

UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO

**Estudo dos ruídos produzidos por aerogeradores
utilizando a Equação da onda e o Método das
Diferenças Finitas.**

Gabriele de Azevedo Batista

2026



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM
MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL**

**ESTUDO DOS RUÍDOS PRODUZIDOS POR AEROGERADORES
UTILIZANDO A EQUAÇÃO DA ONDA E O MÉTODO DAS
DIFERENÇAS FINITAS.**

GABRIELE DE AZEVEDO BATISTA

Sob orientação de
Carlos Andréas Reyna Vera Tudela

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre** no Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, Área de Concentração em Modelagem Matemática e Computacional.

Seropédica, RJ, Brasil
Março de 2026

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B333e BATISTA, GABRIELE, 1992-
Estudo dos ruídos produzidos por aerogeradores
utilizando a Equação da onda e o Método das Diferenças
Finitas / GABRIELE BATISTA. - SAQUAREMA, 2026.
69 f.: il.

Orientador: Carlos VERA-TUDELA.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural
do Rio de Janeiro, PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL, 2026.

1. Equação da onda. 2. Método das diferenças
finitas. 3. Ruído de aerogeradores. I. VERA-TUDELA,
Carlos, 1964-, orient. II Universidade Federal Rural
do Rio de Janeiro. PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL III. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL



Seropédica-RJ, 27 de março de 2026.

Gabriele de Azevedo Batista

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção de grau de **Mestra**, no Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional PPGMMC, área de Concentração em Modelagem Matemática e Computacional.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 27/03/2026

Carlos Andres Reyna Vera Tudela Drº (Orientador, Presidente da Banca-UFRRJ)

Sergio Drumond Ventura Drº (membro interno-UFRRJ)

Rogério Gomes de Lima Tostas Drº (membro externo à Instituição-UAB)



ATA Nº ata/2026 - ICE (12.28.01.23)

(Nº do Documento: 1060)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 01/04/2026 10:51)

CARLOS ANDRES REYNA VERA TUDELA
COORDENADOR CURS/POS-GRADUACAO - TITULAR
PPGMMC (12.28.01.00.00.00.61)
Matrícula: ###336#3

(Assinado digitalmente em 02/04/2026 19:25)

SERGIO DRUMOND VENTURA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptM (12.28.01.00.00.00.63)
Matrícula: ###228#9

(Assinado digitalmente em 04/04/2026 22:55)

ROGERIO GOMES DE LIMA TOSTAS
ASSINANTE EXTERNO
CPF: ###.###.307-##

Visualize o documento original em <https://sipac.ufrrj.br/documentos/> informando seu número: **1060**, ano: **2026**,
tipo: **ATA**, data de emissão: **01/04/2026** e o código de verificação: **b38f3b3173**

*Dedico este trabalho aos meus pais, as
pessoas mais incríveis que já encontrei na
vida.*

Agradecimentos

Agradeço profundamente ao meu orientador, Carlos, e à minha colega de classe, Silvana, cuja persistência e apoio foram essenciais para que eu não desistisse no caminho.

Sou imensamente grata aos meus filhos, Estevão e Alice, por serem tão maravilhosos e por compreenderem minha ausência em alguns momentos.

Ao meu amigo Ramon, pelo incentivo e por literalmente ter me mostrado o caminho, deixo aqui minha sincera gratidão.

Estendo meus agradecimentos a todos que compartilharam do mesmo sonho ou, de forma direta ou indireta, contribuíram para a concretização deste sonho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001.

Muito obrigada!

-

*A Matemática é a única linguagem que
temos em comum com a natureza.
Stephen Hawking*

RESUMO

DE AZEVEDO BATISTA, Gabriele. **Estudo dos ruídos produzidos por aerogeradores utilizando a equação da onda e o método das diferenças finitas**. 2026. 54f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2026.

O Brasil é um líder mundial na geração de energia limpa. Em 2023, o país apresentou 89,2% de sua matriz energética composta por fontes renováveis, muito acima da média global de 28,1%. Esse crescimento demonstra o compromisso do país com as soluções sustentáveis para preservar o planeta. Essa pesquisa propõe a utilização da modelagem matemática, mais precisamente da equação da onda, para analisar e caracterizar o ruído. O método das diferenças finitas é empregado para encontrar soluções numéricas que permitam uma melhor compreensão e controle do fenômeno, indicando diretamente a variação da pressão em pontos específicos da equação. Nesse estudo será empregado um algoritmo que foi desenvolvido em python para uma melhor análise da equação da onda envolvida no ruído, além de conclusões acerca da pressão sonora encontrada.

Palavras-chave: Ruído, Equação da onda, Método das diferenças finitas..

ABSTRACT

DE AZEVEDO BATISTA, Gabriele. **Study of Noise Produced by Wind Turbines Using the Wave Equation and the Finite Difference Method.** 2026. 54p. Dissertation (Master in Mathematical and Computational Modeling). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2026.

Brazil is a global leader in the generation of clean energy. In 2023, the country reached 89.2% of its energy matrix composed of renewable sources, far above the global average of 28.1%. This growth demonstrates the country's commitment to sustainable solutions to preserve the planet. This research proposes the use of mathematical modeling—more specifically, the wave equation—to analyze and characterize noise. The finite difference method is employed to obtain numerical solutions that allow for a better understanding and control of the phenomenon, directly indicating pressure variations at specific points in the equation. In this study, an algorithm developed in Python will be used to provide a more thorough analysis of the wave equation involved in noise, in addition to drawing conclusions about the resulting sound pressure.

Keywords: Noise, Wave Equation, Finite Difference Method.

1 AGRADECIMENTOS	5
2 INTRODUÇÃO	1
3 A INTERAÇÃO DO HOMEM COM A NATUREZA.....	3
3.1 INTERAÇÃO DO HOMEM COM A NATUREZA	3
3.2 SUSTENTABILIDADE	4
3.3 GERAÇÃO DE ENERGIA LIMPA	6
3.4 O RUÍDO COMO QUESTÃO DE SAÚDE PÚBLICA.....	13
3.5 LEGISLAÇÃO ACERCA DO RUÍDO	14
4 MODELAGEM DO RUÍDO	16
4.1 O RUÍDO DO PONTO DE VISTA FÍSICO	16
4.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL	18
4.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	20
4.3.1 MÉTODO NUMÉRICOS E SEUS AVANÇOS	21
4.4 O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS.....	25
4.5 EQUAÇÃO DA ONDA	30
4.5.1 Solução numérica da equação da onda	32
4.5.2 Solução Analítica da Equação da Onda	34
4.5.2.1 Método de Separação de Variáveis.....	35
4.5.2.2 Solução Analítica em Série de Fourier	35
4.5.2.3 Determinação dos Coeficientes	35
4.6 Equação da Onda em 2D e 3D.....	43
5 METODOLOGIA.....	45
6 CAPÍTULO 6	46
6.1 ANEXO	46
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	50
8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	51

Lista de Figuras

Figura 3.1 – EPE - 2022 Matriz energética brasileira	6
Figura 3.2 – EPE - 2022 Matriz energética mundial	7
Figura 3.3 – EPE 2023 - Matriz energética brasileira	7
Figura 3.4 – Resquícios arqueológicos de moinhos de vento Persas. SIEólica (2016).	8
Figura 3.5 – Chesterton Windmill, moinho de vento do século XVII localizado em Warwickshire, Inglaterra.	9
Figura 3.6 – Modelos de rotor com eixo vertical - Fonte: Colegio São Francisco	10
Figura 3.7 – Mapa de velocidade média de vento e fluxo de potência eólica anual do Atlas do Potencial Eólico Brasileiro (CEPEL, 2001).	12
Figura 3.8 – Geração e representatividade da fonte eólica: CCEE/ABEEólica (2017).....	13
Figura 4.1 – Métodos Numéricos Computacionais - Departamento de computação - Unesp	19
Figura 4.2 – Gráfico da reta tangente	21
Figura 4.3 – Fonte: Lobão (2017).....	22
Figura 4.4 – Comparação entre a solução numérica e a solução analítica da equação da onda com 30 pontos no espaço	34
Figura 4.5 – 10 pontos espaciais e 100 passos temporais	37
Figura 4.6 – 10 pontos espaciais e 500 passos temporais	38
Figura 4.7 – 100 pontos espaciais e 50 passos temporais	38
Figura 4.8 – 100 pontos espaciais e 500 temporais	39

Lista de Tabelas

Tabela 4.1 – Comparação entre Solução Analítica e Numérica da Equação da Onda	36
Tabela 4.2 – Tabela de erros - 10 pontos espaciais e 100 passos temporais	39
Tabela 4.3 – Tabela de erros - 10 pontos espaciais e 500 passos temporais	40
Tabela 4.4 – Tabela dos 10 primeiros erros (truncados)	40
Tabela 4.5 – Tabela de erros - 100 pontos espaciais e 50 temporais	40
Tabela 4.6 – Tabela de erros - 100 pontos espaciais e 500 temporais	40
Tabela 4.7 – Comparação dos erros das quatro tabelas	41

Lista de Abreviações e Siglas

MDF	Método de Diferenças Finitas
ABEEÓLICA	Associação Brasileira de Energia Eólica
ADEME	Agência Francesa do Meio Ambiente e da Gestão da Energia
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
BEM	Balanco Energético Nacional
CEPEL	Centro de Pesquisas de Energia Elétrica
CFL	Critério de Courant-Friedrichs-Lewy
CONAMA	Conselho Nacional do Meio Ambiente
dB	Decibel
dB(A)	Decibel ponderado em A
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
EPE	Empresa de Pesquisa Energética
FTBS	Forward in Time and Backward in Space (Avançado no Tempo e Atrasado no Espaço)
FTCS	Forward in Time and Centered in Space (Avançado no Tempo e Centrado no Espaço)
GW	Gigawatt
Hz	Hertz
Ipea	Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada
MDF	Método das Diferenças Finitas
MVF	Método dos Volumes Finitos
MW	Megawatt
NASA	National Aeronautics and Space Administration

NBR	Norma Brasileira
ODS	Objetivos de Desenvolvimento Sustentável
OMS	Organização Mundial da Saúde
ONU	Organização das Nações Unidas
PDE	Plano Decenal de Energia
PVI	Problema de Valor Inicial
RK	Métodos de Runge-Kutta
RK4	Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem
SIGA	Banco de Informações da Geração
SUS	Sistema Único de Saúde
TEEH	Turbina Eólica de Eixo Horizontal
TEEV	Turbina Eólica de Eixo Vertical
TWh	Terawatt-hora

Lista de Símbolos

∇^2	Operador Laplaciano
f	Frequência em Hertz (Hz)
P	Potência elétrica em Watts
ρ	Densidade do ar em kg/m^3
A_r	Área varrida pelo rotor
D	Diâmetro do rotor
v	Velocidade do vento
C_p	Coefficiente aerodinâmico de potência do rotor
η	Eficiência do conjunto gerador/transmissão
c	Velocidade de propagação do som no meio
p	Campo de pressão sonora
t	Variável tempo
Δt	Passo de tempo ou discretização temporal
Δx	Passo de espaço ou discretização espacial
L	Comprimento do domínio ou do tubo em metros
h	Tamanho do passo ou espaçamento entre pontos
nx	Número de pontos no espaço
nt	Número de passos no tempo
O	Ordem do erro de truncamento local
u_i^n	Solução numérica no ponto espacial i e passo temporal n

A atual situação da crise ambiental global é alarmante. Encontros recentes entre diferentes nações buscaram definir e acelerar medidas globais para o planeta, buscando soluções diante da crescente exploração de recursos naturais, consumismo exagerado e poluição global presentes no cenário atual. De frente a um contexto que clama por soluções sustentáveis, surge a necessidade de implementar técnicas que envolvam novas formas de exploração, controladas e com impacto ambiental mínimo.

O Brasil tem se destacado na geração de energia limpa. De acordo com os dados divulgados pela Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) em 2024, dos 200 GW alcançados, 84,25% são de fontes renováveis. Atualmente as três maiores fontes renováveis que compõem a matriz de energia elétrica brasileira são hídricas (55%), Eólica (14,8%) e Biomassa (8,4%). O crescimento exponencial da energia eólica se destaca pelo fato de não haver emissão de gases poluentes, gerar baixo impacto ambiental e pela existência de ventos propícios para a geração em boa parte de algumas regiões do país.

Apesar da simplicidade de implementação de uma turbina eólica, o problema do ruído tem se tornado uma dor de cabeça constante que, literalmente, assola pessoas próximas aos locais de instalação das turbinas. Há muitos relatos de moradores que convivem com os barulhos das turbinas e se queixam de problemas de saúde, resultando em uma pesquisa que descobriu a síndrome da turbina eólica, doença causada pelo ruído dos aerogeradores.

O estudo do ruído implica diretamente na necessidade de analisar as características e impactos da onda sonora, de modo a compreender melhor o fenômeno e sua potencialidade. A modelagem matemática torna possível mudar a dimensão do problema físico para um problema matemático, provendo um entendimento mais aprofundado sobre a temática em questão.

A equação da onda, utilizada para modelar o ruído que se propaga pelo ar, torna viável a análise do problema matemático. Através da aplicação do método das diferenças finitas, utilizado para calcular a pressão sonora em dados momentos, é possível considerar um estudo adequado do fenômeno, servindo de base para geração de legislações mais consistentes acerca da localização e distância de uma turbina, viabilizando maior qualidade de vida à população e permitindo o desenvolvimento da geração de energia limpa.

Ao traduzir o fenômeno físico para representações formais, é possível analisar a propagação do ruído em diferentes cenários, considerando variáveis como distância, intensidade e características do meio. Essa abordagem possibilita antecipar situações críticas e avaliar, com maior precisão, como a onda acústica se dispersa ao redor dos aerogeradores.

Na modelagem das ondas proposta nesse estudo, as Equações Diferenciais Parciais (EDPs) desempenham papel central, pois descrevem a dinâmica temporal e espacial das oscilações acústicas. A equação da onda, amplamente utilizada para representar perturbações de pressão, oferece um espaço consistente para simular o comportamento do som emitido pelas turbinas. Entretanto, a ausência de soluções analíticas para muitos desses casos reais exige o uso de métodos numéricos, como o Método das Diferenças Finitas.

A implementação computacional dos métodos numéricos, especialmente em Python, viabiliza a execução eficiente das simulações, favorecendo análises mais detalhadas e rápidas. Por meio de algoritmos, tornam-se acessíveis rotinas para discretização, resolução numérica e visualização dos resultados, o que amplia a capacidade de interpretação do comportamento acústico.

A adoção de práticas computacionais com comparação de gráficos, tabelas e geração de erros proporciona maior veracidade ao estudo, permitindo que os resultados contribuam de maneira confiável para discussões sobre limites de exposição ao ruído, distanciamento adequado e aprimoramento das políticas voltadas à expansão sustentável da energia eólica, permitindo uma análise que sirva de base para futuros estudos acerca do alcance do impacto e propostas de limitações físicas acerca da instalação das turbinas.

A INTERAÇÃO DO HOMEM COM A NATUREZA

3.1 INTERAÇÃO DO HOMEM COM A NATUREZA

A análise histórica de sociedades pré-industriais ou pré-capitalistas permite concluir que a exploração de recursos naturais ocorria de maneira menos exacerbada, comparada aos dias de hoje, uma vez que a produção em massa era incomum. Para Santos (2017,p. 2) a economia capitalista baseada no acúmulo de riquezas e extração de recursos naturais de forma predatória, moldou e transformou a relação homem-natureza, rompendo com a harmonia que outrora existia nesta relação.

O cenário de interação equilibrada foi destruído quando a produção em massa começou a ser gerada em indústrias, contribuindo para um considerável aumento do consumo de recursos naturais, poluindo rios e solos e aumentando significativamente a produção de resíduos. Além do aumento exponencial do consumo de matéria prima, o que começou a tornar inviável a regeneração do meio ambiente em certos locais de exploração, houve também a poluição química, contribuindo para agravamento da destruição do meio ambiente.

A preocupação com degradação ambiental é crescente e latente devido a ameaça à existência humana. Segundo Santos (2009), nos últimos 60 anos, os recursos naturais renováveis e não renováveis foram explorados com uma intensidade e extensão incomparáveis com os de qualquer outro período da história, em consequência a isso, os ecossistemas estão sendo perturbados, alterados ou destruídos em um ritmo jamais atingido para satisfazer a grande demanda da população mundial, pautada não somente na sociedade, mas com forte foco no consumismo.

Antes de meados da década de 80, os problemas ambientais eram nacionais, regionais ou locais; eram discretos e se relacionavam à contaminação dos rios, ao desmatamento, à poluição ambiental urbana, à depredação de espécies animais e vegetais, aos efeitos de produtos químicos sobre a saúde, etc. A partir de meados dos anos 80, a mudança climática tornou-se o denominador comum de toda a problemática ambiental, e o aquecimento global, o réu principal (Sarewitz e Pielke 2001).

Quando a sociedade percebeu o que estava acontecendo, começaram os movimentos em prol de legislações ambientais mais rígidas, visando frear a agressão ambiental. Tudo estava

ligado ao clima, e a redução do aquecimento global passou a ser o objetivo da política ambiental internacional. De modo acrítico, muitas organizações e grupos ecologistas e ambientalistas aceitaram considerar o aquecimento global como o responsável pela crise ambiental (Lenoir 1995). A mudança climática delegou à ciência o papel de avaliar seus impactos (Tommasino e Foladori 2001).

Diante das reflexões crescentes a respeito da crise ambiental, vivida sobretudo a partir dos anos 60/70 do século XX, surge um consenso mundial sobre a urgência de uma transformação no modelo de desenvolvimento das sociedades modernas. Reuniões em nível mundial, como a Conferência das Nações Unidas sobre o Meio Ambiente Humano e a 1ª reunião do Clube de Roma, ressaltaram a importância da temática incluída agora em um contexto político.

Ao longo dos anos, os encontros internacionais buscaram frear os danos ambientais e recuperar as áreas já afetadas. Esses eventos tiveram grande impacto ao inserir os problemas ambientais na agenda política mundial. Suas pautas alertavam para questões como a industrialização acelerada, o crescimento populacional descontrolado, a crescente insuficiência na produção de alimentos, o esgotamento dos recursos naturais não renováveis e a degradação irreversível do meio ambiente.

3.2 SUSTENTABILIDADE

A palavra sustentabilidade, presente no cotidiano social da maioria da sociedade, surge na década de 1970, diante de um cenário que anseia por desenvolvimento econômico, mas com respeito ao meio ambiente. De acordo com Romeiro (2012, p. 68), o conceito de desenvolvimento sustentável surgiu com o nome de ecodesenvolvimento nos anos 1970, procurando ultrapassar os constrangimentos surgidos de visões opostas. Por um lado, os desenvolvimentistas e por outro os defensores do crescimento zero.

Com o passar do tempo a busca por sustentabilidade ganha novos adeptos e a preocupação faz com que a sociedade comece a observar as mudanças climáticas e lutar pela preservação ambiental com leis mais rígidas e campanhas de conscientização ambiental, que visam promover conservação ambiental, consumo consciente, evitar poluição e desastres, zelar pela responsabilidade socioambiental empresarial, entre várias outras ações.

Em 2015, após anos de negociações com chefes de Estado e altos representantes dos 193 países-membros integrantes da Assembleia Geral da ONU, surgem os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS), uma agenda pré planejada com um plano de ação para as pessoas, o planeta e a prosperidade a serem alcançados até 2030, ficando assim conhecido também como agenda 2030.

Através do compromisso firmado nas reuniões, países-membros da ONU reconheceram que "a erradicação da pobreza em todas as suas formas e dimensões, incluindo a pobreza extrema, é o maior desafio global e um requisito indispensável para o desenvolvimento sustentável"(ONU, 2015). Um dos compromissos assumidos na Agenda é o de "não deixar ninguém

para trás", em referência aos mais pobres.

As 17 objetivos de desenvolvimento sustentáveis são: erradicação da pobreza; fome zero e agricultura sustentável; saúde e bem-estar; educação de qualidade; igualdade de gênero; água potável e saneamento; energia limpa e acessível; trabalho decente e crescimento econômico; indústria, inovação e infraestrutura; redução das desigualdades; cidades e comunidades sustentáveis; consumo e produção responsáveis; ação contra a mudança global do clima; vida na água; vida terrestre; paz, justiça e instituições eficazes e parcerias e meios de implementação.

Nota-se entre os objetivos que a energia elétrica se destaca por estar presente em todos eles. Para erradicação da pobreza é preciso que as pessoas tenham acesso à dignidade, e a energia elétrica está diretamente associada a ela (BRASIL, 1989 apud ALVA; LEAL, 2018, s.p). Além disso, o custo da energia também se torna uma questão de acessibilidade quando voltada para a questão social. Além de disponível, há a necessidade de ser acessível em termos de custos.

Quando se trata da segurança alimentar, para produzir alimentos em larga escala é preciso otimização do processo, o que envolve diretamente a utilização de energia para obtenção de qualidade e desenvolvimento de sementes, análise do solo, quantificação e precificação, criação de estufas, estoque, transporte de água, entre outros fatores. Para que haja disponibilidade de alimentos em larga escala, capaz de suprir a necessidade mundial, torna-se indispensável o uso da energia elétrica.

A educação e a saúde são fatores preocupantes em todos os países, e a energia tem seu impacto real, positivo e cotidiano em suas implementações diárias. Escolas e hospitais não funcionam sem energia elétrica, além disso, diversas máquinas ligadas à energia 24 horas por dia garantem a recuperação de inúmeras pessoas em hospitais. Nas escolas, a tecnologia se faz cada vez mais presente como forma de potencializar o ensino, e isto se torna possível graças a energia elétrica.

A energia e a igualdade de gênero se relacionam ao revolucionar o mercado. As duas estão interconectadas por promover avanços sociais. Promover a igualdade de gênero é fundamental para garantir que todos tenham acesso equitativo aos recursos e oportunidades, incluindo a energia elétrica. Em muitas comunidades ao redor do mundo, mulheres e meninas são desproporcionalmente afetadas pela falta de acesso à energia, limitando suas oportunidades de educação, saúde e participação econômica. Garantir que mulheres tenham acesso à energia elétrica contribui para sua autonomia e capacidade de realizar suas aspirações, promovendo assim a igualdade de gênero e o desenvolvimento sustentável.

Os outros objetivos são autoexplicáveis quando se trata de utilização da energia elétrica para seus funcionamentos, no entanto, é preciso destacar que, se a energia é utilizada em todos os processos, é preciso que ela esteja dentro de um alto patamar de sustentabilidade, visando garantir que todas as metas também estejam correlacionadas à temática. Para isso, há uma necessidade urgente na geração de energia limpa, buscando minimizar o impacto ambiental.

3.3 GERAÇÃO DE ENERGIA LIMPA

Dentro do campo da sustentabilidade, a produção e o consumo de energia elétrica têm gerado preocupação, afinal, as fontes não renováveis de energia são as maiores responsáveis pela emissão de gases de efeito estufa. Dentre as energias renováveis mais conhecidas e com maior potencial de expansão estão a energia solar e a energia eólica.

Com o objetivo de minimizar as consequências da exploração de fontes não renováveis de energia, surge a campanha pela transição energética. Transição energética é passar, no que for possível, do uso de combustíveis de fontes fósseis — como petróleo e carvão — para alternativas que emitem menos gases de efeito estufa. As fontes de energia mais utilizadas no mundo ainda não são sustentáveis, mas o Brasil tem se destacado em relação ao mundo devido a aderência a fontes renováveis de energia.

Através de pesquisas divulgadas pelo Empresa de Pesquisa Energética(EPE), observa-se que a busca por fontes de energia em 2022 já era bem mais explorada no Brasil do que no restante do mundo, ressaltando o compromisso brasileiro em busca de fontes de energias inesgotáveis e de baixo impacto.

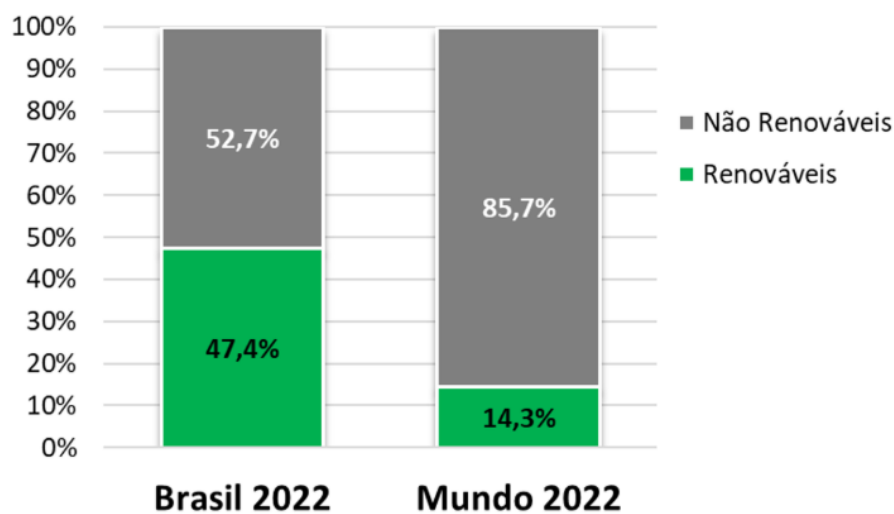


Figura 3.1 – EPE - 2022 Matriz energética brasileira

O Brasil é referência mundial em relação à geração de energia limpa. Segundo dados da empresa de pesquisa energética (EPE), enquanto a geração mundial de energia limpa em 2021 alcançou 28,1 %, a produção de energia limpa através de fontes renováveis no Brasil alcançou 84,8%. Recentemente o Balanço Energético Nacional (BEM) emitiu um relatório demonstrando que em 2023 a participação brasileira de renováveis na matriz elétrica ficou em 89,2% e vem demonstrando grande potencial de expansão ao longo dos últimos anos.

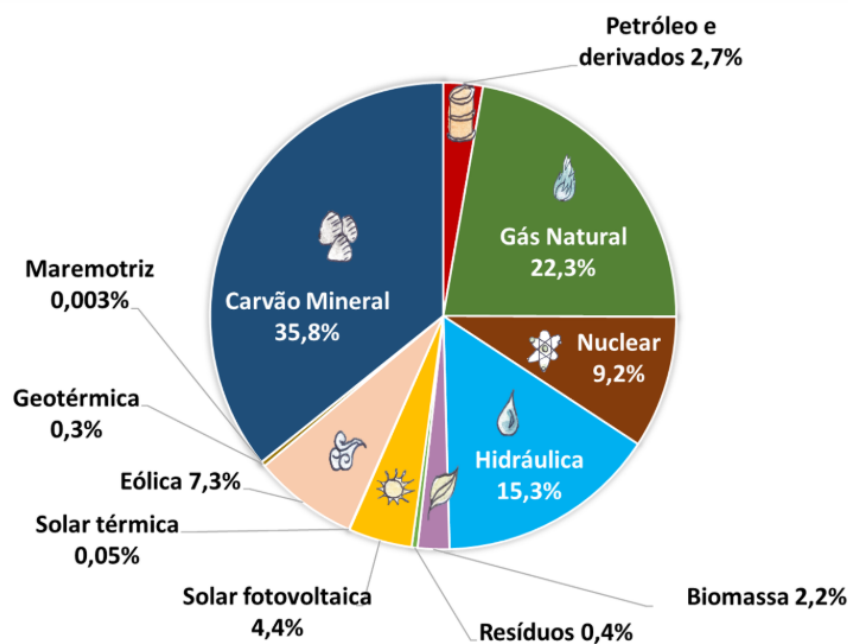


Figura 3.2 – EPE - 2022 Matriz energética mundial

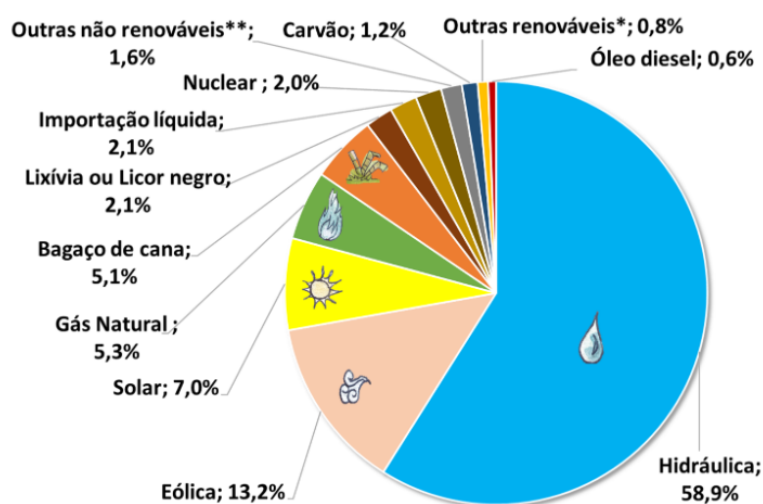


Figura 3.3 – EPE 2023 - Matriz energética brasileira

Dentro do amplo cenário das fontes de energia limpa, a energia eólica se destaca entre uma das mais promissoras. É possível observar que ela ocupa o segundo lugar na geração de energia limpa no Brasil, mas o percentual atual tende a crescer graças à abundância e regularidade dos ventos em algumas regiões. Assim, os ventos se consolidam como aliados estratégicos na transição energética brasileira rumo a uma matriz mais sustentável.

É impossível ignorar a potencialidade da geração de energia através dos ventos. Em 2010, a participação da energia eólica na matriz energética brasileira era de apenas 1,3 %. Estimativas feitas pelo Ipea, tendo por base o Plano Decenal de Energia (PDE) 2019 e o Plano Nacional de Energia 2030, apontaram que a estrutura da matriz chegaria em 2030 com cerca de

2,1% de geração através das eólicas, no entanto, a realidade superou a expectativa e atualmente compõe 14,8% da matriz.

Apesar de parecer algo recente, a exploração dos ventos para gerar energia é algo antigo. Conforme relatado por Marschof (1992), na idade antiga, os persas foram pioneiros na construção de moinhos de vento de eixos verticais utilizados na moagem de grãos. O objetivo do moinho era bem básico: serviam principalmente para mover mecanismos com função na moagem de grão ou elevação de água.



Figura 3.4 – Resquícios arqueológicos de moinhos de vento Persas. SIEólica (2016).

Com o avanço do conhecimento e da inovação, a Europa começou a demonstrar interesse e adotar práticas que exploravam o vento a partir do início do século XII , segundo Steadman (1978). Os primeiros moinhos de vento são de eixos verticais e aparecem na Inglaterra,



Figura 3.5 – Chesterton Windmill, moinho de vento do século XVII localizado em Warwickshire, Inglaterra.

Com o crescimento da população e necessidade de produção em massa, com forte influência da revolução industrial, os estudos avançam e a energia eólica começa a ser repensada a partir de um modelo que permita a obtenção de melhores resultados. Carvalho (2003) aponta que Poul La Cour (1846 – 1908), professor e cientista, foi a figura mais importante para o desenvolvimento de turbinas eólicas mais modernas, como as que existem atualmente. Em sua ideia

inicial, Poul La Cour construiu um túnel de vento para a realização de experimentos e constatou um dos problemas envolvendo a energia eólica seria o armazenamento de energia. Estudos possibilitaram avanços tecnológicos que foram capazes de criar os aerogeradores, a saber:

Aerogeradores são as máquinas utilizadas para capturar e converter a energia cinética dos ventos e são constituídos basicamente, de uma turbina ou rotor eólico, de um gerador elétrico e de sistemas integrados ou auxiliares, como a caixa de multiplicação e sistemas de orientação. Tais máquinas tiveram sua origem nos antigos moinhos de vento, que convertiam a energia cinética dos ventos em energia mecânica. Em épocas mais recentes, essas máquinas passaram a ser utilizadas para produção de energia elétrica. (DALMAZ, 2007, p.39).

O atlas de potencial eólico brasileiro (Cepel, 2001) relata que a geração de eletricidade em grande escala, para alimentar de forma suplementar o sistema elétrico com o uso de turbinas eólicas de grande porte, é tecnologia que existe há diversas décadas. Desde a fase experimental, ressaltam-se os primeiros aproveitamentos eólio-elétricos realizados durante as décadas de 1940 e 1950 nos Estados Unidos (Smith-Putnam) e Dinamarca (Gedser). Pode-se dizer que o precursor das atuais turbinas eólicas surgiu na Alemanha (Hütter, 1955), já com pás fabricadas em materiais compostos, controle de passo e torre tubular esbelta.

A crise no Petróleo vivida na década de 70/80 impulsionou a busca por novas fontes de geração de energia elétrica (Cepel, 2001). Os avanços sofridos ao decorrer dos anos possibilitaram que no final do século XX a NASA realizasse estudos com as turbinas mais avançadas para medições, objetivando o novo programa de energia eólica dos Estados Unidos (APPIO, 2001). A análise das viabilidades de geração de energia eólica permitiu que novos modelos de turbinas fossem criados. Os modelos mais comuns encontrados na literatura são TEEV (Turbina Eólica de Eixo Vertical) Darrieus, Savonius e molinete.

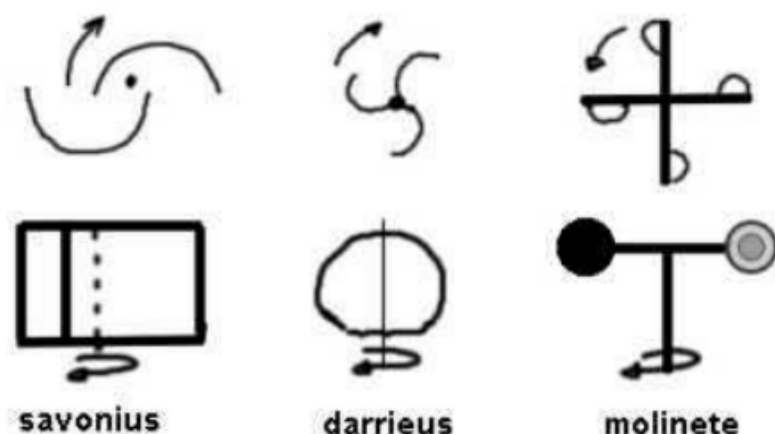


Figura 3.6 – Modelos de rotor com eixo vertical - Fonte: Colegio São Francisco

No Brasil e no mundo, Segundo Appio (2001), os modelos mais utilizados na atualidade são os de Turbina Eólica de Eixo Horizontal (TEEH) de três pás, geralmente fabricados em fibra

de vidro. As turbinas possuem um sistemas de freios aerodinâmico, mecânico ou eletrônico acionado quando o vento torna-se demasiadamente forte.

De acordo com Appio (2001), uma turbina eólica TEEH é formada por três partes principais: gerador, rotor e torre. Cada um desses componentes tem inúmeras peças de montagem e a isso é aplicada tecnologia suficiente para junção dos componentes adequados do sistema como em qualquer máquina.

Os geradores, ou equipamentos de conversão eletromecânica, entram no sistema com duas possíveis finalidades definidas: fornecer energia para uma rede de eletrificação, geralmente como uma alternativa secundária à rede existente, ou carregar baterias para diversas formas de uso (APPIO, 2001).

O rotor é composto pelas pás, eixo e caixa de engrenagens para transmissão do movimento de rotação para o gerador. As pás de um rotor de eixo horizontal são objetos de estudos de aerodinâmica para a otimização de seu emprego de aerogeradores. Em números de uma, duas, três, ou mais, as pás são elementos aerodinâmicos projetados para produzir forças de sustentação elevadas e pequenas forças de arrasto (APPIO, 2001).

Uma turbina eólica capta uma parte da energia cinética do vento que passa através da área varrida pelo rotor e a transforma em energia elétrica (Cepel, 2001). A potência elétrica é função do cubo da velocidade do vento v :

$$P(\text{Watts}) = \frac{1}{2} \rho A_r v^3 C_p \eta$$

- ρ = densidade do ar em kg/m^3
- $A_r = \pi D^2/4$, em que D é o diâmetro do rotor
- C_p = coeficiente aerodinâmico de potência do rotor
- η = eficiência do conjunto gerador/transmissão

O processo de geração de energia ocorre de forma bem controlada e estratégica. A absorção de energia cinética reduz a velocidade do vento a jusante do disco do rotor; mas essa velocidade se recupera com o tempo. A distância ideal para instalar outra turbina é de 10 vezes o diâmetro do rotor. A rotação do rotor diminui com o aumento do diâmetro, o que reduz o ruído e facilita a visibilidade das pás para os pássaros. A fórmula prática da rotação é $\text{rpm} = 1150/D$. As turbinas modernas giram devagar (15 a 30 rpm) e geram pouco impacto ambiental.

No Brasil existem grandes regiões, como o litoral nordestino, que apresentam velocidades de vento estimadas superiores a 7 m/s a 50 metros de altura, o que possibilita que projetos eólicos se tornem tecnicamente viáveis e economicamente mais atrativos para o aproveitamento em larga escala, principalmente em aplicações conectadas a rede (DUTRA, 2007) (SÁ, 2001).

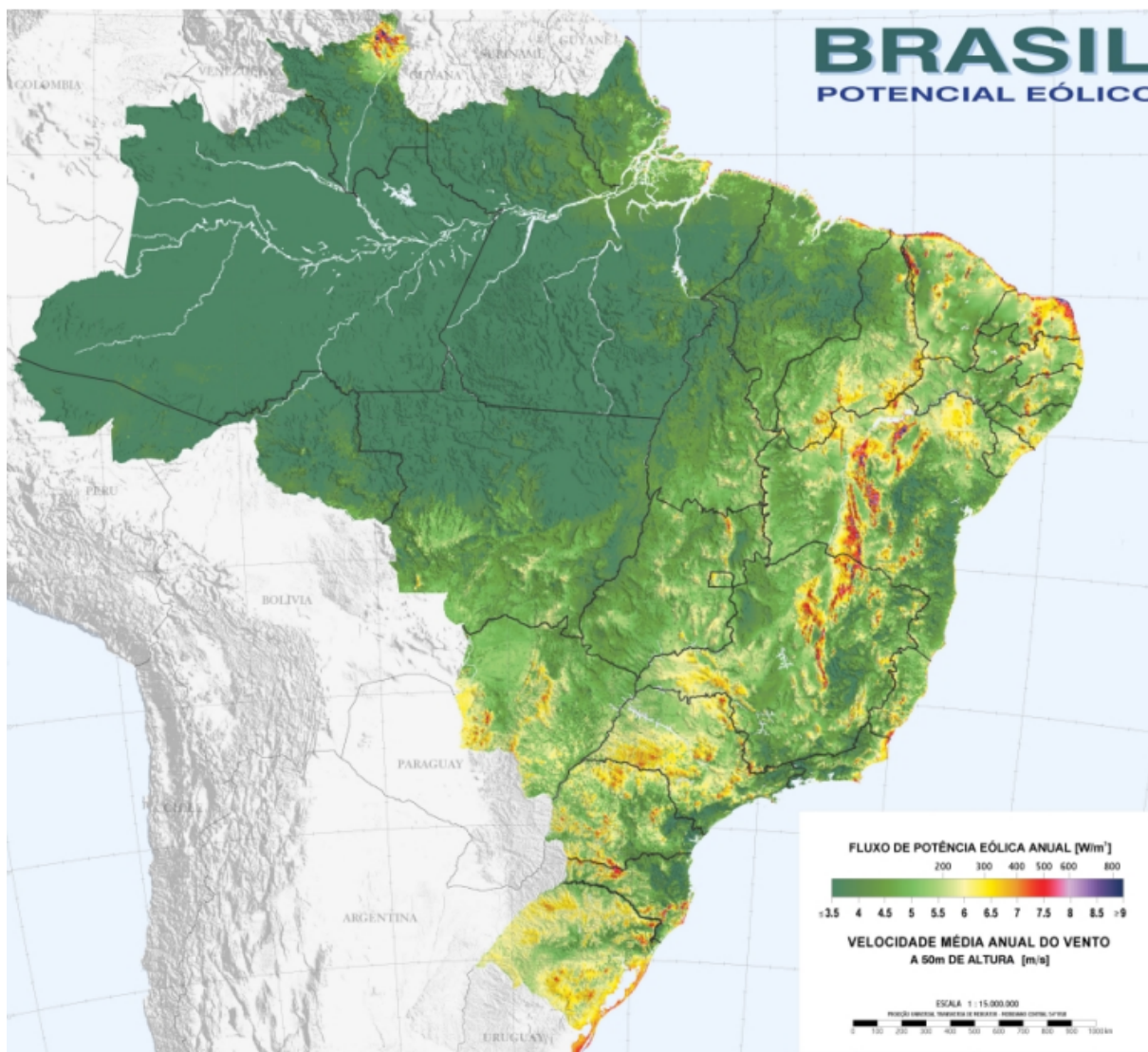


Figura 3.7 – Mapa de velocidade média de vento e fluxo de potência eólica anual do Atlas do Potencial Eólico Brasileiro (CEPEL, 2001).

Segundo dados divulgados pela EPE no relatório de 2024, a produção de eletricidade a partir da fonte eólica alcançou 95,8 TWh em 2023, equivalente a um aumento de 17,4% em relação ao ano anterior, quando se atingiu 81,6 TWh. Em 2023, a potência instalada para geração eólica no país expandiu 20,7%. Segundo o Banco de Informações da Geração (SIGA), da Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL), o parque eólico nacional atingiu 28.664 MW ao final de 2023.

No Brasil, a região nordeste se destaca devido ao grande potencial de geração de energia, fruto dos fortes ventos propícios da região. Segundo o portal virtual da Associação Brasileira de Energia Eólica (ABEEÓLICA, 2017), a maior parte destas usinas está instalada no Nordeste brasileiro, com destaque para o Estado do Rio Grande do Norte, que é líder em geração de energia eólica do Brasil, respondendo por cerca de 27%, 94 % da energia eólica produzida no país (3,446 GW), tornando o estado autossuficiente, ou seja, tem capacidade de atender ao consumo interno, assim como de exportar parte da energia gerada.

Região	2016		2017		% de crescimento
	Geração (TWh)	Representatividade	Geração (TWh)	Representatividade	
Sudeste	0,07	0,2%	0,08	0,2%	13%
Sul	4,83	15,1%	5,84	14,4%	21%
Nordeste	21,17	84,7%	33,99	84,0%	25%
Norte	--	--	0,55	1,4%	--%
Total	32,07	100%	40,46	100%	26,2%

Figura 3.8 – Geração e representatividade da fonte eólica: CCEE/ABEEólica (2017)

Apesar de superar as expectativas, o crescimento da energia eólica ainda é considerado baixo, tendo em vista a falta de políticas de incentivo ao longo dos anos. O potencial já foi demonstrado, nota-se claramente que novos parques estão sendo instalados e a porcentagem de composição da matriz tende a crescer, no entanto, faz-se necessários regulamentações, pesquisas e incentivos que possam agregar à temática, proporcionando um entendimento maior acerca dos desafios, benefícios e consequências da implementação das turbinas eólicas.

O potencial eólico é crescente e de excelência, mas é necessário reconhecer que a construção dos parques eólicos também traz malefícios, como os ruídos das turbinas eólicas, por exemplo. Segundo Ilda(1995), o ruído é uma mistura complexa de diversas vibrações, medido em uma escala logarítmica em uma unidade chamada decibel (dB).O ruído gerado por aerogeradores tem sido um dos impactos ambientais mais estudados da tecnologia (EWEA, 2009).

3.4 O RUÍDO COMO QUESTÃO DE SAÚDE PÚBLICA

O ruído é um problema que tem assolado a sociedade e trazido consequências graves à curto, médio e longo prazo. Apesar dos estudos mais atuais comprovarem os sintomas e a existência de doenças vibroacústica, a previsão de ocorrência já existia desde o início do século passando, quando ganhador do Prêmio Nobel de Fisiologia, Robert Kock, previu que um dia o homem terá que lutar contra o ruído assim como lutou contra a cólera e a peste. Afirma Araújo (2007) que o ruído é um poluente invisível, o qual lentamente vai agredindo os indivíduos, causando-lhes danos tanto auditivos, psíquicos e em todo o organismo.

A energia eólica apresenta grande potencial, mas um problema que acaba se tornando muito relevante em relação à instalação dos parques eólicos é o ruído emitido pelas pás, ocasionados pelo contato com o vento. Segundo Ilda (1999), fisicamente, o ruído é uma mistura complexa de diversas vibrações, medido em uma escala logarítmica, em uma unidade chamada de decibel (dB), podendo se destacar três características principais, que são a frequência, a intensidade e a duração.

A capacidade de um som causar dano não depende apenas de seu nível, mas também do tempo de exposição a ele. Sendo assim, uma exposição prolongada a ruídos, mesmo que não sejam extremamente altos, pode ser mais prejudicial do que uma exposição curta a um som de alta intensidade. A Organização Mundial da Saúde (OMS) define o limite de 65 dB como tolerável ao ouvido humano. O ruído dos aerogeradores, especificamente, caracteriza-se por ser um zumbido constante, mesmo que não seja excessivamente alto, o que gera o incômodo. Um ruído constante de 43 dB(A) já é suficiente para causar perturbação.

A exposição contínua ao ruído pode levar a uma série de problemas de saúde, que vão muito além da perda auditiva. Estudos registraram que pessoas expostas ao ruído de parques eólicos relatam distúrbios do sono, náuseas, dores de cabeça, zumbidos, tonturas, taquicardia, irritabilidade e problemas de concentração e memória. Segundo o Ministério do Trabalho do Brasil, as manifestações incluem alteração da qualidade do sono, modificação da frequência cardíaca, sudorese, reações musculares, problemas gastrointestinais, lesões nos rins e fígado, aumento na produção de hormônios como a adrenalina, queda da resistência a doenças e disfunções no sistema reprodutor. Recentemente, pesquisas realizadas pela Fundação Oswaldo Cruz e pela Universidade de Pernambuco identificaram a existência de uma doença vibroacústica específica, a Síndrome da Turbina Eólica, causada pela exposição prolongada aos ruídos e infrassons (sons de baixa frequência) dos aerogeradores.

O aumento no número de reclamações da população devido ao incômodo gerado pelo ruído demonstra que este é um problema crescente. Em resposta, diversas cidades brasileiras, como Fortaleza e João Pessoa, já lançaram suas cartas acústicas para mapear e monitorar a poluição sonora, buscando propor soluções equilibradas.

3.5 LEGISLAÇÃO ACERCA DO RUÍDO

Para tentar reduzir os problemas gerados por níveis excessivos de ruído, legislações nacionais e internacionais têm estabelecido limites sonoros para diversas atividades, visando garantir a segurança e o conforto da comunidade.

No Brasil, não há uma normativa específica que aborde exclusivamente o problema do ruído em parques eólicos. Por essa razão, aplica-se a norma ABNT NBR 10151, que estabelece limites de pressão sonora para diferentes tipos de áreas habitadas e períodos (diurno e noturno). Para áreas rurais, onde os parques eólicos são geralmente instalados, os limites definidos pela norma são de 40 dB(A) para o período diurno e 35 dB(A) para o noturno. No entanto, a NBR 10151 é uma norma de caráter geral e não leva em consideração a natureza dinâmica do ruído dos aerogeradores, que é diretamente influenciado pela velocidade do vento. Simulações mostram que um parque eólico pode ou não respeitar a norma dependendo da velocidade do vento, ultrapassando os limites permitidos quando os ventos atingem 5 m/s, por exemplo. Há ainda a Resolução CONAMA nº 462 de 2014, que estabelece critérios para o licenciamento ambiental de parques eólicos, exige que a distância mínima entre um aerogerador e qualquer residência

seja de 400 metros. Contudo, estudos e simulações demonstram que, mesmo respeitando essa distância, a maioria das residências em um parque eólico pode estar exposta a valores de ruído superiores aos recomendados pela NBR 10151.

Algumas cidades, como Fortaleza, já reconhecem a necessidade de mapeamento de ruído afim de estabelecer limites de acordo com o nível do ruído. A Carta Acústica de Fortaleza, criada com o objetivo de mapear e monitorar a poluição sonora, servindo como ferramenta de diagnóstico e definição de estratégias para o controle de ruídos e melhoria da qualidade de vida, funciona como um diagnóstico espacial detalhado dos níveis sonoros da cidade, sendo um instrumento essencial para o controle da poluição e a promoção do desenvolvimento sustentável.

A criação da carta evidencia a necessidade de mapeamento e identificação das principais fontes de ruído. As normas utilizam simulações tridimensionais para garantir que os dados geográficos reflitam fielmente a realidade do ambiente urbano, sendo capaz de oferecer uma base técnica sólida que subsidia a gestão ambiental, visando garantir a saúde e o bem-estar da população.

No âmbito legislativo, a iniciativa de um mapeamento de ruídos fortalece o ordenamento municipal ao fornecer fundamentos científicos para a aplicação de normas de emissão sonora e diretrizes de ocupação do solo. Os relatórios técnicos vinculados ao projeto analisam os resultados à luz dos critérios legais vigentes, permitindo que o poder público formule regulamentações mais eficazes e protetivas contra o ruído excessivo. Dessa forma, a Carta consolida estratégias de fiscalização e controle que integram o planejamento urbano às necessidades de proteção ambiental.

Internacionalmente, a abordagem varia. Diversos países europeus e agências ambientais estabeleceram distâncias mínimas recomendadas entre aerogeradores e residências, muitas vezes baseadas em critérios práticos e empíricos. Por exemplo, a Dinamarca e os Países Baixos recomendam uma distância de 4 vezes a altura da torre, enquanto a agência francesa ADEME sugere um afastamento mínimo de 250 a 500 metros. No Reino Unido, as distâncias recomendadas são ainda maiores, chegando a 1.500 metros para torres de 50 a 100 metros de altura. A Alemanha, por sua vez, adota limites de ruído que variam conforme o tipo de região, o que na prática resulta em distâncias de 300 a 1.500 metros. Essa diversidade de abordagens legislativas destaca a complexidade do tema e a busca contínua por um equilíbrio entre a geração de energia limpa e a proteção da saúde e qualidade de vida da população.

Modelagem do ruído

4.1 O RUÍDO DO PONTO DE VISTA FÍSICO

Do ponto de vista físico, o som é uma alteração mecânica que se propaga em torno de movimento ondulatório através de um meio elástico (OPAS, 1983). A frequência de um som é o número de flutuações ou vibrações por segundo e é expressa em hertz (Hz), subjetivamente percebida como altura do som. A intensidade do som depende da energia das oscilações e é definida em termos de potência por unidade de área. A duração do som é medida em segundos.

Por possuir diversos componentes mecânicos, é natural que a estrutura dos aerogeradores gere algum tipo de ruído. As formas de ruídos mais comumente encontrados nas estruturas de geradores eólicos são os ruídos mecânicos e os ruídos aerodinâmicos, na qual os ruídos mecânicos são oriundos do funcionamento das partes mecânicas, como engrenagens e rotores; e os ruídos aerodinâmicos são provenientes do funcionamento das pás em contato com o ar (ROGERS, MANWELL, WRIGHT, 2006).

O impacto sonoro, relatado em relação as turbinas eólicas, reside no fato de que, apesar de não ser tão alto, o zumbido produzido é constante. Segundo Barros (2000), a capacidade de causar danos à audição não depende somente do seu nível, mas depende também do tempo de exposição. Segundo Zannin (2013), o ruído pode ser compreendido como uma mistura de vibrações, medidas em uma escala logarítmica, e o mesmo pode produzir danos ao aparelho auditivo quando emitido acima do limiar da percepção dolorosa.

A Síndrome da Turbina Eólica manifesta-se como um desafio real e crescente, visto que o ruído, poluente invisível, agride o organismo de forma multissistêmica. Essas patologias vibroacústicas geram um impacto populacional significativo, contribuindo diretamente para a sobrecarga das redes do Sistema Único de Saúde (SUS).

Investigações acadêmicas são o pilar para assegurar que a geração de energia não ocorra em detrimento da qualidade de vida. O mapeamento sonoro é essencial para antecipar situações de perturbação e propor distanciamentos que protejam o bem-estar humano. Para Zannin (2013), o avanço científico permite equilibrar a expansão eólica com normas mais consistentes e protetivas à saúde.

De acordo com SILVA(2015), a unidade de medida da intensidade do som é o Decibel (dB), em que se considera a unidade (1 dB) como o valor correspondente ao som mais baixo que o ouvido humano consegue detectar. Por esse fato, 10 dB correspondem a um som 10 vezes mais intenso que 1 dB, 20 dB 100 vezes mais intenso, 30 dB 1000 vezes e assim sucessivamente. Assim sendo, uma exposição de um minuto a 100 dB (A) não é tão prejudicial quanto uma de 60 minutos a 90 dB (A).

De acordo com o Ministério do trabalho (2001), as manifestações mais importantes encontradas em seres humanos expostos ao ruído são: alteração da qualidade do sono; alteração da percepção e da compreensão de fala; modificação da frequência cardíaca acompanhada de sudorese; diminuição da capacidade de desempenho de tarefas psicomotoras; reação muscular; contração do abdômen e do estômago; alteração da função intestinal; lesões teciduais dos rins e do fígado; aumento da produção de hormônios da tireoide e da produção de adrenalina; aumento da produção de corticotrofina; queda da resistência a doenças infecciosas; disfunção no sistema reprodutor; contração dos vasos sanguíneos; dilatação das pupilas; irritabilidade; ansiedade e insônia.

Silva (2009) diz que a poluição sonora e sua consequente influência sobre o meio ambiente e sobre a qualidade de vida dos seres humanos têm sido alvo de várias pesquisas em diversas partes do mundo. As doenças vibroacústica tem ganhado sua importância devido ao alto impacto populacional, contribuindo para a sobrecarga do sistema único de saúde (SUS) e afetando a qualidade de vida das pessoas. Zannin (2013) aponta que o número de reclamações por parte da população devido ao incômodo gerado pelo ruído tem aumentado com o passar dos anos, o que demonstra uma tendência de crescimento deste problema.

Pessoas que moram próximas aos locais onde foram instaladas turbinas eólicas relatam os malefícios e consequências vividas devido ao ruído. Fé (2009) mostra que com o objetivo de tentar reduzir os problemas gerados por níveis excessivos de ruído, legislações nacionais e internacionais têm estabelecido limites sonoros para diversas atividades de modo a garantir a segurança e o conforto da comunidade.

O impacto sonoro, a ser analisado, causado pelos aerogeradores é decorrente do som do vento que bate nas pás, produzindo um ruído constante 43dB(A) . A legislação atual diz que as habitações mais próximas deverão estar, no mínimo a 200 m de distância (TOLMAS-QUIM, 2003), no entanto, em alguns casos de turbinas já instaladas, não houve o cuidado com a distância, o que tornou-se uma perturbação para os moradores locais que buscam fugir da doença ocasionada pelos ruídos. As pesquisas estão avançando, e estudos recentes realizados pela Fundação Oswaldo Cruz e pela Universidade de Pernambuco apontam a existência de uma doença vibroacústica, causada pela exposição prolongada aos ruídos e infrassons, chamada Síndrome da Turbina Eólica.

Os problemas ocasionados por ruídos são reais e latentes, sendo caso de saúde pública e causando impacto negativo na população. Visando mapeamento e monitoramento da poluição sonora, trazendo a tona o problema e propondo soluções equilibradas, algumas cidades, como

Fortaleza e João Pessoa, lançaram suas cartas acústicas, identificando os ruídos e propondo uma resolução.

A modelagem do ruído sonoro proposto nessa pesquisa propõe uma análise matemática utilizando métodos numéricos computacionais que sejam capazes de calcular a pressão sonora e analisar os erros encontrados, demonstrando a importância do método para obtenção de resultados matemáticos quando estes não podem ser encontrados na forma analítica.

4.2 MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

Nachbin e Tabak (1997) afirmam que a base da modelagem matemática e computacional é transformar problemas descritos em linguagem comum em linguagem matemática, e depois fazer o caminho de volta. Para isso, ao resolver um problema de matemática aplicada é preciso analisar algo como um "tradutor simultâneo". Esse processo envolve escolher e formular hipóteses ligadas à física, química ou biologia que sejam importantes para o problema. De acordo com a definição apresentada por Bassanezi (2014, p.24), entende-se que:

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências (...) consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas em linguagem usual.

A transição do modelo físico, através das suposições sobre a natureza do problema, para o modelo matemático, o objeto matemático que o representa, é proposto através de uma análise investigativa e interpretativa. A escolha da melhor formulação matemática depende fortemente do contexto do problema (Nachbin e Tabak, 1997).

Um modelo matemático é uma representação da realidade através de equações e expressões matemáticas. Muitos preceitos que regem o comportamento do mundo físico são modelos matemáticos que envolvem a taxa de variação segundo a qual as coisas acontecem. Expressas em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações funcionais contendo derivadas são chamadas equações diferenciais. De modo geral, toda equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, chama-se equação diferencial.

A necessidade de se resolver problemas cujas modelagens resistiam às técnicas analíticas impulsionou o estudo e aplicação de técnicas numéricas avançadas que buscassem substituir a solução analítica por aproximações extremamente eficientes (BOYCE; DIPRIMA, 2017). Atualmente, sabe-se que a solução de uma equação diferencial pode ser de diferentes tipos, incluindo modelos analíticos, com solução exata; modelos numéricos, com solução aproximada; e modelos qualitativos, com análise do comportamento geométrico das soluções e os aspectos das curvas integrais descritos por meio de campos de direções (BOYCE; DIPRIMA, 2017; KREYSZIG, 2013).

Os fundamentos dessas abordagens remontam ao desenvolvimento histórico do Cálculo Diferencial no século XVII, especialmente aos trabalhos de Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, cujas contribuições estabeleceram as bases teóricas para a formulação e resolução das equações diferenciais (ROCHA, 2002; BOYCE; DIPRIMA, 2017; KREYSZIG, 2013). A formulação matemática das leis da mecânica por Newton, particularmente a segunda lei do movimento, constitui um dos exemplos clássicos de modelagem por meio de equações diferenciais (ROCHA, 2002; BOYCE; DIPRIMA, 2017).

Além disso, o desenvolvimento de métodos para classificação e resolução de equações diferenciais de primeira ordem, bem como técnicas como separação de variáveis, redução de equações homogêneas e resolução de equações lineares, foi posteriormente ampliado por estudiosos como Leibniz e os membros da família Bernoulli (ALITOLEF, 2011; SIMÕES, 2014; ALBRECHT et al., 2014). Tais contribuições históricas consolidaram as bases metodológicas que, atualmente, sustentam tanto os métodos analíticos quanto os numéricos empregados na resolução de equações diferenciais (BOYCE; DIPRIMA, 2017; KREYSZIG, 2013).

Com o objetivo de solucionar equações diferenciais que envolvam problemas reais, surgem os métodos numéricos, definidos por Cherri et al. (p. 2) como um conjunto de regras escritas sob a forma de uma sequência de operações elementares (soma, adição, multiplicação e divisão) que levam a uma solução do problema. A esse conjunto de regras denomina-se algoritmo. Os métodos e técnicas computacionais são cada vez mais explorados na resolução de problemas reais, principalmente quando as soluções manuais são inviáveis ou muito custosas em relação ao tempo de execução.

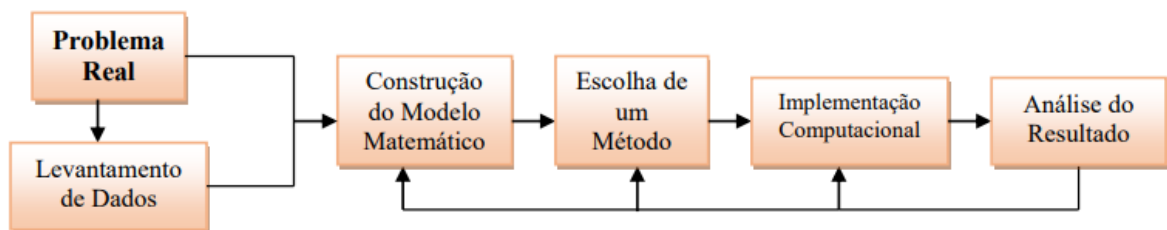


Figura 4.1 – Métodos Numéricos Computacionais - Departamento de computação - Unesp

O avanço da tecnologia computacional, aliado à crescente demanda por soluções de problemas considerados complexos, impulsionou o desenvolvimento dos métodos numéricos. A principal característica desses métodos é transformar um problema contínuo, que envolve um número infinito de variáveis, em um problema discreto, com número limitado de variáveis, permitindo assim a sua resolução por meio de recursos computacionais.

A modelagem matemática e computacional é amplamente utilizada para resolver equações diferenciais. Essas equações surgiram no século XVII, impulsionadas pelos estudos em cálculo desenvolvidos por Isaac Newton (1642–1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), considerados os pioneiros nesse campo. Muitos dos princípios e leis que regem o comporta-

mento do mundo físico em diversas áreas, como engenharia, física e biologia, são frequentemente formulados em termos de equações diferenciais. Essas equações, que envolvem funções incógnitas e suas derivadas, são ferramentas poderosas para descrever fenômenos dinâmicos, desde o movimento de um pêndulo simples até a propagação de ondas sonoras ou o transporte de poluentes. Elas representam a taxa de variação na qual as coisas acontecem, tornando-as indispensáveis na modelagem matemática.

4.3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Uma equação diferencial é definida como uma equação que envolve uma função e algumas de suas derivadas, sendo do tipo:

$$y^{(n)}(x) = f[x, y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)] \quad (4.1)$$

As equações diferenciais podem ser classificadas de três modos. O primeiro é considerando o número de variáveis independentes, o segundo leva em consideração a ordem de derivada de maior ordem contida na equação e a terceira a linearidade.

Podem ser classificadas como Equações diferenciais ordinárias, quando possuem apenas uma variável independente

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (4.2)$$

e como equações diferenciais parciais, quando possuem mais de uma variável independente

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \quad (4.3)$$

As equações diferenciais podem ainda ser classificada de acordo com o grau e ordem. A ordem de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada que ocorre na equação e o grau de uma equação diferencial é o expoente da derivada de mais alta ordem que aparece na equação.

A terceira classificação é de acordo com a condição de linearidade. Pode ser considerada linear quando a única potência permitida para a variável dependente e suas derivadas é 1 e os coeficientes da variável dependente e suas derivadas só podem ser funções das variáveis independentes.

Na proposta inicial, as equações diferenciais foram aplicadas para resolver problemas oriundos da Geometria e da Mecânica. Na última década do século XVII, os pesquisadores Newton, Leibniz e os irmãos Bernoulli aprofundaram-se nas pesquisas dessas equações, contribuindo significativamente para seu desenvolvimento. Com o tempo, os estudiosos perceberam que encontrar soluções analíticas para essas equações era uma tarefa complexa, o que levou à

criação de métodos numéricos como alternativas para resolver tais problemas.

4.3.1 MÉTODO NUMÉRICOS E SEUS AVANÇOS

Apesar de sua importância histórica, as soluções analíticas são limitadas a problemas ideais. Quando as condições iniciais ou de contorno são complexas, torna-se inviável obter expressões fechadas para a solução. Para contornar essas limitações, surgiram os métodos numéricos que fornecem soluções aproximadas. Técnicas como diferenças finitas e elementos finitos passaram a ser fundamentais no estudo aplicado de equações diferenciais parciais.

O ponto de partida do surgimento dos métodos numéricos, o Método de Euler, também conhecido como método da reta tangente, baseia-se na ideia de que uma reta tangente pode aproximar os valores de uma função em uma pequena vizinhança do ponto de tangência.

Seja a solução de uma equação diferencial do tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

com valor inicial $y(x_0) = y_0$.

A solução desta equação resulta numa função $y(x)$, como mostrado no gráfico:

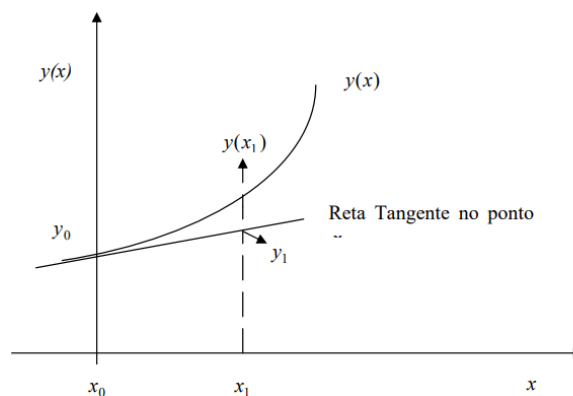


Figura 4.2 – Gráfico da reta tangente
Fonte: Lobão (2017)

A partir da equação $h = x_1 - x_0$ observa-se que a derivada da função $y(x)$ em um ponto qualquer x é dada por $f(x, y)$. Conhecendo-se a derivada da função $y(x)$ no ponto x_0 , ou seja $[f(x_0, y_0)]$, pode-se estimar o valor da função $y(x)$ no ponto x_1 por meio de relações trigonométricas:

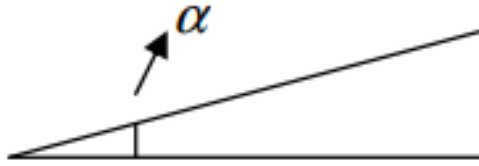


Figura 4.3 – Fonte: Lobão (2017)

$$h = x_1 - x_0 \quad \Delta y = y_1 - y_0$$

$$\tan(\alpha) = f(x_0, y_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \Rightarrow f(x_0, y_0) = \frac{y_1 - y_0}{h} \Rightarrow y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

Esta relação pode ser generalizada para um ponto i qualquer, resultando na forma de recorrência para solução de equações diferenciais pelo Método de Euler:

$$y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

Geometricamente, dada uma EDO de primeira ordem, $y' = f(t, y)$, com uma condição inicial $y(t_0) = y_0$, o método usa a inclinação $f(t_0, y_0)$ para estimar o próximo ponto $y_1 = y_0 + h * f(t_0, y_0)$, onde h é o tamanho do passo. Este processo é repetido sucessivamente, gerando uma solução numérica poligonal.

A simplicidade do Método de Euler é seu principal atrativo, mas ele exige um grande número de cálculos para obter boas aproximações, o que pode tornar os cálculos impraticáveis ou inúteis devido à acumulação de erros. Os erros decorrentes de métodos numéricos são de duas naturezas: erros de arredondamento (causados pela aritmética de precisão finita dos computadores) e erros de truncamento (causados pela técnica de aproximação utilizada). O Método de Euler é de primeira ordem de convergência ($p=1$), o que significa que o erro absoluto diminui linearmente com h .

A busca por soluções mais precisas levou ao desenvolvimento de métodos que melhoravam a estimativa da inclinação dentro de cada passo. O Método de Euler Melhorado (também conhecido como Método de Heun) surgiu com essa finalidade. Em vez de usar apenas a inclinação no início do intervalo, ele considera uma média entre a inclinação no ponto inicial e uma inclinação estimada no ponto final do passo, utilizando uma previsão de Euler para o ponto final. Essa abordagem resultou em uma ordem de convergência de segunda ordem ($p=2$), proporcionando uma aproximação significativamente melhor com o mesmo tamanho de passo h .

O conceito por trás do Método de Euler Melhorado abriu caminho para uma família mais ampla e sofisticada de métodos: os Métodos de Runge-Kutta (RK). Nomeados em homenagem aos matemáticos alemães Carl David Runge (1856-1927) e M. Wilhelm Kutta (1867-1944), que fizeram contribuições significativas para sua teoria e aplicações no início do século XX. Esses métodos são construídos a partir de expansões em série de Taylor, mas com a vantagem de evitar o cálculo explícito de derivadas de alta ordem da função $f(t,y)$, o que seria computacionalmente caro e complexo. Em vez disso, eles usam múltiplas avaliações da função f dentro de cada passo, combinando-as de forma ponderada para atingir ordens de precisão mais elevadas.

O Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem (RK4) é um dos mais populares e eficientes na prática. Ele calcula quatro inclinações (k_1, k_2, k_3, k_4) dentro do intervalo h , que representam avaliações da função f no início, no meio e no final do passo, e então as combina para produzir uma estimativa y_{n+1} com quarta ordem de convergência ($p=4$). Os métodos de Euler e Euler Melhorado são, na verdade, casos específicos da família Runge-Kutta, sendo o Euler de primeira ordem e o Euler Melhorado de segunda ordem.

Enquanto os métodos de Euler e Runge-Kutta são métodos de passo simples (utilizando informações de um único ponto anterior para calcular o próximo), a evolução dos métodos numéricos também levou ao desenvolvimento de métodos de passos múltiplos. Esses métodos aproveitam informações de mais de um ponto anterior (ou seja, y_n, y_{n-1}, y_{n-2} , etc.) para calcular o próximo ponto (y_{n+1}), o que pode levar a uma maior eficiência computacional para a mesma ordem de precisão. Os métodos de passos múltiplos são categorizados em explícitos e implícitos.

Os métodos explícitos (como os da família Adams-Bashforth) calculam y_{n+1} diretamente a partir de pontos anteriores. Por exemplo, o Adams-Bashforth de segunda ordem utiliza f_n e f_{n-1} .

Os métodos implícitos (como os da família Adams-Moulton) envolvem a solução de uma equação (geralmente não linear) para y_{n+1} , pois f_{n+1} também depende de y_{n+1} . Eles são frequentemente usados em conjunto com métodos explícitos em um esquema previsor-corretor, onde um método explícito fornece uma estimativa inicial, que é então refinada por um método implícito para maior precisão.

Um desafio comum aos métodos de passos múltiplos é a necessidade de vários valores iniciais para começar o processo iterativo. Esses valores, além da condição inicial $y(t_0) = y_0$, são geralmente obtidos usando um método de passo simples de alta ordem, como um Runge-Kutta.

É perceptível através da análise da evolução dos métodos numéricos que os avanços no campo de estudo das equações diferenciais permitiram técnicas que se aproximavam cada vez mais da solução exata, permitindo a solução aproximada de forma satisfatória e com erros ínfimos. Nas últimas décadas, o crescimento do poder de processamento dos computadores revolucionou a modelagem matemática. Problemas que antes exigiam meses de cálculos manuais hoje podem ser resolvidos em questão de minutos.

A classificação de uma equação pode ser essencial para saber qual método numérico é

mais adequado na sua resolução. Quando se trata de uma Equação Diferencial Parcial Linear de Segunda Ordem, por exemplo, os estudos acerca das equações diferenciais parciais permitiram classificá-las de três maneiras, sendo elas: Elípticas, Parabólicas e Hiperbólicas. , com duas variáveis independentes:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + d \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial u}{\partial y} + pu = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

A classificação depende do Sinal do Discriminante e os nomes são por analogia com as seções cônicas:

$$\begin{cases} b^2 - 4ac < 0 & \text{EDP Elíptica} \\ b^2 - 4ac = 0 & \text{EDP Parabólica} \\ b^2 - 4ac > 0 & \text{EDP Hiperbólica} \end{cases}$$

A classificação das equações diferenciais parciais em elípticas, parabólicas e hiperbólicas não é apenas teórica. Cada tipo está associado a fenômenos específicos da natureza, permitindo escolher métodos adequados de resolução, sendo capaz de determinar a escolha dos métodos numéricos mais adequados para sua resolução. As Equações Diferenciais Parciais Elípticas, como a Equação de Poisson (ou Laplace), modelam fenômenos de estado estacionário, como a distribuição de tensões em placas, a distribuição de temperatura em regime permanente e o potencial gerado por cargas elétricas. Para estas, o método de Diferenças Finitas pode ser empregado, convertendo o problema em um sistema linear de equações, resolvido tipicamente por cálculo matricial.

As Equações Diferenciais Parciais Parabólicas, como a Equação do Calor (ou da difusão), descrevem problemas de evolução onde uma das variáveis é o tempo, como a condução de calor. Nesses casos, a variável tempo requer um tratamento diferenciado das variáveis espaciais. Métodos como as Diferenças Progressivas (explícito) e Diferenças Regressivas (implícito), ou o Método de Crank-Nicolson, são utilizados. A escolha depende de considerações de estabilidade, sendo os métodos implícitos frequentemente preferíveis por sua estabilidade incondicional.

As Equações Diferenciais Parciais Hiperbólicas, como a Equação da Onda, modelam a propagação de ondas (acústicas, aquáticas, eletromagnéticas) e vibrações mecânicas. Para estas, métodos explícitos de Diferenças Finitas são aplicados, também com atenção à estabilidade do método.

Subtende-se que classificação das EDPs orienta a escolha dos métodos numéricos porque as características estruturais de cada tipo de equação refletem a natureza do problema físico que elas representam, exigindo abordagens computacionais específicas para garantir a precisão, estabilidade e eficiência da solução. Apesar dos avanços, ainda existem desafios na área de mo-

delagem computacional. Entre eles destacam-se a precisão dos cálculos, o custo computacional e a estabilidade dos algoritmos utilizados.

Uma das propriedades mais básicas de um método numérico para aproximar soluções de uma equação diferencial é a precisão. A estabilidade em métodos numéricos é uma propriedade fundamental que garante que pequenas perturbações não causem grandes desvios na solução aproximada, assegurando que esta permaneça limitada e se comporte de forma razoável ao longo do tempo.

Um método numérico é considerado estável se, ao ser aplicado a um Problema de Valor Inicial (PVI), a diferença entre duas soluções numéricas geradas a partir de condições iniciais ligeiramente distintas é limitada por uma constante multiplicada pela diferença nas condições iniciais originais. Em termos mais simples, a estabilidade impede que erros de arredondamento ou de dados iniciais sejam amplificados, fazendo com que a solução numérica permaneça previsível e limitada.

A estabilidade é um dos três conceitos básicos, juntamente com a consistência e a convergência, interligados pelo Teorema de Equivalência de Lax. Este teorema afirma que, para um PVI bem-posto, um método numérico consistente é convergente se, e somente se, for estável. Isso significa que a busca por um método convergente depende diretamente de sua consistência e estabilidade.

A busca pelo refinamento de métodos numéricos é totalmente justificada tendo em vista que a essência do aperfeiçoamento é, portanto, desenvolver ferramentas robustas e teoricamente fundamentadas que garantam soluções confiáveis, expandam a capacidade de resolução de problemas, otimizem o desempenho computacional e aprimorem o entendimento de fenômenos físicos complexos.

4.4 O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O avanço dos métodos computacionais propiciou a formulação do método das diferenças finitas, que tem suas raízes no desenvolvimento da série de Taylor, e representa uma função contínua por meio de um polinômio em torno de um ponto específico. A partir dessa expansão, percebe-se que, ao truncar a série, é possível aproximar derivadas de uma função em termos de combinações lineares de seus valores em pontos vizinhos discretos. Essa ideia constitui o fundamento das diferenças finitas, permitindo a transição de problemas contínuos para formulações numéricas aplicáveis em malhas discretas.

O Método das Diferenças Finitas é uma das técnicas numéricas mais utilizadas na solução de equações diferenciais parciais, especialmente em problemas que exigem modelagem computacional para obter soluções aproximadas. Esquemas de diferenças finitas foram utilizados pela primeira vez por Leonhard Euler, no século XVIII, para encontrar soluções aproximadas das equações diferenciais, técnica conhecida como método de Euler (Brannan & Boyce, 2008).

O objetivo do método das diferenças finitas é transformar um problema composto por equações diferenciais em um problema formado por equações algébricas.

Segundo Franco (2012), o método das diferenças finitas visa discretizar o domínio e substituir as derivadas presentes na equação diferencial por aproximações que envolvem apenas valores numéricos da função. Discretizar o domínio significa dividir a região contínua do problema em um conjunto finito de pontos. Em seguida, as derivadas presentes na equação diferencial são substituídas por expressões que utilizam diferenças finitas entre os valores da função nesses pontos. Na aproximação, o método é visivelmente eficaz, mas tem como fator negativo a instabilidade.

No processo de discretização, o domínio contínuo da equação diferencial (seja ele espacial ou temporal) é dividido em uma malha de pontos discretos, geralmente igualmente espaçados. Isso é feito definindo um "passo" (h para EDOs, ou x e t para EDPs). A escolha da malha e do método de discretização representa um balanço crítico entre a precisão desejada, a estabilidade numérica e a eficiência computacional, com o objetivo de obter uma solução numérica que reflita fielmente o comportamento físico do problema.

No caso da primeira derivada, as diferenças finitas apresentam três formulações clássicas se destacam: diferenças progressivas, que utilizam o ponto atual e pontos futuros; diferenças regressivas, que consideram o ponto atual e pontos anteriores; e diferenças centrais, que fazem uso de pontos simetricamente distribuídos ao redor do ponto de interesse. Para a segunda derivada, a fórmula de diferenças centradas de segunda ordem é amplamente empregada, enquanto a série de Taylor é frequentemente utilizada como base para dedução de fórmulas aplicáveis a derivadas de ordens superiores.

A precisão da derivação numérica está diretamente relacionada à ordem de convergência do método. Aproximações centradas apresentam, em geral, maior exatidão por serem de segunda ordem, com erro proporcional a $O(h^2)$, enquanto as aproximações progressivas e regressivas possuem ordem inferior, com erro proporcional a $O(h)$. O desempenho desses métodos é afetado por dois tipos de erros principais: o erro de truncamento, que decorre da diferença entre a solução exata e a aproximação numérica, e o erro de arredondamento, que está associado às limitações da aritmética computacional. Embora a redução do passo h diminua o erro de truncamento, intervalos excessivamente pequenos podem aumentar o erro de arredondamento, comprometendo a qualidade da solução.

Os métodos de diferenças finitas (MDF) consolidaram-se a partir da década de 1940 como ferramentas versáteis e eficientes para a resolução de equações diferenciais parciais. O MDF clássico, que se baseia em aproximações centradas para as derivadas de primeira e segunda ordem, apresenta desempenho satisfatório em situações de difusão dominante ou em cenários nos quais há equilíbrio entre convecção e difusão. Nessas condições, o erro em relação à solução analítica tende a ser reduzido, o que indica maior consistência. Contudo, esse método enfrenta desafios relevantes em casos onde a convecção é dominante, apresentando instabilidades e oscilações espúrias, além de dificuldades adicionais quando aplicado a geometrias

complexas e condições de contorno específicas.

O MDF do tipo upwind surgiu como uma alternativa para tratar problemas marcados pela convecção dominante. Esse método combina diferenças progressivas ou regressivas de primeira ordem para o termo convectivo com diferenças centradas de segunda ordem para o termo difusivo, sendo a escolha da direção dependente do sinal do campo de velocidade. Sua principal vantagem consiste na capacidade de reduzir ou eliminar oscilações espúrias ao introduzir uma difusão numérica artificial que suaviza a solução. Embora essa característica aumente a estabilidade, ela pode comprometer a precisão em problemas nos quais a convecção não desempenha papel dominante. Em cenários bidimensionais, o método reduz, mas não elimina completamente, as oscilações, podendo exigir ajustes adicionais como a normalização do domínio computacional.

A escolha entre diferentes métodos numéricos deve levar em consideração as características específicas do problema em análise. Em cenários de convecção dominante, o MDF upwind geralmente se mostra mais eficaz na atenuação de oscilações, apesar da difusão artificial introduzida. Já em situações de difusão predominante, os métodos centrados tendem a fornecer resultados mais consistentes e próximos da solução analítica. Dessa forma, não há um método universalmente superior, mas sim alternativas que devem ser cuidadosamente selecionadas a partir de critérios de estabilidade, precisão e custo computacional.

A ideia fundamental da derivação numérica é aproximar o coeficiente angular da reta tangente a uma função $f(x)$ em um ponto P pelo coeficiente angular de uma reta secante PQ , onde Q é um ponto próximo de P . Quanto menor a distância h entre P e Q , mais próxima a reta secante se torna da reta tangente, e, conseqüentemente, a aproximação da derivada se torna mais precisa.

Estrutura Matemática que Substitui Derivadas por Diferenças Finitas

A base matemática para substituir derivadas por diferenças finitas reside fundamentalmente no Teorema de Taylor. A expansão em série de Taylor permite aproximar o valor de uma função em um ponto próximo utilizando o valor da função e suas derivadas em um ponto conhecido. O erro decorrente dessa aproximação é conhecido como erro de truncamento.

O erro de truncamento local é da ordem $O(h^n)$, onde h é o espaçamento entre os pontos (tamanho do passo) e n é a ordem de precisão da aproximação.

1. Aproximação da Primeira Derivada

A definição da derivada de uma função $f(x)$ em um ponto P é dada por:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para a derivação numérica, em vez do limite, utiliza-se uma aproximação finita para o passo h (onde $h \neq 0$ e é um valor reduzido). Existem diversas fórmulas de diferenças finitas para aproximar a primeira derivada, classificadas em três tipos principais :

- **Fórmulas de Diferenças Progressivas (Forward):** Utilizam o ponto x_k e pontos à frente ($x_k + h, x_k + 2h$).

– Fórmula de primeira ordem:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + h) - f(x_k)}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{u(i+1) - u(i)}{h}$$

O erro de truncamento local para esta fórmula é da ordem $O(h)$.

- **Fórmulas de Diferenças Regressivas (Backward/Retroativas):** Utilizam o ponto x_k e pontos anteriores ($x_k - h, x_k - 2h$).

– Fórmula de primeira ordem:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_k - h)}{h} \quad \text{ou} \quad \frac{u(i) - u(i-1)}{h}$$

O erro de truncamento local para esta fórmula é da ordem $O(h)$.

- **Fórmulas de Diferenças Centradas:** Utilizam pontos equidistantes em torno de x_k ($x_k - h, x_k + h$).

– Fórmula de segunda ordem:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k + h) - f(x_k - h)}{2h} \quad \text{ou} \quad \frac{u(i+1) - u(i-1)}{2h}$$

Os esquemas centrados são geralmente mais precisos, com erro de truncamento da ordem $O(h^2)$.

A precisão do método aumenta à medida que h diminui e quanto mais pontos são utilizados na interpolação. No entanto, um h muito pequeno pode levar a um erro de arredondamento significativo .

2. Aproximação da Segunda Derivada

Similarmente à primeira derivada, as fórmulas para a segunda derivada podem ser deduzidas usando o polinômio interpolador ou, mais comumente, a série de Taylor.

- **Fórmula de Diferenças Centradas para a Segunda Derivada:**

$$f''(x_k) \approx \frac{f(x_k + h) - 2f(x_k) + f(x_k - h))}{h^2} \quad \text{ou} \quad \frac{u(i+1) - 2u(i) + u(i-1))}{h^2}$$

Esta é uma fórmula de diferenças centradas de segunda ordem, e seu erro de truncamento é da ordem $O(h^2)$.

3. Aproximação de Derivadas de Ordem Superior

O princípio de usar a série de Taylor pode ser generalizado para obter fórmulas de diferenças finitas para aproximar **derivadas de ordem superior**.

4. Aplicação na Discretização de Equações Diferenciais Parciais (EDPs)

O Método de Diferenças Finitas (MDF) é amplamente utilizado para discretizar EDPs em um domínio discreto equivalente ao domínio físico do problema. As derivadas parciais na EDP são substituídas por suas aproximações por diferenças finitas nos pontos da malha, transformando a EDP em um sistema de equações algébricas (ou equações de diferenças finitas - EDF) que pode ser resolvido computacionalmente.

Por exemplo, para a equação de Convecção Difusão em 1D:

$$-k \frac{d^2 u}{dx^2} + w \frac{du}{dx} = f(x)$$

Com condições de contorno de Dirichlet: $u(0) = 1$ e $u(1) = 0$ ou $u(0) = 0$ e $u(1) = 1$.

Ao aplicar aproximações por diferenças finitas (por exemplo, centradas para ambos os termos), a equação é discretizada em um sistema linear na forma $Au = f$. No caso 1D, a matriz de coeficientes resultante, A , é tipicamente tridiagonal esparsa. Para problemas 2D, a matriz se torna pentadiagonal esparsa.

Exemplos de Discretização de EDPs com MDF

- Equação de Convecção Difusão em 1D (Esquema Clássico/Centrado): Substituindo a segunda derivada por uma diferença centrada de 2ª ordem e a primeira derivada por uma diferença centrada de 1ª ordem [26]:

$$-k \frac{u(i+1) - 2u(i) + u(i-1))}{\Delta x^2} + w \frac{u(i+1) - u(i-1))}{2\Delta x} = f$$

- **Equação de Convecção Difusão em 1D (Esquema Upwind):** Utiliza diferença centrada de 2ª ordem para o termo difusivo e avançada/atrasada de 1ª ordem para o termo convec-

tivo, dependendo do sinal da velocidade w :

$$\begin{aligned} \text{Se } w > 0: & \quad -k \frac{u(i+1) - 2u(i) + u(i-1)}{\Delta x^2} + w \frac{u(i) - u(i-1)}{\Delta x} = f \\ \text{Se } w < 0: & \quad -k \frac{u(i+1) - 2u(i) + u(i-1)}{\Delta x^2} + w \frac{u(i+1) - u(i)}{\Delta x} = f \end{aligned}$$

O esquema Upwind introduz falsa dispersão numérica, gerando maior suavidade nas soluções aproximadas.

- Equação de Convecção Difusão em 2D (Esquema Clássico/Centrado): Utilizando diferenças centradas para todas as derivadas:

$$\begin{aligned} & -k \left[\frac{u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j)}{\Delta x^2} + \frac{u(i, j+1) - 2u(i, j) + u(i, j-1)}{\Delta y^2} \right] + \\ & w \left[\frac{u(i+1, j) - u(i-1, j)}{2\Delta x} + \frac{u(i, j+1) - u(i, j-1)}{2\Delta y} \right] = f \end{aligned}$$

É notório que o método de diferenças finitas é uma ferramenta poderosa que, através da substituição de derivadas por quocientes de diferenças finitas baseados na série de Taylor, permite transformar problemas diferenciais contínuos em sistemas algébricos discretos passíveis de solução computacional.

4.5 EQUAÇÃO DA ONDA

A equação da onda em uma única direção, objeto de estudo desta pesquisa, é uma equação diferencial parcial de segunda ordem. Nesse tipo de equação, a incógnita é uma função (variável dependente) de duas ou mais variáveis independentes, e aparecem derivadas parciais dessa função em relação a essas variáveis. É chamada de equação diferencial parcial justamente porque envolve derivadas parciais da função desconhecida. A ordem da equação é determinada pela ordem mais alta dessas derivadas presentes. Sendo assim, sua classificação leva em conta características como: linearidade, número de variáveis, tipo (elíptica, parabólica ou hiperbólica), e ordem da derivada mais alta.

Modelar uma onda sonora com o objetivo de analisá-la é uma tarefa simples, já que ao resolver a equação diferencial, ou um sistema de equações diferenciais, que caracteriza o processo de propagação da onda, pode-se prever o seu comportamento. Sendo assim, a modelagem de um sistema de propagação de onda em um conjunto de equações diferenciais fornecerá uma descrição aproximada e simplificada do processo real (THOMAS, 2013). A formulação que expressa a equação geral da onda, descrevendo a propagação da onda acústica em todas as direções, considerando que o meio possua uma densidade constante ou com poucas variações, é possível obter a equação:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = S(x, y, t).$$

Na expressão em questão, c é a velocidade de propagação do meio, p é o campo de pressão, t é o tempo, ∇ é o gradiente e $S(x, y, t)$ representa a fonte do ruído. De acordo com Saliba (2011), matematicamente o nível de pressão sonora é o que determina a intensidade do som e representa a relação do logaritmo entre a variação da pressão (p) provocada pela vibração e a pressão que atinge o limiar da audibilidade.

Através da modelagem matemática e computacional é possível analisar melhor o ruído e compreender características essenciais com o objetivo de prover melhor entendimento, tornando possível uma melhor análise em relação as leis e/ou minimizar o impacto sonoro.

Quando relacionada ao problema do ruído, é preciso que certas propriedades sejam observadas. O ruído é uma onda mecânica e as ondas constituem um dos principais campos de estudo da Física e suas aplicações são bastante significativas no mundo. Aplicar a modelagem nas ondas, torna visível como o problema pode ser facilmente.

Para compreender de forma mais precisa como o som se propaga e afeta o ambiente e o corpo humano, é necessário recorrer à modelagem matemática. Na matemática, o uso das equações diferenciais, especialmente as equações de onda, são bem utilizados na descrição do comportamento das vibrações sonoras no espaço e no tempo. A equação da onda em uma única direção é caracterizada como uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem e sua solução geral é composta pelo conjunto de funções $y(x, t)$ que satisfazem a igualdade na equação. As ondas mecânicas são as mais conhecidas por estarem presentes no cotidiano da sociedade, seja através da observação de uma onda do mar, audição de uma música e várias outras situações. Estas ondas dependem de um meio material para se propagarem e são governadas pelas leis de Newton. A equação da onda mecânica em uma única direção é dada por:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2}.$$

O nível de ruído vai depender da pressão sonora. O nível de pressão sonora corresponde à energia transmitida pelas vibrações, expressada em decibéis (dB). É justamente esse nível de vibração que afeta as pessoas e provoca as doenças vibroacústicas. A frequência de um som permite ao receptor distinguir a sua altura, representando o número de vibrações por segundo expressa em Hz. A Organização Mundial da Saúde (OMS) define o limite tolerável ao ouvido humano como sendo de 65 dB.

A análise da expressão vai ocorrer com a utilização de métodos numéricos, visando a obtenção de resultados por meios computacionais. O processo para obtenção de uma solução numérica inicia-se com a definição do problema físico, o qual é traduzido em uma modelagem matemática. A partir dessa modelagem, são formuladas as equações governantes que descrevem o comportamento do sistema. Em seguida, essas equações são submetidas a um processo de

discretização, convertendo-as em um sistema de equações algébricas. Esse sistema é então submetido à resolução das equações algébricas, resultando em uma solução aproximada. Essa solução é posteriormente submetida à análise e interpretação, possibilitando o ajuste do modelo, caso necessário, retornando à modelagem matemática para refinamentos.

Nesse estudo, o objetivo de modelar esse problema é verificar a eficiência e a estabilidade da solução numérica da equação da onda, utilizando o método das diferenças finitas. Uma solução numérica visa descrever o fenômeno físico com uma abordagem bastante simples e precisa, sendo possível indicar a variação da pressão. A ideia é alcançar uma solução e analisar sua viabilidade, já que obter a solução analítica de equações diferenciais parciais pode ser bem custoso. Uma das grandes vantagens em utilizar soluções numéricas deve-se ao fato de que há muitos problemas em aberto que não possuem soluções analíticas, de forma que a abordagem numérica é que permite que esta dificuldade seja contornada considerando as aproximações encontradas.

Ao considerar o comportamento de ondas em apenas um meio de propagação, é possível utilizar o método de diferenças finitas para discretizar esta equação já que a equação da onda em uma única direção é caracterizada como uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem, e sua solução geral é composta pelo conjunto de funções $y(x, t)$ que satisfazem a igualdade na equação.

A resolução da equação da onda pelo método das diferenças finitas consistirá em quatro etapas fundamentais. A primeira etapa é a construção da malha, a segunda na construção do problema discreto, a terceira na resolução do problema discreto e a quarta na visualização e interpretação dos resultados.

Inicialmente, visando a obtenção de um código computacional, é preciso analisar e estabelecer parâmetros iniciais. O primeiro passo é criar a malha, onde considerando parâmetros físicos e numéricos. A malha é criada através da escolha de um inteiro positivo N , que dividi o intervalo $[a, b]$ em $N+1$ subintervalos. A construção do problema discreto envolve a montagem do sistema matricial linear de ordem $N \times N$, resultante da aproximação discretizada da equação diferencial. A resolução do problema acontece através do esforço computacional para encontrar as aproximações, por último, é possível visualizar o gráfico e encontrar os resultados.

4.5.1 Solução numérica da equação da onda

A série de Taylor será utilizada para a aproximação das derivadas e montagem do esquema de diferenças finitas.

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial t^2} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2), \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (4.5)$$

Substituindo as equações acima teremos:

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2, \Delta t^2) \quad (4.6)$$

Isolando o termo u_i^{n+1} e desconsiderando o erro local de truncamento:

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) - u_i^{n-1} \quad (4.7)$$

Esta discretização possui um problema, pois para $n = 0$ é exigido o valor do ponto u_i^{-1} . Para resolver este problema utilizaremos a segunda condição inicial:

$$u_t(x, 0) = g(x) \quad (4.8)$$

Tomando a aproximação centrada no tempo:

$$u_t(x_i, t_n) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} \quad (4.9)$$

Fazendo $t = 0$:

$$u_t(x_i, 0) = \frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2\Delta t} \quad (4.10)$$

$$g(x_i) = g_i = \frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2\Delta t} \quad (4.11)$$

Portanto, para $n = 0$:

$$2\Delta t g_i = u_i^1 - u_i^{-1} \quad (4.12)$$

$$u_i^{-1} = u_i^1 - 2\Delta t g_i \quad (4.13)$$

Substituindo na fórmula:

$$u_i^1 = 2u_i^0 + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{i+1}^0 - 2u_i^0 + u_{i-1}^0) - u_i^{-1} + 2\Delta t g_i \quad (4.14)$$

$$u_i^1 = u_i^0 + \frac{c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2} (u_{i+1}^0 - 2u_i^0 + u_{i-1}^0) + \Delta t g_i \quad (4.15)$$

Após a resolução, a comparação permite uma conclusão de resultado:

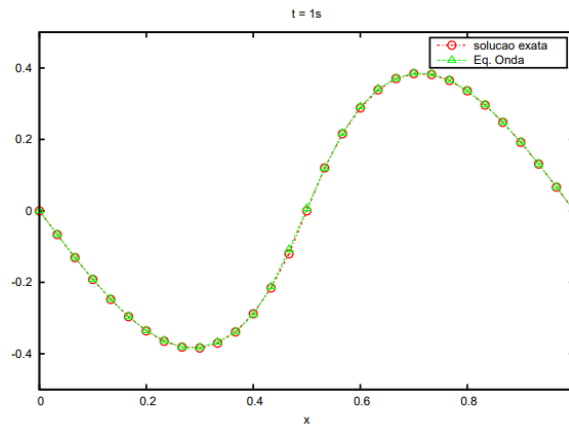


Figura 4.4 – Comparação entre a solução numérica e a solução analítica da equação da onda com 30 pontos no espaço

Fonte: Sampaio (2013)

4.5.2 Solução Analítica da Equação da Onda

A equação da onda que modela fenômenos como a vibração de uma corda ou a propagação do ruído acústico é uma Equação Diferencial Parcial (EDP) linear de segunda ordem do tipo hiperbólico.

Considerando o problema de valor inicial e de contorno para a função $u(x, t)$, a equação é formulada como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ onde } x \in (0, L), t > 0$$

Esta equação requer as seguintes condições:

- **Condições de Contorno (Homogêneas):**

$$u(0, t) = 0 \quad \text{e} \quad u(L, t) = 0, \text{ para } t > 0$$

- **Condições Iniciais:**

$$u(x, 0) = f(x), \text{ para } x \in (0, L) \quad u_t(x, 0) = g(x), \text{ para } x \in (0, L)$$

O método primário para obtenção da solução analítica é o Método de Separação de Variáveis.

4.5.2.1 Método de Separação de Variáveis

Assume-se que a solução pode ser escrita como o produto de duas funções, cada uma dependente de apenas uma variável:

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

Substituindo as equações e rearranjando, obtém-se a separação das variáveis, resultando na igualdade a uma constante σ :

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \sigma$$

Isto leva a duas Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) acopladas:

$$X''(x) - \sigma X(x) = 0$$

$$T''(t) - \sigma c^2 T(t) = 0$$

Aplicando-se as condições de contorno (1.17b) em $X(x)$, e considerando $\sigma = -\lambda^2$ (para obter soluções não-triviais), as soluções espaciais $X_n(x)$ e os autovalores σ_n são encontrados, onde $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\sigma_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

Realizando as substituições, a solução temporal $T_n(t)$ assume a forma:

$$T_n(t) = a_n \cos \frac{n\pi c t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi c t}{L}$$

4.5.2.2 Solução Analítica em Série de Fourier

A solução geral $u(x, t)$ é dada pela superposição infinita das soluções particulares $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$, expressa por uma Série de Fourier:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi c t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi c t}{L} \right]$$

Para que a solução $u(x, t)$ exista, as condições iniciais $f(x)$ e $g(x)$ devem ser capazes de ser representadas pelas séries de Fourier correspondentes.

4.5.2.3 Determinação dos Coeficientes

Os coeficientes a_n e b_n são determinados pelas condições iniciais citadas acima.

Coeficientes a_n (a partir da posição inicial $f(x)$):

Da condição $u(x, 0) = f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Os coeficientes a_n são dados pela integral:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Coeficientes b_n (a partir da velocidade inicial $g(x)$):

Da condição $u_t(x, 0) = g(x)$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Os coeficientes b_n são dados pela integral:

$$b_n = \frac{L}{n\pi c} \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \quad \text{ou simplificando:} \quad b_n = \frac{1}{n\pi c} \int_{-L}^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Percebe-se que a solução analítica $u(x, t)$ dada é o valor exato utilizado para fins de comparação na validação da solução numérica obtida pelo Método das Diferenças Finitas (MDF), permitindo avaliar a convergência e o erro de aproximação do esquema discreto.

Através de uma tabela de comparação de erros, baseando-se nos resultados numéricos e analíticos fornecidos pelas fontes, é possível demonstrar a precisão do Método das Diferenças Finitas (MDF) na resolução da equação da onda.

A tabela abaixo apresenta o erro encontrado entre a solução numérica (p_i) e a solução analítica ($p(x_i)$) para a equação da onda, com valores de pressão em pontos específicos do espaço (x_i). A função erro é tipicamente determinada pela norma $\|u - u_i\|$, onde u é a solução exata (analítica) e u_i é a solução aproximada (numérica).

Tabela 4.1 – Comparação entre Solução Analítica e Numérica da Equação da Onda

Posição	Solução Analítica	Solução Numérica	Diferença	Erro Gerado
x_i	$p(x_i)$	p_i	$p(x_i) - p_i$	$ p_i - p(x_i) $
0.00	0.000000	0.000000	0.000000	0.0
0.01	0.019838	0.019565	0.000273	0.00027
0.02	0.039655	0.039110	0.000545	0.00055
0.03	0.059433	0.058615	0.000818	0.00082
0.04	0.079151	0.078062	0.001089	0.00110
0.05	0.098789	0.097430	0.001359	0.00136
0.06	0.118328	0.116700	0.001628	0.00163
0.07	0.137748	0.135852	0.001896	0.00190
0.08	0.157028	0.154868	0.002160	0.00216
0.09	0.176151	0.173727	0.002424	0.00242
0.10	0.195097	0.192412	0.002685	0.00268

O Erro Gerado na tabela demonstra que as soluções se aproximam significativamente e o erro é consistente e pequeno, o que atesta a precisão e a eficácia do Método das Diferenças Finitas (MDF) para a resolução da equação da onda neste estudo. O erro de truncamento decorre da diferença entre a solução exata e a aproximação numérica.

Para os dados apresentados, a baixa margem de erro é essencial para a validade do modelo na análise da pressão sonora e para a base de futuras regulamentações, como aquelas relacionadas à instalação de turbinas eólicas. O MDF transforma o problema diferencial contínuo em um sistema algébrico discreto passível de solução computacional, e a comparação com a solução analítica é a forma de validar essa aproximação.

Após a criação de um código em python para análise da pressão sonora através da equação da onda, é possível evoluir e continuar os testes ampliando a visualização de comparações gráficas. Sendo n_x o número de pontos no espaço e n_t o número de passos no tempo, é possível observar a influência do passo de tempo e do espaçamento da malha – mostrar como a escolha de n_x e n_t afeta a precisão e a convergência da solução:

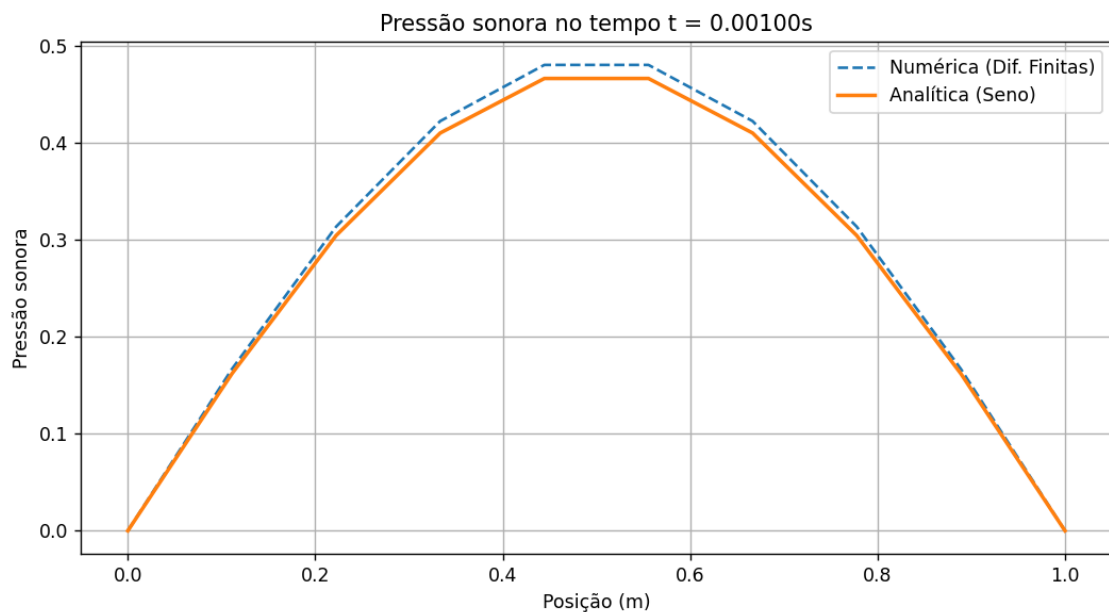


Figura 4.5 – 10 pontos espaciais e 100 passos temporais
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

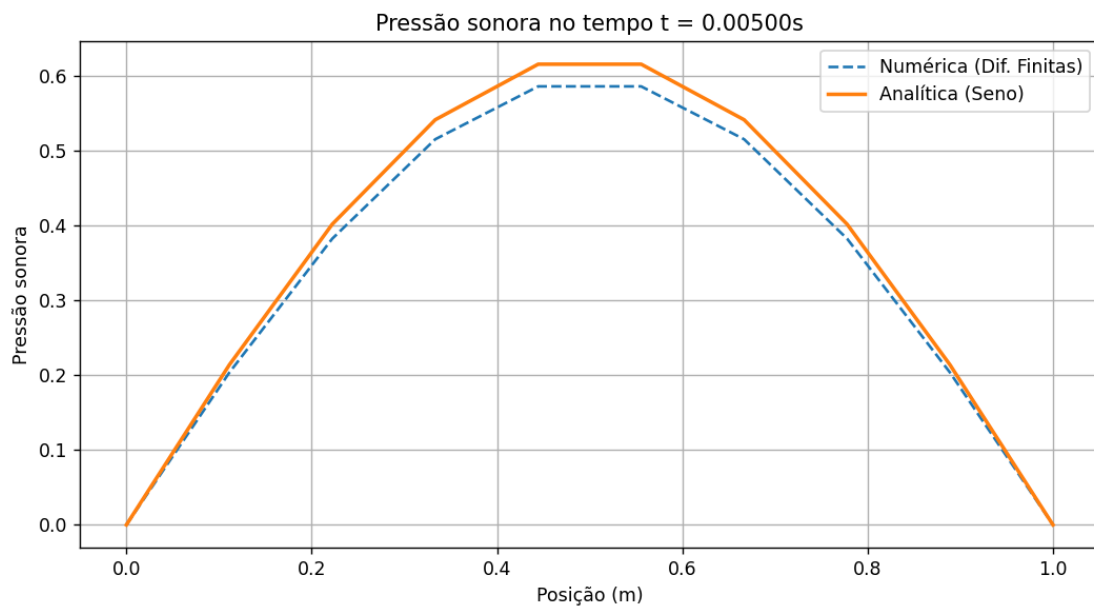


Figura 4.6 – 10 pontos espaciais e 500 passos temporais
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

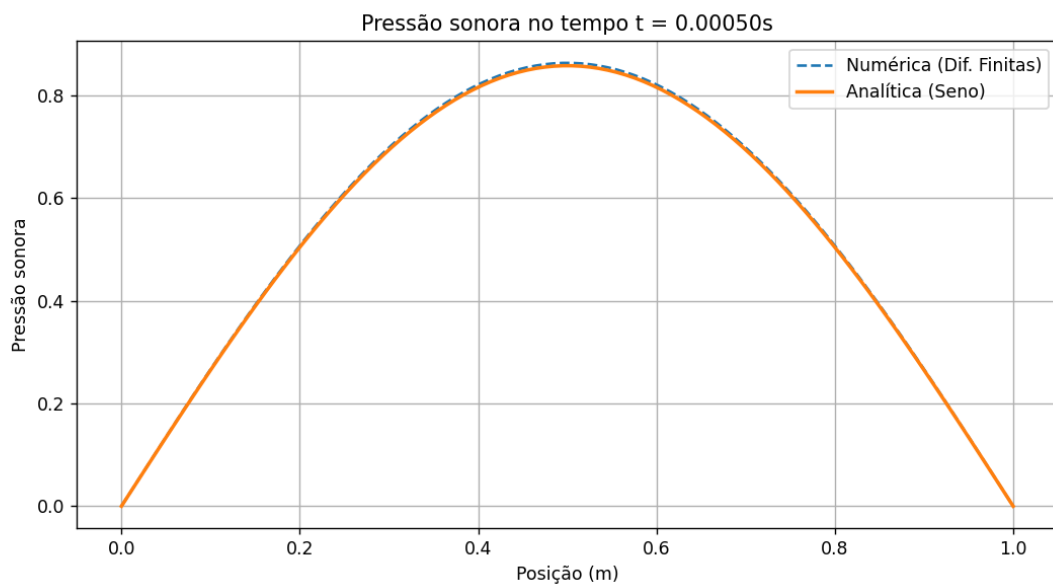


Figura 4.7 – 100 pontos espaciais e 50 passos temporais
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

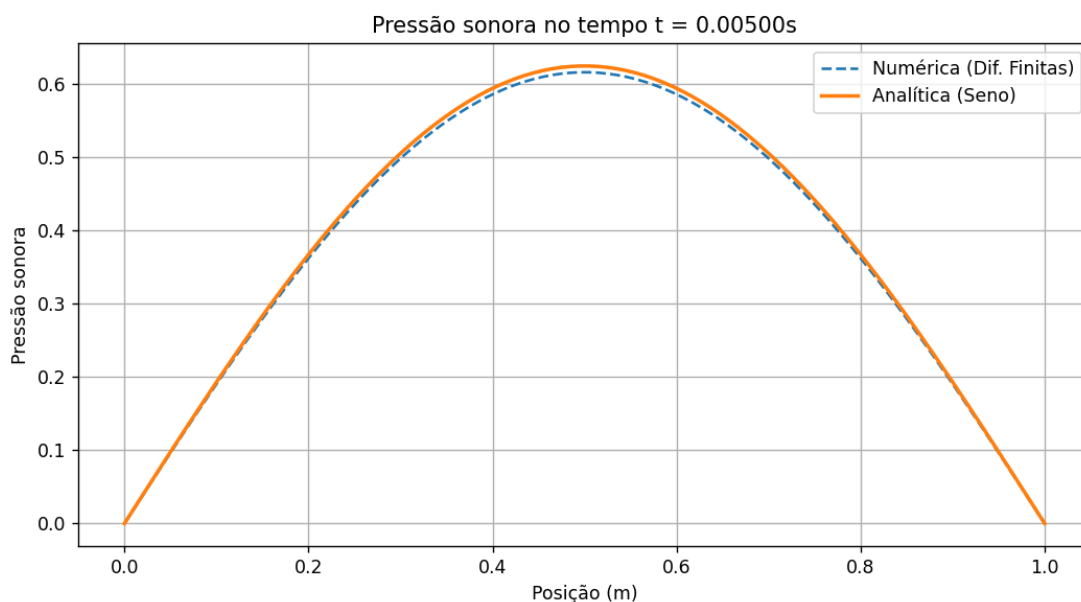


Figura 4.8 – 100 pontos espaciais e 500 temporais
 Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Percebe-se que, ao aplicar o método, é possível verificar que quanto maior a quantidade de passos e pontos no espaço e no tempo, mais as soluções se aproximam e o erro gerado é bem pequeno. Os dados tabulados abaixo reforçam que, mesmo sendo uma aproximação, as soluções se aproximam significativamente e o erro gerado é consistente e pequeno, o que atesta a precisão e a eficácia do Método das Diferenças Finitas para a resolução da equação da onda neste estudo. Essa baixa margem de erro é crucial para a validade do modelo na análise da pressão sonora e para a base de futuras regulamentações sobre a instalação de turbinas eólicas.

i	x	Numérica	Analítica	Erro
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.11111	0.16678	0.16193	0.00485
2	0.22222	0.31346	0.30434	0.00911
3	0.33333	0.42232	0.41003	0.01228
4	0.44444	0.48025	0.46628	0.01397
5	0.55555	0.48025	0.46628	0.01397
6	0.66666	0.42232	0.41003	0.01228
7	0.77777	0.31346	0.30434	0.00911
8	0.88888	0.16678	0.16193	0.00485
9	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Tabela 4.2 – Tabela de erros - 10 pontos espaciais e 100 passos temporais
 Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

i	x	Numérica	Analítica	Erro
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.11111	0.20354	0.21384	0.01029
2	0.22222	0.38254	0.40189	0.01935
3	0.33333	0.51540	0.54147	0.02607
4	0.44444	0.58609	0.61574	0.02964
5	0.55555	0.58609	0.61574	0.02964
6	0.66666	0.51540	0.54147	0.02607
7	0.77777	0.38254	0.40189	0.01935
8	0.88888	0.20354	0.21384	0.01029
9	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Tabela 4.3 – Tabela de erros - 10 pontos espaciais e 500 passos temporais
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Tabela 4.4 – Tabela dos 10 primeiros erros (truncados)

i	x	Numérica	Analítica	Erro
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.01010	0.02740	0.02723	0.00017
2	0.02020	0.05478	0.05443	0.00034
3	0.03030	0.08211	0.08158	0.00052
4	0.04040	0.10935	0.10865	0.00069
5	0.05050	0.13648	0.13561	0.00086
6	0.06060	0.16347	0.16244	0.00103
7	0.07070	0.19030	0.18909	0.00120
8	0.08080	0.21694	0.21556	0.00137
9	0.09090	0.24336	0.24182	0.00154

Tabela 4.5 – Tabela de erros - 100 pontos espaciais e 50 temporais
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

i	x	Numérica	Analítica	Erro
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.01010	0.01956	0.01983	0.00027
2	0.02020	0.03910	0.03965	0.00054
3	0.03030	0.05861	0.05943	0.00081
4	0.04040	0.07806	0.07915	0.00108
5	0.05050	0.09742	0.09878	0.00135
6	0.06060	0.11669	0.11832	0.00162
7	0.07070	0.13585	0.13774	0.00189
8	0.08080	0.15486	0.15702	0.00216
9	0.09090	0.17372	0.17615	0.00242

Tabela 4.6 – Tabela de erros - 100 pontos espaciais e 500 temporais
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Após gerar as tabelas de erro, é possível observar qual delas gera o melhor resultados.

A tabela a seguir mostra esse comparativo:

i	Erro T1	Erro T2	Erro T3	Erro T4
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.00485	0.01029	0.00017	0.00027
2	0.00911	0.01935	0.00034	0.00054
3	0.01228	0.02607	0.00052	0.00081
4	0.01397	0.02964	0.00069	0.00108
5	0.01397	0.02964	0.00086	0.00135
6	0.01228	0.02607	0.00103	0.00162
7	0.00911	0.01935	0.00120	0.00189
8	0.00485	0.01029	0.00137	0.00216
9	0.00000	0.00000	0.00154	0.00242

Tabela 4.7 – Comparação dos erros das quatro tabelas
Fonte: Elaborado pelo autor (2026)

Observa-se que a análise de erro na perspectiva da estabilidade não apenas verifica a precisão final, mas confirma que a relação entre o tamanho dos passos e a quantidade de pontos no espaço e no tempo foi corretamente estabelecida, o que impede que o processo de discretização transforme pequenos erros locais (truncamento ou arredondamento) em uma solução globalmente inválida.

A definição de condições adequadas, especialmente a estabilidade, é fundamental para que a solução numérica da equação da onda permaneça limitada, previsível e não amplifique pequenas perturbações ou erros de arredondamento. Isso garante que a solução se comporte de forma razoável ao longo do tempo, resultando em uma representação confiável e significativa do fenômeno físico estudado.

É notório que a estabilidade, em particular, é uma propriedade crucial que assegura que a solução aproximada permaneça limitada e previsível. Ela impede que erros locais, sejam eles provenientes do truncamento inerente à discretização ou dos erros de arredondamento resultantes da aritmética de precisão finita do computador, sejam amplificados de forma ilimitada ao longo dos passos de cálculo, o que causaria a divergência da solução ou o aparecimento de oscilações espúrias. Conforme estabelece o Teorema de Equivalência de Lax, para um problema bem-posto, a convergência do esquema (a garantia de que a solução numérica se aproxima da solução analítica com o refinamento da malha) é equivalente à sua consistência e estabilidade. Portanto, a análise de estabilidade é o teste prático da robustez do algoritmo.

Para EDPs que descrevem fenômenos de transporte ou propagação de ondas, classificadas como hiperbólicas, a estabilidade de esquemas numéricos explícitos é regida pelo Critério de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Este critério, uma condição necessária para a convergência de esquemas explícitos, estabelece uma restrição física e matemática na relação entre o passo temporal (Δt) e o passo espacial (Δx ou h). O cerne do critério CFL reside na relação entre o passo temporal (Δt), o espaçamento espacial (Δx) e a velocidade de propagação (c) do fenômeno físico. O critério CFL impõe que o domínio de dependência numérico deve incluir o

domínio de dependência físico . Isso se traduz na exigência de que o Número de Courant em cada volume da malha seja inferior à unidade em todo o domínio, ou seja: $CFL \leq 1$.

A não satisfação da Condição CFL transforma o esquema em instável. Por exemplo, esquemas explícitos como o FTBS (Avançado no Tempo e Atrasado no Espaço) exigem que o parâmetro $R = a\Delta t/\Delta x$ satisfaça a condição $0 \leq R \leq 1$ para garantir a estabilidade, e se esta condição for violada, a solução numérica irá divergir.

A instabilidade de um método, como a do esquema FTCS (Avançado no Tempo e Centrado no Espaço) para a equação de convecção, que é incondicionalmente instável, é a razão pela qual soluções numéricas geram as indesejadas oscilações espúrias . A baixa margem de erro observada nas tabelas acima, resultado do refinamento da malha, atesta não apenas a precisão, mas também a estabilidade e convergência bem-sucedidas do Método das Diferenças Finitas aplicado . A observância implícita do critério CFL na escolha dos passos temporais e espaciais é o fator determinante que permitiu manter a solução numérica fiel ao comportamento físico da Equação da Onda.

A comparação entre a solução analítica e a solução numérica no contexto da Equação da Onda (que modela a propagação do ruído) serve como o pilar de validação do Método das Diferenças Finitas (MDF), expondo claramente as forças e fraquezas de cada abordagem no domínio da modelagem matemática e computacional.

A solução analítica (ou exata), tipicamente obtida através de métodos formais como a Separação de Variáveis e Séries de Fourier para a Equação da Onda, representa o valor verdadeiro e não aproximado do fenômeno físico. Sua principal vantagem é a precisão exata, tornando-a o padrão de referência (gold standard) indispensável para a verificação e calibração dos resultados numéricos. Contudo, a limitação mais crítica da solução analítica é a sua inviabilidade para a vasta maioria dos problemas de interesse prático, restringindo-se geralmente a geometrias simples, condições de contorno ideais e domínios de baixa dimensão, tornando-se, para casos complexos da física, muito custosa ou até impossível de ser determinada.

Em contraste, a solução numérica, obtida por meio da discretização da EDP em um sistema algébrico ,como $Au = f$ no caso do MDF, é sempre uma aproximação. Sua maior vantagem é a versatilidade e a capacidade de fornecer resultados satisfatórios, soluções aproximadas, para problemas que resistem à solução analítica, lidando com condições complexas e geometrias de alta dimensão. No entanto, a solução numérica possui limitações inerentes relacionadas à presença de erros, principalmente o erro de truncamento, decorrente da substituição das derivadas contínuas por quocientes de diferenças finitas, frequentemente baseada no truncamento da Série de Taylor, e o erro de arredondamento, que resulta da aritmética de precisão finita do computador.

A compreensão dos erros é essencial para compreensão geral do problema. A validade da solução numérica depende diretamente da estabilidade do método; se o método for instável, os pequenos erros inerentes podem ser amplificados, resultando em oscilações espúrias ou divergência, invalidando o resultado. Portanto, a comparação direta entre os valores da solução

numérica e os da solução analítica, apresentada nas tabelas de erro, é o meio de quantificar a precisão da aproximação e, crucialmente, de atestar a convergência e a estabilidade do MDF aplicado à Equação da Onda, comprovando que o método cumpre o Teorema de Equivalência de Lax ao produzir uma aproximação fiel e controlada do fenômeno físico.

4.6 Equação da Onda em 2D e 3D

A Equação da Onda em duas (2D) ou três (3D) dimensões modela a propagação da onda acústica em todas as direções no domínio espacial. A forma geral da Equação da Onda que descreve este fenômeno é uma Equação Diferencial Parcial (EDP) linear de segunda ordem do tipo *hiperbólico*. Matematicamente, a extensão para mais dimensões é capturada pelo operador Laplaciano ($\nabla^2 p$) na formulação geral:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = S(x, y, t) \quad (4.16)$$

Em 2D, o Laplaciano é expandido para incluir as derivadas espaciais nas direções x e y , e em 3D inclui-se também a direção z .

A discretização da Equação da Onda ou de qualquer EDP para domínios 2D e 3D através do Método das Diferenças Finitas (MDF) ou do Método dos Volumes Finitos (MVF) aumenta significativamente a complexidade e os desafios numéricos.

A discretização de um problema 2D ou 3D resulta em um sistema de equações algébricas linear extremamente grande, causando aumento da complexidade da malha e da matriz. No caso do MDF em 2D, a matriz dos coeficientes resultante da discretização torna-se uma matriz pentadiagonal esparsa. Em 3D, essa matriz se expande ainda mais, exigindo algoritmos eficientes (como a Eliminação Gaussiana utilizada nos códigos analisados) para evitar custos computacionais proibitivos.

O MDF tradicionalmente não é satisfatório para problemas multidimensionais com domínios gerais, pois aplica-se em pontos de uma malha uniforme, que nem sempre se adequa à geometria da EDP. Métodos como o MVF surgiram devido à necessidade de lidar com geometrias complexas, oferecendo maior flexibilidade em malhas arbitrárias e fronteiras irregulares.

A estabilidade numérica, que impede a amplificação de erros de truncamento e arredondamento, torna-se mais difícil de garantir. Em 2D e 3D, o esforço para obter uma solução numérica estável e consistente que convirja para a solução analítica pode ser, em alguns casos, impossível.

Em problemas 2D e 3D, frequentemente não é possível determinar a solução analítica. Assim, a validação da precisão numérica deve ser feita por comparação entre métodos numéricos (benchmarks), priorizando a suavização de oscilações espúrias em vez da comparação direta com a solução exata.

A visualização computacional, ou a representação gráfica das soluções numéricas, é uma

etapa essencial e crucial para a interpretação do fenômeno físico que está sendo modelado. A modelagem matemática é um processo que transforma problemas da realidade em linguagem matemática, e a etapa final exige fazer o caminho de volta, onde as soluções matemáticas obtidas (os números discretos) devem ser interpretadas na linguagem usual do problema.

A solução numérica de uma Equação Diferencial Parcial (EDP), como a Equação da Onda, produz aproximações para pontos discretos da função; a plotagem da curva ou a superfície de solução, realizada por meio de códigos desenvolvidos em Python, permite estudar o comportamento dinâmico da variável(a pressão sonora), que é o que normalmente interessa em aplicações de engenharia.

Destaca-se ainda a excelência da visualização de dados em forma de gráficos e tabelas. A importância da representação gráfica transcende a mera ilustração, sendo vital para o estudo de estabilidade, consistência e convergência do método, conforme demonstrado na evolução das comparações gráficas ao variar o número de pontos no espaço (n_x) e passos no tempo (n_t).

Conclui-se que os gráficos e tabelas gerados em Python permitem a comparação imediata entre a solução numérica e a solução analítica, validando a precisão das aproximações e demonstrando a tendência de aproximação da solução numérica para a solução analítica conforme o refinamento da malha. Além disso, a visualização é a ferramenta primária para diagnosticar problemas numéricos e físicos: por exemplo, em problemas onde há dominância da convecção, os gráficos indicam essa condição por meio de oscilações espúrias. Essas oscilações são grandes variações dos resultados numéricos que não correspondem à solução exata do problema e ilustram o que acontece ao não se respeitar as condições de estabilidade do esquema numérico.

Nota-se ainda que o uso do ambiente de programação Python para processar o algoritmo, gerar as tabelas de erros e plotar os gráficos de comparação foi fundamental, pois transforma os dados numéricos discretos em uma representação confiável e significativa do fenômeno físico, permitindo a conclusão sobre a eficácia do MDF na análise da pressão sonora.

Para a realização dessa pesquisa, procurei por artigos e leis relacionados à evolução da energia eólica ao longo dos anos. Busquei primeiramente fundamentar a parte teórica acerca das fontes renováveis, mostrando a evolução histórica e a importância de novas fontes de geração de energia elétrica baseada em energia limpa. Posteriormente a revisão bibliográfica se aprofundou em demonstrar como o ruído se manifesta na sociedade, gerando as doenças vibroacústicas, por exemplo. Segui com a pesquisa me aprofundando na linguagem computacional e fazendo o estudo detalhado da equação da onda. A investigação buscou analisar o ruído produzido por aerogeradores. A revisão de literatura permitiu uma análise da perspectiva histórica que demonstra a importância do estudo e sua contribuição para o momento atual, destacando a relevância de pesquisas como a que descobriu a síndrome da turbina eólica, fundamentando a relevância do tema. A pesquisa relacionada com a modelagem matemática foi realizada com foco em palavras chaves como: "Equação da onda", "Ruídos" e "Métodos numéricos". A contextualização da temática envolveu palavras chaves como: "sustentabilidade", "energia eólica" e "consequências dos ruídos". Ainda há pouca literatura relacionado à modelagem matemática de ruídos gerados por aerogeradores, mas a reflexão se faz cada vez mais necessária diante da crescente expansão da geração de energia eólica e sua regulamentação.

A proposta inicial era analisar a equação da onda presente no ruído, representá-la e propor uma solução através do método das diferenças finitas. Para obter os resultados esperados, desenvolvi a pesquisa bibliográfica com base em artigos e estudos sólidos e desenvolvi um algoritmo em python que me permitiu tirar conclusões e apresentar uma análise mais detalhada do caso, gerando imagens e gráficos para a equação da onda em 1D, contribuindo para futuras pesquisas em prol da legislação referente à instalação de turbinas eólicas.

6.1 ANEXO

Código, feito em Python, usado na criação das imagens de comparação e na tabela de geração de erros:

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

Parâmetros iniciais - físicos e numéricos

L = 1.0          # comprimento do tubo (em metros)
c = 343          # velocidade do som no ar (m/s)
T = 0.0          # tempo da simulação
nx = 100         # número de pontos no espaço
nt = 500         # número de passos no tempo
dx = L / (nx - 1) # passo espacial
dt = 0.00001     # passo temporal

Recalcular T com base em dt e nt
T = dt * nt

Verificar o número de Courant
CFL = c * dt / dx
if CFL > 1:
    raise ValueError(f"CFL > 1: Instável (CFL = {CFL})")

1º passo de criação da malhas de espaço e tempo
x = np.linspace(0, L, nx)
t = np.linspace(0, T, nt)

```

```

Inicialização das matrizes de solução
p = np.zeros((nt, nx))          # Solução numérica
p_analitica = np.zeros((nt, nx)) # Solução analítica

Condição inicial: onda senoidal
p[0, :] = np.sin(np.pi * x / L)      # t = 0
p[1, 1:-1] = p[0, 1:-1] + 0.5 * (CFL**2) *
(p[0, 2:] - 2 * p[0, 1:-1] + p[0, :-2])

Diferenças finitas
for n in range(1, nt - 1):
    p[n + 1, 1:-1] = (
        2 * p[n, 1:-1]
        - p[n - 1, 1:-1]
        + (CFL**2) * (p[n, 2:] - 2 *
            p[n, 1:-1] + p[n, :-2])
    )

Solução analítica para comparação
for n in range(nt):
    p_analitica[n, :] = np.sin(np.pi * x / L) *
        np.cos(np.pi * c * t[n] / L)

Gráfico no tempo final
plt.figure(figsize=(10, 5))
plt.plot(x, p[-1, :], label="Numérica (Dif. Finitas)", linestyle='--')
plt.plot(x, p_analitica[-1, :], label="Analítica (Seno)", linewidth=2)
plt.xlabel("Posição (m)")
plt.ylabel("Pressão sonora")
plt.title(f"Pressão sonora no tempo t = {T:.5f}s")
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()

```

AQUI INICIEI A TABELA COM O ERRO ENCONTRADO
ERRO ENCONTRADO

```
%x p p(x) |p - p(x)|
$x_i$ $p_i$ $p(x_i)$ |$p_i$ - $p(x_i)$|
0.00 0.000000 0.000000 -
0.01 0.019565 0.019838 2.7×104
0.02 0.039110 0.039655 5.5×104
0.03 0.058615 0.059433 8.2×104
0.04 0.078062 0.079151 1.1×103
0.05 0.097430 0.098789 1.4×103
0.06 0.116700 0.118328 1.6×103
0.07 0.135852 0.137748 1.9×103
0.08 0.154868 0.157028 2.2×103
0.09 0.173727 0.176151 2.4×103
0.10 0.192412 0.195097 2.7×103
0.11 0.210903 0.213846 2.9×103
0.12 0.229182 0.232379 3.2×103
0.13 0.247230 0.250679 3.4×103
0.14 0.265029 0.268726 3.7×103
0.15 0.282561 0.286503 3.9×103
0.16 0.299808 0.303991 4.2×103
0.17 0.316754 0.321173 4.4×103
0.18 0.333381 0.338032 4.7×103
0.19 0.349672 0.354550 4.9×103
0.20 0.365611 0.370711 5.1×103
0.21 0.381181 0.386499 5.3×103
0.22 0.396368 0.401898 5.5×103
0.23 0.411156 0.416892 5.7×103
0.24 0.425530 0.431467 5.9×103
0.25 0.439476 0.445607 6.1×103
0.26 0.452978 0.459298 6.3×103
0.27 0.466025 0.472527 6.5×103
0.28 0.478603 0.485280 6.7×103
0.29 0.490698 0.497544 6.8×103
0.30 0.502300 0.509308 7.0×103
```

Referências Bibliográficas

Referências bibliográficas

- 1 ALMEIDA, Ivan Miranda. *Método de diferenças finitas para a equação da onda acústica em meios heterogêneos*. 2021.
- 2 ARAÚJO, A. A.; MARTINS, J. F.; SILVA, R. A. Poluição sonora: um estudo de caso do Parque Eólico Asa Branca II. Disponível em: <<https://abeeolica.org.br/wp-content/uploads/2018/04/Boletim-Anual-de-Geracao-2017.pdf>>. Acesso em: 16 nov. 2025.
- 3 ARCENO, B. F. *Trabalho acadêmico*. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/96416/Bruno_Figueiredo_Arceno.pdf?sequence=1>. Acesso em: 10 abr. 2025.
- 4 CEPEL. *Atlas do potencial eólico brasileiro*. Disponível em: <https://cresesb.cepel.br/publicacoes/download/atlas_eolico/Atlas%20do%20Potencial%20Eolico%20Brasileiro.pdf>. Acesso em: 16 nov. 2025.
- 5 CEPEL. *Dissertação – base de publicações*. Disponível em: <<https://cresesb.cepel.br/index.php?section=publicacoes&task=dissertacao&cid=341>>. Acesso em: 16 nov. 2025.
- 6 CORREIA, R. V. *Impacto ambiental da geração eólica de energia*. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Porto, Porto, 2011.
- 7 CORRÊA, Cláudio. **Métodos de diferenças finitas e volumes finitos para problemas convectivos difusivos**. 2013. 141 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2013.
- 8 COTOMACIO, André Carrara. Caracterização de poluição sonora e perturbação do sossego em uma fonte tonal: o caso da sirene da lanchonete. *Revista Brasileira de Criminalística*, v. 11, n. 1, p. 7–14, 2022.
- 9 EMPRESA DE PESQUISA ENERGÉTICA. *Balanco energético nacional: síntese 2024*. 2024. Disponível em: <<https://www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/>>

publicacoes/PublicacoesArquivos/publicacao-819/topico-715/BEN_S%C3%ADntese_2024.pdf>. Acesso em: 08 jul. 2024.

10 EMPRESA DE PESQUISA ENERGÉTICA. *Relatório final do plano decenal de expansão de energia 2024*. 2024. Disponível em: <<https://www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/PublicacoesArquivos/publicacao-45/topico-79/Relat%C3%B3rio%20Final%20do%20PDE%202024.pdf>>. Acesso em: 08 jul. 2024.

11 EPE – EMPRESA DE PESQUISA ENERGÉTICA. *Dados de entrada para modelos*. Nota Técnica EPE-DEE-011-2021-R3. Disponível em: <https://www.epe.gov.br/sites-pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/PublicacoesArquivos/publicacao-836/NT%20EPE-DEE-011-2021-R3_Dados%20de%20entrada%20para%20modelos.pdf>. Acesso em: 16 nov. 2025.

12 EPE – EMPRESA DE PESQUISA ENERGÉTICA. *Matriz energética e elétrica*. Disponível em: <<https://www.epe.gov.br/pt/abcdenergia/matriz-energetica-e-eletrica>>. Acesso em: 16 nov. 2025.

13 EVEN3. *Processos de diferenças finitas*. Disponível em: <<https://static.even3.com/processos/58fa79f79862423fbfc6.pdf>>. Acesso em: 16 nov. 2025.

14 FAUSTINO, Manuel; AMADOR, Filomena. O conceito de “sustentabilidade”: migração e mudanças de significados no âmbito educativo. *Indagatio Didactica*, v. 8, n. 1, jul. 2016.

15 FOLADORI, Guillermo; TAKS, Javier. Um olhar antropológico sobre a questão ambiental. *Mana*, v. 10, p. 323–348, 2004.

16 FORTALEZA (CE). Secretaria Municipal de Urbanismo e Meio Ambiente. *Carta Acústica de Fortaleza*. Fortaleza: SEUMA, [s.d.]. Disponível em: *Carta Acústica de Fortaleza*. Acesso em: 26 novembro de 2025.

17 KETT, M. *Estudo numérico*. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97098/Kett.pdf?sequence=1>>. Acesso em: 05 abr. 2025.

18 LIU, Andy; DE SOUZA, Beatriz; FERRARETTO, Tânia Rita Gritti. Impactos negativos para a saúde humana ocasionados pelo ruído dos geradores eólicos. In: *IX JORNACITEC – Jornada Científica e Tecnológica*. 2020.

19 LOBÃO, Diomar Cesar. **Introdução aos métodos numéricos**. Volta Redonda: Universidade Federal Fluminense, [s.d.]. Trabalho original preparado por: Prof. Ionildo José Sanches e Prof. Diógenes Lago Furlan (Universidade Federal do Paraná). Disponível em: <http://www.professores.uff.br/diomar_cesar_lobao>. Acesso em: [inserir data de acesso].

- 20 LOVATTO, Marco Leonardelli. **Número de Courant, CFL e condição CFL: entenda a diferença entre eles**. Porto Alegre: U.X. Engenharia de Simulação Computacional CFD, 16 nov. 2012. Disponível em: <<https://uxcf.com/numero-de-courant-cfl-e-condicao-cfl/>>. Acesso em: [inserir data de acesso].
- 21 LUZ, Eduardo Pereira da. **Simulação do ruído de aerogeradores em parques eólicos**. 2018. 125 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2018.
- 22 *Modelagem matemática na avaliação de impacto ambiental. Educação Matemática em Revista*, v. 25, n. 69, p. 4–13, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.37001/emr.v25i69.1404>>. Acesso em: 16 nov. 2025.
- 23 MONTEZANO, B. E. M. *Dissertação de mestrado*. Disponível em: <https://cresesb.cepel.br/publicacoes/download/dissertacao/201210_montezano_b_e_m_ms.pdf>. Acesso em: 16 nov. 2025.
- 24 NAÇÕES UNIDAS. *Transformando nosso mundo: a Agenda 2030 para o desenvolvimento sustentável*. 2020. Disponível em: <<https://brasil.un.org/sites/default/files/2020-09/agenda2030-pt-br.pdf>>. Acesso em: 08 jul. 2024.
- 25 NEPOMUCENO, Erivelton Geraldo. **Derivação numérica**. São João del-Rei: Universidade Federal de São João del-Rei; Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, [s.d.]. Notas de aula.
- 26 OLIVEIRA, D. R. *Especificação semântica de LaND – uma linguagem para o método das diferenças finitas*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Alagoas, 2012.
- 27 OLIVEIRA, Marcelo Franco de; PIRES, Licelia Alves. Modelagem matemática na avaliação de impacto ambiental: abordagem metodológica no ensino de cálculo em um curso de engenharia. *Educação Matemática em Revista*, v. 25, n. 69, p. 4–13, 2020. Disponível em: <<https://www.sbembrasil.org.br/periodicos/index.php/emr/article/download/1404/2283/10841>>. Acesso em: 16 nov. 2025.
- 28 PIRES, R. L. *Impactos de ruídos na geração de energia eólica*. Trabalho científico, 2010.
- 29 PORTO, Dayvenne Lorraine Batista. *Uma simulação numérica da equação da onda unidimensional pelo método das diferenças finitas: formulação explícita*. 2020.
- 30 REVISTA HOLOS. *Artigo 2197*. Disponível em: <https://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/view/2197/pdf_176>. Acesso em: 10 abr. 2025.
- 31 ROMA, Júlio César. Os objetivos de desenvolvimento do milênio e sua transição para os objetivos de desenvolvimento sustentável. *Ciência e Cultura*, v. 71, n. 1, p. 33–39, 2019.

- 32 SANTANA, R. R. S. Método das diferenças finitas: aplicações e casos de estudo. *Anais da ERAD-NE 2013*. IFBA, 2013.
- 33 SAMPAIO, José Luiz Solon. **Estudo e implementação de métodos numéricos para equações diferenciais parciais elementares**. 2013. 57 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Matemática) – Faculdade de Matemática, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.
- 34 SCHMIT, R. *TCC II – Rubem Schmit*. Disponível em: <<https://repositorio.unipampa.edu.br/jspui/bitstream/riu/679/1/TCC%20II%20-%20RUBEM%20SCHMIT.pdf>>. Acesso em: 16 nov. 2025.
- 35 SILVA, Adilson Costa da; HELAYËL NETO, José Abdalla. Rediscutindo soluções numéricas de equações de onda. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 41, p. e20190064, 2019.
- 36 SILVA, Kett Regina de Aguiar da. **Regiões de estabilidade de métodos numéricos para equações diferenciais**. 2007. 62 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2007.
- 37 UFRGS. *Método de diferenças finitas*. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-sci/pdvdc-metodo_de_diferencas_finitas.html#x126-245001r1>. Acesso em: 16 nov. 2025.
- 38 UFPA. *Trabalho de conclusão – matemática*. Disponível em: <https://matematica.icen.ufpa.br/images/tccs/TCC_FACMAT_15.pdf>. Acesso em: 16 nov. 2025.
- 39 UFSJ. *Notas de aula – EDO*. Disponível em: <https://ufsj.edu.br/portal-repositorio/File/nepomuceno/mn/21MN_EDO4.pdf>. Acesso em: 16 nov. 2025.
- 40 UNIVERSIDADE DE COIMBRA. *Doença vibroacústica – trabalho final*. Disponível em: <<https://estudogeral.uc.pt/bitstream/10316/31393/4/DOEN%C3%87A%20VIBROAC%C3%9ASTICA%20-%20Trabalho%20Final.pdf>>. Acesso em: 16 nov. 2025.
- 41 VALLE, Karine Nayara F. **Métodos numéricos de Euler e Runge-Kutta**. 2012. 40 f. Monografia (Especialização em Matemática para Professores) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.
- 42 WAGNER, W. *Cálculo numérico – método das diferenças finitas*. Universidade Federal do Paraná, 2014.