mais robustos para abordar o problema em questão (SOTOLONGO-GRAU et al., 2010).

A seguir, são apresentados modelos deformados para o fator de sobrevivência F_s . Primeiro, com o modelo deformado generalizado, F_{sp} e, a partir dele, os modelos conforme $F_{s\alpha}$ e q-deformado F_{sq} . Após a apresentação dos modelos deformados não duais, serão apresentados modelos deformados duais.

4.3.2 Modelos Deformados

Na sequência, serão apresentados modelos deformados para o fator de sobrevivência. Tendo em conta a eq. (4.135), a derivada usual será substituída por uma deformada, em cada uma das abordagens consideradas nesta dissertação. Cada modelo assim obtido será comparado com aqueles existentes na literatura, bem como com dados experimentais.

4.3.2.1 Modelos com Derivadas Deformada não Duais

Aqui serão abordados modelos deformados de fator de sobrevivência, começando com o modelo deformado generalizado. A partir dele, serão apresentados os resultados na abordagem conforme e na q-deformada.

A substituição da derivada usual pela derivada deformada generalizada na equação (4.135), leva a seguinte equação:

$$\Psi(x, p) \frac{dN(x)}{dx} = -\lambda N(x). \quad (4.142)$$

Com a condição inicial $N(0) = N_0$.

Como já sabemos, autofunção do operador derivada deformada generalizada é dada pela equação (2.25). Tendo em conta esse conhecimento, a solução da equação (4.142) pode ser escrita como:

$$N(x) = N_0 \exp \left(-\lambda \int_0^x (\Psi(x, p))^{-1} dx \right). \quad (4.143)$$

O fator de sobrevivência deformado generalizado, F_{sp} , pode então ser escrito como:

$$F_{sp} = \frac{N(x)}{N_0} = \exp \left(-\lambda \int_0^x (\Psi(x, p))^{-1} dx \right). \quad (4.144)$$

Espera-se que para qualquer abordagem deformada, a equação (4.144) seja igual ao fator de sobrevivência usual F_s , no limite $p \rightarrow 1$. A seguir, analisaremos os modelos oriundo da equação (4.144) em cada abordagem deformada não dual, isto é, tanto na abordagem conforme quanto na q-deformada.

- **Fator de sobrevivência conforme $F_{s\alpha}$.**

O fator de sobrevivência conforme pode ser obtido, considerando a equação (4.144), na abordagem correspondente à equação (2.27).

$$F_{s\alpha} = \frac{N(x)}{N_0} = \exp \left(-\lambda \int_0^x x^{\alpha-1} dx \right). \quad (4.145)$$

Resolvendo a integral na eq.(4.168), têm-se o fator de sobrevivência:

$$F_{s\alpha} = \frac{N(x)}{N_0} = \exp\left(-\lambda \frac{x^\alpha}{\alpha}\right). \quad (4.146)$$

O modelo linear é reobtido quando $\alpha = 1$. Expandindo $-\lambda \frac{x^\alpha}{\alpha}$ em série de Taylor usual, em torno de $x = 1$, e até a segunda ordem, obtêm-se:

$$F_{s\alpha} = Ce^{\left(-\lambda(1-(\alpha-1))x - \lambda \frac{(\alpha-1)}{2} x^2\right)}. \quad (4.147)$$

Onde $C = \exp\left(-\lambda \left(\frac{1}{\alpha} - 1 - \frac{(\alpha-1)}{2}\right)\right)$. O resultado para F_s é proporcional ao fator de sobrevivência F_{s2} do modelo linear quadrático. Percebe-se então que o modelo conforme possui tanto o modelo linear quanto o linear quadrático, como casos particulares.

O gráfico relativo à equação (4.146) está representado na figura (4.146). Através dele, são realizadas comparações gráficas entre o modelo aqui proposto e os dados experimentais, referentes à aplicação de diversos tipos de radiação em células de rim humano. Os parâmetros utilizados para o ajuste de dados no modelo foram $\alpha = 1.359$ e $\lambda = 22.2$ e Constata-se uma boa aproximação com os dados experimentais.

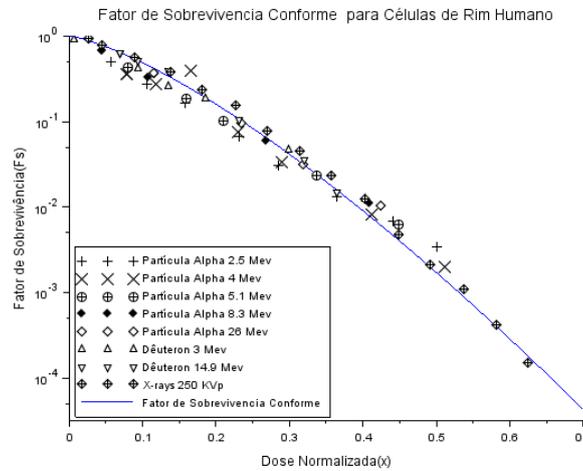


Figura 4.16: Fator de sobrevivência conforme para células de rim humano.

A desvantagem deste modelo, é não assumir valor nulo quando a dose normalizada $x = D/D_0$ for igual a 1. Ou seja, a dose mínima de aniquilação, neste modelo ainda deixaria células vivas, para qualquer que fosse o α . Deste modo é esperado que o modelo falhe para doses muito altas.

- **Fator de sobrevivência q-deformado.**

O fator de sobrevivência q-deformado pode ser obtido pela equação (4.144) na abordagem q-deformada. Nesse contexto, podemos reescrever a equação (4.144), usando a equação (2.30):

$$F_{sq} = \frac{N(x)}{N_0} = \exp \left(-\lambda \int_0^x \frac{1}{(1 + (1 - q)x)} dx \right). \quad (4.148)$$

A integral da equação (4.148) pode ser resolvida por substituição simples, com $u = 1 + (1 - q)x$ e $du = (1 - q)dx$. Obtemos então,

$$F_{sq} = \exp \left(\frac{-\lambda}{(1 - q)} \int_1^u \frac{1}{(u)} du \right). \quad (4.149)$$

Resolvendo a integral, obtêm-se:

$$F_{sq} = \exp \left(\frac{-\lambda \ln(u)}{(1 - q)} \right). \quad (4.150)$$

Explicitando u na equação (4.150):

$$F_{sq} = \exp \left(\frac{-\lambda \ln(1 + (1 - q)x)}{(1 - q)} \right). \quad (4.151)$$

O que resulta no fator de sobrevivência q-deformado, que de fato é uma q-exponencial elevada a um parâmetro " λ ".

$$F_{sq} = \exp \left(\ln \left((1 + (1 - q)x)^{-\lambda/(1-q)} \right) \right) = (1 + (1 - q)x)^{-\lambda/(1-q)}. \quad (4.152)$$

Na figura (4.17) pode ser visto o gráfico da equação, em comparação com dados experimentais referentes a vários tipos de radiação, aplicadas em células de rim humano. No gráfico, foram utilizado $q = 2$ e $\lambda = 8.8$. A curva gerada mostrou uma boa aproximação com os dados utilizados.

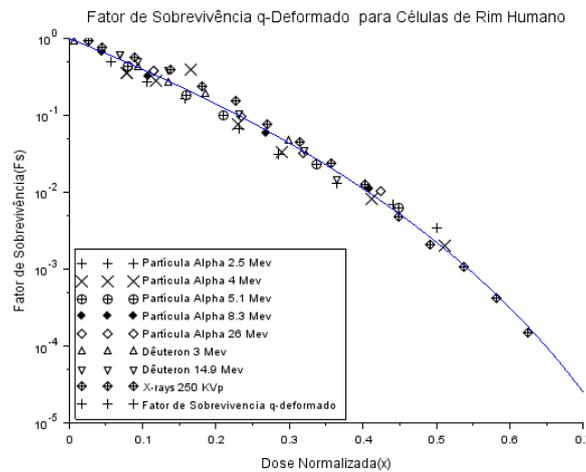


Figura 4.17: Fator de sobrevivência q-Deformado para células de rim humano.

A equação (4.152) retoma o resultado encontrado na referência (SOTOLONGO-GRAU et al., 2010), quando $q = 2$ e a constante λ é identificada como o parâmetro γ :

$$F_s = (1 - x)^\gamma. \quad (4.153)$$

Pode também ser visto na referência (WEBERSZPIL; SOTOLONGO-COSTA, 2017), o modelo deformado gerado através do operador q -derivada escalada:

$$F_s = (1 + k(1 - q)x)^{-\lambda/(k(1-q))}. \quad (4.154)$$

Redefinindo $k(1 - q) = -1$ e $-\lambda/(1 - q) = \gamma$, a equação (4.154) também retoma o modelo encontrado na referência (SOTOLONGO-GRAU et al., 2010).

A seguir os modelos deformados duais.

4.3.2.2 Modelos Deformados com Derivadas Duais

Agora serão apresentados modelos deformados duais. Estes modelos serão gerados a partir da substituição do operador derivada usual no modelo linear, dado pela equação (4.135), por operadores duais de derivada. O que leva a seguinte equação:

$$\Psi^{-1}(N(x), p) \frac{dN(x)}{dx} = -\lambda N(x). \quad (4.155)$$

A solução da equação (4.155) pode ser obtida através da equação (2.102).

$$\int_{N_0}^{N(x)} \frac{\Psi^{-1}(N(x), p)}{N(x)} dN(x) = -\lambda x. \quad (4.156)$$

A solução dessa equação depende da forma do pré-fator $\Psi(N(x), p)$. Na sequência, determinaremos o fator de sobrevivência, nas abordagens duais conforme e q -deformada.

- **Fator de Sobrevivência conforme dual.**

A solução da equação (4.156), na abordagem conforme, é dado pela equação (2.105), sendo escrita aqui como:

$$N(x) = (-(\alpha - 1)\lambda x + N_0^{\alpha-1})^{1/\alpha-1}. \quad (4.157)$$

A partir da equação (4.157), pode-se obter o fator de sobrevivência, no modelo conforme dual:

$$F_{sd\alpha} = \frac{N(x)}{N_0} = \frac{(-(\alpha - 1)\lambda x + N_0^{\alpha-1})^{1/\alpha-1}}{N_0}. \quad (4.158)$$

Evidenciando na (4.158) o termo $N_0^{\alpha-1}$:

$$F_{sd\alpha} = \frac{N(x)}{N_0} = N_0 \frac{\left(\frac{-(\alpha - 1)\lambda}{N_0^{\alpha-1}} x + 1 \right)^{1/\alpha-1}}{N_0} = \left(1 - \frac{(\alpha - 1)\lambda}{N_0^{\alpha-1}} x \right)^{1/\alpha-1}. \quad (4.159)$$

Pode-se mostrar que a equação (4.159) converge para a equação (4.140), no limite $\alpha \rightarrow 1$.

Na figura (4.18) é apresentado o gráfico da equação (4.159) em comparação com dados experimentais referentes a diferentes tipos de radiação, aplicadas a células de rim humana. A curva foi gerada com $(\alpha - 1)\lambda/N_0^{\alpha-1} = 1$ e $1/\alpha - 1 = 8.8$. Mostrando o mesmo resultado obtido na abordagem q-deformada.

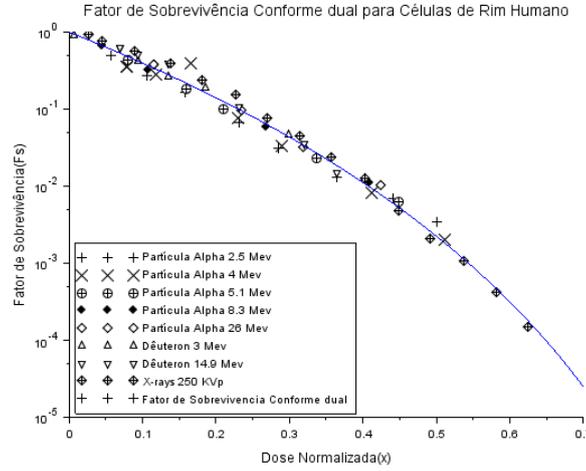


Figura 4.18: Fator de sobrevivência conforme dual para células de rim humano.

Na equação (4.159), fazendo $(\alpha - 1)\lambda/N_0^{\alpha-1} = 1$ e $1/\alpha - 1 = \gamma$, retomando a equação antes deduzida na referência (SOTOLONGO-GRAU et al., 2010).

$$F_{sd\alpha} = (1 - x)^\gamma. \quad (4.160)$$

- **Fator de Sobrevivência q-deformado dual.**

A solução da equação (4.156) na abordagem q-deformada dual é dada pela equação (2.112). Desse modo:

$$N(x) = \frac{e^{-\lambda x}}{(N_0^{-1} + (1 - q)) - (1 - q) \exp(-\lambda x)}. \quad (4.161)$$

Dividindo ambos os membros da equação (4.161) por N_0 , obtêm-se o fator de sobrevivência q-deformado dual:

$$F_{sdq} = \frac{N(x)}{N_0} = \frac{e^{-\lambda x}}{1 + N_0(1 - q) - N_0(1 - q) \exp(-\lambda x)}. \quad (4.162)$$

Que é exatamente a equação (4.140) quando $q = 1$. Uma vez que N_0 é um número muito grande, por simplicidade será feito $a = N_0(1 - q)$. Deste modo a equação (4.162) fica reescrita:

$$F_{sdq} = \frac{N(x)}{N_0} = \frac{e^{-\lambda x}}{1 + a - a \exp(-\lambda x)}. \quad (4.163)$$

O gráfico relativo à equação (4.163) está apresentado na figura (4.19). Os parâmetros utilizados foram (4.19) $a = -0.8$ e $\lambda = 16$, Não apresentando boa aproximação para doses baixas, porém para doses intermediárias apresenta boa aproximação.

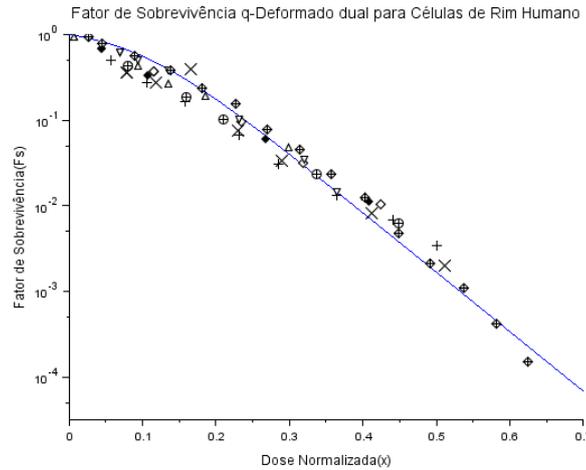


Figura 4.19: Fator de sobrevivência q-Deformado Dual.

Nesse modelo, assim como ocorre com o modelo conforme, o fator de sobrevivência não é nulo quando $x = 1$, ou seja de acordo com este modelo a aplicação da dose mínima de radiação ainda deixaria células sobreviventes. Indicando falha para doses muito próximas de D_0 .

Na próxima seção serão abordados modelos deformados para reologia dos fluidos.

4.4 Modelos Deformados para Reologia dos Fluidos

Reologia dos fluidos é o estudo das deformações causadas em fluidos, os quais sofrem a ação de uma tensão. Uma importante característica dos fluidos, no que tange ao estudo de suas deformações, é a viscosidade μ . Se a viscosidade do fluido não varia quando o fluido está sujeito a tensão, o mesmo é dito newtoniano. Se a viscosidade varia, é dito não newtoniano (CENGEL, 2010). Para fluidos não newtonianos, quando a viscosidade aumenta com o tempo de aplicação da tensão, diz-se que o fluido é reopético. Quando a viscosidade diminui com o tempo de aplicação da tensão, o fluido é tixotrópico (WHITE, 1962).

Um famoso modelo da literatura, para o estudo da deformação de fluidos sujeitos a tensão, é o modelo de Newton ("Newton dashpot") (SU; CHEN; XU, 2017). A equação que descreve esse modelo é:

$$\gamma = \mu \frac{d\epsilon}{dt}, \tag{4.164}$$

onde γ é a tensão de cisalhamento, μ é a viscosidade e $\frac{d\epsilon}{dt}$ é a taxa de deformação no tempo.

Esse modelo é utilizado para estudo de deformações em fluidos newtonianos. A seguir serão apresentados e discutidos modelos deformados, gerados a partir da substituição da derivada usual, na equação (4.164), por derivadas deformadas.

4.4.1 Modelos Deformados não Duais

Agora serão apresentados modelos deformados para a reologia de fluidos sujeitos a tensão. Começando pelo modelo deformado generalizado, que resulta da substituição da derivada usual na equação (4.164) pela derivada deformada generalizada. Esta parte do trabalho se baseia na referência (SU; CHEN; XU, 2017), onde os autores apresentam um modelo deformado através de derivadas estruturais. Assim sendo, a equação que representa esse modelo com derivada deformada geral, pode ser escrita como:

$$\gamma = \eta \Psi(t, p) \frac{d\epsilon}{dt} = \mu_p(t) \frac{d\epsilon}{dt}. \quad (4.165)$$

Onde $\mu_p(t) = \eta \Psi(t, p)$ é a viscosidade do fluido. Nesse modelo generalizado, a viscosidade deformada do fluido depende do tempo de aplicação da tensão sobre o mesmo.

Agora serão apresentados modelos dados pela equação (4.165), nas abordagens conforme e q-deformada.

- **Tensão de Cisalhamento Conforme**

Considerando agora a abordagem com derivadas conformes, a equação (4.165) pode ser reescrita como:

$$\gamma = \eta t^{1-\alpha} \frac{d\epsilon}{dt} = \mu_\alpha(t) \frac{d\epsilon}{dt}. \quad (4.166)$$

Onde a viscosidade μ_α é:

$$\mu_\alpha(t) = \eta t^{1-\alpha}. \quad (4.167)$$

Na figura (4.20), pode ser visto o gráfico relativo à equação (4.167) que descreve a viscosidade deformada, dependente do tempo de aplicação da tensão sob o fluido.

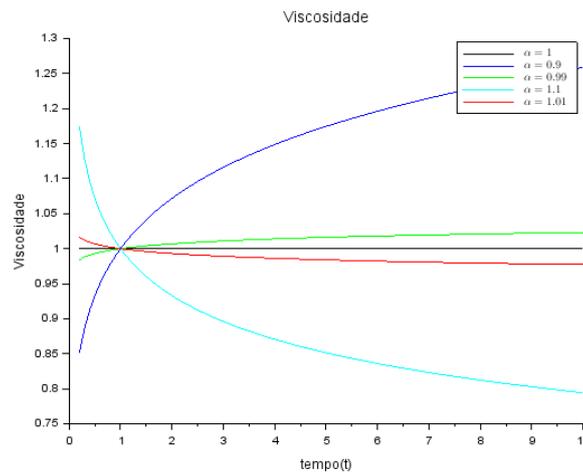


Figura 4.20: Viscosidade Conforme.

No gráfico da figura 4.20 pode-se ver que para $\alpha < 1$ ocorre reopexia, e quando $\alpha > 1$, a tixotropia. Além disso, de acordo com o gráfico, para tempo no limite $t \rightarrow 0$, a viscosidade tende a infinito para fluidos tixotrópicos. Em outras palavras,

não ocorre deformação instantânea neste tipo de fluido. Para fluidos que possuem reopexia, a viscosidade é nula em $t = 0$, de modo que a mínima tensão exercida é o suficiente para gerar deformação. Desse modo, com o passar do tempo, a viscosidade aumenta, tendendo a infinito para $t \rightarrow \infty$.

- **Tensão de Cisalhamento q-deformada**

A equação (4.165) na abordagem q-deformada, se escreve:

$$\gamma = \eta(1 + (1 - q)t) \frac{d\epsilon}{dt} = \mu_q(t) \frac{d\epsilon}{dt}. \quad (4.168)$$

Aqui, a viscosidade μ_q pode ser escrita:

$$\mu_q(t) = \eta(1 + (1 - q)t). \quad (4.169)$$

O gráfico da viscosidade deformada, como uma função linear do tempo (representada pela equação (4.169), pode ser visto na figura (4.21):

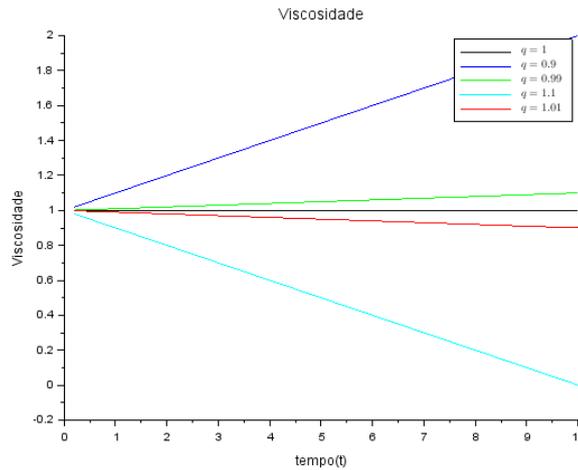


Figura 4.21: Viscosidade q-deformada.

De maneira análoga ao que ocorreu para o caso anterior, aqui o comportamento é semelhante, mas tendo em conta o parâmetro q . Assim, para $q < 1$ têm-se a reopexia, e para $q > 1$, a tixotropia. Porém a viscosidade inicial é a mesma para qualquer parâmetro q .

4.4.2 Modelos Deformados Duais

Sejam agora modelos gerados pela substituição da derivada usual na equação (4.164), por derivadas deformadas duais. Como em aplicações anteriores, consideraremos primeiramente o modelo com derivadas deformadas generalizadas duais. Deste modo:

$$\gamma = \eta\Psi(\epsilon, p) \frac{d\epsilon}{dt} = \mu_p(\epsilon) \frac{d\epsilon}{dt}. \quad (4.170)$$

Onde $\mu_p(\epsilon) = \eta\Psi(\epsilon, p)$ é a viscosidade do fluido. No modelo considerado nessa seção, a viscosidade depende da deformação sofrida pelo fluido sujeito a tensão. Importante

lembrar que a deformação é dependente do tempo e, por conseguinte, a viscosidade tem dependência temporal.

Especificaremos na sequência como ficam os modelos associados à equação (4.170), nas abordagens conforme e q-deformada.

- **Tensão de Cisalhamento Conforme Dual**

A equação (4.173) na abordagem conforme dual pode ser estabelecida como:

$$\gamma = \eta \epsilon^{\alpha-1} \frac{d\epsilon}{dt} = \mu_a(\epsilon) \frac{d\epsilon}{dt}. \quad (4.171)$$

Nesse caso, a viscosidade generalizada depende da própria deformação e pode ser estabelecida como:

$$\mu_a(\epsilon) = \eta \epsilon^{\alpha-1}. \quad (4.172)$$

Na figura (4.22), está o gráfico da viscosidade em função da deformação. Onde pode ser visto que nesta abordagem a viscosidade cai com o aumento da deformação quando $\alpha < 1$. E aumenta com a deformação quando $\alpha > 1$.

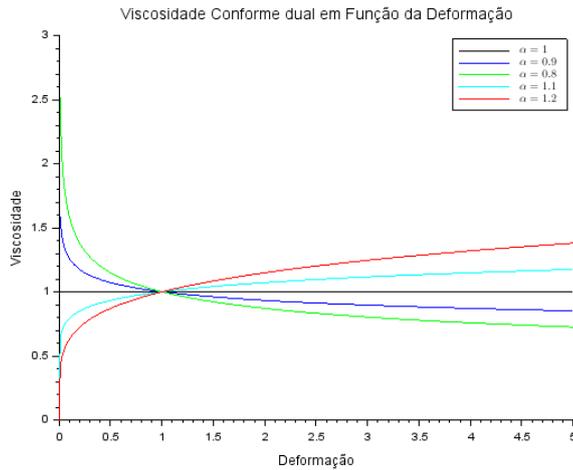


Figura 4.22: Viscosidade Conforme Dual em Função da Deformação.

- **Tensão de Cisalhamento q-deformada Dual**

A equação (4.173) na abordagem q-deformada dual é:

$$\gamma = \eta \frac{1}{(1 + (1 - q)\epsilon)} \frac{d\epsilon}{dt} = \mu_q(\epsilon) \frac{d\epsilon}{dt}. \quad (4.173)$$

Aqui, como no caso anterior, a viscosidade depende da deformação, sendo dada por:

$$\mu_a(\epsilon) = \frac{\eta}{(1 + (1 - q)\epsilon)}. \quad (4.174)$$

Na figura (4.22), está o gráfico da viscosidade em função da deformação. Onde pode ser visto que nesta abordagem a viscosidade cai com o aumento da deformação quando $q < 1$. E aumenta com a deformação quando $q > 1$.

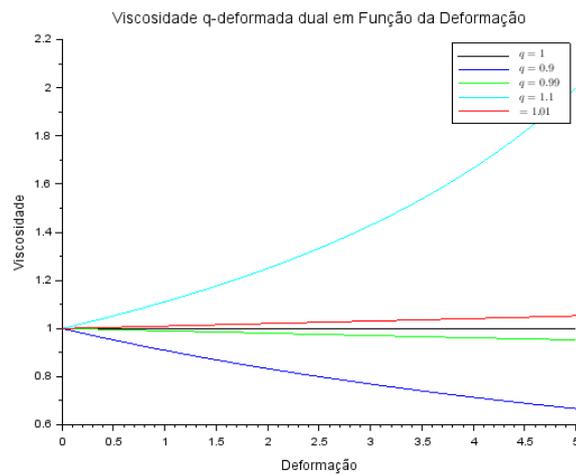


Figura 4.23: Viscosidade q-Deformada Dual em Função da Deformação.

Em ambos as abordagens duais, a variação temporal da viscosidade depende do forma da função que define a deformação ϵ sofrida. São modelos não newtonianos.

5 CONCLUSÕES

Essa dissertação objetivou apresentar e estudar derivadas deformadas, bem como indicar algumas aplicações.

Houve o esforço para introduzir esse ferramental de maneira mais sólida, tendo como base o mapeamento no contínuo fractal e o conceito de derivadas de Gateux generalizadas.

Fazendo um breve recordatório sobre os temas apresentados, pode-se destacar a sequência de capítulos e seu focus. O primeiro capítulo foi destinado a introduzir o assunto e justificar a utilização das derivadas deformadas. Para isso, a geometria fractal e o mapeamento no fractal continuum foram brevemente discutidos. O capítulo dois se destinou a apresentação dos operadores deformado. Foi introduzido o conceito de derivada deformada generalizada, e a partir dele os operadores derivada conforme e q -derivada foram especificados. Os operadores duais, associados aos operadores conforme e q -deformado foram abordados. Uma vez apresentados os operadores, foram apresentadas funções deformadas para ambas as abordagens. Equações de autovalores e suas respectivas autofunções foram estudadas. As autofunções resultantes foram de papel crucial para a solução de equações dos modelos, no capítulo de aplicações. No terceiro capítulo, as abordagens variacionais, com utilização de derivadas deformadas e deformadas duais, foram apresentadas, e a partir delas foram apresentadas equações de Euler-Lagrange deformadas e deformadas duais. Tendo sido definidos os operadores e as equações de Euler-Lagrange, o capítulo seguinte abordou quatro aplicações, que foram:

- Segunda Lei de Newton e Cinemática;
- Oscilador Harmônico Simples;
- Fator de Sobrevivência de Células cancerígenas;
- Reologia dos Fluidos;

As duas aplicações iniciais consistiram no estudo de sistemas onde o modelo usual possui uma lagrangiana conhecida, e por isso os modelos deformados foram gerados via abordagem variacional. As demais aplicações abordaram sistemas onde o modelo usual não possui lagrangiana conhecida. Por este motivo, os modelos deformados foram gerados a partir da substituição das derivadas usais por derivadas deformadas e deformadas duais.

No que se refere às deformações da cinemática, da segunda lei de Newton e do oscilador harmônico simples, foram realizados estudos da dinâmica de uma partícula que se desloca em meios com métrica fractal. No sentido de uma primeira investigação, foi estudado um modelo simplificado para uma cinemática deformada. Através do método variacional com derivadas deformadas embebidas nas lagrangianas, particularmente com as opções que nomeamos, opção 1 e opção 3, obtivemos possíveis deformações da segunda lei de Newton. Conseqüentemente, uma redefinição de força deformada emergiu. No modelos estudados, conjecturamos que a interação com o meio altera a dinâmica do sistema, de modo que existe uma aceleração mesmo na ausência de forças externas explícitas. Analogamente ao caso da segunda lei de Newton, modelos deformados de osciladores foram propostos, a partir de lagrangianas com derivadas deformadas conforme e q -deformada, assim como as suas formas duais. Analogamente ao caso da segunda lei

de Newton, modelos deformados de osciladores foram propostos, a partir de lagrangianas com derivadas deformadas conforme e q -deformada, assim como as suas formas duais. Alguns modelos apresentaram frequência dependente do tempo, outros com frequência dependente da amplitude. Característica de osciladores forçados e/ou amortecidos. E por fim, outros apresentaram comportamentos oscilatórios complexos como é o caso dos modelos deformados duais.

Na sequência das aplicações, foram estudados modelos com derivadas deformadas para o fator de sobrevivência de células cancerígenas, as quais estavam sujeitas à radiação. Alguns modelos recuperam o modelo proposto por Sotolongo-Grau ([WEBERSZPIL; SOTOLONGO-COSTA, 2017](#); [SOTOLONGO-GRAU et al., 2010](#); [SOTOLONGO-GRAU et al., 2011](#)) que apresentou grande concordância experimental. Por fim, nessa amostragem de aplicações, aspectos de reologia foram estudados. Os modelos deformados e deformados duais indicaram comportamento de fluidos não newtonianos, em especial, a viscosidade varia no tempo de aplicação da tensão. Apresentaram a reopexia e a tixotropia.

Nosso trabalho consistiu em apresentar os operadores, abordagens variacionais e as aplicações acima citadas. Para futuros trabalhos, indicamos a possibilidade de aplicações e estudos em mecânica quântica, como por exemplo, em problemas com massa dependente da posição (no apêndice [\(E\)](#) foi apresentada uma dinâmica Newtoniana, com massa dependente da posição). Também sob o contexto de sistemas complexos e com o uso do ferramental matemático das derivadas deformadas, pretende-se estudar problemas associados à mecânica estatística generalizada, dentre possibilidade que se abrem nesse contexto de estudo de fenômenos complexos.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASANO, C. H.; COLLI, E. Cálculo numérico-fundamentos e aplicações. *Departamento de Matemática Aplicada, IME-USP*, 2009.
- ASSIS, T. A. d. et al. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. SciELO Brasil, 2008.
- ASSIS, T. A. d. et al. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. SciELO Brasil, 2008.
- BACKES, A. R.; BRUNO, O. M. Técnicas de estimativa da dimensão fractal: um estudo comparativo. *INFOCOMP*, v. 4, n. 3, p. 50–58, 2005.
- BALANKIN, A. S. A continuum framework for mechanics of fractal materials ii: elastic stress fields ahead of cracks in a fractal medium. *The European Physical Journal B*, Springer, v. 88, n. 4, p. 91, 2015.
- BALANKIN, A. S.; ELIZARRARAZ, B. E. Map of fluid flow in fractal porous medium into fractal continuum flow. *Physical Review E*, APS, v. 85, n. 5, p. 056314, 2012.
- BALANKIN, A. S. et al. Electromagnetic fields in fractal continua. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 377, n. 10-11, p. 783–788, 2013.
- BARRETO, M. d. S.; TAVARES, S. Do mito da geometria euclidiana ao ensino das geometrias não euclidianas. *Vértices*, v. 9, n. 1, p. 73–82, 2010.
- BERTALANFFY, L. V. *Teoria geral dos sistemas*. [S.l.]: Vozes Petrópolis, 1975.
- BORGES, E. P. Manifestações dinâmicas e termodinâmicas de sistemas nao-extensivos. *Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas*, 2004.
- BORGES, E. P. A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatistics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 340, n. 1-3, p. 95–101, 2004. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437104004029>>.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno, 7a edição. *Rio de Janeiro*, 2002.
- BRUGGER, E. C. Natural ethical facts: Evolution, connectionism, and moral cognition. *The Review of Metaphysics*, v. 58, n. 2, p. 429–430, 2004.
- CENGEL, Y. A. *Fluid mechanics*. [S.l.]: Tata McGraw-Hill Education, 2010.
- CHEN, W. Time-space fabric underlying anomalous diffusion. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 28, n. 4, p. 923–929, 2006.
- CHUNG, W. S. Fractional newton mechanics with conformable fractional derivative. *Journal of computational and applied mathematics*, Elsevier, v. 290, p. 150–158, 2015.

- COSTA, B. G. da. Aplicações de uma estrutura algébrica não aditiva em teoria quântica. *Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física*, 2015.
- DESCARTES, R.; DESCARTES, R. *Discurso do método: Meditações: Objeções e respostas: As paixões da alma; Cartas*. [S.l.]: Abril Cultural, 1973.
- ELTON, D. C. Stretched exponential relaxation. *arXiv preprint arXiv:1808.00881*, 2018.
- GLERIA, I.; MATSUSHITA, R.; SILVA, S. d. Sistemas complexos, criticalidade e leis de potência. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 26, n. 2, p. 99–108, 2004.
- GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical mechanics*. [S.l.]: AAPT, 2002.
- KHALIL, R. et al. A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 264, p. 65–70, 2014. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042714000065>.
- LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. [S.l.]: editora livraria da física, 2007.
- LIMA, E. L. *Espaços métricos*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq Rio de Janeiro, 1983. v. 4.
- LIMA, E. L. Curso de análise. v. 1. *Rio de Janeiro: Projeto Euclides*, 2010.
- MACEDO, R. D. de. Introdução à teoria de fractais e à derivada métrica. 2015.
- MANDELBROT, B. B. *The fractal geometry of nature*. [S.l.]: WH freeman New York, 1982. v. 2.
- MENDONÇA, M. B. d. M. d. et al. Fractal analysis of retinal vascular tree: segmentation and estimation methods. *Arquivos Brasileiros de Oftalmologia*, SciELO Brasil, v. 70, n. 3, p. 413–422, 2007.
- MUCHERONI, L. F. Dimensão de hausdorff e algumas aplicações. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2017.
- NUSSENZVEIG, H. M. Introdução à complexidade. *Complexidade e caos. Rio de Janeiro: UFRJ/COPEA*, p. 9–26, 1999.
- PRIMO, A. F. T. Sistemas de interação. In: *Congresso Brasileiro de Ciências da Comunicação (22.: 1999: Rio de Janeiro).[Anais.]*. Rio de Janeiro: Intercom, 1999. [S.l.: s.n.], 1999.
- RIEWE, F. Nonconservative lagrangian and hamiltonian mechanics. *Physical Review E*, APS, v. 53, n. 2, p. 1890, 1996.
- ROSA, W.; WEBERSZPIL, J. Dual conformable derivative: Definition, simple properties and perspectives for applications. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 117, p. 137–141, 2018.
- SILVA, M. M. da; SOUZA, W. A. de. Dimensão fractal. *Revista Eletrônica de Matemática*, n. 2, 2010.

- SOTOLONGO-GRAU, O. et al. Tissue radiation response with maximum tsallis entropy. *Physical review letters*, APS, v. 105, n. 15, p. 158105, 2010.
- SOTOLONGO-GRAU, O. et al. Non-extensive radiobiology. In: AIP. *AIP Conference Proceedings*. [S.l.], 2011. v. 1305, n. 1, p. 219–226.
- SU, X.; CHEN, W.; XU, W. Characterizing the rheological behaviors of non-newtonian fluid via a viscoelastic component: Fractal dashpot. *Advances in Mechanical Engineering*, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 9, n. 10, p. 1687814017699765, 2017.
- VELHO, O. Os novos sentidos da interdisciplinaridade. *Mana*, SciELO Brasil, v. 16, n. 1, p. 213–226, 2010.
- WEBERSZPIL, J.; HELAYËL-NETO, J. Extension and applications of a variational approach with deformed derivatives. *arXiv preprint arXiv:1706.09504*, 2017.
- WEBERSZPIL, J.; HELAYËL-NETO, J. A. Variational approach and deformed derivatives. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 450, p. 217–227, 2016. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437116000352>>.
- WEBERSZPIL, J.; LAZO, M. J.; HELAYËL-NETO, J. On a connection between a class of q-deformed algebras and the hausdorff derivative in a medium with fractal metric. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 436, p. 399–404, 2015. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437115004781>>.
- WEBERSZPIL, J.; SOTOLONGO-COSTA, O. Structural derivative model for tissue radiation response. *JOURNAL OF ADVANCES IN PHYSICS*, v. 13, p. 4779–4785, 2017.
- WHITE, F. M. *Mecânica dos fluidos*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 1962.
- ZHAO, D.; LUO, M. General conformable fractional derivative and its physical interpretation. *Calcolo*, Springer, v. 54, n. 3, p. 903–917, 2017.

7 APÊNDICE

APÊNDICE A – MÉTODO VARIACIONAL USUAL

A.1 Método Variacional Usual

Nesta seção será deduzida a equação de Euler-Lagrange para um funcional de ação J referente a uma lagrangiana L . Uma ação definida por uma integral usual é dada por:

$$J(y, y') = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y') dx. \quad (7.1)$$

Com y satisfazendo as condições de contorno:

$$y(x_1) = y_1 \text{ e } y(x_2) = y_2. \quad (7.2)$$

Seja y o conjunto das curvas diferenciáveis que passam por (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , procura-se a função y^* que minimiza o funcional $J(y, y')$. Deste modo, pode-se relacionar uma função geral y com a função objetivo y^* , pela seguinte expressão:

$$y = y^* + \epsilon \eta(x). \quad (7.3)$$

Onde ϵ é um parâmetro arbitrário real e $\eta(x)$ é uma função diferenciável que se anula em x_1 e x_2 :

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0. \quad (7.4)$$

Estas condições para a função $\eta(x)$, garantem que o conjunto de curvas diferenciáveis y passe pelos pontos extremos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . A diferença entre cada curva de y é o parâmetro ϵ , de modo que quando $\epsilon = 0$ temos, $y = y^*$ e o funcional $J(y, y')$ será minimizado.

A derivada de y em primeira ordem em relação a variável independente, x , é:

$$y' = y^{*'} + \epsilon \eta'(x), \quad (7.5)$$

Assim sendo, as funções y e y' são dependentes de ϵ , o que implica em poder tratar a ação como se dependesse apenas de ϵ . Deste modo o problema se reduz a otimização de uma função de uma variável $\Phi(\epsilon) = J(y, y')$. Lembrando que $\Phi(\epsilon)$ possui um extremo em $\epsilon = 0$ (LE MOS, 2007), uma vez que neste ponto $y = y^*$. Desse modo:

$$\left(\frac{d\Phi(\epsilon)}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{d}{d\epsilon} L(x, y, y') \right)_{\epsilon=0} dx = 0. \quad (7.6)$$

Na equação (7.6), aplicando a regra da cadeia, assim temos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \frac{dy}{d\epsilon} + \frac{\partial L}{\partial y'} \frac{dy'}{d\epsilon} \right)_{\epsilon=0} dx = 0. \quad (7.7)$$

Na equação (7.7), explicitando y e y' :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \frac{d}{d\epsilon} (y^* + \epsilon \eta(x)) + \frac{\partial L}{\partial y'} \frac{d}{d\epsilon} (y^{*'} + \epsilon \eta'(x)) \right)_{\epsilon=0} dx = 0. \quad (7.8)$$

Na equação (7.8), resolvendo as derivadas em função de ϵ :

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial y'} \eta(x)' \right)_{\epsilon=0} dx = 0. \quad (7.9)$$

Ou ainda:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial y'} \eta(x)' dx = 0. \quad (7.10)$$

Na equação (7.10), aplicando a regra da soma para integrais, resulta em:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial y'} \eta(x)' dx = 0.. \quad (7.11)$$

Na equação (7.11), aplicando integração por partes na segunda integral, com $u = \frac{\partial L}{\partial y'}$ e $dv = \eta(x)'$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) dx + \frac{\partial L}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} dx = 0. \quad (7.12)$$

Uma vez que $\eta(x)$ se anula nos extremos, a equação (7.12) torna-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} dx = 0. \quad (7.13)$$

Ou ainda:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{\partial L}{\partial y} - \eta(x) \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} dx = 0. \quad (7.14)$$

Na equação (7.14), colocando $\eta(x)$ em evidência, obtêm-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} \right] dx = 0. \quad (7.15)$$

Segundo o Lema Fundamental do Cálculo das Variações, uma vez que $\eta(x)$ é uma função continua qualquer que se anula nos extremos, esta integral se anula apenas se:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \quad (7.16)$$

Que é a equação de Euler-Lagrange para um funcional cuja lagrangiana depende da variável dependente y e de sua derivada y' . Aqui, para uma variável independente, x . O mesmo raciocínio pode ser utilizado para se obter a equação de Euler-Lagrange para funcionais mais complexos.

APÊNDICE B – CINEMÁTICA NAS ABORDAGENS CONFORME E q-DEFORMADAS OPÇÃO 1 E CINEMÁTICAS DEFORMADAS OPÇÃO 3

B.1 MRU Conforme Opção 1

A equação (4.29) na abordagem conforme assume a seguinte forma:

$$x(t) = v \int_0^t t^{\alpha-1} dt + x(0) = v \frac{t^\alpha}{\alpha} + x(0) = vt_\alpha + c. \quad (7.1)$$

Onde t_α é um tempo deformado conforme. Este resultado pode ser encontrado na referência (CHUNG, 2015).

O gráfico da equação (7.1) pode ser visto na figura (7.1).

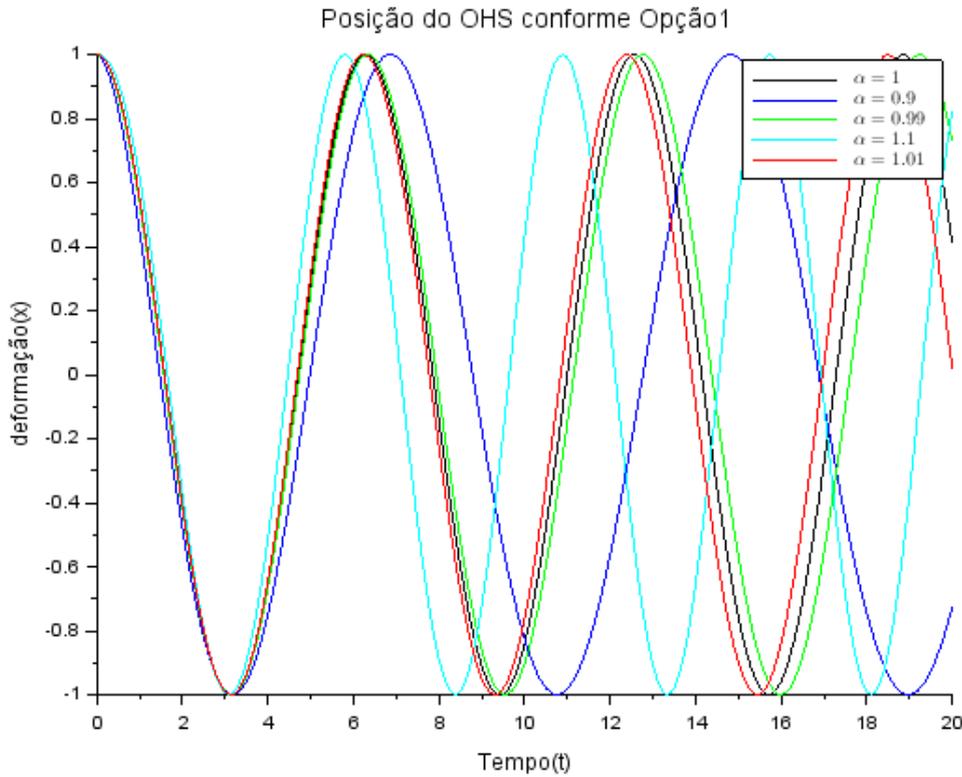


Figura 7.1: Posição em Função do Tempo no MRU Conforme Opção 1 .

Pode ser visto pelo gráfico da figura (7.1) que as curvas deformadas, com $\alpha < 1$, começam acima da curva usual. Com o passar do tempo as mesmas se aproximam da curva usual até o momento em que se cruzam com a mesma e seguem abaixo dela. O fenômeno oposto ocorre com as curvas $\alpha > 1$. Fisicamente quando $\alpha < 1$ é como se o meio aumentasse a velocidade da partícula nos instantes iniciais e após isso começasse a impor uma espécie de atrito viscoso. Reduzindo a velocidade da partícula. A situação oposta ocorre quando $\alpha > 1$.

A seguir será apresentado o MRU q-deformado.

B.2 MRU q-Deformado Opção 1

A equação (4.29) na abordagem q-deformada assume a forma:

$$x(t) = v \int_0^t \frac{1}{(1 + (1 - q)t)} dt + x(0). \quad (7.2)$$

A integral da equação (7.2) pode ser resolvida por substituição simples. Fazendo $u = (1 + (1 - q)t)$ e $du = (1 - q)dt$, obtêm-se:

$$x(t) = v \int_1^{1+(1-q)t} \frac{1}{u} \frac{du}{1-q} + x(0) = v \frac{\ln(u)}{1-q} + x(0). \quad (7.3)$$

Explicitando u :

$$x(t) = v \frac{\ln(1 + (1 - q)t)}{1 - q} + x(0) = v \ln [(1 + (1 - q)t)^{1/(1-q)}] + x(0). \quad (7.4)$$

Ou ainda:

$$x(t) = v \ln [e_q^t] + x(0) = vt_q + x(0). \quad (7.5)$$

Onde t_q é um tempo q-deformado. Sobre números q-deformados o leitor pode consultar a referência (COSTA, 2015). O gráfico da equação (7.5) pode ser visto na figura (7.2).

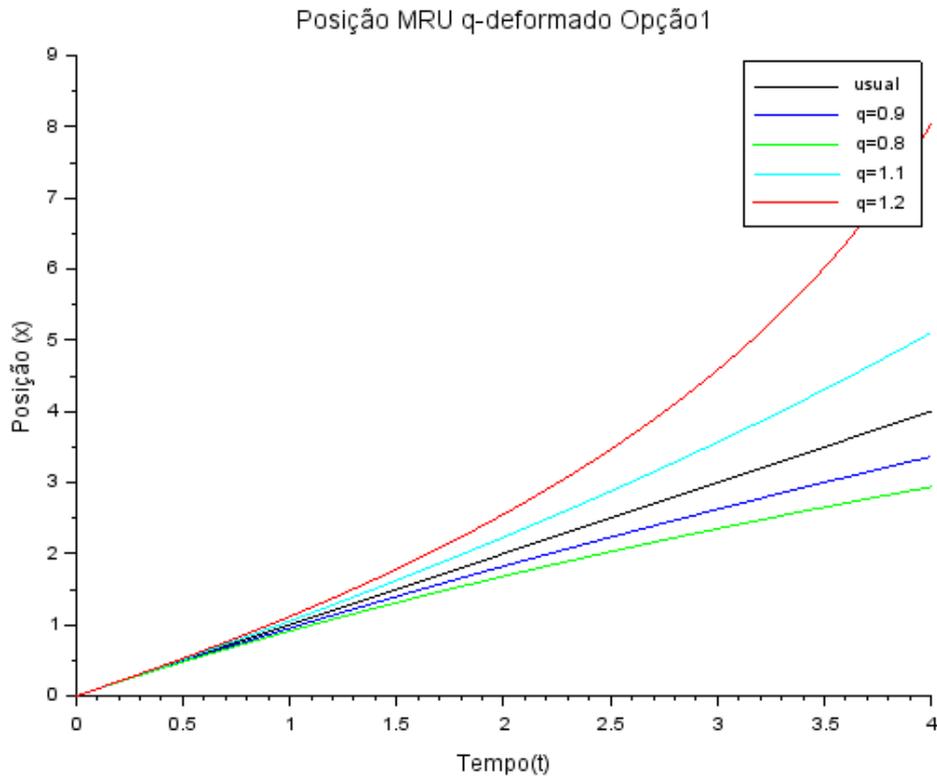


Figura 7.2: Posição em Função do Tempo no MRU q-Deformado Opção 1 .

Observa-se que as curvas deformadas, com $q < 1$, seguem se afastando por baixo da curva usual e as curvas com $q > 1$ se afastam por cima. fisicamente quando $q < 1$ o meio impõe resistência ao movimento e quando $q > 1$ o meio haje de forma a acelerar o movimento.

B.3 MRUV Conforme Opção 1

A equação (4.32) na abordagem conforme assume a forma:

$$v_{\alpha}(t) = a \int_0^t t^{\alpha-1} dt + v(0) = a \frac{t^{\alpha}}{\alpha} + v(0) = at_{\alpha} + v(0). \quad (7.6)$$

Este resultado pode ser encontrado na referência (CHUNG, 2015). O gráfico da equação (7.6) pode ser visto na figura (7.3).

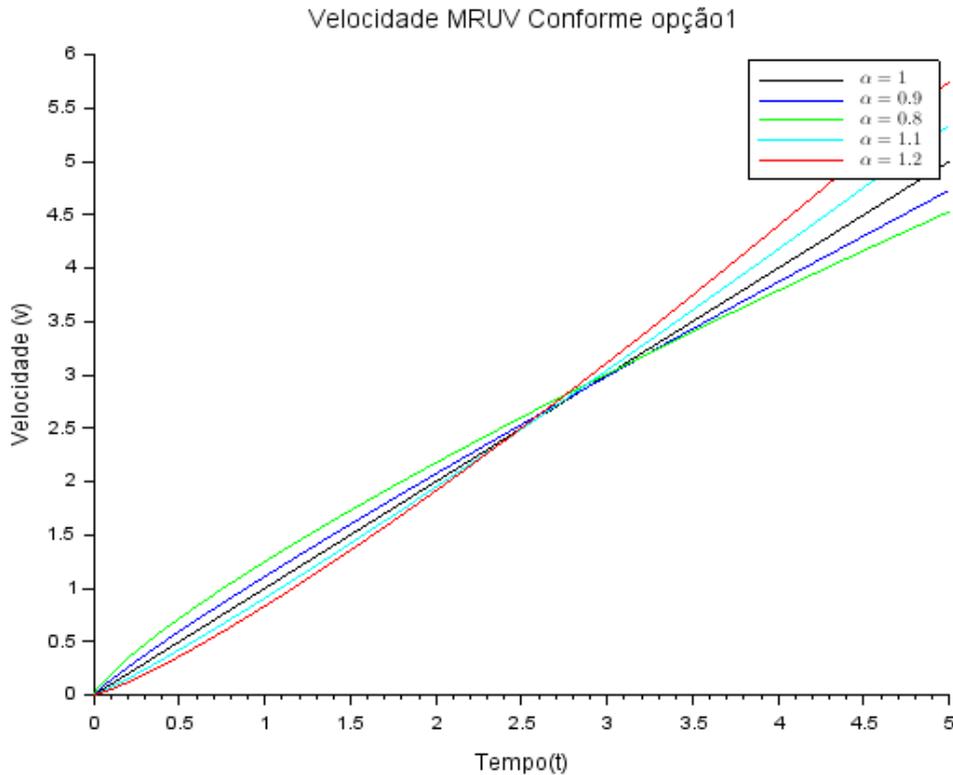


Figura 7.3: Velocidade em Função do Tempo no MRUV Conforme Opção 1.

Pode ser visto pelo gráfico da figura (7.3), que as curvas deformadas, com $\alpha < 1$, começam acima da curva usual. Com o passar do tempo as mesmas se aproximam da curva usual até o momento que se cruzam com a mesma e seguem abaixo dela. O fenômeno oposto ocorre com as curvas $\alpha > 1$. fisicamente quando $\alpha < 1$ no início do movimento o meio dá um acréscimo a aceleração que o sistema teria se tivesse isolado e após isso começa a apresentar resistência ao movimento. O oposto ocorre com $\alpha > 1$.

A equação (4.34) na abordagem conforme assume a seguinte forma:

$$x = \int_0^t t^{\alpha-1} \left(a \frac{t^{\alpha}}{\alpha} + v(0) \right) dt + x(0) = \int_0^t \left(a \frac{t^{2\alpha-1}}{\alpha} + v(0)t^{\alpha-1} \right) dt + x(0). \quad (7.7)$$

Resolvendo a integral da equação (7.7) obtêm-se:

$$x = a \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2} + v(0) \frac{t^\alpha}{\alpha} + x(0) = \frac{at_\alpha^2}{2} + v(0)t_\alpha + x(0). \quad (7.8)$$

Resultado semelhante ao que pode ser encontrado na referência (CHUNG, 2015). O gráfico da equação (7.8) pode ser visto na figura (7.4).

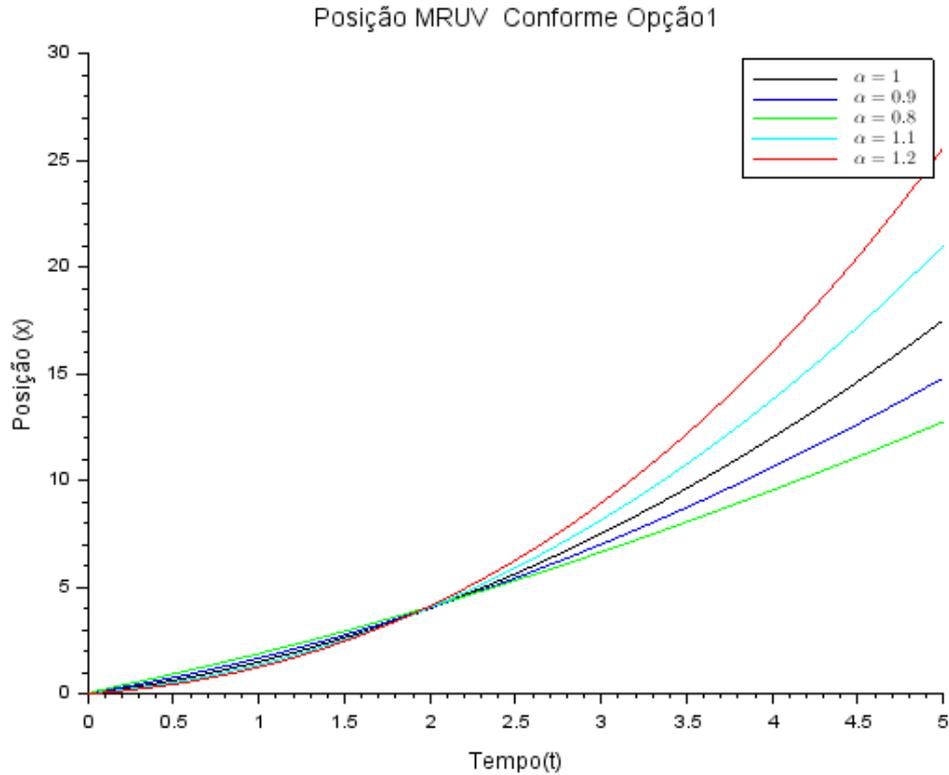


Figura 7.4: Posição em função do tempo no MRUV Conforme Opção 1.

Pode ser visto pelo gráfico da figura (7.4), que as curvas deformadas, possuem comportamento análogo as da figura 7.3.

B.4 MRUV q-deformado Opção 1

A equação (4.32) na abordagem q-deformada assume a forma:

$$v_\alpha(t) = a \int_0^t \frac{1}{1 + (1-q)t} dt + v(0) = a \ln \left((1 + (1-q)t)^{1/(1-q)} \right) + v(0) = at_q + v(0). \quad (7.9)$$

O gráfico da equação (7.9) pode ser visto na figura (7.5).

Pode ser visto pelo gráfico da figura (7.5), temos um comportamento análogo ao da figura (7.2).

A equação (4.34) na abordagem q-deformada assume a seguinte forma:

$$x = a \int_0^t \frac{1}{1 + (1-q)t} \left(\frac{\ln(1 + (1-q)t)}{1-q} \right) dt + \int_0^t \left(\frac{v(0)}{(1 + (1-q)t)} \right) dt + x(0). \quad (7.10)$$

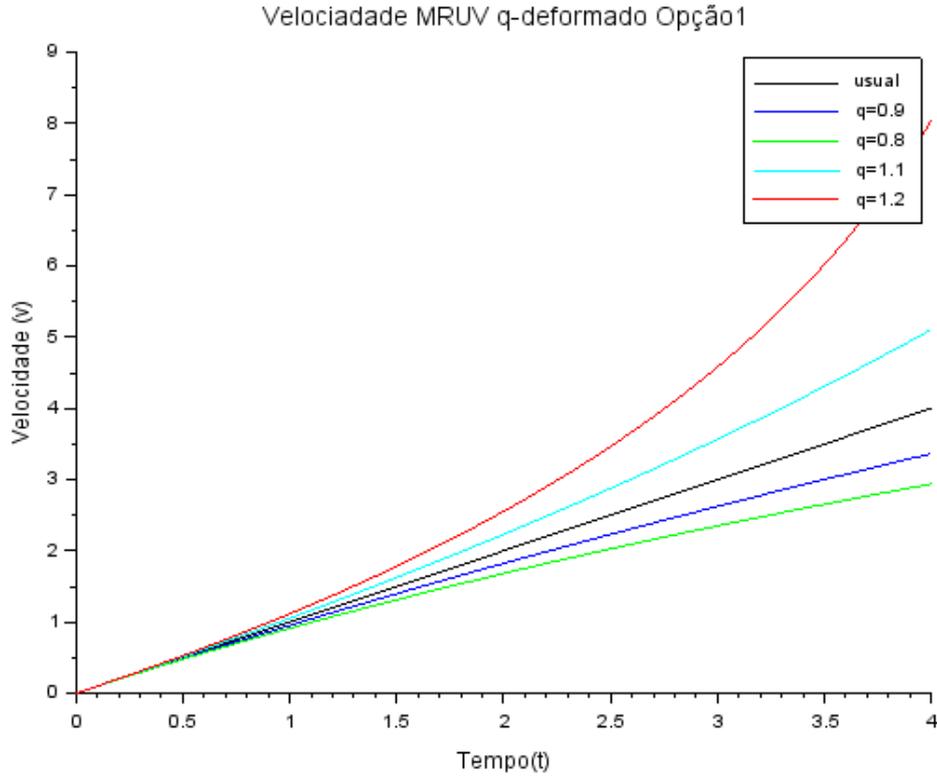


Figura 7.5: Velocidade em Função do Tempo no MRUV q-Deformado Opção 1.

A primeira integral da equação (7.10) pode ser resolvida pelo método de substituição simples. Fazendo $u = \frac{\ln(1 + (1 - q)t)}{1 - q}$ e $du = \frac{dt}{(1 + (1 - q)t)}$ obtêm-se:

$$\int_0^t \frac{1}{1 + (1 - q)t} \left(\frac{\ln(1 + (1 - q)t)}{1 - q} \right) dt = \int_0^u u du = \frac{u^2}{2}. \quad (7.11)$$

Explicitando u :

$$\int_0^t \frac{1}{1 + (1 - q)t} \left(\frac{\ln(1 + (1 - q)t)}{1 - q} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(1 + (1 - q)t)}{(1 - q)} \right)^2. \quad (7.12)$$

E a equação (7.10) fica reescrita como:

$$x = a \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(1 + (1 - q)t)}{(1 - q)} \right)^2 + v(0) \frac{\ln(1 + (1 - q)t)}{(1 - q)} + x(0) = \frac{at_q^2}{2} + v(0)t_q + x(0). \quad (7.13)$$

O gráfico da equação (7.13) pode ser visto na figura (7.6).

Pode ser visto pelo gráfico da figura (7.6), que também possui comportamento análogo ao da figura (7.2).

B.5 Cinemática Deformada pela abordagem variacional Opção 3

A abordagem deformada, definida pela opção 3, define a velocidade deformada como:

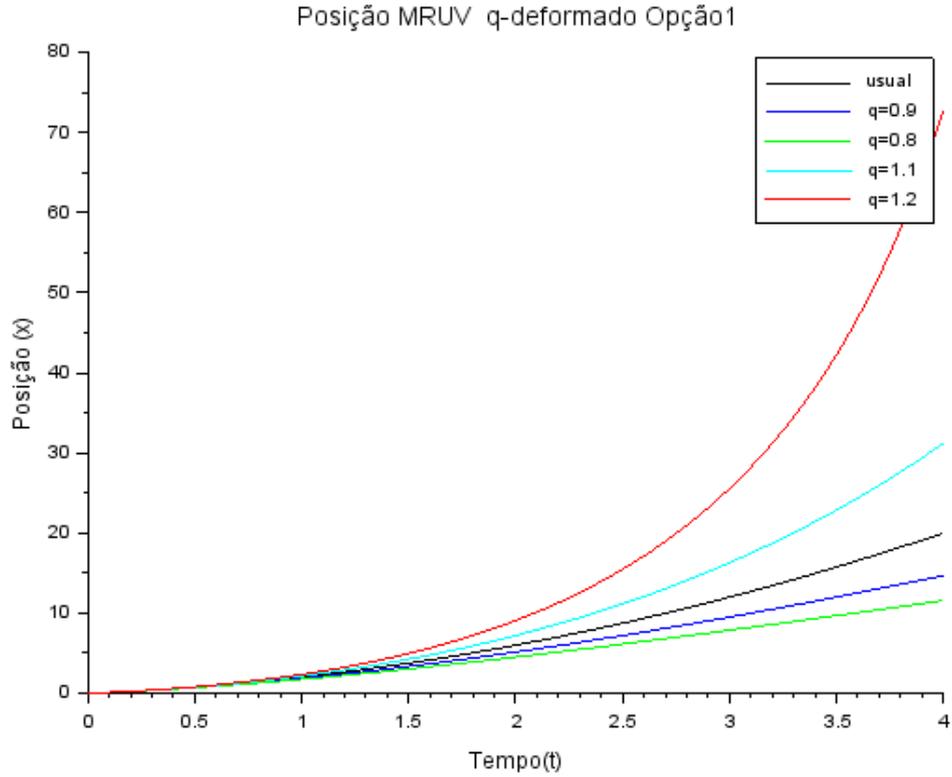


Figura 7.6: Posição em Função do Tempo no MRUV q-Deformado Opção 1.

$$v_p = \Psi^2(t, p) \frac{dx}{dt}. \quad (7.14)$$

E a aceleração deformada:

$$a_p = \frac{dv}{dt}. \quad (7.15)$$

Agora é possível definir as formas generalizadas do MRU e do MRUV.

B.6 MRU Deformado Geral Opção 3

Considerando agora uma velocidade generalizada, equação (7.14), num caso particular onde essa velocidade seja constante, uma possível generalização do MRU pode ser proposta. Assim, para a velocidade constante, segue:

$$v_p = \Psi^2(t, p) \frac{dx}{dt} = c. \quad (7.16)$$

Dividido ambos os membros por $\Psi^2(t, p)$:

$$\frac{dx}{dt} = \Psi^{-2}(t, p)c. \quad (7.17)$$

Separando as variáveis e integrando:

$$x(t) = c \int_0^t \Psi^{-2}(t, p) dt + x(0). \quad (7.18)$$

Podemos agora descrever este MRU deformado em cada um das abordagens deformadas, conforme e q-deformada. Vamos também renomear a constante $c = v$, para coincidir com o caso usual do MRU, quando " α " = 1.

B.6.1 MRU Conforme Opção 3

A equação (4.29) na abordagem conforme assume a seguinte forma:

$$x(t) = v \int_0^t t^{2\alpha-2} dt + x(0) = v \frac{t^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} + x(0) = vt_\alpha + x(0). \quad (7.19)$$

Onde t_α é um tempo deformado conforme. Quando $\alpha = 1$, a equação (7.19) retoma a equação usual do MRU. Esse resultado é análogo ao encontrado na Referência (CHUNG, 2015), com a devida redefinição de parâmetros.

O gráfico da equação (7.19) pode ser visto na figura (7.7), onde é possível perceber que as curvas deformadas com $\alpha < 1$ começam acima da curva usual. Com o passar do tempo elas se aproximam da curva usual, até o momento que se cruzam com a mesma, e seguem abaixo dela. O fenômeno oposto ocorre com as curvas $\alpha > 1$. Mesmo fenômeno físico que ocorreu no MRU com a opção 1.

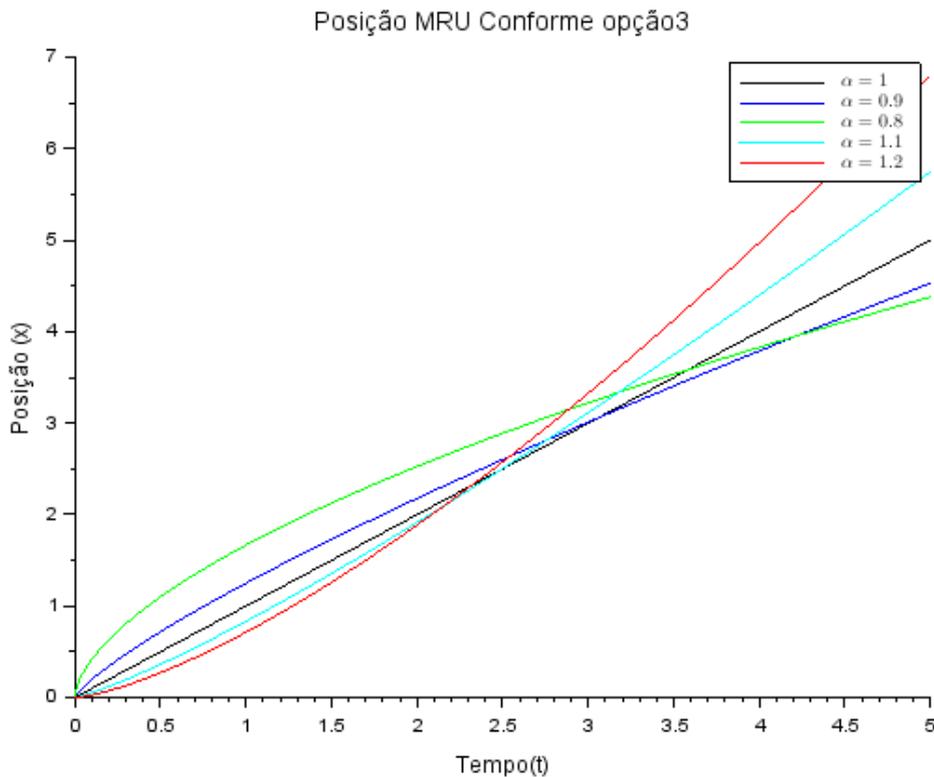


Figura 7.7: Posição em Função do Tempo no MRU Conforme Opção 3.

A seguir será apresentado o MRU q-deformado.

B.6.2 MRU q-Deformado Opção 3

A equação (4.29) na abordagem q-deformada assume a forma:

$$x(t) = v \int_0^t \frac{1}{(1 + (1 - q)t)^2} dt + x(0). \quad (7.20)$$

A integral da equação (7.20) pode ser resolvida por substituição simples. Fazendo $u = 1 + (1 - q)t$ e $du = (1 - q)dt$, a posição fica então:

$$x(t) = v \int_1^u \frac{1}{u^2} \frac{du}{1 - q} + x(0) = v \left(1 - \frac{1}{u}\right) \frac{1}{(1 - q)} + x(0) = v \left(\frac{u - 1}{u}\right) \frac{1}{(1 - q)} + x(0). \quad (7.21)$$

Explicitando u :

$$x(t) = v \left(\frac{(1 - q)t}{(1 + (1 - q)t)}\right) \frac{1}{(1 - q)} + x(0) = v \frac{t}{(1 + (1 - q)t)} + x(0) = vt_q + x(0). \quad (7.22)$$

Onde t_q é um tempo q -deformado. Quando $q = 1$, a equação (7.22) retoma a equação usual do MRUV. O gráfico da equação (7.22) pode ser visto na figura (7.8).

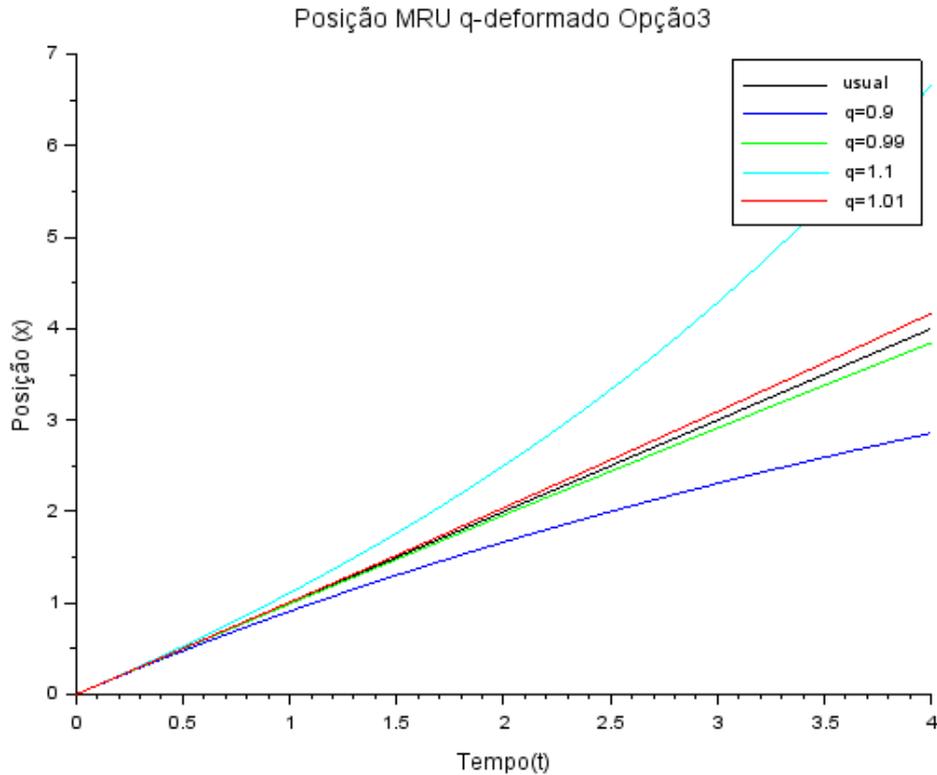


Figura 7.8: Posição em Função do Tempo no MRU q -Deformado Opção 3.

Pode ser visto pelo gráfico da figura (7.8), que as curvas deformadas com $q < 1$ seguem se afastando por baixo da curva usual e as curvas com $q > 1$ se afastam por cima. Mesmo fenômeno físico ocorrido no MRU com a opção 1.

B.7 MRUV Deformado Geral Opção 3

Agora será analisado o caso cuja a aceleração deformada, dada pela equação (4.26), é constante. Gerando um MRUV deformado. Como será visto a seguir:

$$a_p = \frac{dv}{dt} = a. \quad (7.23)$$

Separando as variáveis e integrando:

$$v_p(t) = at + v(0). \quad (7.24)$$

Através da equação (7.14) pode-se obter a posição:

$$\Psi^2 \frac{dx}{dt} = v_p(t) = at + v(0). \quad (7.25)$$

Dividindo ambos os lados por $\Psi^2(t, p)$ e separando as variáveis:

$$dx = \Psi^{-2} (at + v(0)) dt. \quad (7.26)$$

Integrando em ambos os lados:

$$x = \int_0^t \Psi^{-2} (at + v(0)) dt + x(0). \quad (7.27)$$

Pode-se descrever este resultado em cada uma das abordagens, conforme e q-deformada..

B.7.1 MRUV Conforme Opção 3

A equação (7.27) na abordagem conforme assume a seguinte forma:

$$x = \int_0^t t^{2\alpha-2} (at + v(0)) dt + x(0) = \int_0^t (at^{2\alpha-1} + v(0)t^{2\alpha-2}) dt + x(0). \quad (7.28)$$

Resolvendo a integral da equação (7.28), é obtido:

$$x = a \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha} + v(0) \frac{t^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} + x(0). \quad (7.29)$$

Resultado idêntico ao que pode ser encontrado na Referência (CHUNG, 2015). Quando $\alpha = 1$, a equação (7.29) retoma a equação usual do MRUV. O gráfico da equação (7.29) pode ser visto na figura (7.9).

Pode ser visto pelo gráfico da figura (7.4), que as curvas deformadas com $\alpha < 1$ começam por cima da curva usual e vão se aproximando da mesma, até o momento que se encontram com a curva usual e começam a se afastar por baixo dela. O fenômeno oposto é visto para curvas com $\alpha > 1$. Mesmo fenômeno físico ocorrido no MRUV com a opção 1.

B.7.2 MRUV q-deformado Opção 3

A equação (7.27) na abordagem q-deformada assume a seguinte forma:

$$x = \int_0^t \frac{at + v(0)}{(1 + (1 - q)t)^2} dt + x(0). \quad (7.30)$$

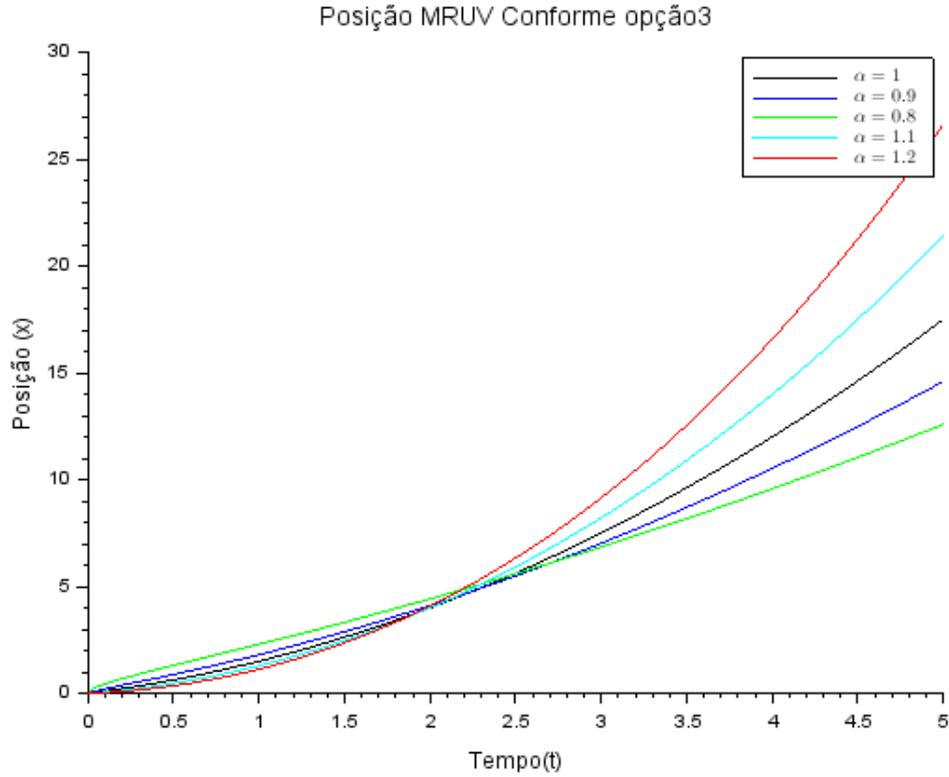


Figura 7.9: Posição em Função do Tempo no MRUV Conforme Opção 3.

A integral na equação (7.30) pode ser resolvida pelo método de integração por partes. Fazendo $u = at + v(0)$, $du = a dt$, $dv = \frac{1}{(1 + (1 - q)t)^2}$ e $v = -\frac{1}{(1 + (1 - q)t(1 - q))}$, obtendo:

$$x = \left[-\frac{at + v(0)}{(1 + (1 - q)t(1 - q))} \right] \Big|_0^t + \frac{a}{(1 - q)} \int_0^t \frac{1}{(1 + (1 - q)t)} dt + x(0). \quad (7.31)$$

A integral na equação (7.31) pode ser resolvida por substituição simples. Fazendo $u = 1 + (1 - q)t$ e $du = (1 - q)dt$, pode-se escrever para a posição:

$$x = \left[-\frac{at + v(0)}{(1 + (1 - q)t(1 - q))} \right] \Big|_0^t + \left[\frac{a}{(1 - q)^2} \ln(1 + (1 - q)t) \right] \Big|_0^t + x(0). \quad (7.32)$$

Aplicando os limites de integração, a equação (7.32) torna-se:

$$x = -\frac{at + v(0)}{(1 + (1 - q)t(1 - q))} + \frac{a}{(1 - q)^2} \ln(1 + (1 - q)t) + \frac{v(0)}{(1 - q)} + x(0). \quad (7.33)$$

Na figura (7.10) está esboçado o gráfico da equação (7.33), para valores distintos de q em comparação com o gráfico da equação usual do MRUV. Na figura em questão pode ser visto que as curvas com $q < 1$ crescem mais devagar no tempo que a curva usual

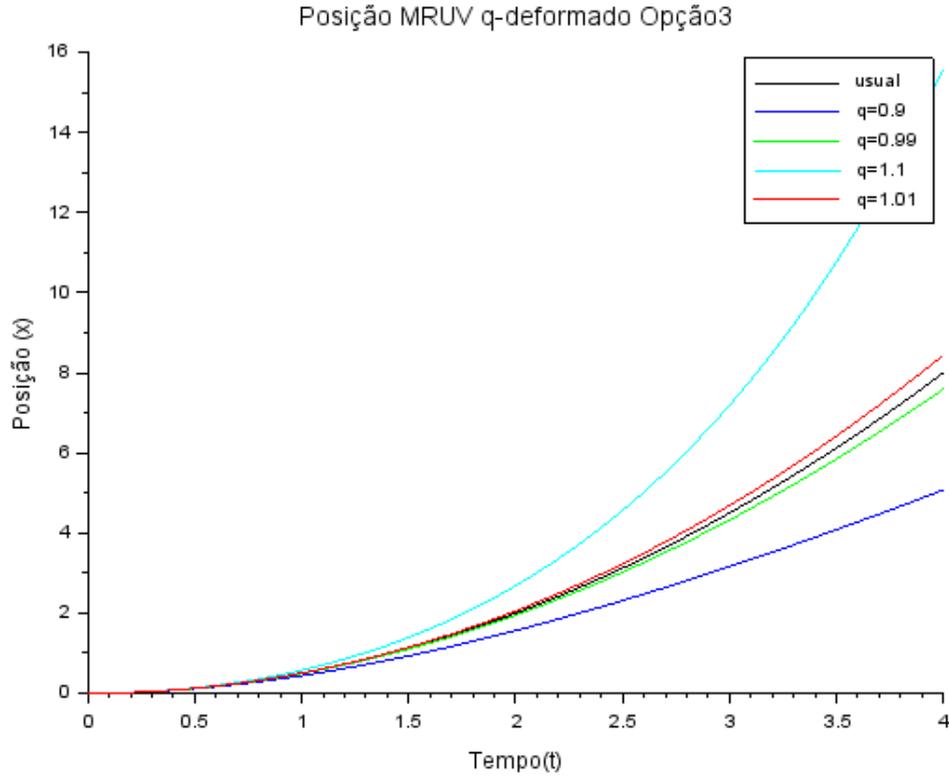


Figura 7.10: Posição em Função do Tempo no MRUV q-Deformado Opção 3.

e as curvas com $q > 1$ crescem mais rápido que a usual. Mesmo fenômeno físico ocorrido no MRUV com a opção 1.

Fazendo $1 - q = \epsilon$:

$$x = -\frac{at + v(0)}{(1 + (\epsilon)t)(1 - q)} + \frac{a}{(\epsilon)^2} \ln(1 + (\epsilon)t) + \frac{v(0)}{(\epsilon)} + x(0). \quad (7.34)$$

ou finalmente,

$$x = \frac{-(at + v(0))(\epsilon) + a(1 + (\epsilon)t) \ln(1 + (\epsilon)t) + v(0)(1 + (\epsilon)t)(\epsilon)}{(1 + (\epsilon)t)(\epsilon)^2} + x(0). \quad (7.35)$$

Pode-se mostrar que a equação (7.33) retoma a equação usual do MRUV no limite $\epsilon \rightarrow 0$. Dessa forma:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-(at + v(0))\epsilon + a(1 + \epsilon t) \ln(1 + \epsilon t) + v(0)(1 + \epsilon t)\epsilon}{(1 + \epsilon t)\epsilon^2}. \quad (7.36)$$

Que é uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'hôpital:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{-(at + v(0)) + at \ln(1 + \epsilon t) + at + v(0)t\epsilon + v(0)(1 + \epsilon t)}{2\epsilon + 3t\epsilon^2}. \quad (7.37)$$

Que também é uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando novamente a regra de L'hôpital:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2v(0)t + (at^2)/(1 + \epsilon t)}{2 + 6t\epsilon} = v(0)t + \frac{at^2}{2}. \quad (7.38)$$

Assim:

$$\lim_{q \rightarrow 1} x = \frac{at^2}{2} + v(0)t + x(0). \quad (7.39)$$

APÊNDICE C – SEGUNDA LEI DE NEWTON ABORDAGEM CONFORME E q-DEFORMADA OPÇÃO 3

C.1 Segunda Lei de Newton conforme

:
A equação (4.36) na abordagem conforme é:

$$F = m \frac{d}{dt} [t^{2-2\alpha} \dot{x}] = ma_\alpha. \quad (7.1)$$

Onde a_α é a aceleração conforme pela opção 3 de abordagem variacional. A equação (7.1) retoma a segunda lei de Newton usual quando $\alpha = 1$. Agora será analisado o caso em que α muito próximo de 1. Fazendo $\epsilon = 1 - \alpha$, com ϵ sendo tão pequeno quanto se desejar, resulta para F:

$$F = m \frac{d}{dt} [t^{2\epsilon} \dot{x}]. \quad (7.2)$$

Expandindo $t^{2\epsilon}$ em torno de $\epsilon = 0$ até a primeira ordem, obtêm-se:

$$F = m \frac{d}{dt} [(1 + 2\epsilon \ln(t)) \dot{x}]. \quad (7.3)$$

Aplicando o operador derivada usual:

$$F = m [2\epsilon t^{-1} \dot{x} + (1 + 2\epsilon \ln(t)) \ddot{x}]. \quad (7.4)$$

Fazendo a distributiva:

$$F = 2m\epsilon t^{-1} \dot{x} + m(1 + 2\epsilon \ln(t)) \ddot{x}. \quad (7.5)$$

Ou ainda:

$$F - 2m\epsilon t^{-1} \dot{x} = m(t) \ddot{x}. \quad (7.6)$$

Onde $m(t) = m(1 + 2\epsilon \ln(t))$. A equação (7.6) descreve um movimento com atrito mecânico e massa dependente do tempo.

C.2 Segunda Lei de Newton q-deformada

:
A equação (4.36) na abordagem q-deformada é:

$$F = m \frac{d}{dt} [(1 + (1 - q)t)^2 \dot{x}] = ma_q. \quad (7.7)$$

Onde a_q é a aceleração q-deformada dada pela opção 3. A equação (7.7) retoma a segunda lei de Newton usual quando $q = 1$. Agora será analisado o caso de q muito próximo de 1. Fazendo $\epsilon = 1 - q$ com ϵ muito pequeno obtêm-se:

$$F = m \frac{d}{dt} [(1 + \epsilon t)^2 \dot{x}]. \quad (7.8)$$

Resolvendo o termo de dentro do parenteses e desprezando os termos de ordem ϵ^2 obtêm-se:

$$F = m \frac{d}{dt} [(1 + 2\epsilon t) \dot{x}]. \quad (7.9)$$

Resolvendo a derivada usual:

$$F = m (2\epsilon \dot{x} + (1 + 2\epsilon t) \ddot{x}). \quad (7.10)$$

Aplicando a distributiva:

$$F = 2m\epsilon \dot{x} + m(1 + 2\epsilon t) \ddot{x}. \quad (7.11)$$

Ou ainda:

$$F - 2m\epsilon \dot{x} = m(t) \ddot{x}. \quad (7.12)$$

Onde $m(t) = (1 + 2\epsilon t)$. A equação (7.12) descreve um sistema com atrito mecânico e massa dependente da tempo.

APÊNDICE D – SEGUNDA LEI DE NEWTON DEFORMADA DUAL

- **Segunda lei de Newton conforme dual:**

A equação (4.39) na abordagem conforme é:

$$F = mx^{\alpha-1} \frac{d}{dt} ((x^{\alpha-1} \dot{x})). \quad (7.1)$$

Que quando $\alpha = 1$ é exatamente a segunda lei de Newton usual. Agora será analisado o caso onde α é muito próximo de 1. Fazendo $\epsilon = 1 - \alpha$, com ϵ muito pequeno, resulta em:

$$F = mx^\epsilon \frac{d}{dt} ((x^\epsilon \dot{x})). \quad (7.2)$$

Resolvendo a derivada usual:

$$F = mx^{-\epsilon} ((-\epsilon)x^{-\epsilon-1} \dot{x}^2 + x^{-\epsilon} \ddot{x}). \quad (7.3)$$

Colocando $x^{-\epsilon}$ em evidência, podemos escrever:

$$F = mx^{-2\epsilon} ((-\epsilon)x^{-1} \dot{x}^2 + \ddot{x}). \quad (7.4)$$

Expandindo $x^{-2\epsilon}$ em primeira ordem, em torno de $\epsilon = 0$:

$$F = m(1 - 2\epsilon \ln(x)) ((-\epsilon)x^{-1} \dot{x}^2 + \ddot{x}). \quad (7.5)$$

Aplicando a distributiva:

$$F = -m\epsilon x^{-1} \dot{x}^2 + m(1 - 2\epsilon \ln(x)) \ddot{x}. \quad (7.6)$$

Finalmente, podemos escrever para a força:

$$F + m\epsilon x^{-1} \dot{x}^2 = m(x) \ddot{x}. \quad (7.7)$$

Onde $m(x) = m(1 - 2\epsilon \ln(x))$. A equação (7.7) descreve um sistema com massa dependente da posição.

- **Segunda lei de Newton q-deformada dual:**

A equação (4.39) na abordagem q-deformada é:

$$F = m \frac{1}{(1 + (1 - q)x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{(1 + (1 - q)x)} \dot{x} \right). \quad (7.8)$$

Sendo é igual a segunda lei de Newton usual quando $q = 1$. Nesse ponto, será analisado o caso em que q é muito próximo de 1. Fazendo $\epsilon = 1 - q$, resulta:

$$F = m \frac{1}{(1 + \epsilon x)} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{(1 + \epsilon x)} \dot{x} \right). \quad (7.9)$$

Resolvendo a derivada usual:

$$F = m \frac{1}{(1 + \epsilon x)} \left(-\frac{\epsilon}{(1 + \epsilon x)^2} \dot{x}^2 + \frac{1}{(1 + \epsilon x)} \ddot{x} \right). \quad (7.10)$$

Colocando $\frac{1}{(1 + \epsilon x)}$ em evidência:

$$F = m \frac{1}{(1 + \epsilon x)^2} \left(-\frac{\epsilon}{(1 + \epsilon x)} \dot{x}^2 + \ddot{x} \right). \quad (7.11)$$

Desconsiderando os termos de ordem ϵ^2 ou superior:

$$F = m \frac{1}{(1 + 2\epsilon x)} \left(-\frac{\epsilon}{(1 + \epsilon x)} \dot{x}^2 + \ddot{x} \right). \quad (7.12)$$

Aplicando a distributiva:

$$F = -m \frac{\epsilon}{(1 + 3\epsilon x)} \dot{x}^2 + m \frac{1}{(1 + 2\epsilon x)} \ddot{x}. \quad (7.13)$$

Ou ainda:

$$F + m \frac{\epsilon}{(1 + 3\epsilon x)} \dot{x}^2 = m(x) \ddot{x}. \quad (7.14)$$

Onde $m(x) = m \frac{1}{(1 + 2\epsilon x)}$. A equação (7.14) descreve um sistema com massa dependente da posição.

APÊNDICE E – CINEMÁTICA DEFORMADA DUAL

A abordagem deformada dual, define a velocidade deformada como:

$$v_p = \Psi^{-1}(x, p) \frac{dx}{dt}. \quad (7.1)$$

E a aceleração deformada:

$$a_p = \Psi^{-1}(x, p) \frac{dv}{dt}. \quad (7.2)$$

E.1 MRU Deformado Dual

Neste momento será analisado o caso em que a velocidade deformada, dada pela equação (7.14) é constante. Dando origem a uma possível generalização do **MRU**. Como se segue:

$$v_p = \Psi^{-1}(x, p) \frac{dx}{dt} = c. \quad (7.3)$$

Separando as variáveis e integrando:

$$\int_{x(0)}^x \Psi^{-1}(x, p) dx = ct. \quad (7.4)$$

Podemos agora descrever este **MRU** deformado dual em cada um das abordagens deformadas, conforme dual e q-deformada dual.

E.1.1 MRU Conforme Dual

A equação (7.4) na abordagem conforme dual, assume a seguinte forma:

$$\int_{x(0)}^x x^{\alpha-1} dx = vt. \quad (7.5)$$

Resolvendo a integral:

$$\left(\frac{x^\alpha}{\alpha} \right) \Big|_{x(0)}^x = vt. \quad (7.6)$$

Considerando os limites de integração:

$$\frac{x^\alpha}{\alpha} - \frac{x^\alpha(0)}{\alpha} = vt. \quad (7.7)$$

Multiplicando por α em ambos os lados:

$$x^\alpha = v\alpha t + x^\alpha(0). \quad (7.8)$$

Ou ainda:

$$x = (v\alpha t + x^\alpha(0))^{1/\alpha}. \quad (7.9)$$

A equação (7.9), quando $\alpha = 1$, retoma a equação usual da posição do **MRU**.

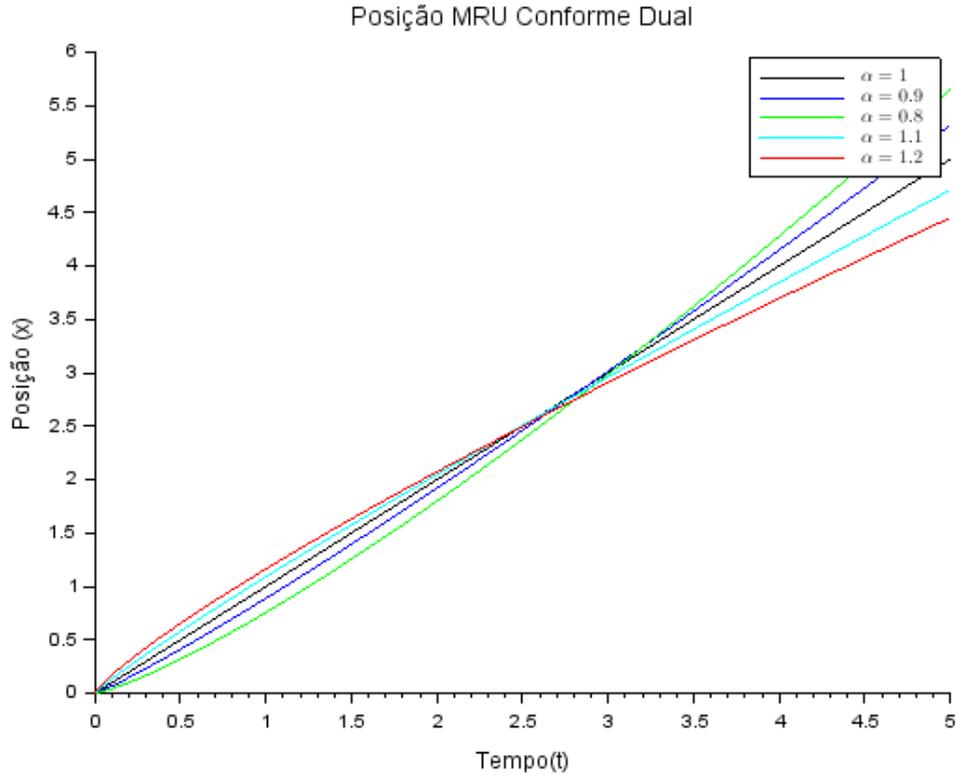


Figura 7.1: Posição em Função do Tempo no MRU Conforme Dual.

O gráfico da equação (7.9) pode ser visto na figura (7.1), onde se pode perceber que as curvas deformadas, em relação a curva usual, seguem um padrão similar ao que observado na figura (7.9) do apêndice B e o fenômeno físico se repete.

A seguir será apresentado o MRU q-deformado.

E.1.2 MRU q-Deformado Dual

A equação (7.4) na abordagem q-deformada, assume a forma:

$$\int_{x(0)}^x \frac{1}{1 + (1 - q)x} dx = vt. \quad (7.10)$$

Resolvendo a integral:

$$\left[\frac{\ln(1 + (1 - q)x)}{1 - q} \right] \Big|_{x_0}^x = vt. \quad (7.11)$$

Aplicando os limites de integração:

$$\frac{\ln(1 + (1 - q)x) - \ln(1 + (1 - q)x_0)}{1 - q} = vt. \quad (7.12)$$

Organizando a equação (7.12):

$$\ln \left(\frac{1 + (1 - q)x}{1 + (1 - q)x_0} \right) = (1 - q)vt. \quad (7.13)$$

Aplicando exponencial em ambos os lados:

$$\frac{1 + (1 - q)x}{1 + (1 - q)x_0} = \exp((1 - q)vt). \quad (7.14)$$

Ou ainda:

$$x = \frac{(1 + (1 - q)x_0) \exp((1 - q)vt) - 1}{1 - q}. \quad (7.15)$$

O gráfico da equação (7.15) se encontra na figura (7.1), onde é observado que as curvas deformadas com $q < 1$ seguem se afastando por cima da curva usual e as curvas com $q > 1$ se afastam por baixo. Fisicamente no caso $q < 1$ o meio está acelerando o sistema e quando $q > 1$ o meio oferece resistência ao movimento.

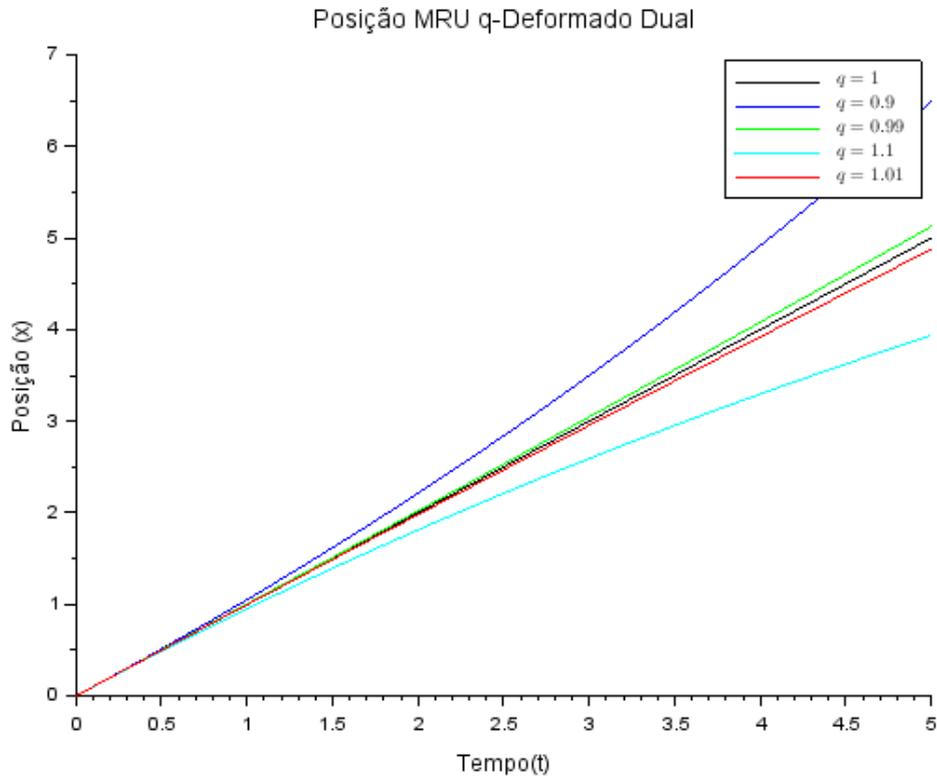


Figura 7.2: Posição em Função do Tempo no MRU q-Deformado Dual.

Pode-se mostrar que a equação (7.15) converge para a equação da posição do **MRU** usual, no limite $q \rightarrow 1$. Desse modo:

$$\lim_{q \rightarrow 1} x = \lim_{q \rightarrow 1} \frac{(1 + (1 - q)x_0) \exp((1 - q)vt) - 1}{1 - q}. \quad (7.16)$$

Que é uma indeterminação do tipo 0/0. Aplicando a regra de L'hospital, resulta em:

$$\lim_{q \rightarrow 1} x = \lim_{q \rightarrow 1} x_0 \exp((1 - q)vt) + vt(1 + (1 - q)x_0) = x_0 + vt. \quad (7.17)$$

APÊNDICE F – MÉTODO NUMÉRICO DE EULER

F.1 Método de Euler

Métodos numéricos são algoritmos aritméticos que conseguem gerar soluções aproximadas para equações diferenciais ordinárias **EDOs**. Aqui será apresentado o mais simples e antigo dos métodos numéricos, o Método de Euler ([BOYCE; DIPRIMA, 2002](#)).

Para se utilizar o método de Euler o primeiro passo é definir o intervalo $[a, b]$ onde se está trabalhando e feito isso deve-se subdividir este intervalo em N intervalos igualmente espaçados com espaçamentos de tamanho h .

O método de Euler é um método de integração numérica que consiste em encontrar uma função que é solução aproximada de uma EDO, sabendo a derivada da mesma e um valor inicial. O método consiste em expandir uma função $y(x+h)$ em torno de $h=0$ e tomar uma aproximação em primeira ordem. Deste modo:

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + O(h^2). \quad (7.1)$$

Onde h é chamado "passo" de integração. Como $y' = f(x)$ o método sugere encontrar os valores $y_{i+1} = y(x_{i+1}) = y(x_i + h)$. Deste modo a equação (7.1) fica escrita:

$$y(x_i + h) = y(x_i) + f(x_i, y_i)h. \quad (7.2)$$

Uma vez definido o valor do passo h e sabendo o valor inicial da função y_i no ponto $x = x_i$ pode-se obter os valores $y(x_{i+1}), y(x_{i+2}), \dots$ nos pontos x_{i+1}, x_{i+2}, \dots . Quanto menor o passo h maior a fidelidade do resultado. O erro do método é da ordem h^2 ([ASANO; COLLI, 2009](#)).

Dada uma EDO na forma:

$$y' = f(x, y). \quad (7.3)$$

Sujeita a condição inicial $y(x_0) = y_0$. Uma solução aproximada para equação (7.3) pode ser obtida, com o algoritmo (2). O algoritmo foi feito em Scilab para utilização do

método de Euler. A seguir um exemplo:

Algoritmo 1: Modelo de Rotina para Método de Euler

```
a = a; // Define o ponto inicial para o intervalo.
b = b; // Define o ponto final para o intervalo.
N = N; // Número de passos.
x(1) = x0; // Valor inicial da variável.
y(1) = y0; // Valor inicial da função.
h = (a + b)/N; // Valor do passo.
for i = 1 : /N // Aqui o programa faz as iterações.
x(i + 1) = x(i) + h // Valor da variável após cada iteração.
y(i + 1) = y(i) + f(x(i), y(i)) * h // Valor da função após cada iteração.
end
plot2d(x,y,1) // Comando para gerar o gráfico da função em relação a variável.
xlabel('Variável(x)', 'FontSize', 2) // Define o título do eixo das abscissas.
ylabel('Função(y)', 'FontSize', 2) // Define o título do eixo das ordenadas.
title('Solução numérica aproximada', 'FontSize', 3); // Define o título do
gráfico.
legend('legenda') // Define as legendas do gráfico.
```

$$y'(x) = x^2. \quad (7.4)$$

Sujeito a condição $y(0) = 3$.

A solução analítica é $y = \frac{x^3}{3} + 3$. Agora será encontrada a solução numérica, no intervalo $[0, 1]$. Adotando um passo $h = 0.2$. Seguem os valores de x são $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$ e $x_5 = 1$.

Agora serão encontrados os valores de $y(x)$:

$$y(x_1) = y(x_0) + x_0^2 h = 3.$$

$$y(x_2) = y(x_1) + x_1^2 h = 3 + 0.04 \times 0.2 = 3.008.$$

$$y(x_3) = y(x_2) + x_2^2 h = 3.008 + 0.16 \times 0.2 = 3.04.$$

$$y(x_4) = y(x_3) + x_3^2 h = 3.04 + 0.36 \times 0.2 = 3.112.$$

$$y(x_5) = y(x_4) + x_4^2 h = 3.112 + 0.64 \times 0.2 = 3.24.$$

O gráfico com a comparação entre a solução analítica e a solução numérica da equação (7.4), para passos de tamanho $h = 0.2$ e $h = 0.01$, pode ser visto na figura (7.1). No gráfico é possível ver claramente que quanto menor o tamanho do passo, menor o erro cometido.

F.2 Método de Euler Duplo

O método de Euler duplo pode ser utilizado para a solução de equações diferenciais de segunda ordem. Suponha a seguinte EDO:

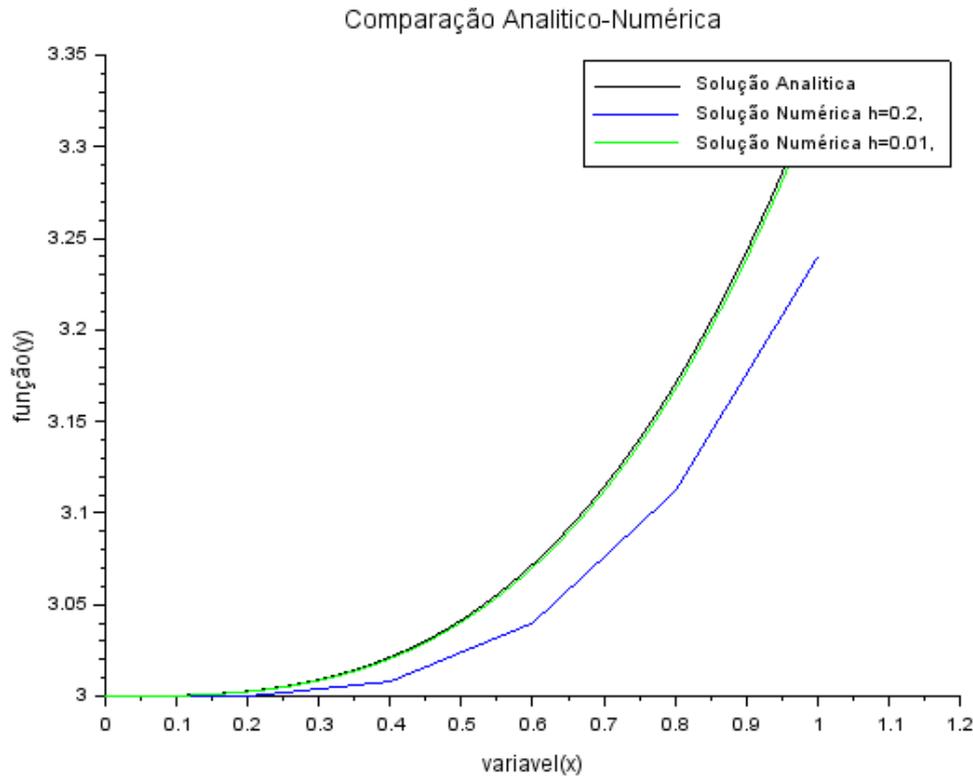


Figura 7.1: Comparação Analítico Numérica.

$$y''(x) = f(x, y'(x), y''(x)), \quad (7.5)$$

sujeita às seguintes condições iniciais, $y(a) = y_a$ e $y'(a) = y'_a$.
A equação (F) pode ser reescrita:

$$\frac{dy'(x)}{dx} = f(x). \quad (7.6)$$

Identificando $y'(x) = g(x)$, pode-se reescrever a equação (7.6):

$$\frac{dg(x, y')}{dx} = f(x). \quad (7.7)$$

Discretizando a derivada na equação (7.7), podemos escrever para $g(x)$:

$$g(x_{i+1}) = g(x_i) + f(x_i)h. \quad (7.8)$$

Como $y'(x) = g(x)$, se discretizarmos essa derivada, vem que:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + g(x_{i+1})h. \quad (7.9)$$

Note que o resultado da equação (7.9) depende do resultado da equação (7.8). Esta interdependência faz com que as duas equações façam parte de um sistema. Por isso, o nome Método de Euler Duplo.

APÊNDICE G – ROTINAS NUMÉRICAS

Neste apêndice serão apresentadas as rotinas numéricas utilizadas durante esta dissertação. As mesmas foram usadas para gerar os gráficos de posição em função do tempo para osciladores deformados e deformados duais, assim como gerar os respectivos gráficos de energia.

Nas rotinas referentes a OHSs conformes e conforme duais o parâmetro α é identificado pela letra 'a'.

O gráficos de análise de energia apresentados nas figuras (4.7), (4.9), (4.12) e (4.15) respectivamente, foram gerados a partir da modificação, nas rotinas, dos comandos: `plot2d((m * y^2)/2)` para a energia cinética, `plot2d((k * x^2)/2)` para a energia potencial e `plot2d((m * y^2)/2 + k * x^2)/2)` para a energia mecânica. As rotinas serão apresentadas a seguir.

G.1 Rotina Numérica para o OHS Conforme Opção 3

No algoritmo (2) é possível ver a rotina numérica que deu origem a figura (4.6), no gráfico da figura em questão x é a posição do OHS conforme definido pela opção 3 e y é a velocidade conforme definida pela mesma abordagem $y = v_\alpha = t^{2-2\alpha} \frac{dx}{dt}$. A partir disto foi possível calcular, via método numérico, a energia cinética, potencial e mecânica conformes, via opção 3.

Algoritmo 2: Rotina Numérica para o OHS Conforme Opção 3.

```
x(1) = 1;
t(1) = 0
y(1) = 0;
k = 1;
m = 1;
h = 0.0015625;
a = 1;
for i = 1 : 6200
t(i + 1) = t(i) + h
y(i + 1) = y(i) - sqrt(k/m) * x(i) * h
x(i + 1) = x(i) + t(i + 1)^(2 * a - 2) * y(i + 1) * h
end
plot(t,x,1)
xlabel('tempo(t)', 'FontSize', 2)
ylabel('Posição(x)', 'FontSize', 2)
title('Posição do OHS Opção 3', 'FontSize', 3);
legend('usual', 'α = 0.9', 'α = 0.99', 'α = 1.1', 'α = 1.01')
```

G.2 Rotina Numérica para o OHS q-Deformada Opção 3

No algoritmo (3) é possível ver a rotina numérica que deu origem a figura (4.8), no algoritmo, x é a posição do OHS q-deformado definido pela opção 3 e y é a velocidade q-deformada na mesma abordagem $y = v_q = (1 + (1 - q)t)^2 \frac{dx}{dt}$. A partir disto foi possível

calcular numericamente a energia cinética, potencial e mecânica q-deformadas, via opção 3.

Algoritmo 3: Rotina Numérica para o OHS q-Deformado Opção 3.

```

x(1) = 1;
t(1) = 0;
y(1) = 0;
k = 1;
m = 1;
h = 0.0015625;
q = 0.95;
for i = 1 : 6400
t(i + 1) = t(i) + h
y(i + 1) = y(i) - sqrt(k/m) * x(i) * h
x(i + 1) = x(i) + ((1 + (1 - q) * t(i + 1))(-2)) * y(i + 1) * h
end
plot2d(t,x,1)
xlabel('tempo(t)', 'FontSize', 2)
ylabel('Posição(x)', 'FontSize', 2)
title('Posição do OHS q-Deformado Opção 3', 'FontSize', 3);
legend('Usual', 'q = 0.99', 'q = 0.995', 'q = 1.01', 'q = 1.015')

```

G.3 Rotina Numérica para o OHS Conforme Dual Opção 3

No algoritmo (4) é possível ver a rotina numérica que deu origem a figura (4.11), no algoritmo em questão x é a posição do OHS conforme dual e y é a velocidade conforme dual $y = \tilde{v}_\alpha = t^{\alpha-1} \frac{dx}{dt}$. A partir disto foi possível calcular a energia cinética, potencial e mecânica conforme duais.

Algoritmo 4: Rotina Numérica para o OHS Conforme Dual Opção 3.

```

k = 1;
m = 1;
x(1) = 1;
t(1) = 0;
y(1) = 0;
h = 0.025;
a = 0.7;
for i = 1 : 1200
t(i + 1) = t(i) + h
y(i + 1) = y(i) - (x(i))(1 - a) * x(i) * sqrt(k/m) * h
x(i + 1) = x(i) + (x(i))(1 - a) * y(i + 1) * h end
plot2d(t, x)
xlabel('tempo(t)', 'FontSize', 2)
ylabel('Posição (x)', 'FontSize', 2)
title('Posição do OHS Conforme Dual em Função do Tempo', 'FontSize', 3);
legend('Usual', 'α = 0.9', 'α = 0.7', 'α = 1.1', 'α = 1.3')

```

G.4 Rotina Numérica para o OHS q-Deformada Dual Opção 3

No algoritmo (5) é possível ver a rotina numérica que deu origem a figura (??), nesse algoritmo, x é a posição do OHS q-deformado dual e y é a velocidade q-deformada dual $y = \tilde{v}_q = (1 + (1 - q)t)^{-1} \frac{dx}{dt}$. A partir disto, foi possível calcular a energia cinética, potencial e mecânica q-deformadas duais.

Algoritmo 5: Rotina Numérica para o OHS q-deformado Dual Opção 3.

```
x(1) = 1;
t(1) = 0;
k = 1;
m = 1;
y(1) = 0;
h = 0.01;
q = 0.4;
for i = 1 : 2000
t(i + 1) = t(i) + h
y(i + 1) = y(i) - (1 + (1 - q) * x(i)). * x(i) * sqrt(k/m) * h
x(i + 1) = x(i) + (1 + (1 - q) * x(i)). * y(i + 1) * h
end plot2d(t, (x),5)
xlabel('tempo(t)', 'FontSize', 2)
ylabel('Posição(x)', 'FontSize', 2)
title('Posição OHS Conforme Dual', 'FontSize', 3);
legend('usual' , 'q = 0.7', 'q = 0.4', 'q = 1.3', 'q = 1.6')
```
