**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO**
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

**DISSERTAÇÃO**

# O USO DE UMA SALA INTERATIVA PARA A APRENDIZAGEM DE POLIEDROS ESTRELADOS NO ENSINO MÉDIO

**Wellington Gonçalves Lemos**

**Seropédica – RJ**
**2015**

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

# O USO DE UMA SALA INTERATIVA PARA A APRENDIZAGEM DE POLIEDROS ESTRELADOS NO ENSINO MÉDIO

**WELLINGTON GONÇALVES LEMOS**

*Sob orientação do Professor*
**Pedro Carlos Pereira**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

**Seropédica – RJ**
**2015**

516.007
L557u
T

Lemos, Wellington Gonçalves, 1983-
O uso de uma sala interativa para a aprendizagem de poliedros estrelados no ensino médio / Wellington Gonçalves Lemos. – 2015.
viii, 63 f.: il.

Orientador: Pedro Carlos Pereira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2015.
Bibliografia: f. 59-61.

1. Geometria – Estudo e ensino (Ensino médio) – Teses. 2. Poliedros – Teses. 3. Análise de interação em educação – Teses. 4. Educação – Multimídia interativa – Teses. 5. Professores – Formação – Teses. I. Pereira, Pedro Carlos, 1959- II. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO**
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**
**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

**WELLINGTON GONÇALVES LEMOS**

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 31/08/2015

Pedro Carlos Pereira

Pedro Carlos Pereira. Dr. UFRRJ
(Orientador)

Orlando Santos Pereira

Orlando dos Santos Pereira. Dr. UFRRJ

José Roberto Linhares de Mattos. Dr. UFF

À minha esposa Elisabete e minha filha Sara merecedoras de toda minha devoção. Obrigado por todo incentivo.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus por sua graça e misericórdia. Por tanto que me ama e não desistiu de mim. Obrigado meu Deus!

Agradeço a minha esposa, Elisabete Soares Lemos, tão dedicada e generosa, que passou dias e noites me ouvindo falar sobre matemática. Ninguém merece isso... Hehehehe... Não é mesmo meu amor?

Agradeço aos meus familiares que me ajudaram em orações nesse período em que passei por momentos que marcaram a minha vida para sempre.

Agradeço a minha mãe, Ângela Maria, que me deu todo apoio possível e esteve ao meu lado nos momentos mais difíceis. Mamãe eu te amo!

Agradeço ao meu orientador, Pedro Carlos Pereira, por ter tido paciência e também por ter me ensinado coisas que jamais me esquecerei.

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

E, não posso deixar de agradecer a galera da turma PROFMAT 2013 que me receberam da melhor forma possível.

Em fim, agradeço aqueles que me ajudaram diretamente ou indiretamente a concluir esse curso de pós-graduação. Amo todos vocês!

**RESUMO**

Atualmente o trabalho com poliedros estrelados no ensino médio não possui registro nas propostas oficiais nacionais. Tais poliedros despertam interesse nos professores, também nos alunos, devido sua beleza e também pela sua estrutura conceitual. Assim, o presente trabalho tem o objetivo de analisar como uma sala de aula interativa voltada para a diversidade, e não apenas para limitações de habilidades dos alunos, contribui cognitiva e diferentemente no aprendizado de cada um deles quando o tema estudado são os poliedros estrelados. Mostramos como uma sala interativa é capaz de incluir alunos que facilmente se excluem da aula devido a uma dificuldade apresentada ao realizar atividade com um recurso que expõe suas limitações. Essa arquitetura de sala de aula desafia os educadores a repensarem as diferentes possibilidades para análise do processo ensino-aprendizagem. Além de propor inovações curriculares, acreditamos que os resultados do trabalho tragam novas perspectivas para a análise do aprendizado matemático mediante o uso de dobraduras, planificações, animações e vídeos didáticos.

**Palavras-chave:** poliedros estrelados, geometria, sala de aula interativa, ensino médio, formação de professores.

**ABSTRACT**

Currently working with stellar polyhedra in high school is not registered in official national proposals. Such polyhedra arouse interest in teachers and also the students because of its beauty and also for its conceptual struture. Therefore, the presente work aims to analyze how a classroom dedicated to diversity, and not just to students skill limitations, cognitive and contribues differently for learning each of them when the topic studied are the stellar polyhedra. We show you an interactive room is able to include students who easily exclude school due to a difficulty to perform activity with a feature that exposes its limitations. This architeture of classroom challenges educators to rethink different possiblities for analysis of teaching-learning process. In addition to curricular innovations, we believe that the results of the work bring new perspectives for the analysis of mathematical learning through the use of foldings, adjutments, animations and instutional videos.

**Keywords:** stellar polyhedra, geometry, interactive classroom, high school, teacher training

## SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Atualmente, vivemos em uma constante transformação com a presença frequente de novas tecnologias e, essas transformações refletem na educação com várias mudanças metodológicas no qual a participação do aluno se torna primordial.

Com o uso da tecnologia na sala de aula o professor tem a possibilidade de inovar em sua prática de ensino e aprendizagem, como também viabilizar a circulação de informações de forma mais atrativa, estimulando a construção de aprendizados múltiplos e contextualizando conteúdos variados, possibilitando que seus alunos despertem suas criatividades, explorem suas sensibilidades e emoções. Com essa gama de possibilidades, o professor pode ser capaz de conduzir seus alunos a aprendizados significativos.

O trabalho com geometria, apoiado ao uso de novas tecnologias, levam os processos de ensino a um nível onde o aluno questiona, participa e vivencia diferentes perspectivas de aprendizagem e, assim, se sente capaz de descobrir, inventar e, até mesmo, criar possibilidades para várias respostas.

A geometria recebe um destaque nos Parâmetros Curriculares Nacionais devido a sua importância,

> A geometria constitui a parte mais importante do currículo matemático do aluno, pois através do estudo, o aluno desenvolve um pensamento espacial, que possibilitará a compreensão do mundo onde vivemos. São estas idéias as principais norteadoras da presente abordagem. (BRASIL, 1998, p. 57)

Com o passar do tempo, alguns conceitos da Matemática, especificamente de Geometria Espacial, foram abandonados dos programas de ensino. Dos seus conteúdos, os Poliedros Estrelados são inexistentes nas propostas oficiais nacionais.

Nesta perspectiva, este trabalho trata do desenvolvimento de uma metodologia para a abordagem dos Poliedros Estrelados, com os estudantes do segundo ano do ensino médio, em uma sala de aula interativa, voltada para a diversidade de habilidades e abordagens dinâmicas e inovadoras. Para isto, elaboramos atividades que enfatizam o processo de estrelação de polígonos e poliedros, construímos sequências de procedimentos mediante dobraduras em papel (origami e planificações), utilizamos animações digitais e programas de computador para auxiliar as aulas, mostramos vídeos didáticos para a construção dos poliedros estrelados mediante dobradura com papel que podem ser utilizados pelo docente para o seu trabalho.

Para alcançar nossos objetivos, o presente trabalho é estruturado de maneira que no primeiro capítulo tratamos da geometria no currículo e a importância da visualização no ensino da geometria. Consideraremos a temática abordada, debruçando-se nos estudos e pesquisas desenvolvidas por vários estudiosos na área, de forma a proporcionar a compreensão das contribuições do ensino de geometria na escola.

No segundo capítulo discutimos os recursos didáticos que o professor pode utilizar em sala de aula. Para isto, olhamos como os vídeos, o origami e o computador, quando utilizados da maneira correta, são grandes potencialidades que podem contribuir na sala de aula como recursos de aprendizagem.

No terceiro capítulo realizamos um estudo sobre os Poliedros Estrelados Regulares ou Sólidos de Kepler-Poinsot. Como se dá o processo de estrelação de um polígono e um poliedro. Utilizamos o ângulo poliédrico para analisar como um poliedro regular é formado. Concluímos que só existem 5 poliedros regulares convexos e 4 poliedros regulares não-convexos (poliedros estrelados) e mostramos como esses poliedros aparecem na história e tem influenciado o ensino de geometria até os dias de hoje. Estes componentes conceituais articularão os aspectos curriculares com os cognitivos, elementos que serão considerados na elaboração de atividades práticas. Além isso, ilustramos as construções de três poliedros estrelados regulares (pequeno dodecaedro estrelado, grande dodecaedro e grande dodecaedro estrelado) através de origami modular com os módulos super simple isosceles triangle e sonobe.

No quarto capítulo descrevemos o processo utilizado para implementarmos as atividades na sala de aula interativa e na sala de aula regular. Apresentamos os resultados obtidos nas implementações em cada turma. Para uma melhor compreensão, utilizamos algumas figuras para ilustrar os resultados e, ao final do capítulo, mostramos a análise obtida a partir dos resultados na sala de aula interativa e na sala de aula regular.

Nas considerações finais, ressaltamos que o uso da sala de aula interativa é importante, pois, além de oferecer uma grande quantidade de recursos didáticos para os alunos realizarem suas descobertas, ela permite que o aluno indague sobre o assunto gerando curiosidade e criatividade. Além disso, permite a inclusão de alunos que, devido suas limitações de habilidades ao utilizar um determinado recurso se excluem da aula para não ficarem expostos. Ressaltamos também que o professor precisa possuir crença e engenhosidade, pois é preciso acreditar naquilo que se deseja fazer, transformar ou construir.

A relevância desse trabalho consiste em enfatizarmos o uso de uma sala de aula interativa repleta de recursos tecnológicos com a possibilidade de formação de cidadãos críticos e criativos, bem como a inclusão social dos alunos e ensinando que cada um deles são capazes de transformarem a si mesmos e expandirem a sociedade em que vivem. Dessa maneira, acreditamos que este trabalho além de favorecer um novo olhar sobre a sala de aula e suas possibilidades de aprendizado, ele desafia estudantes, pesquisadores e professores a repensarem seus métodos e técnicas de ensino e aprendizagem.

# 1 UM OLHAR NA GEOMETRIA

Neste momento a fundamentação teórica sobre a proposta do trabalho nos ajuda como um ponto de partida para responder nossa pergunta: ***Como uma sala de aula voltada para a diversidade, e não apenas para limitações de habilidades dos alunos, contribui cognitiva e diferentemente no aprendizado de cada um deles?*** O caminho que usamos expõe estudos realizados por autores que se dedicaram a analisar o processo de ensino, aprendizagem e como esse processo pode ser aplicado em uma sala de aula. Para tanto, vermos a importância do currículo de geometria na escola e como este pode ser utilizado de maneiras inovadoras. Analisamos como a visualização pode influenciar de maneira direta nos resultados do processo de ensino aprendizagem.

## 1.1 A Geometria e o Currículo Escolar

O entendimento sobre representações geométricas que estão presentes na natureza está diretamente ligada com algumas habilidades que o ensino de geometria pode proporcionar, como por exemplo, experimentar, argumentar, representar, além de instigar a imaginação e a criatividade.

De acordo com Lemos (2008, p. 6),

> a utilização de animações como suporte didático em Matemática tem mostrado ser uma ferramenta útil para o professor pela variedade de mídia que podemos trabalhar e, também, por serem potenciais na aprendizagem.

Porém, é necessário que exista uma adaptação por parte do professor para permitir que os alunos explorem todas as opções dos materiais e, não somente utilizando-os como se fossem um manual de instruções. Para Lorenzato (2006), a aprendizagem será compreensiva e agradável para os alunos se o professor possuir conhecimento, pois ninguém ensina o que não sabe, mas também é preciso conhecer metodologia de ensino e possuir uma boa formação matemática e pedagógica.

Conforme afirma Even (1990), algumas pesquisas mostram que estão ocorrendo mudanças na formação profissional dos professores com o intuito de reforçar o domínio da matéria e o de ensinar. Assim, eles passam por um exame em demonstrar o nível de seu domínio sobre o assunto que vai ensinar. Segundo Leinhardt e Smith (1985), o conhecimento do professor deve ser medido de forma qualitativa, mas este conhecimento vem sendo medido de uma forma quantitativa, isto é, contando-se a quantidade de títulos do professor.

Conforme Ball (1990), a base de uma formação docente inicial é aprender a ensinar. Um professor que sabe matemática superior nem sempre vai saber ensinar algo básico para um aluno de ensino médio. Pois saber ensinar um conteúdo é muito diferente de saber o conteúdo. Dessa forma, alguns professores acabam por escolher os conteúdos a serem ensinados e seguem sua própria linha de escolha.

Alguns conceitos de Matemática, especificamente de Geometria Espacial, com o passar do tempo foram abandonados dos programas de ensino. Porém, conforme sublinharam Lemos e Bairral (2010), pensar na geometria no currículo de matemática implica repensar o currículo de matemática e as finalidades deste.

Acreditamos que um ensino que leve os alunos a adquirirem uma compreensão conceitual do conteúdo matemático e relacioná-lo com outros conhecimentos está um pouco distante das escolas. Como exemplo, o ensino de geometria.

Segundo Bastos (1999), a geometria ensinada nas escolas deve permitir a interpretação e a intervenção do espaço em que vivemos. Isso também abrange a visualização, representação, manipulação e criação de novos objetos, além da resolução de problemas de aplicação da geometria a situações da vida real, a sua ligação à arte e outras coisas em comum.

Já Pavanello (2004), ressalta que o papel da geometria não significa minimizar o da álgebra. Devemos cultivar e desenvolver tanto o pensamento visual, dominante na geometria, quanto o sequencial, preponderante na álgebra, pois ambos são essenciais à educação matemática. A prioridade dada, ainda recentemente, à álgebra, tanto na pesquisa como no ensino da matemática, acabou por desenvolver somente um tipo de pensamento. É necessário restabelecer o equilíbrio, retomando-se o ensino da geometria.

Há outras perspectivas que devem estar presentes no ensino da geometria. A geometria é também uma forma de representação de outros conceitos e idéias matemáticas e um saber que estabelece conexões entre as várias formas de pensamento matemático. São inúmeros os exemplos ao longo da história do pensamento matemático que as ideias surgiram de tentativas de resolução de problemas geométricos e de problemas não geométricos, ou por problemas que se resolvem por métodos geométricos. É importante que, ao longo da escolaridade, os alunos se vão gradualmente familiarizando com a formalização, com os processos dedutivos e demonstrativos tão próprios da geometria, para que fique mais completo o seu conhecimento acerca deste patrimônio cultural que é a matemática (BASTOS, 1999).

A maioria dos alunos questiona com seus professores o fato de a Matemática ser muito difícil. Eles afirmam que ela é uma disciplina abstrata, que exige muito raciocínio, além de muitas fórmulas, letras e cálculos. E, além disso, não se consegue associar a disciplina apresentada na escola ao cotidiano.

Para Ferreira (2004) a matéria é apresentada na maioria das escolas de forma expositiva e sem muita criatividade. O professor expõe a matéria no quadro por meio de exemplos resolvidos. O aluno, mero espectador, copia o exemplo resolvido para reproduzir mais tarde quando for tentar fazer os exercícios propostos pelo professor, tornando o ensino mecânico e repetitivo.

Para Lorenzato (2006), o professor precisa de diferentes materiais para ajudá-lo na criação de situações pedagógicas desafiadoras e também para auxiliá-lo no equacionamento de situações previstas em seu planejamento, mas imprevistas na prática, devido aos questionamentos dos alunos durante as aulas.

Veloso (1998) afirma que a realização de atividades manipulativas ou visuais não garantem a aprendizagem. Para que esta efetivamente aconteça, faz-se necessária também a atividade mental por parte do aluno.

A educação em geometria depende de muitos fatores. Saraiva, Coelho e Matos (2002) dizem que *"a educação em geometria pode ser abordada construindo o conhecimento informal dos estudantes em torno dos aspectos geométricos de situações realistas"*, pois esse conhecimento informal é a base para a educação em geometria e para o raciocínio espacial.

Os objetos geométricos sobre os quais se trabalham os conceitos não seriam necessariamente os mesmos para todos. O que importa se os alunos conhecem melhor os trapézios e as suas propriedades, e estudam e classificam outras famílias de polígonos? Não são os objetos que importam, mas a qualidade do pensamento matemático que o aluno desenvolve, até porque não é possível ensinar a pensar sem ter qualquer coisa sobre a qual valha a pena pensar.

Dessa forma, podemos perceber que o ensino de matemática está todo interligado. Com isso, devemos utilizar diferentes abordagens para expor um determinado tema ou resolver um determinado problema, pois assim o desenvolvimento do raciocínio e a autonomia do aluno serão conquistados de uma forma mais efetiva.

## 1.2 A Visualização no Ensino da Geometria

A geometria é um campo rico da Matemática que auxilia o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, a noção de espaço e a percepção visual. De acordo com Guimarães, Vasconcelos e Teixeira (2006) o desenvolvimento desses fatores é importante em várias áreas do saber e que um dos problemas encontrados no ensino da geometria é a dificuldade na capacidade de visualização. Essa capacidade envolve muitos aspectos, tais como, interpretar e fazer desenhos, formar imagens mentais e visualizar movimentos ou trocas nas imagens.

A visão é considerada um dos cinco sentidos que permitem inúmeros seres vivos a aprimorarem suas percepções do mundo, dentre eles os seres humanos.

O termo visualização possui diversos tipos de definições, e muitas das vezes está restrito à mente do ser humano. Porém, na maioria dos casos a visualização é definida como um processo para o ser humano viajar entre a realidade, isto é, aquilo que se vê e a imaginação, isto é, aquilo que se pensa.

Vejamos como alguns estudiosos apresentam o conceito de visualização do ponto de vista da educação matemática:

- ✓ Zimmermann e Cunningham[1] (*apud* SARAIVA, COELHO E NETO, 2002) dizem que a visualização matemática é o processo de formação de imagens, seja mentalmente, com papel e lápis ou com o auxílio da tecnologia, e a utilização dessas imagens para descobrir e compreender matemática.
- ✓ Guzmán[2] (*apud* SARAIVA, COELHO E NETO, 2002) afirma que a visualização constitui um aspecto importante na atividade matemática onde se atua sobre possíveis representações concretas enquanto se descobrem as relações abstratas que interessam ao matemático.
- ✓ Durval[3] (*apud* ALMOULOUD, 2004) diz que a visualização é o processo que examina o espaço-representação da ilustração de uma afirmação, para a exploração heurística de uma situação complexa, por uma breve olhada ou por uma verificação subjetiva;

---

[1] ZIMMERMANN, W. CUNNINGHAM, S. *Editors' Introduction: What is Mathematical Visualization?* Em W. Zimmermann e S. Cunningham (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning mathematics.* (pp 1-7). Wasshington: MAA, 1991.

[2] GUZMÁN, M. *El Ricon de la Pizarra.* Madrid: Ediciones Pirámides, 1996.

[3] DUVAL R., *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang 1995.

- ✓ Dreyfus[4] (*apud* SARAIVA, COELHO E NETO, 2002) inclui duas direções: a interpretação e compreensão de modelos visuais e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica.
- ✓ Alves e Soares (2003) afirmam que visualizar é formar ou conceber uma imagem visual de algo que não se tem ante os olhos no momento.

Podemos observar que todas as definições acima descritas concordam que o termo visualização está focado na percepção e na manipulação de imagens visuais.

Com a ajuda da imaginação visual podemos iluminar a variedade dos fatos e dos problemas da geometria e, além disso é possível, em muitos casos, descrever os aspectos geométricos dos métodos de investigação e de demonstração, sem entrar necessariamente nos detalhes ligados às definições estritas e aos cálculos efetivos (VELOSO, 1998).

Seguindo os passos de Van Hiele[5] (*apud* ALVES E SOARES, 2003) a visualização tem uma importância vital no processo de construção do conhecimento. A representação mental dos objetos geométricos, a análise e a organização formal (síntese) das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento da formalização de um conceito.

Porém, enxergar uma figura e analisar os elementos que possuem significados à compreensão matemática, não é tão simples. Cavalca (1997), diz que os alunos, na maioria das vezes, não enxergam as figuras com a perspectiva de análise matemática, mas sim com a racionalidade do dia-a-dia.

Uma compreensão mais profunda da Matemática só se verifica quando o aluno vê as conexões, quando percebe que está falando da mesma coisa encarando-a de diferentes pontos de vista. Se os alunos estão explorando, por exemplo, um problema de geometria poderão estar desenvolvendo capacidades de visualização, de fazer conjecturas e de justificar respostas, mas também poderão trabalhar simultaneamente com números, calculando ou relacionando áreas e volumes, trabalhar proporções e semelhança de figuras ou trabalhar com expressões algébricas.

Segundo Duval (2011), enxergar a figura com essa perspectiva, seja no papel ou na tela do computador, é necessário mudar o olhar sem que a representação visual seja alterada. Um exemplo, encontra-se no quadro 01 onde se faz necessário desconstruir dimensionalmente

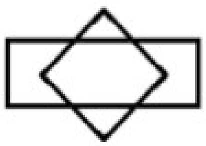
---

4 DREYFUS, T. *Advanced Mathematical Thinking.* Em P. Nesher e J. Kilpatrick. (Eds.), *Mathematics and Congniton* (pp 113-134). Cambridge: Unversity Press, 1990.

5 VAN HIELE, P., *Structure and Insight*. Orlando: Academic Press, 1986.

as formas que reconhecemos à primeira vista em reconstruir outras formas não vistas de imediato.

Quadro 01 – Maneiras de ver uma figura geométrica plana

| Figura 2D | Decomposição em unidades figurais 2D | | Decomposição em unidades figurais 1D |
|---|---|---|---|
| | Acoplamento / decomposição por Justaposição | Acoplamento por Superposição | Construção instrumental |
|  | 5 formas poligonais (dois triângulos, dois pentágonos, um hexágono) | 2 polígonos regulares (um quadrado e um retângulo) | 8 lados |

Fonte: Durval, 2011

Mesmo quando o aluno resolve um problema por via analítica o professor deve incentiva-lo a fazer uma figura geométrica de modo a tirar proveito da visualização do problema e a desenvolver a sua capacidade de representação, ou seja, não se deve deixar que o aluno se limite à resolução exclusiva de equações e à utilização de fórmulas. Além disso, o aluno deve descrever sempre com algum detalhe o processo utilizado, justificando-o adequadamente.

Os conceitos de visualização adquirem, então, grande importância para o ensino de geometria. Porém, há controvérsias sobre como a visualização se forma em nossa mente. O que não é razão para que este processo não ocupe seu lugar de destaque no ensino da geometria, uma vez que esta habilidade pode ser desenvolvida, desde que estejam disponíveis para o aluno materiais de apoio didático baseados em materiais concretos representativos do objeto geométrico em estudo (KALEFF, 2004).

Tendo então presente os diferentes significados e mecanismos relacionados com o termo visualização, bem como as várias perspectivas existentes para abordar uma educação em geometria, parece-nos claro a existência do poder da visualização no ensino e na aprendizagem da geometria. E este poder também está presente nas maneiras de encarar o pensamento visual-espacial, nos conceitos, nos processos e capacidades espaciais envolvidas nos aspectos visuais do pensamento matemático.

## 2 OS RECURSOS DIDÁTICOS: UMA PROPOSTA ALTERNATIVA

O ponto principal de discussão sobre o papel da educação é a formação do cidadão. Segundo Silva e Oliveira (2010) a escola precisa com urgência contemplar práticas de responsabilidade social, viabilizando a formação de sujeitos conhecedores da sua própria cultura e participantes do processo de transformação social.

Neste momento, vale destacar que as inúmeras possibilidades que as tecnologias oferecem para o professor trabalhar em sala de aula favorecem para a redução de possíveis dificuldades de compreensão e desinteresse dos alunos dando um suporte para um aprendizado mais atraente e até mesmo divertido.

Nossos alunos, sejam em casa, na escola ou na rua, estão cercados de recursos tecnológicos e essas mídias influenciam diretamente em seu comportamento e aprendizado. E, essas ferramentas potencializam a oportunidade de agregar conhecimentos de diversas áreas em um determinado momento de aprendizagem e, também oferecem uma dinâmica social do ato de aprender.

> A educação como prática da liberdade, ao contrário daquela que é prática da dominação, implica a negação do homem abstrato, isolado, solto, desligado do mundo, assim como também a negação do mundo como realidade ausente dos homens. (Freire[6], 1997 *apud* Lima, 2010, p. 2)

Desse modo, o professor deve organizar suas propostas, apoiando-se na tecnologia e utilizando sua linguagem para estabelecer uma relação crítica-construtiva entre o que se faz e o que se aprende, isto é, o professor deve descobrir os efeitos pedagógicos que cada recurso tecnológico pode trazer para a melhoria da sua prática pedagógica. Em seguida, listaremos alguns recursos tecnológicos que o professor pode utilizar em sala de aula para auxiliá-lo neste processo.

### 2.1 Vídeos

Atualmente, com expansão da internet e das redes sociais, os vídeos assumem um papel extremamente importante na vida do aluno. Diferentemente das décadas passadas, basta

[6] FREIRE, P. *Pedagogia do Oprimido.* 27. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987. 184 *p.*

um clique e nossos alunos têm um leque gigantesco de possibilidades para verem e ouvirem algo referente a algum conteúdo que lhe agrada ou o deixa curioso.

Devido à quantidade de vídeos publicados na internet, nem sempre é fácil conseguir a atenção dos alunos somente com um vídeo na sala de aula. Ao escolher um vídeo para usar em sala de aula, o professor deve levar algumas coisas em consideração: a qualidade da imagem e do áudio, o assunto e o entretenimento. Sabemos que os filmes são poderosas ferramentas educacionais e servem como apoios para o professor, porém a falta de atividades que os complementem pode acabar com toda essa realidade.

De acordo com Lima (2012), quando um professor falta, a opção de levar os estudantes para a sala de vídeo é com frequência uma das primeiras a ser levantada. Acreditamos que a rotina dos alunos com os vídeos na internet faz com que os mesmos vejam esse momento como um momento de lazer, e não de estudo. Com isso, eles se dedicam mais a essas atividades, pois, a grande maioria, com frequência dedica até mais atenção ao que se passa na tela do que às aulas comuns.

Mas, devemos ter cuidado ao utilizar essa estratégia. Moran[7] (*apud* Lima, 2012) diz que o aluno não é bobo. Ele percebe quando você passa um filme só para ocupar o tempo ocioso, e acaba associando o vídeo a não ter aula.

Na escola, os vídeos devem ser utilizados como apoios de aprendizagem. Uma vez que os alunos já conheçam o vídeo, seja pela internet ou assistiu em casa em seu aparelho de DVD, a escola fornece outras expectativas que em casa ou na internet não é possível: o debate e a produção de uma resenha. E, um outro ponto positivo do vídeo é ativar sentidos que recursos orais não fornecem. Por exemplo, mostrar o impacto de algum desastre, por mais que você descreva, suas palavras não serão tão impactantes quanto algumas imagens.

## 2.2 Origami

A arte de dobrar papéis também é conhecida como origami, palavra de origem japonesa, cunhada em 1880, composta de dois termos: ori (dobrar) e kami (papel). Praticado por séculos como atividade lúdica e artística, só recentemente o origami passou a ser atração acadêmica como objeto de estudos científicos.

---

[7] MORAN, J. M. *O vídeo na sala de aula*. Revista Comunicação & Educação. São Paulo, ECA-Ed. Moderna, jan./abr. de 1995.

Especialistas da área perceberam que a dobradura poderia ser usada para descrever movimentos e processos na natureza e na ciência, como o batimento das asas de um pássaro ou a deformação da capota de metal de automóveis em colisões. Os estudiosos passaram, então, a desenvolver teoremas para descrever os padrões matemáticos que viam nas dobraduras.

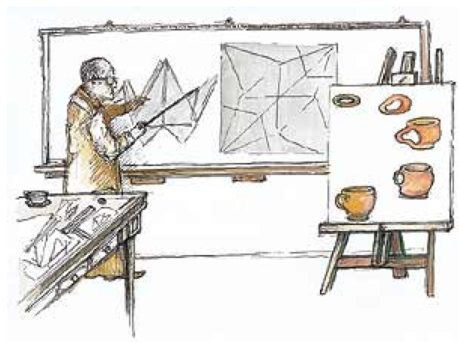


Figura 01 – O estudo do origami
Fonte: http://revistagalileu.globo.com/Galileu/0,6993,ECT516776-2680,00.html[8]

Alguns estudiosos do origami afirmam que o hábito de dobrar papéis é tão antigo quanto a existência do próprio papel, que surgira na China, há aproximadamente 1800 anos, pela maceração de cascas de árvores e restos de tecidos.

Assim que o papel chegou ao Japão entre os séculos VI e X por monges budistas chineses, ele somente era acessível à nobreza, por se tratar de um produto de luxo. Os japoneses transmitiam as figuras que criavam através da tradição oral, onde as formas eram passadas de mãe para filha. Como nenhum desenho tinha sido registrado em livros até então, somente as dobraduras mais simples eram mantidas.

As primeiras instruções escritas sobre o origami apareceram em 1797. Só então, a partir da fabricação do seu próprio papel, o restante da população começou a aprimorar essa arte secular, que deixou de ser transmitida somente de pais para filhos, desde 1876, passando a fazer parte integrante do currículo escolar do Japão.

Enquanto isso, na Europa, a arte das dobraduras em papel também estava sendo desenvolvida na Espanha. Os árabes trouxeram o segredo da fabricação do papel para o Norte da África, no século VIII, e os mouros levaram este segredo até a Espanha. As dobraduras em papel eram usadas por eles apenas para estudar a geometria presente nas formas e nas dobras.

8 Acesso em 15/12/2014.

No Japão os origamis representando determinados objetos eram queimados no ritual dos funerais, com a intenção de que os espíritos das pessoas falecidas pudessem assim obter em outras vidas tudo que almejavam. Cédulas imitando dinheiro e postas em envelopes vermelhos, confeccionados em origami, eram também queimados durantes as festas de casamento, a fim de trazer prosperidade ao casal.

As várias maneiras de se dobrarem papéis possuem diferentes significados simbólicos no Oriente. No Japão, o sapo representa o amor, a fertilidade; a tartaruga, a longevidade; e o tsuru (ave-símbolo do origami), também conhecido por grou ou cegonha, significa boa sorte, felicidade e saúde. Diz ainda a lenda que quem fizer mil tsurus, com o pensamento voltado para aquilo que deseja alcançar, terá bons resultados.

Hoje em dia podemos encontrar grandes mestres em dobraduras praticamente no mundo. Novas e melhores técnicas de dobradura desenvolvidas atualmente deixariam boquiabertos os mestres da antiguidade.

Figura 02 – Novas técnicas de dobraduras
Fonte: http://studentlife.mit.edu/news/2011/02/oragamit-featured-boston-globe[9]

Enquanto na antiguidade era considerada uma proeza a criação de uma dobradura que apenas representasse um inseto, por exemplo - com corpo segmentado e múltiplas pernas - hoje em dia a criação de insetos anatomicamente correto é bastante corriqueira, sendo que o desafio atual consiste em criar insetos de espécies reconhecíveis.

[9] Acesso em 15/03/2015.

Figura 03 – Inseto na antiguidade
Fonte: http://www.mymodernmet.com/profiles/blogs/extraordinary-insect-origami[10]

Atualmente, o origami tem-se revelado como uma importante ferramenta para auxiliar no ensino básico da geometria além de desenvolver a capacidade motora e criativa do indivíduo.

A invenção do papel há cerca de 2.000 anos possibilitou aos japoneses criarem a fascinante arte da dobradura - origami - que reúne ricas simbologias, retratando a história e o folclore do Japão.

Tradicionalmente, os origamis são confeccionados com papel bicolor (branco e outra cor), de forma quadrada, de tamanho variado, sem cortes ou recortes. Hoje em dia são utilizados diversos tipos de folhas com as mais variadas cores e estampas. Encontram-se à venda papeis de diversas cores, tamanhos, texturas e formas para a confecção do origami.

De acordo com Salazar (2004), para classificar os origamis devemos considerar vários aspectos: a finalidade, o tipo de papel utilizado e a quantidade de peças utilizadas. Assim, existem três tipos de classificações de acordo com os aspectos mencionados.

- ✓ **Finalidade**

Artístico: Construções de figuras da natureza.

Educativo: Construção de figuras para o estudo das propriedades geométricas.

- ✓ **Tipo de papel**

Papel completo: Pedaço de papel em forma quadrada, retangular ou triangular.

Tiras: Pedaços de papéis em forma de tiras largas.

- ✓ **Quantidade de peças**

Tradicional: Utiliza-se somente um pedaço de papel.

Modular: Utilizam-se vários pedaços de papeis para fazer os módulos, geralmente iguais, que se encaixam uns nos outros e forma a figura completa.

[10] Acesso em 28/04/2015.

O origami é uma arte que tem muitas considerações. No início foi definido como uma arte educativa que as pessoas expressavam seus sentimentos. Logo após, como um passatempo e atualmente está se tornando um objeto de estudo matemático e científico.

O origami pode ser uma grande ajuda na educação. Desde os 2 anos de idade, as crianças podem fazer dobraduras. Antes de apresentá-las a essa arte devemos explorar atividades que agucem a sua criatividade. Os alunos podem, por exemplo, descobrir as características de diferentes papéis (sulfite, cartolina, celofane, papelão) manuseando e amassando as folhas.

Segundo Salazar (2004) o origami dá ao professor uma ferramenta pedagógica que lhe permite explorar diferentes conteúdos, conceitos, procedimentos e também explora as habilidades motoras dos alunos ajudando-os a compreender outros aspectos como: visualização (plana e espacial) e a psicomotricidade. É possível também realizar atividades utilizando a interdisciplinaridade da matemática com outras ciências, por exemplo: as artes. Além disso, motiva os alunos a serem criativos de forma que eles podem construir o seu próprio modelo e investigar a conexão com a geometria plana e espacial.

O origami não é somente divertido, mas é também um método valioso que pode auxiliar no desenvolvimento de várias habilidades básicas como: habilidades de comportamento, aprendizagem em grupo e desenvolvimento cognitivo.

## 2.3 Computadores e Softwares Educacionais

Hoje em dia as escolas passam por mudanças no hábito escolar devido a inserção de computadores nas salas de aulas e em laboratórios de informática. Os professores são convidados a participar dos cursos de capacitações para o uso dos computadores e os alunos vivenciando uma nova fase tecnológica em sua escola.

De acordo com Ferreira (2004), o computador é uma ferramenta que permite o aluno fazer atividades por meio de testes, simulações, tutoriais, auxílio na resolução de problemas e pesquisas objetivando uma melhor qualidade no processo de aprendizagem.

Do mesmo modo, Borba e Penteado (2003) ressaltam a necessidade da escolha de propostas pedagógicas que enfatizem a experimentação, visualização, simulação, comunicação eletrônica e problemas abertos.

Não basta apenas inserir o computador nas escolas e colocar o aluno na frente do mesmo, faz-se necessário o uso de uma metodologia adequada para que ocorra a aprendizagem.

A maioria de nossos alunos possui diversas limitações em seu rendimento e apenas reproduz o que foi apresentado. Enquanto um outra parte consegue resolver suas atividades, sem muitos questionamentos. Mas, as maiores dificuldades aparecem nas atividades que exigem uma participação mais ativa, no que diz respeito a criatividade e raciocínio.

Sabemos que, em muitas das vezes, a aula dos professores se limita a cópias e cópias, onde o aluno apenas reproduz o que está no quadro. Em Demo (2000):

> "É equívoco fantástico imaginar que o 'contato pedagógico' se estabeleça em ambiente de repasse e cópia, ou na relação aviltada de um sujeito copiado (professor, no fundo também objeto, se apenas ensina a copiar) diante de um objeto apenas receptivo (aluno), condenado a escutar aulas, tomar notas, decorar, e fazer prova. A aula copiada não constrói nada de distintivo, e por isso não educa mais do que a fofoca, a conversa fiada dos vizinhos, o bate-papo numa festa animada"(p. 7).

Porém, o ensino mecânico auxilia o aluno a realizar algumas atividades que envolvam a linguagem matemática com o objetivo de exercitá-la de forma correta os símbolos e notações, mas deve-se levar em consideração a qualidade dos exercícios e não a quantidade.

Vale lembrar que a tecnologia é uma ferramenta de metodologia de ensino. Como visto, o professor precisa utilizar métodos favoráveis para o uso dessas tecnologias em sala de aula, assim como deve conhecer o conteúdo em que se quer ensinar. Além disso, Silva e Oliveira (2010) afirmam que o uso das tecnologias na escola deve proporcionar uma expansão de aprendizagens, destacando que os recursos midiáticos devem ser compreendidos como uma ferramenta pedagógica de cunho formativo, visto que estes produzem aprendizados de forma significativa, motivadora e dinâmica.

# 3 UM ESTUDO SOBRE OS POLIEDROS REGULARES

Este capítulo trata de um grupo específico de poliedros: os poliedros regulares. Procuraremos apresentar a importância do estudo dessas formas geométricas e quais suas implicações no ensino da geometria.

Como vimos anteriormente, os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (2008, p. 75) afirmam que: "O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano [...]". Mas, a geometria é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos: a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes.

De acordo com Martins e Goldoni (2010), não é este o destaque que a geometria recebe na educação básica. Nas poucas vezes em que um aluno se depara com ela, pode não compreendê-la, tornando-se seu grande inimigo. Assim, o que seria um tema interessante e motivador a ser explorado, limita-se a conteúdos memorizados que o aluno reproduz na avaliação, a fim de alcançar “um bom rendimento”.

Os poliedros regulares são estudados na geometria desde que esse estudo se iniciou. Sua beleza estética fascinou homens de todos os tempos. investigando a história podemos ver que alguns poliedros regulares foram usados até mesmo na arquitetura egípcia.

Esses poliedros são conhecidos como regulares, pois todas as faces, ângulos e ângulos entre as faces são sempre os mesmos.

## 3.1 Poliedros Regulares Convexos

Os Poliedros Regulares Convexos, mais conhecidos como Sólidos de Platão, têm sua história e suas características despertando paixão em muitas pessoas que procuram desvendar os seus mistérios.

Os Poliedros Regulares são também conhecidos como Sólidos Platônicos. São assim chamados por terem sido estudados e divulgados pelo matemático grego Arístocles, mais conhecido como Platão (428 a.C.,347 a.C.).

Um sólido platônico ou poliedro regular, na geometria, é um poliedro convexo que possui:

I. Todas as faces são polígonos regulares;
II. O mesmo número de arestas encontra-se em todos os vértices.

De acordo com Platão, são somente cinco poliedros que satisfazem essas características.

Mas será que só existem 5 poliedros platônicos?

Para responder a essa pergunta basta lembrar que em um poliedro encontramos os ângulos poliédricos cujo o vértice é o vértice do poliedro. Todo ângulo sólido tem que ter um mínimo de três faces. Analisando os polígonos regulares vemos que os possíveis geradores de ângulos sólidos são os de ângulo interno menor que 120°, pois a soma dos ângulos internos das faces deve ser menor que 360°. Portanto, os polígonos regulares que formam os sólidos platônicos são: o triângulo (3 x 60° = 180°), o quadrado (3 x 90° = 270°) e o pentágono (3 x 108° = 324°).

Nos quadros abaixo é possível verificar as possibilidades de união de faces em torno de cada vértice.

Quadro 02 – As faces são triângulos equiláteros

| Quantidade de triângulos | Ângulo Poliédrico | Poliedro |
|---|---|---|
| 3 | 3 x 60º = 180º | Tetraedro |
| 4 | 4 x 60º = 240º | Octaedro |
| 5 | 5 x 60º = 300º | Icosaedro |
| ≥ 6 | ≥ 360º | Não existe |

Note que, com 6 ou mais triângulos, a soma sempre é maior ou igual a 360º. Dessa forma, é impossível formar um ângulo poliédrico.

Quadro 03 – As faces são quadrados

| Quantidade de quadrados | Ângulo Poliédrico | Poliedro |
|---|---|---|
| 3 | 3 x 90º = 270º | Hexaedro |
| ≥ 4 | ≥ 360º | Não existe |

Semelhantemente, com 4 ou mais quadrados, a soma sempre é maior ou igual a 360º. É impossível formar um ângulo poliédrico.

Quadro 04 – As faces são pentágonos

| Quantidade de pentágonos | Ângulo Poliédrico | Poliedro |
|---|---|---|
| 3 | 3 x 108º = 324º | Dodecaedro |
| ≥ 4 | > 360º | Não existe |

Analogamente, com 4 ou mais pentágonos, a soma sempre é maior que 360º. Assim, é impossível formar um ângulo poliédrico.

Portanto, temos somente cinco poliedros platônicos, ou seja, cinco poliedros regulares. São eles: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro.

Muitos desses poliedros estão presentes na natureza sob a forma de cristais ou como esqueletos de animais marinhos microscópicos.

Figura 04 – Calcopirita, Galena e Magnetita[11]
Fonte: http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html[12]

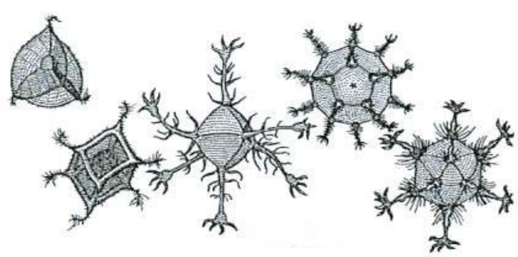
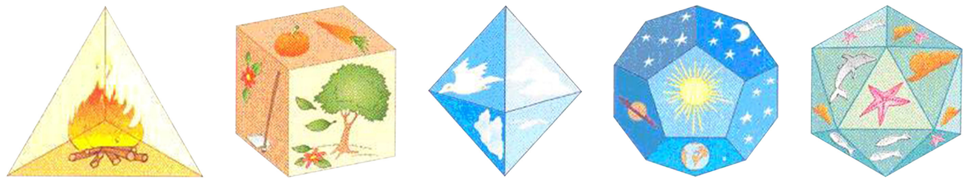


Figura 05 – Radiolários[13]
Fonte: http://www.uff.br/cdme/platonicos/platonicos-html/solidos-platonicos-br.html[14]

Platão descreve, em Timeu[15], a associação mística dos poliedros regulares, com exceção do dodecaedro. A cada um dos elementos primordiais empedoclianos[16]: fogo, ar, terra e água. O dodecaedro, é associado o Universo, o que nos envolve, vide figura 06.

[11] Formas cristalinas naturais no formato do tetraedro (calcopirita), do hexaedro (galena) e do octaedro (magnetita).
[12] Acesso em 27/06/2015.
[13] Protozoários amebóides que podem assumir formas de poliedros regulares.
[14] Acesso em 27/06/2015.
[15] Tratado teórico de Platão na forma de um diálogo socrático, escrito cerca 360 a.C.. A obra apresenta



| *Tetraedro* | *Hexaedro* | *Octaedro* | *Dodecaedro* | *Icosaedro* |
|---|---|---|---|---|
| *Fogo* | *Terra* | *Ar* | *Universo* | *Água* |

Figura 06 – Sólidos associados aos elementos primordiais
Fonte: http://avrinc05.no.sapo.pt/[17]

Em 1597, o físico e matemático Johannes Kepler (1571, 1630) estudava o movimento dos seis planetas, até então conhecidos Saturno, Júpiter, Marte, Terra, Vênus e Mercúrio, e para tanto utilizou o modelo do sistema solar composto por esferas concêntricas, separadas umas das outras por um cubo, um tetraedro, um dodecaedro, um octaedro e um icosaedro para explicar as distâncias relativas dos planetas ao sol. Além disso, foi ele quem descobriu o primeiro poliedro regular côncavo, que é o pequeno dodecaedro estrelado.

## 3.2 Poliedros Estrelados Regulares

Para compreender como se obtêm os poliedros estrelados é importante entender o que são polígonos estrelados.

O processo de prolongar os lados de um polígono é chamado de estrelação. Se o processo de estrelação gerar um novo polígono e, se o polígono gerado não for dado pela sobreposição de polígonos, diz-se que o polígono é estrelado. Por exemplo, a figura 07 mostra que a estrelação do pentágono gera um polígono estrelado chamado pentagrama. Na figura 08 podemos verificar que a estrelação do hexágono gera um polígono não estrelado, pois esse polígono é a sobreposição de dois triângulos.

especulações sobre a natureza do mundo físico.

16 Empédocles foi um filósofo do século V a.C. que afirmou, em seus poemas sobre a natureza, que o mundo é constituído de quatro elementais: ar, fogo, terra e água.

17 Acesso em 27/06/2015.

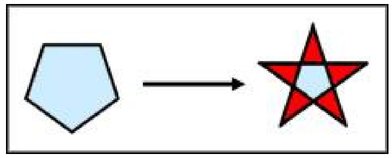


Figura 07 – Processo de estrelação no pentágono regular
Fonte: Lemos e Bairral, 2010

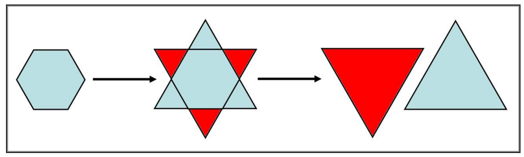


Figura 08 – Processo de estrelação no hexágono regular
Fonte: Lemos e Bairral, 2010

Alguns polígonos podem admitir mais do que uma estrelação, por exemplo, o heptágono. Veja a figura 09.

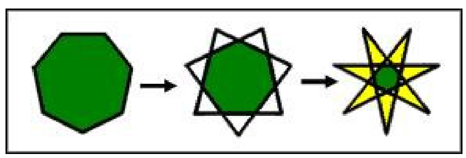


Figura 09 – Processo de estrelação no heptágono regular
Fonte: Lemos e Bairral, 2010

O processo de obter Sólidos Estrelados é semelhante ao dos polígonos, ou seja, prolongam-se as faces de Sólidos. Caso elas se encontrem, obtemos os poliedros estrelados. Assim, como acontece nos polígonos, os poliedros podem admitir mais de uma estrelação. Vejamos, o dodecaedro, ele possui 3 estrelações conforme apresentada na figura 10.

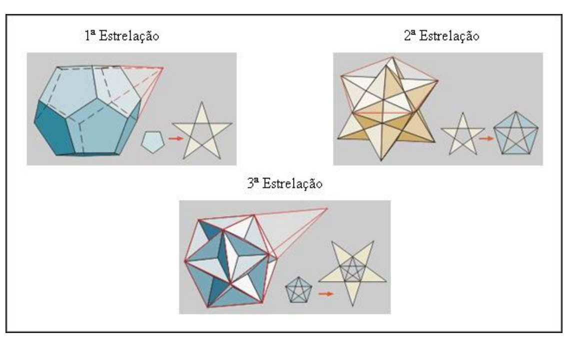



Figura 10 – As três estrelações do dodecaedro
Fonte: http://www.pauloporta.com/Xeometria/poliedros/estrelas/estrelas.htm[18].

[18] Acesso em 10/05/2015.

Prolongando as faces de um tetraedro, de um cubo ou de um octaedro, não é possível obter novos poliedros. Pelo contrário, partindo do dodecaedro é possível obter o poliedro denominado Pequeno Dodecaedro Estrelado, que possui 12 faces em forma de pentagrama com 12 vértices e 30 arestas. Veja figura 11.

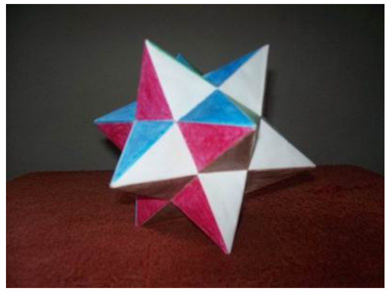


Figura 11 – Pequeno dodecaedro estrelado
Fonte: Lemos e Bairral, 2010

Prolongando suas faces é possível obter o poliedro que chamamos de Grande Dodecaedro, onde possui 12 faces em forma de pentágonos, 12 vértices e 30 arestas. Vejamos a figura 12.

Figura 12 – Grande dodecaedro
Fonte: Lemos e Bairral, 2010

Prolongando suas faces é possível obter o poliedro que damos o nome de Grande Dodecaedro Estrelado possuindo 12 faces em forma de pentagrama, 20 vértices e 30 arestas conforme mostra a figura 13.

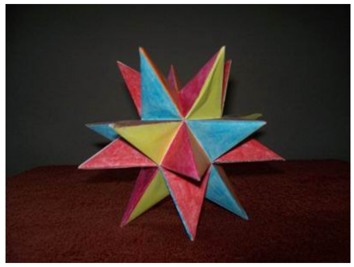


Figura 13 – Grande dodecaedro estrelado
Fonte: Lemos e Bairral, 2010

O pequeno dodecaedro estrelado (figura 11) e o grande dodecaedro estrelado (figura 13) podem, à primeira vista, parecer respectivamente um dodecaedro e um icosaedro, sobre cujas faces foram construídas pirâmides regulares todas iguais entre si. A altura destas pirâmides é a altura “certa” para que os sessenta triângulos que representam as faces laterais, tomados cinco a cinco, estejam sobre um mesmo plano e rodeiem um pentágono com o qual formam um pentagrama (as cores das figuras evidenciam esses planos).

Os dois poliedros podem ser obtidos unindo nos seus vértices (cinco a cinco, ou três a três) doze pentágonos regulares estrelados todos iguais, de modo que as “faces” sejam unidas uma à outra ao longo dos seus lados, como nos poliedros usuais, mas por forma que se intersectem escondendo os pentágonos centrais de cada pentagrama. Do ponto de vista histórico, os referidos poliedros foram estudados pela primeira vez, por volta do ano 1600, pelo cientista alemão Johannes Kepler e, no início do século XIX, o físico matemático Louis Poinsot (1777-1859) descobriu dois poliedros regulares estrelados, o grande dodecaedro e o grande icosaedro mas já eram conhecidos há muito tempo. O pequeno dodecaedro estrelado, por exemplo, encontra-se representado no pavimento da basílica de São Marcos, em Veneza, num embutido em mármore de 1420, atribuído ao pintor renascentista italiano Paolo Uccello (1397, 1475).

Outro poliedro que dá origem a muitas estrelações é o Icosaedro. Neste século, o matemático canadense Harold Scott MacDonald Coxeter (1907, 2003) provou a existência de 59 estrelações do Icosaedro. Do ponto de vista matemático, interessa-nos particularmente a 16ª estrelação, o chamado de grande icosaedro onde suas faces são triângulos equiláteros em número de 20, os vértices em número de 12 e as arestas em 30, como mostra a figura 14.

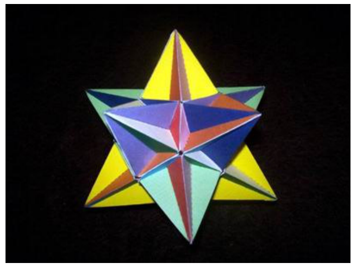


Figura 14 – Grande icosaedro
Fonte: Lemos e Bairral, 2010

Dessa forma, podemos classificar os poliedros regulares de acordo com o esquema a seguir:

| | | |
|---|---|---|
| Poliedros Regulares | 5 – Convexos | 1 – Tetraedro<br>1 – Hexaedro<br>1 – Octaedro<br>1 – Dodecaedro<br>1 – Icosaedro |
| | 4 – Estrelados | 3 – Dodecaedros<br>1 – Icosaedro |

Uma das maiores dificuldades do Ensino de Poliedros Estrelados é a visualização da estrelação do Poliedro, isto é, visualizar o encontro dos planos. Por isso, foi desenvolvida uma sequência de animações dos Poliedros Estrelados para facilitar os alunos na visualização.

Partindo da idéia de alguns planos podemos generalizar para todos os seguintes. Por exemplo, na figura 15, ilustramos o início da estrelação do dodecaedro.

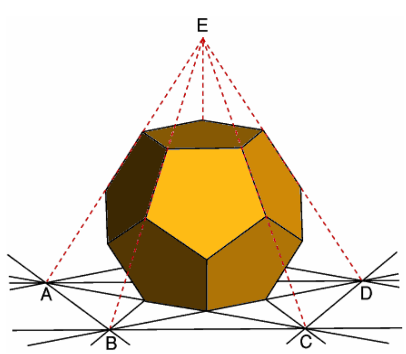



Figura 15 – Encontro dos planos
Fonte: http://fortran.orpheusweb.co.uk/Poly/Ex/dodstl.htm[19].

[19] Acesso em 03/06/2015.

Reparem que o vértice E é formado pelo encontro dos planos. Com este tipo de ilustração destacamos também a importância de outro tipo de representação. Nosso processo de percepção visual vai se desenvolvendo nesse varado espectro representativo e dinâmico (animador).

Partindo da idéia da formação de um vértice, generalizamos para todos os vértices conforme a figura 16 com a seguinte seqüência de animação que tem início no dodecaedro a esquerda.

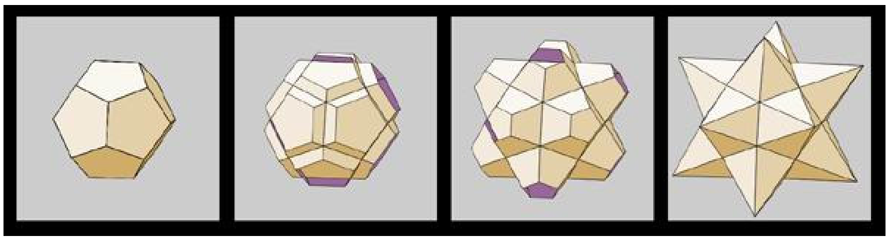


Figura 16 – Animação do pequeno dodecaedro estrelado
Fonte: http://www.pauloporta.com/Xeometria/poliedros/estrelas/estrelas.htm[20].

Estudar poliedro estrelado vai muito além do que calcular áreas e volumes. Um poliedro estrelado é um poliedro côncavo, formado pelo prolongamento dos planos de cada uma das faces de um poliedro. Visualizar esse processo nem sempre é simples. Nossos alunos, e inclusive professores, na maioria das vezes não conseguem fazê-lo.

Uma das maiores dificuldades nesse processo, além da visualização, é a compreensão de cada um dos elementos desses poliedros (faces, arestas e vértices).

Lemos e Bairral (2008, p. 46), afiram que:

> Em todos os poliedros estrelados, deve-se notar que para visualizar as faces e distingui-las se utilizam várias tonalidades de cor onde cada face tem um tom diferente. Deve-se notar também que as faces se intersectam, como já foi observado. Para interpretar esses Sólidos como verdadeiros Poliedros é essencial compreender quais são as faces, as arestas e os vértices.

É possível escrever uma lista de conceitos abordados ao estudar poliedros estrelados e perceber o quão importante é associar esse assunto aos conteúdos abordados no ensino médio, como, por exemplo, os poliedros regulares, concavidade e convexidade, faces, arestas, vértices, processo de estrelação, planificação, etc.

---

[20] Acesso em 09/09/2014.

### 3.3 Construção dos Poliedros Estrelados

Neste tópico da dissertação iremos utilizar as técnicas de origami modular e ilustrar a construção dos módulos para a montagem dos poliedros estrelados.

#### 3.3.1 Módulo super simple isosceles triangle

O Módulo Super Simple Isosceles Triangle (SSIT) é utilizado para construir o pequeno dodecaedro estrelado e o grande dodecaedro estrelado. Sua construção é relativamente simples, pois possui poucas dobras. Veja abaixo as ilustrações:

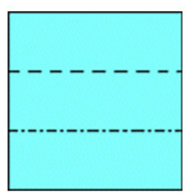
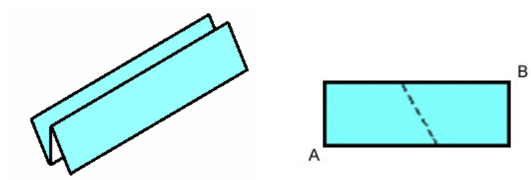
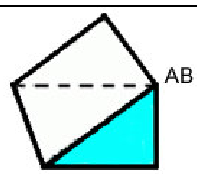
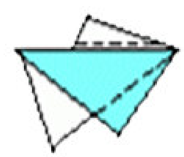
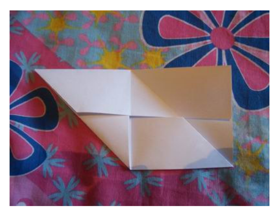
| | |
|---|---|
| <br>1 – Divida uma folha de papel de forma quadrada em 3 partes iguais. | <br><br>2 – Leve o vértice A até o B e faça a marcação indicada. |
| <br><br>3 – Faça a dobra na marcação indicada na figura. | <br>4 – O módulo está pronto. |

Figura 17 – Módulo Super Simple Isosceles Triangle
Fonte: Lemos e Bairral, 2010

#### 3.3.2 Módulo sonobe

Este módulo é utilizado para construir o grande dodecaedro e uma infinidade de outras peças. O modulo recebe este nome devido ao seu criador Mitsonobu Sonobe. Entretanto, muitos outros módulos sonobe foram criados por diferentes pessoas, com mais ou menos variações em relação ao módulo original, mas adotaram o nome genérico.

| | | |
|---|---|---|
| <br>1 – Pegue uma folha quadrada. | <br>2 – Dobre a folha ao meio. | <br>3 – Dobre a metade ao meio conforme a figura. |
| <br>4 – Faça a mesma dobra do outro lado. | <br>5 – Gire a folha 90º e dobre-a ao meio novamente. | <br>6 – Junte o vértice superior com a marca da dobra feita em 5 e marque bem. |
| <br>7 – Abra a dobra e esconda o triângulo pequeno atrás da folha. | <br>8 – Após a dobra, teremos este aspecto. | <br>9 – Esconda o triângulo maior dentro da folha. |
| <br>10 – Após a dobre, teremos este aspecto. | <br>11 – Gire a folha 180º e repita os passos 6, 7, 8, 9 e 10. | <br>12 – Passo 8. |
| <br>13 – Feito todos os passos, teremos este aspecto. | <br>14 – Vire a folha ao contrário. | <br>15 – Junte o vértice inferior direito com o inferior esquerdo. |

| | | |
|---|---|---|
|  16 – Gire 180º e repita o passo 15. |  17 – Dobre na diagonal. |  18 – Módulo Sonobe Original. |

Figura 18 – Módulo Sonobe
Fonte: Lemos e Bairral, 2010.

### 3.3.3 Construção dos poliedros estrelados regulares

Para as construções e aconselhável começar pelas dobras de todos dos módulos e, em seguida, construir o poliedro. A construção do módulo permite ao professor utilizar palavras específicas de geometria, por exemplo: gire 90º ou faça uma diagonal.

Abaixo seguem as ilustrações para as construções dos poliedros.

#### 3.3.3.1 Construção do pequeno dodecaedro estrelado

Para montar o pequeno dodecaedro estrelado precisaremos de 30 módulos SSIT do mesmo tamanho.

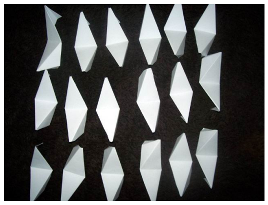
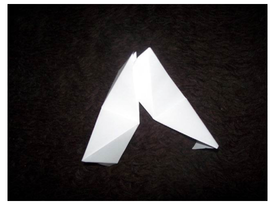
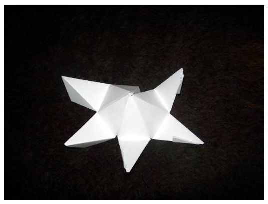
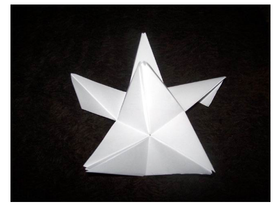
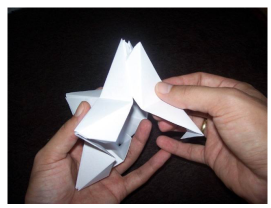
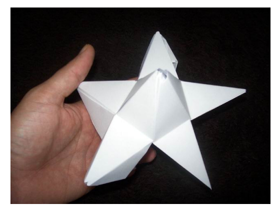
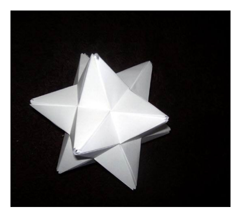
| | | |
|---|---|---|
| <br>1 – Faça 30 módulos do Peq. Dod. Estrelado. | <br>2 – Faça o encaixe de acordo com a figura. | <br>3 – O encaixe perfeito possui esse aspecto. |
| <br>4 – Encaixe 5 módulos como a figura. | <br>5 – Faça “bico” encaixando o último módulo no primeiro. | <br>6 – Agora encaixe 1 peça em cada abertura da estrela. |
| <br>7 – Após o encaixe, a peça terá esse aspecto. | <br>8 – Escolha outro “bico” e repita os passos 4, 5, 6 e 7. | <br>9 – Aspecto após os encaixes. |
| <br>10 – Continue os encaixes seguindo o passo 8. | <br>11 – Faltam apenas 5 módulos para terminar. | <br>12 – Terminado o Pequeno Dodecaedro Estrelado. |

Figura 19 – Construção do pequeno dodecaedro estrelado
Fonte: Lemos e Bairral, 2010

Para obter um melhor resultado, basta utilizar cola para deixar os módulos mais fixos e pintar as faces do poliedro com cores diferentes. Veja a figura 20.

Figura 20 – Pequeno dodecaedro estrelado
Fonte: Lemos e Bairral, 2010

### 3.3.3.2 Construção do grande dodecaedro estrelado

Para montar o grande dodecaedro estrelado precisaremos de 30 módulos SSIT do mesmo tamanho.

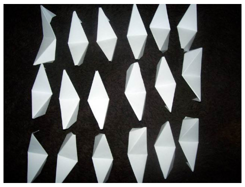
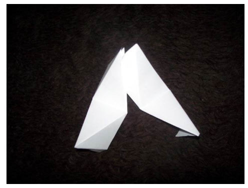
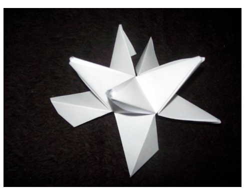
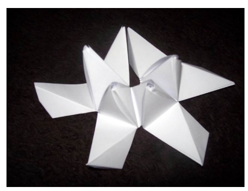
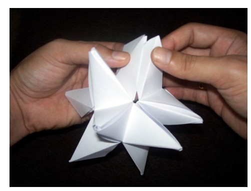
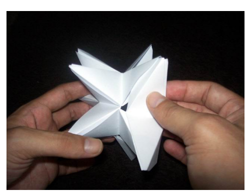
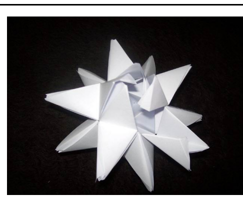
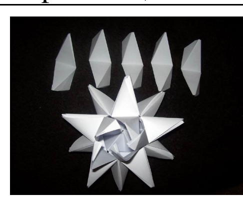
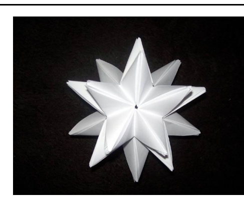
| | | |
|---|---|---|
|  1 – Faça 30 módulos do Gr. Dodec. Estrelado. |  2 – Faça o encaixe de acordo com a figura. |  3 – O encaixe perfeito possui esse aspecto. |
|  4 – Encaixe 3 módulos como a figura. |  5 – Faça um “bico” encaixando o terceiro módulo no primeiro. |  6 – Escolha uma das três pontas e faça outro “bico”. |
|  7 – Faça mais um “bico”. |  8 – Após fazer 4 “bicos” encaixe o quarto “bico” do primeiro. |  9 – Encaixe do quarto “bico” no primeiro. |
|  10 – 5 “bicos” prontos e encaixados. |  11 – Escolha dois bicos consecutivos e repita os passos 7,8 e 9. |  12 – Após ter formado mais 5 “bicos”. |
|  13 – Continue seguindo e repetindo o passo 11. |  14 – Encaixe os 5 últimos módulos. |  15 – Terminado o Grande Dodecaedro Estrelado. |

Figura 21 – Construção do grande dodecaedro estrelado
Fonte: Lemos e Bairral, 2010

Para obter um melhor resultado, basta utilizar cola para deixar os módulos mais fixos e pintar as faces do poliedro com cores diferentes. Veja a figura 22.

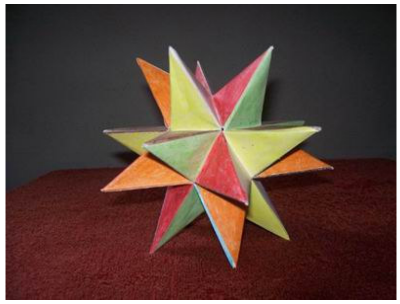
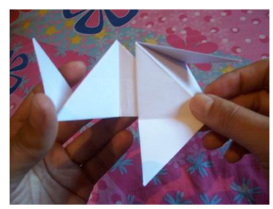
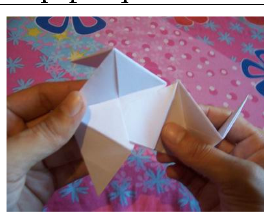
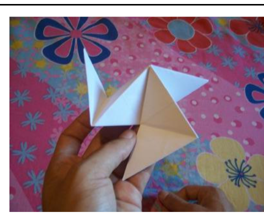
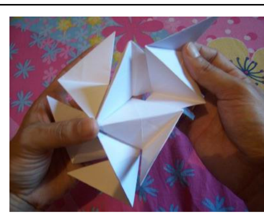
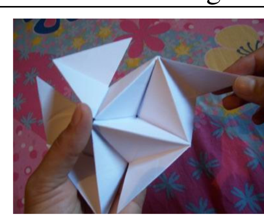


Figura 22 – Grande dodecaedro estrelado
Fonte: Lemos e Bairral, 2010.

#### 3.3.3.3 Construção do grande dodecaedro

Para montar o Grande Dodecaedro precisaremos de 30 módulos sonobe iguais.

| | | |
|---|---|---|
|  1 – Pegue 30 Folhas de papel quadrada. |  2 – Faça 30 módulos do Grande Dodecaedro. |  3 – As peças se encaixam dessa forma. |
|  4 – Encaixe visto de trás. |  5 – Encaixe perfeito. |  6 – Encaixe 4 módulos de acordo com a figura. |
|  7 – O quinto módulo encaixa no quarto e no primeiro. A figura parece uma estrela do mar. |  8 – Para fixar a estrela, vamos encaixar os módulos na parte inferior da estrela de acordo com a figura. |  9 – Encaixe perfeito. |

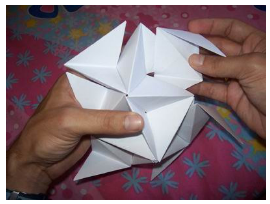
| | | |
|---|---|---|
| <br>10 – Continue encaixando os módulos para fixar a estrela. | <br>11 – Após 5 módulos, a estrela está fixa. | <br>12 – Vire a estrela de lado e repita os passos 5 e 6. |
| <br>13 – Semelhante ao passo 7. | <br>14 – Repita o passo 8, 9 e 10. | <br>15 – Encaixe de duas estrelas. |
| <br>16 – Gire a estrela e repita os passos 12, 13 e 14. | <br>17 – Só falta um módulo. Tenha paciência na hora do encaixe. | <br>18 – Terminado o Grande Dodecaedro. |

Figura 23 – Construção do grande dodecaedro
Fonte: Lemos e Bairral, 2010.

Para obter um melhor resultado, basta utilizar cola para deixar os módulos mais fixos e pintar as faces do poliedro com cores diferentes. Veja a Figura 24.

Figura 24 – Grande dodecaedro
Fonte: Lemos e Bairral, 2010.

Todos os módulos e construções estão disponíveis também na internet através de tutoriais e vídeos no youtube, por exemplo:

- ✓ Módulo SSIT: https://www.youtube.com/watch?v=cciJrt54KPA
- ✓ Módulo sonobe: https://www.youtube.com/watch?v=Rl3Jixz4og4

# 4 OS POLIEDROS ESTRELADOS E A SALA DE AULA

Nesta parte do trabalho iremos detalhar todos os materiais, técnicas e métodos utilizados que tornaram possível a aplicação das aulas sobre os poliedros estrelados em cada um dos colégios que nos deram a oportunidade de aplicá-las.

Uma das propostas do trabalho é analisar os resultados obtidos entre duas turmas, onde uma delas utilizaria a sala de aula interativa (dobraduras, planificações, animações e vídeos didáticos) e a outra utilizaria apenas um recurso didático (origami). Dessa forma, dois colégios nos deram a oportunidade de aplicar nossas aulas em algumas turmas do ensino médio.

O primeiro, Colégio Estadual Max Fleiuss, está localizado na cidade do Rio de Janeiro, no bairro Pavuna. Por ser um colégio que funciona no período noturno, recebe a maioria de seus alunos com idades de 25-40 anos, em média. A grande maioria trabalha no período da manhã e da tarde e estuda na parte da noite.

Nosso segundo colégio, o Colégio Estadual Francisco Assumpção, está localizado na cidade de Nova Iguaçu, no bairro Ponto Chic. Neste colégio, aplicamos as atividades com os alunos do turno da noite e com idade entre 18 e 24 anos, em média.

No Primeiro colégio, utilizamos o laboratório de informática para construirmos nossa sala de aula interativa. Organizamos o laboratório com os computadores encostados na parede e colocamos várias mesas no centro da sala com cadeiras para os alunos poderem alternar entre atividades manuais e digitais de acordo com os seus interesses e facilidades. Utilizamos também um Datashow para projetar as imagens do computador, animações e vídeos.

Figura 25 – Sala de aula interativa montada em um laboratório de informática
Fonte: Lemos, 2015.

Dessa forma, tínhamos uma sala de aula interativa montada de acordo com a proposta do trabalho. Essa parte da pesquisa, de caráter experimental, busca controlar e observar os efeitos que esse estudo produzirá em cada turma e compará-los antes e depois do experimento.

A atividade aplicada na sala de aula interativa foi realizada do seguinte modo:

I. por ser um grupo de alunos com idades um pouco avançadas, uma conversa inicial sobre a importância da Matemática na escola e no cotidiano se mostrou muito importante. Assim, foi possível exemplificar formas diferentes de estudar algo que já se conhece há tempo, por exemplo, mostrar que existem diferenças enormes entre a Matemática que se estuda na escola e a Matemática que se usa no cotidiano. Porém, sabemos que a Matemática é única, seus significados que variam conforme a realidade.

II. em seguida pedi aos alunos para visualizarem um poliedro estrelado (sem saber o que é) e, deveriam escrever, ou dizer, o que eles estão vendo, o que chama a atenção no poliedro, algumas características marcantes, sempre utilizando da intuição para tais respostas.

Figura 26 – Alunos escrevendo as características dos poliedros
Fonte: Lemos, 2015.

III. neste momento foi feito uma pequena revisão sobre polígonos (definição, tipos, regularidade e convexidade). Utilizamos algumas imagens, animações, quadro e caneta para explicar o significado de estrelar um polígono ou o processo de estrelação de um polígono.

IV. em seguida é proposto para os alunos uma atividade investigativa (apêndice 01), onde eles realizaram o processo de estrelação em alguns polígonos e verificarem o que acontece quando os lados se encontram, não se encontram e quando o processo de estrelação é realizado mais de uma vez.

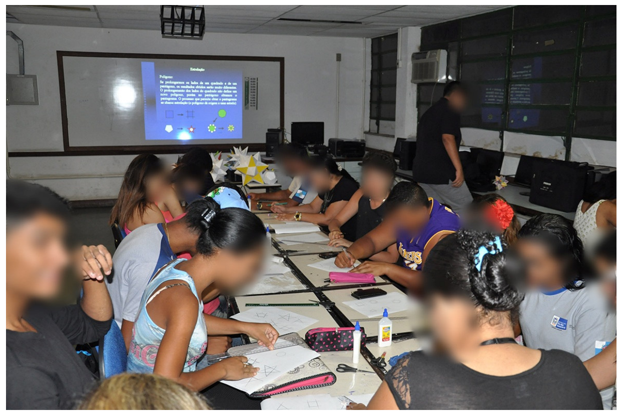


Figura 27 – Imagens e animações do processo de estrelação
Fonte: Lemos, 2015.

V. durante esta etapa pude questionar os alunos perguntando sobre convexidade, regularidade e quantidade de polígonos estrelados gerados nos processos.

VI. após os questionamentos e descobertas dos alunos, fiz uma revisão sobre os poliedros (definição, tipos, regularidade e convexidade). Para isso, utilizei as planificações, os origamis, software de geometria espacial além de imagens e desenhos.

VII. a partir desse momento, trouxe a idéia de estrelar um polígono para a geometria espacial e estrelar um poliedro. Foram analisados somente os poliedros platônicos (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro) e suas possibilidades de estrelação.

VIII. coube-me, neste momento, mostrar aos alunos um pouco da história dos poliedros estrelados, comentando, por exemplo, que a primeira imagem conhecida do pequeno dodecaedro estrelado, datada de 1430, é de um mosaico do pavimento da catedral da basílica de São Marcos, em Veneza, atribuído ao pintor renascentista italiano Paolo Uccello.

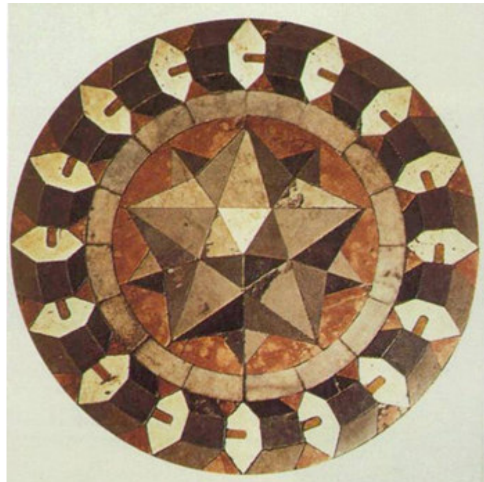


Figura 28 – Mosaico com o pequeno dodecaedro estrelado
Fonte: http://www.veraviana.net/keplerpoinsot.html[21]

IX. após este momento foram exibidos, para os alunos manipularem e verificarem as definições dadas, os poliedros estrelados construídos com origami e planificação ou utilizando o computador, com o software Great Stella. No computador, foram exibidas animações do processo de estrelação de cada um dos poliedros. Este momento deve ser feito com muito cuidado, por poder gerar um certo desconforto no aluno devido a sua alta complexidade na questão da visualização, devendo-se repetir essas animações tantas vezes quanto forem necessárias para que o aluno consiga visualizar tais processos.

X. em seguida os alunos são desafiados a construírem seu próprio poliedro estrelado utilizando-se de um recurso da sala de aula interativa (Origami ou Planificação).

[21] Acesso em 20/01/2015

Figura 29 – Construção do poliedro
Fonte: Lemos, 2015.

XI. ao final, mostrei, mais uma vez, o poliedro exibido no início da aula (Passo II) e pedi para os alunos compararem as respostas dadas (Passo II). E, responderem o questionário de auto avaliação (Apêndice 02).

No segundo colégio, utilizamos a sala de aula regular para aplicar nossa atividade e comparar os resultados e motivações dos alunos com os do primeiro colégio. Dessa forma, nesta sala utilizamos um Datashow para projetar as imagens do computador e os alunos utilizaram somente as dobraduras de papel como recurso didático nas atividades propostas.

Figura 30 – Sala de aula regular
Fonte: Lemos, 2015.

### 4.1 Colégio Estadual Max Fleiuss

A primeira impressão que tivemos foi que não daria certo, pois tratava-se de uma turma onde a maioria dos alunos possuía idades avançadas, ou seja, era uma turma de jovens e adultos. Porém, o fato de utilizarmos a sala de aula interativa para esta turma tornou nossa aula muito mais atrativa para os alunos, pois eles tiveram a oportunidade de saírem do habitual da sala normal e partir para atividades diversificadas e diferentes do papel e caneta.

Apesar de alguns alunos utilizarem lápis e caneta para realizar algumas atividades, a grande maioria utilizou os recursos oferecidos na sala de aula interativa, como por exemplo o computador e as dobraduras. Isto mostra que apesar da turma possuir bastante dificuldade em relação à alguns aspectos tecnológicos oferecidos na sala de aula interativa, eles conseguiram realizar as atividades de modo que cada um deles procurou utilizar o recurso que mais o chamou a atenção, seja pela curiosidade ou pelo conforto.

Acreditamos que o aspecto mais importante da sala de aula interativa é o fato dos alunos poderem utilizar suas habilidades de maneira diversificada e sem limitações, pois esta sala contribui com as abordagens de um ensino mais dinâmico e inovador, onde os conteúdos matemáticos passam a estar articulados com diferentes processos e artefatos.

Uma coisa que muito chamou nossa atenção foi o fato dos alunos mudarem de comportamento, em relação a atenção, no momento em que passávamos a explicar os conceitos utilizando o quadro e o computador. Neste momento, a sala ficava um silêncio total e era possível verificar que cada um dos alunos comentavam entre eles coisas do tipo:

- *"Nossa, que parada maneira";*
- *"Pena que só tivemos isso agora, quase no final do ano"*
- *"Ah! Assim fica mais fácil para enxergar"*

D'AMBROSIO (1989) enfatiza que no processo escolar, em uma aula de Matemática, devemos apresentar situações que agucem a curiosidade do aluno a resolver problemas, seja pela curiosidade em si ou pelo desafio de solucionar o problema. É exatamente neste momento que nossos alunos começam a raciocinar de uma forma totalmente diferente do que eles fazem habitualmente. Eles estão dispostos a enxergar a Matemática de uma maneira como eles nunca haviam pensado antes e se portara em sala de aula de forma ativa, ou seja, eles opinam. São essas reflexões que os fazem aprender e associar o que é matemática ensinada na escola com a matemática de seu cotidiano.

Em relação as atividades, alguns alunos não compreenderam muito bem o significado de prolongamento de lados. Por exemplo, a maioria dos alunos desenharam as figuras com seus lados prolongados e verificaram a existência ou não de novos polígonos estrelados.

Note que os alunos se preocuparam em escrever se o polígono era ou não era estrelado utilizando as palavras Sim e Não.

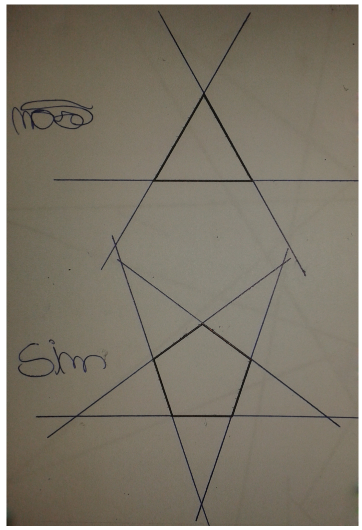



Figura 31 – Processo de estrelação no triângulo e no pentágono
Fonte: Lemos, 2015.

Entretanto, um aluno simplesmente ampliou a figura e pensou que estava estrelado. Veja a figura 32:

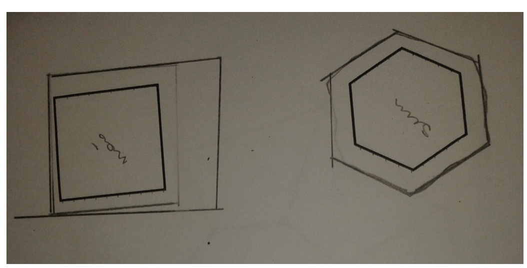


Figura 32 – 1ª tentativa de estrelar polígonos
Fonte: Lemos, 2015.

Em seguida interferi no processo de estrelação com esse aluno e ele tentou uma segunda vez. Veja figura 33:

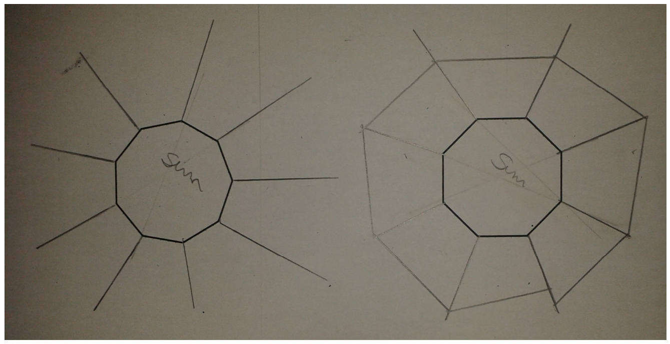


Figura 33 – 2ª tentativa de estrelar polígonos
Fonte: Lemos, 2015.

Cabe a nós lembrarmos que cada aluno tem o seu tempo para assimilar um determinado tipo de informação. Neste caso, somente após a terceira explicação o aluno conseguiu realizar o processo de estrelação do modo correto. Porém, é importante ressaltar para qualquer aluno que a 1ª e a 2ª tentativa de realizar o processo de estrelação são extremamente importantes para o seu aprendizado.

A figura a seguir mostra como um aluno consegue apresentar a idéia de "estar por cima" e "estar baixo" no papel e, também que o processo de estrelação pode ser realizado mais de uma vez.

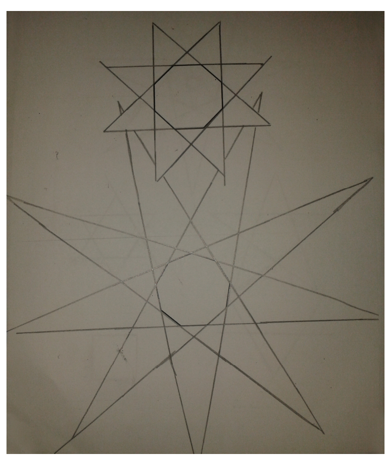


Figura 34 – Processo de estrelação no octógono e no eneágono
Fonte: Lemos, 2015.

Podemos afirmar que, uma sala de aula interativa torna o aluno em um investigador diante das atividades propostas.

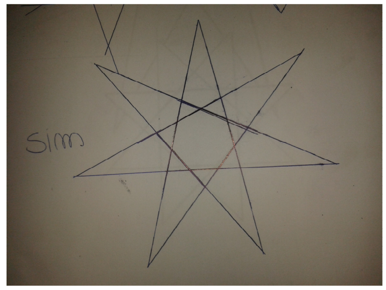



Figura 35 – Processo de estrelação do heptágono
Fonte: Lemos, 2015.

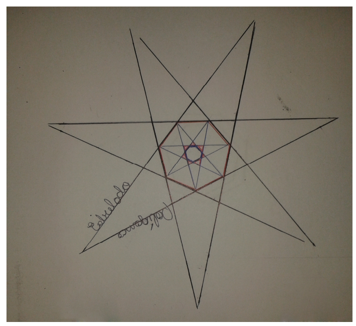


Figura 36 – Processo de estrelação do heptágono
Fonte: Lemos, 2015.

Note que ambas as figuras acima mostram o processo de estrelação de um heptágono, porém na figura 35 temos a estrelação por prolongamentos de lados, onde a estrela surge do lado de fora do polígono, e na figura 36 temos a estrelação utilizando algumas diagonais do polígono, dando saltos constantes em seus vértices. Esta maneira de estrelar o polígono gera polígonos estrelados no interior do polígono dado.

O aluno ao representar a figura 36 não foi informado de que poderia estrelar polígonos utilizando suas diagonais. Seus conhecimentos anteriores e suas habilidades exploratórias o levaram a chegar neste resultado. Perguntei a ele:

– Qual foi a idéia que o levou a fazer isso?

*– Vi uma vez no filme do Pato Donald no Pais da Matemática um pentagrama que era criado por dentro e não por fora, então tentei fazer o mesmo com esse outro polígono aqui.*

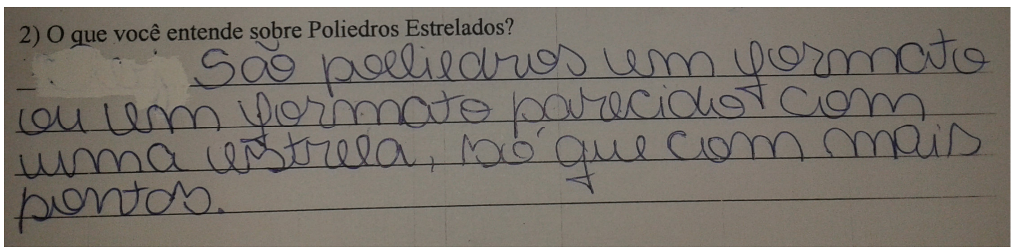
– E por que achou que daria certo?

*– Eu não achei que daria certo. Apenas verifiquei se dava pra fazer assim ou não.*

É a partir de indagações desse tipo que podemos levar nossos alunos a um patamar acima do nível básico do aprendizado, e tal fato os tornam responsáveis pelo seu próprio desenvolvimento. Este aluno só me chamou para dizer que conseguiu fazer de uma maneira diferente. Ele não perguntou se tinha como fazer de outra forma, ele fez antes de perguntar.

Esta é uma característica marcante da sala de aula interativa onde o aluno tem oportunidades de criar suas próprias teorias e métodos para resolver certos problemas.

Podemos perceber, após a comparação das respostas dos alunos sobre o conceito de poliedros estrelados, que a compreensão dos alunos sobre esse conceito foi muito satisfatória. A grande maioria dos alunos respondeu, inicialmente, que poliedro estrelado é um poliedro em forma de estrela, enquanto outros citaram pirâmides em suas faces. Alguns alunos responderam que poliedro estrelado era um meteoro ou uma shuriken (arma ninja em forma de estrela).


2) O que você entende sobre Poliedros Estrelados?

São poliedros um formato ou um formato parecido com uma estrela, só que com mais pontos.

Figura 37 – Resposta sobre poliedros estrelados
Fonte: Lemos, 2015.

Podemos notar que o aluno ao comparar o poliedro estrelado com um meteoro e uma shuriken foi muito intuitivo em sua escolha. Acreditamos que o aluno utilizou experiências anteriores de seu cotidiano e associou a forma que ele estava visualizando com um meteoro devido a forma arredondada e com muitas pontas e, em relação a shuriken, por ter em sua nomenclatura a palavra estrelado.

Note que o simples fato de parecer uma estrela não caracteriza um poliedro estrelado ou até mesmo um polígono estrelado, pois existem polígonos e poliedros que parecem estrelas e não são chamados de estrelados.

Mas também, obtivemos excelentes respostas sobre a avaliação final onde eles deveriam responder a mesma coisa. Baseados nas descobertas realizadas na aula, vejamos algumas respostas dos alunos:

- *"É o prolongamento das retas que se encontram"*
- *"É o prolongamentos de faces que formam uma estrela"*

- *“É uma figura que, ao expandir as linhas, ela ficar com um formato de estrela”*
- *“É uma figura que quando esticado pode formar ou não uma estrela”*

Um grupo de alunos fixou suas atenções nas animações do computador que mostravam os poliedros sendo estrelados, formando-se por cima do anterior que deram respostas baseadas nesta animação.

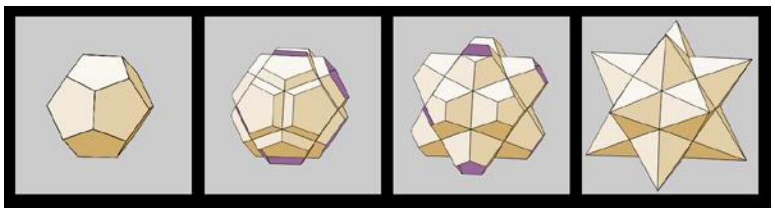


Figura 38 – Animação do computador
Fonte: http://www.pauloporta.com/Xeometria/poliedros/estrelas/estrelas.htm[22].

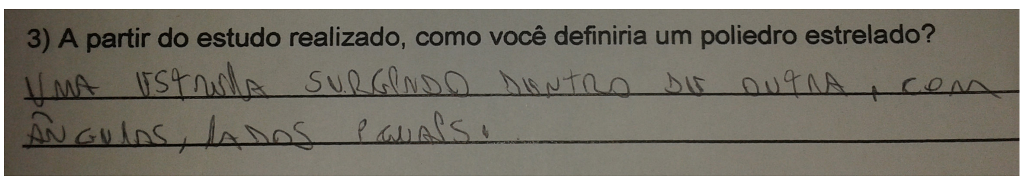

3) A partir do estudo realizado, como você definiria um poliedro estrelado?
UMA ESTRELA SURGINDO DENTRO DE OUTRA, COM ÂNGULOS, LADOS IGUAIS.

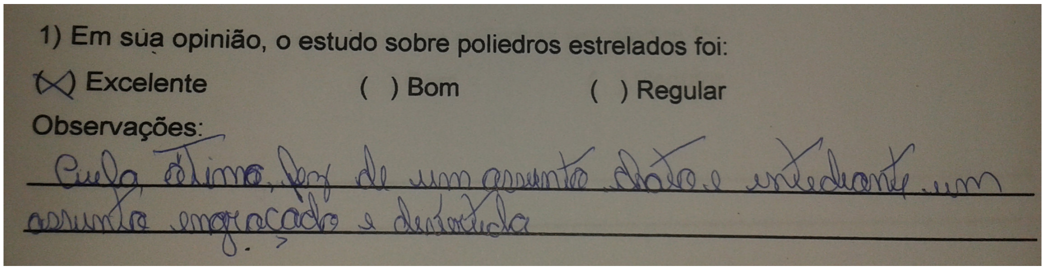
Figura 39 – Resposta do aluno sobre poliedros estrelados
Fonte: Lemos, 2015.

Perceba que a compreensão desse aluno está totalmente coerente com o que ele visualizou na animação do computador. E, além disso, ele também começou a associar o conceito de poliedro regular em sua resposta no momento que escreve: *“ângulos, lados iguais”*.

Uma dificuldade que tivemos no momento da aplicação foi a questão do tempo, pois estávamos planejados para aplicar em 4h/aula, com início às 18h e término às 22h. Porém, só podemos trabalhar esses conteúdos por um período de 3h/aula, devido ao alto índice de violência no local onde a escola está inserida e, infelizmente, os alunos não ficaram para terminar a construção do poliedro estrelado com origami. Dessa forma, a maioria dos alunos pediu para que voltássemos em um outro dia para terminar a construção dos poliedros estrelados.

[22] Acesso em 09/09/2014.

A primeira pergunta da avaliação final trouxe muitas surpresas em suas respostas. O aluno deveria julgar a aula como excelente, boa ou regular e fazer algumas observações. Vejamos algumas dessas respostas nas figuras 40 e 41:

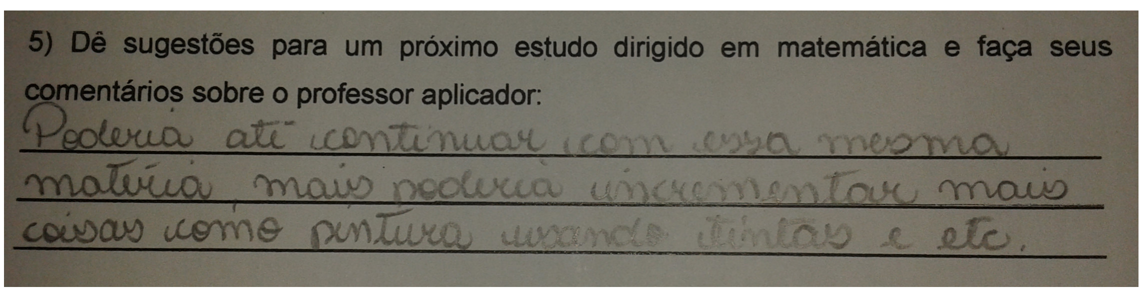

1) Em sua opinião, o estudo sobre poliedros estrelados foi:

(X) Excelente ( ) Bom ( ) Regular

Observações: Aula ótima, fez de um assunto chato e intediante um assunto engraçado e divertida.

Figura 40 – Resposta a questão 1
Fonte: Lemos, 2015.

Esta resposta mostra que a nossa proposta da sala de aula interativa pode ser transformadora, pois aquele conteúdo, que na cabeça do aluno, é *"chato e intediante"* se transforma em algo engraçado e divertido. Acreditamos que essa sala de aula seja um poderoso recurso para ajudar o professor a quebrar as barreiras do preconceito e da ignorância fazendo com que nossos alunos voltem a sonhar e vivam novamente em um tempo onde estudar matemática é legal, fácil e divertido.


5) Dê sugestões para um próximo estudo dirigido em matemática e faça seus comentários sobre o professor aplicador:

Poderia até continuar com essa mesma matéria mais poderia incrementar mais coisas como pintura usando tintas e etc.

Figura 41 – Resposta a questão 5
Fonte: Lemos, 2015.

Na última pergunta da avaliação final queríamos saber o que eles sugeririam para um próximo estudo dirigido em Matemática e pedíamos também para eles realizarem comentários sobre o aplicador da aula. Analisando as respostas detectamos que muitos responderam que o estudo deveria ter mais tempo para realizar as atividades e que o próximo estudo deveria continuar com o mesmo tema. Outros alunos sugeriram que deveríamos utilizar tintas para os alunos realizarem a pintura de seus poliedros na aula.

Ficamos muito felizes com esses resultados, pois chegamos a pensar em implementar essa atividade, mas não a fizemos devido a questão do tempo. E, isso mostra que esse recurso é mais um que pode ser inserido na sala de aula interativa.

Ressaltamos que TODOS os alunos participaram da aula com alguma contribuição realizando suas perguntas, questionando algumas informações. Todos estavam muito a vontade dentro de uma sala de aula, onde o ambiente foi preparado para acalma-los e aconchega-los da melhor maneira possível, propiciando um local favorável a aprendizagem. Devido a isso, os alunos não tiveram dificuldades em se expressar de qualquer forma, seja escrita ou oral, pois todos estavam envolvidos com o estudo dirigido e as atividades.

Por fim, verificamos que muitos alunos tiveram várias dificuldades em realizar dobraduras ou manusear computadores. Porém, nenhum aluno se sentiu excluído da aula por não saber fazer dobradura ou manusear o computador, devido ao acesso a outras opções para realizar suas atividades. Acreditamos que esse resultado seja a principal característica de nossa sala de aula interativa.

## 4.2 Colégio Estadual Francisco Assumpção

Neste colégio, os alunos foram mais receptivos, pois a grande maioria tinha uma média de idade entre 18 e 24 anos. Ao perceberem que trataríamos de uma aula de geometria utilizando como recurso o origami, eles ficaram bastante eufóricos.

Cabe a nós ressaltarmos que apesar de não utilizarmos a sala de aula interativa neste colégio, o estudo dirigido que realizamos foi muito bem recebido pelos alunos devido a curiosidade de muitos e, até mesmo, a euforia em ter uma aula com origami.

Podemos perceber algumas diferenças entre os resultados do Colégio Estadual Max Fleiuss, onde utilizamos a sala de aula interativa, e o Colégio Estadual Francisco Assumpção. Porém, essas diferenças não foram tão alarmantes. Mas, percebemos que nem todos os alunos participaram das atividades. Alguns, inclusive, nem responderam o questionário de auto-avaliação.

Dessa forma, podemos dizer que, apesar de o origami ser um recurso que a grande maioria dos alunos gosta de manipular, existem aqueles que não tem qualquer interesse para utilizá-lo. Esses alunos automaticamente se excluem das atividades, pois não querem que suas dificuldades fiquem expostas na sala de aula.

Este trabalho vem mostrar que apesar das habilidades do professor e sua desenvoltura em utilizar certo recurso didático em sua sala de aula, alguns alunos se excluem das atividades por não terem habilidades para manipula-lo. E, a sala de aula interativa mostra que quando o professor possui diversos recursos dispostos em uma sala, que explora as habilidades dos alunos de acordo com seus interesses, não é necessário excluir uma minoria de alunos para pode ministrar uma aula sobre qualquer conteúdo matemático.

Veja na tabela a seguir a alguns resultados:

Quadro 05 – Alguns resultados

| Quesitos | C. E. Max Fleiuss | C. E. Francisco Assumpção |
|---|---|---|
| Receptividade | Muito boa | Muito boa |
| Interesse | Todos os alunos participaram com dúvidas, perguntas, questionamentos e indagações. | Alguns alunos desistiram das atividades devido a dificuldade com o origami |
| Atividades propostas | Todos os alunos realizaram as atividades propostas e alguns fizeram além do que foi proposto | A maioria realizou as atividades propostas |
| Auto-avaliação | Todos os alunos responderam | Três alunos não responderam |

Muitos alunos que participaram das aulas ministradas nos colégios tinham muitas dificuldades em se expressar ao falar e também ao escrever. Porém, os alunos que utilizaram a sala de aula interativa conseguiram romper com esse medo. Isto mostra que a sala de aula interativa auxilia o aluno até na questão da comunicação.

Analisando os resultados obtidos podemos perceber que uma sala de aula voltada para diversidade, e não apenas para limitações de habilidades dos alunos, pode contribui cognitiva e diferentemente no aprendizado de cada um deles, devido ao poder libertador de medos, inseguranças e ansiedade que esta sala possui. Assim, os alunos se sentem mais livres para perguntar, questionar, investigar e  realizar tentativas.

Um outro tópico marcante foi que TODOS os alunos realizaram as atividades propostas e, alguns fizeram além do que foi proposto. Isto mostra que nossa sala de aula interativa também aguça o interesse e a criatividade dos alunos.

Percebi também que o não uso da sala de aula interativa não significa resultados ruins, mas sim, o não alcance completo dos alunos, pois na maioria das vezes, sempre temos um aluno que não gosta de utilizar uma determinada ferramenta e acaba se excluindo da aula para não expor suas limitações.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho utilizamos uma alternativa didática para o trabalho com poliedros estrelados no ensino médio. Exemplificamos animações e, sugerimos algumas possíveis situações de aprendizagem e ilustramos a construção de poliedros estrelados com dobraduras e planificações.

Mostramos que o uso de uma sala de aula interativa surge como uma nova forma de repensarmos a significância do ensino. Seu uso aflora vários aspectos pedagógicos como autoestima, criatividade, inclusão, questionamentos e argumentação, possibilitando a compreensão de conteúdos programáticos indispensáveis à formação de cidadãos.

Primeiramente, cabe-nos sublinhar que o professor precisa possuir crença e engenhosidade, pois é preciso acreditar naquilo que se deseja fazer, transformar ou construir e, também é exigido do professor uma boa dose de criatividade para orientar seus alunos e transformá-los em estudantes e, de preferência, em aprendizes também. Para isso, O professor deve estar preparado para elaborar, desenvolver e avaliar um processo de ensinar e aprender diferente do que temos hoje.

Percebemos que a beleza estética dos poliedros estrelados e os desafios de sua construção despertam interesse dos professores para seu trabalho em sala de aula e, em relação aos alunos, a motivação para estudar Matemática.

De uma forma geral, as aulas de Matemática ocorrem em um espaço onde o aluno deve apenas reproduzir aquilo que o professor está fazendo ou falando. Nossa abordagem prioriza a criatividade, a argumentação, a descoberta, o questionamento e o raciocínio. Nossa sala de aula interativa é voltada para diversidade. Ela não segue uma ordem de execução. O aluno é livre para utilizar os recursos oferecidos para construir seu conhecimento sobre o conteúdo aplicado de forma que suas limitações não sejam expostas, pois o mesmo realizará as atividades com os recursos que mais o interessa em relação as suas potencialidades e habilidades.

Acreditamos que a sala de aula interativa é capaz de resgatar aquele aluno do "fundo da sala" que não tem interesse em, por exemplo, origami. Esse aluno se exclui da aula, e decidi não expor suas limitações com esse recurso, pois só existe esse recurso para ser utilizado. Porém, com a sala de aula interativa, o mesmo terá a oportunidade de continuar o processo de construção do conhecimento através dos outros materiais e recursos dispostos na sala.

Cada recurso contribui cognitiva e comunicativamente nas diferentes etapas do aprendizado. Podemos listar várias contribuições que cada recurso utilizado na sala de aula interativa pode oferecer:

Vídeos:

- ✓ o aluno pode revisar e continuar sua atividade de construção;
- ✓ detalhes mais precisos das construções dos poliedros;
- ✓ o aluno consegue simular o resultado de sua construção e também pode publicar e divulgar sua ideia.

Origami:

- ✓ manipulação e montagem do próprio modelo;
- ✓ conciliar outros conceitos geométricos por meios dos procedimentos de construção;
- ✓ composição e decomposição através dos módulos;
- ✓ observação de planificação;
- ✓ observações de regularidades e expressão de arte.

Computador e softwares educacionais:

- ✓ manipulação via mouse de vários modelos diferentes
- ✓ representações diferenciadas
- ✓ rotação e observação de elementos variados de poliedros

Não é obrigatório a aplicação desse método em uma sala de aula interativa, ou seja, não priorizamos a utilização de todos esses recursos. Essas atividades podem ser implementadas com outros recursos, desde que, os mesmos visem a potencializar habilidades e interesses diferentes nos estudantes. Isso significa dizer que os alunos não precisam vivenciar todas as atividades e recursos. Eles podem decidir o caminho e a ferramenta que podem lhe orientar no desenvolvimento conceitual. Desta forma, o que o professor deve fazer é propor (conhecendo previamente o potencial e a limitação de cada recurso) essa gama de situações (dobradura, planificação, recursos na Internet, vídeo etc.) e permitir que o aluno possa construir não linearmente o seu conhecimento matemático.

Anteriormente ao estudo dos poliedros estrelados foi importante abordar os poliedros regulares e o processo de estrelação em polígonos. Nesta perspectiva, temos visto que a sequência didático-conceitual (polígonos estrelados → poliedros regulares → poliedros regulares estrelados) aparenta-se importante. No entanto, a arquitetura de aula, onde referida sequenciação é posta em prática, não é linear e hierárquica, mas hipertextual e sem caminhos pré-definidos, pois esta configuração inter-relaciona processos cognitivos, comunicativos e representacionais variados. Tais processos são deflagrados individual e coletivamente mediante o uso de atividades que objetivam a descoberta, a conceituação, a construção e a manipulação (convencional ou via *mouse*) de modelos de poliedros.

Outras opções interessantes que estão abertas para se trabalhar com o origami modular, por exemplo: que outros tipos de poliedros podemos construir utilizando os módulos *sonobe* e *super simple isosceles triangle*? Atividades desse tipo apontam para o desenvolvimento de habilidades de raciocínio, análise e observação.

Percebemos que os alunos que participaram das implementações não possuem uma definição formada do significado de polígonos e poliedros estrelados. Em seu processo de construção conceitual, como é natural, aspectos da linguagem corrente (estrelas, pontas) são explicitados.

A contribuição dos alunos para a construção dos materiais é muito importante para o processo educacional deles, pois é fazendo que se aprende. A construção desses materiais não será aplicada a todos os assuntos de geometria espacial, mas seguramente disponibilizará uma diversificação de meios e uma excelente prontidão ao uso deles como nenhuma outra alternativa oferece.

Acreditamos que o presente trabalho possa contribuir de forma significativa para a formação do professor, no processo metodológico e teórico, bem como para o aluno, no aperfeiçoamento de suas habilidades e competências em Matemática.

# 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. A. **A Geometria na escola básica:** que espaços e formas tem hoje?. Disponível em: http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr21-Saddo.doc. Acesso em: 21 out. 2007.

ALVES, G. S., SOARES, A. B. **Geometria Dinâmica:** um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae. XXIII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, Campinas, 2003. Disponível em: www.professores.uff.br/hjbortol/car/library/WIE_George_Adriana.pdf. Acesso em 15 out. 2007.

BALL, D. L. The subject matter preparation of prospective mathematics teachers: challenging the myths. **Handbook of research on teacher education**, N. Y: Macmillan, 1990. Disponível em: <http://www.im.ufrj.br/~claudia/cursos-2010-1/tendencias.html> Acesso em: 07 mar. 2010.

BASTOS, R. Geometria no currículo e pensamento matemático. [Editorial]. **Revista Educação e Matemática**, n.52, mar/abr, 1999. Disponível em: <http://www.apm.pt/apm/revista/educ52/educ52_2.htm> Acesso em: 29 out. 2007.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003 – (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BRASIL. MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, DF: MEC / SEF, 1998.

CAVALCA, A. P. V. **Espaço e Representação Gráfica: visualização e interpretação**. 1997. 169 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). PUC, São Paulo .

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje?** Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2. Brasilia. 1989. p. 15-19.

DEMO, P. **Educar pela pesquisa**. 4ª ed. Campinas, Autores Associados, 2000. (Coleção Educação Contemporânea).

DURVAL, R. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semióticas.** 1 ed. São Paulo: PROEM, 2011.

EVEN, R. Subject Matter Knowledge for Teaching and the Case of Functions. **Educational Studies in Mathematics**, Vol. 21, No. 6. (Dec., 1990), pp. 521-544. Disponível em: <http://www.springerlink.com/content/q156lu2r22p1686p/> Acesso em: 21 abr. 2014.

FERREIRA, A. C. A. **O uso do computador como recurso mediador na disciplina de matemática no ensino médio.** Dissertação (Mestrado) - Fac. de Química, PUCRS, Porto Alegre, 2004.

GUIMARÃES, S. D.; VASCONCELLOS, M.; TEIXEIRA, L. R. M. **O ensino de geometria nas séries iniciais do Ensino Fundamental: concepções dos acadêmicos do Normal**

**Superior.** Zetetike. Campinas, 2006. v. 14. n. 25. Disponível em: <http://www.fae.unicamp.br/zetetike/viewissue.php?id=6> Acesso em 08 jan. 2011.

KALEFF, A. M. M. R. **Vendo e Entendendo Poliedros**. 2ª ed. Niterói: EDUNFF, 2004.

LEINHARDT, G.; SMITH, D. A. Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge. **Journal of Educational Psychology 77**, 1985. Disponível em: <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED247137.pdf> Acesso em: 19 Out, 2013.

LEMOS, W. G. **Dobraduras para o trabalho com poliedros estrelados no ensino médio**. UFRRJ/DEMAT. Monografia de conclusão de curso de Graduação em Matemática. Seropédica, 2008.

LEMOS, W. G.; BAIRRAL, M. A. **Poliedros Estrelados no Currículo do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: Edur/UFRRJ, 2010.

LEMOS, W. G.; BAIRRAL, M. A. Recursos na internet e dobraduras para poliedros estrelados: Uma proposta para o trabalho no Ensino Médio. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Vol. 1, n. 2, mai/ago, 2008. Disponível em <http://revistas.utfpr.edu.br/pg/index.php/rbect/article/viewFile/231/203> Acesso em: 15 set. 2013.

LIMA, J. D. Os desafios do uso de vídeos em sala de aula. **Gazeta do povo**, jan. 2012. Disponível em: http://www.gazetadopovo.com.br/educacao/os-desafios-do-uso-de-videos-em-sala-de-aula-6zqycet02mxhpbghxopguefda. Acesso em 08 jun. 2015.

LIMA, R. O vídeo na sala de aula: breve reflexão a partir das contribuições de Mário Kaplún e Paulo Freire. Dissertação: UFMG

LIMA, R. P. **O vídeo na sala de aula: breve reflexão a partir das contribuições de Mário Kaplún e Paulo Freire.** UFMG. Dissertação de Mestrado. Belo Horizonte, 2010. Disponível em: http://www.aic.org.br/metodologia/o-vídeona-sala-de-aula.pdf. Acesso em: 10 fev. 2010

LORENZATO, S. O. **Laboratório de Ensino da Matemática na Formação de Professores**. Campinas, Autores Associados, 2006.

MARTINS, T. D., GOLDONI, V. **Descobrindo os Poliedros de Platão.** Anais do XVI EREMATSUL, Porto Alegre, 03-06/06/2010. Disponível em http://www.pucrs.br/edipucrs/erematsul/minicursos/descobrindoospoliedros.pdf. Acesso em 10 jun. 2015.

MORAN, J. M., O vídeo na sala de aula. **Revista Comunicação & Educação**. São Paulo, ECA-Ed. Moderna, jan./abr. de 1995.

PAVANELLO, R. M. **Porque ensinar /Aprender Geometria?**. Trabalho apresentado no VII Encontro Paulista de Educação Matemática, SP, 2004. Disponível em: <www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr21-Regina.doc> Acesso em: 21 out. 2014.

SALAZAR, J.V.F. **El Origami Como Material Didáctico para la Enseñanza de la Geometría**. Em XVI Simpósio Ibero-americano de Educación Matemática. Castellón: SIAEM, 2004. Disponível em www.iberomat.uji.es/carpeta/posters/jesus_flores.doc. Acesso em 29 nov. 2007.

SARAIVA, M. J., COELHO, M. I., & MATOS, J. M. **Ensino e Aprendizagem da Geometria**. Lisboa: SEM/SPCE, 2002.

SILVA, R. V., OLIVEIRA, E. M. **As Possibilidades do Uso do Vídeo como Recurso de Aprendizagem em Salas de Aula do 5º ano**. In: V Encontro de Pesquisa em Educação de Alagoas – EPEAL, Maceió, 2010. Disponível em: http://www.pucrs.br/famat/viali/recursos/vlogs/Pereira_Oliveira.pdf. Acesso em: 20 jun. 2015.

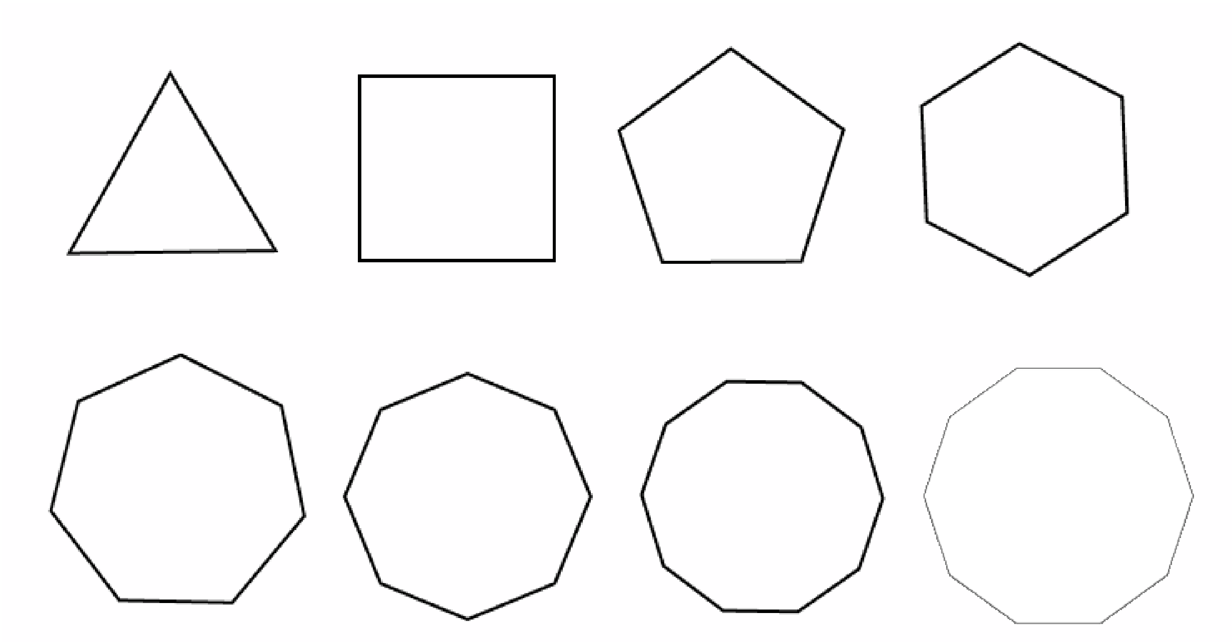
TIMEU. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/wiki/Timeu>. Acesso em: 30/10/2014.

VELOSO, E. **Geometria:** temais actuais. Lisboa: IIE, 1998.

# APÊNDICES

## Apêndice 01

1) Faça o processo de estrelação e verifique quais polígonos geram novos polígonos estrelados:



2) É possível estrelar um polígono mais de uma vez? Tente e verifique o resultado. Será surpreendente.

Apêndice 02

***Ficha de Auto Avaliação***

1) Em sua opinião, o estudo sobre poliedros estrelados foi:

( ) Excelente ( ) Bom ( ) Regular

Observações:

2) O que você mais gostou do estudo? E o que não lhe agradou?

3) A partir do estudo realizado, como você definiria um poliedro estrelado?

4) Utilize uma nota para avaliar a dificuldade do conteúdo estudado, onde 0 (zero) é muito difícil e 10 (dez) muito fácil. Justifique:

5) Dê sugestões para um próximo estudo dirigido em matemática e faça seus comentários sobre o professor aplicador: