UFRRJ

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO/ INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, CONTEXTOS CONTEMPORÂNEOS E DEMANDAS POPULARES

TESE

Metáforas e Toques em Tela: Potencializando Aprendizagens Discentes no Estudo de Retas Paralelas e Transversais

Marcos Paulo Henrique

2021

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO/ INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, CONTEXTOS CONTEMPORÂNEOS E DEMANDAS POPULARES

METÁFORAS E TOQUES EM TELA: POTENCIALIZANDO APRENDIZAGENS DISCENTES NO ESTUDO DE RETAS PARALELAS E TRANSVERSAIS

MARCOS PAULO HENRIQUE

Sob a orientação do Professor Doutor

Marcelo Almeida Bairral

Tese submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Doutor em Educação**, no Curso de Pós-Graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares, Área de Concentração em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares.

Seropédica/Nova Iguaçu, RJ
Abril, 2021

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

H518m

Henrique, Marcos Paulo , 1982-
Metáforas e toques em tela: potencializando aprendizagens discentes no estudo de retas paralelas e transversais / Marcos Paulo Henrique. - Seropédica; Nova Iguaçu, 2021.
194 f.: il.

Orientador: Marcelo Almeida Bairral .
Tese(Doutorado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Programa de Pós-graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares, 2021.

1. Manipulações touchscreen. 2. Retas paralelas cortadas por uma transversal. 3. Conceitos. 4. Metáforas. 5. Estudantes do Ensino Fundamental. I. Bairral , Marcelo Almeida , 1969-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Programa de Pós-graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares III. Título.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, CONTEXTOS CONTEMPORÂNEOS E DEMANDAS POPULARES

TERMO Nº 391 / 2021 - PPGEDUC (12.28.01.00.00.00.00.20)

Nº do Protocolo: 23083.026263/2021-12

Seropédica-RJ, 19 de abril de 2021.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO/INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, CONTEXTOS CONTEMPORÂNEOS E DEMANDAS POPULARES

MARCOS PAULO HENRIQUE

Tese submetida como requisito parcial para a obtenção do grau de **Doutor**, no Programa de Pós-Graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares, Área de Concentração em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares.

TESE APROVADA EM 15/04/2021

Conforme deliberação número 001/2020 da PROPPG, de 30/06/2020, tendo em vista a implementação de trabalho remoto e durante a vigência do período de suspensão das atividades acadêmicas presenciais, em virtude das medidas adotadas para reduzir a propagação da pandemia de Covid-19, nas versões finais das teses e dissertações as assinaturas originais dos membros da banca examinadora poderão ser substituídas por documento(s) com assinaturas eletrônicas. Estas devem ser feitas na própria folha de assinaturas, através do SIPAC, ou do Sistema Eletrônico de Informações (SEI) e neste caso a folha com a assinatura deve constar como anexo ao final da tese / dissertação.

Membros da banca:

Marcelo Almeida Bairral. Dr. UFRRJ (Orientador /Presidente da Banca).

Dora Soraia Kindel. Dra. UFRRJ (Examinadora Externa ao Programa).

Luiza Alves de Oliveira. Dra. UFRRJ (Examinadora Externa ao Programa).

Carloney Alves de Oliveira. Dr. UFAL (Examinador Externo à Instituição).

Mauricio Rosa. Dr. UFRGS (Examinador Externo à Instituição).

(Assinado digitalmente em 20/04/2021 09:48)
DORA SORAIA KINDEL
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptES (12.28.01.00.00.86)
Matrícula: 1420931

(Assinado digitalmente em 20/04/2021 08:49)
LUIZA ALVES DE OLIVEIRA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptTPE (12.28.01.00.00.00.00.24)
Matrícula: 2327924

(Assinado digitalmente em 20/04/2021 20:05)
MARCELO ALMEIDA BAIRRAL
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptTPE (12.28.01.00.00.00.00.24)
Matrícula: 1098802

(Assinado digitalmente em 22/04/2021 10:06)
CARLONEY ALVES DE OLIVEIRA
ASSINANTE EXTERNO
CPF: 922.124.175-00

(Assinado digitalmente em 20/04/2021 15:02)
MAURICIO ROSA
ASSINANTE EXTERNO
CPF: 736.058.750-68

Para verificar a autenticidade deste documento entre em **https://sipac.ufrrj.br/public/documentos/index.jsp** informando seu número: **391**, ano: **2021**, tipo: **TERMO**, data de emissão: **19/04/2021** e o código de verificação: **49838904e6**

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Augusto Galdino Henrique e Maria Cremilda de Lima Henrique. Foi com eles que aprendi muitos dos conceitos essenciais à docência.

Aos educadores e educadoras matemáticos deste país, que assim como eu, acreditam e lutam pelo ensino de uma matemática mais democrática.

AGRADECIMENTOS

A gratidão é um sentimento que enuncia muito bem a importância da experimentação para a construção e o desenvolvimento de conceitos. E foi por experimentar esse sentimento durante toda essa caminhada, que agradeço:

À universidade por me possibilitar um ambiente plural e profícuo para os estudos e desenvolvimento da pesquisa.

Ao meu orientador professor Marcelo Bairral pela competência profissional na condução do trabalho. Seu comprometimento com a Educação Matemática é uma fonte de inspiração que tem me proporcionado o desenvolvimento pessoal e profissional.

Aos membros da banca, professores Carloney Alves, Dora Soraia Kindel, Luiza Alves de Oliveira e Mauricio Rosa, pela leitura atenta e apontamentos que contribuíram para o desenvolvimento da pesquisa.

À direção do Colégio Estadual Oliveira Botelho pelo consentimento para realização da pesquisa.

Aos professores e funcionários do Instituto de Educação e do Instituto Multidisciplinar do PPGEduc.

A todos os estudantes das turmas 802 e 803 do ano letivo de 2018 do Colégio Estadual Oliveira Botelho pela participação e empenho durante as implementações das atividades.

Aos integrantes do Grupo de Estudos e Pesquisas das Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática (GEPETICEM) pelos muitos momentos de discussões e reflexões, importantes para o amadurecimento de muitas ideias contidas no trabalho.

Aos colegas da turma de 2017 do PPGEduc pelo compartilhamento de cafés, risadas, discussões e reflexões. A pluralidade de ideias presente em uma turma heterogênea proporcionou momentos de aprendizagens.

À minha família pelo apoio e incentivo constantes.

À Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro pelo consentimento da licença para estudos durante o período de março de 2020 a março de 2021.

Ao professor José Fernando Bitencourt Lomônaco pelas leituras sugeridas e alguns esclarecimentos em relação à visão dos protótipos naturais dos conceitos.

RESUMO

HENRIQUE, Marcos Paulo. **Metáforas e Toques em Tela: Potencializando Aprendizagens Discentes no Estudo de Retas Paralelas e Transversais**. 2021. 194 p. Tese (Doutorado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares). Instituto de Educação/Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica/Nova Iguaçu, RJ, 2021.

Dispositivos móveis com toques em telas (DMcTT), como o *smartphone*, são extensões físicas do corpo humano que reconfiguram e possibilitam o enriquecimento de interações, inclusive no campo imagético-metafórico e na elaboração conceitual. Admitindo essa especificidade do dispositivo e assumindo que a construção de conceitos passa pela experimentação e ocorre como um processo contínuo que envolve as teorias (explicações) que os sujeitos possuem acerca de ideias, categorias, entidades, relações matemáticas etc., esta pesquisa tem como objetivo analisar a construção e o desenvolvimento de conceitos por discentes com uma metodologia de ensino que valoriza a produção de metáforas por meio da escrita para construção de sentidos, interações, análise e reflexão em tarefas exploratórias e investigativas mediante manipulações em telas de *smartphones*, na utilização do aplicativo GeoGebra. A questão que norteia o estudo é a seguinte: "que contribuições e desafios uma ambiência de aula com o GeoGebra pode oferecer para o desenvolvimento conceitual no estudo de relações matemáticas entre retas paralelas cortadas por uma transversal por meio de tarefas que valorizam a produção de metáforas e as manipulações *touchscreen* de estudantes do 8.° ano do Ensino Fundamental?". A pesquisa de desenvolvimento é a abordagem metodológica que orienta esta tese, que se sustenta nas seguintes ações: 1. Elaborar, implementar e analisar tarefas que possibilitem a reflexão a partir da escrita e a interação, mediante a construção e análise por meio do aplicativo GeoGebra para *smartphones*. 2. Elucidar metáforas conceituais produzidas pelos discentes. 3. Investigar como ocorre a construção e o desenvolvimento conceitual a partir da metodologia de ensino adotada. 4. Mapear contribuições e desafios de um Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) para DMcTT na abordagem das relações entre retas e ângulos. A investigação foi realizada com estudantes de duas turmas de uma Unidade Escolar da Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro, no município de Resende, através da disciplina de Resolução de Problemas Matemáticos. Para coleta de dados realizou-se os seguintes procedimentos: (a) gravação de áudio e vídeo, (b) captura de tela das manipulações *touchscreen* dos *smartphones* utilizados pelos estudantes, (c) respostas escritas das folhas de atividades e (d) notas do pesquisador. A pesquisa ressaltou que, em certa medida, visualização e conceituação se relacionam, pois o desenvolvimento da habilidade de visualizar, potencializada pelas manipulações em tela, pode compor a construção e o desenvolvimento conceitual. Expôs a ruptura na hierarquia euclidiana na abordagem de conceitos geométricos em um AGD, a sincronicidade de toques na construção e análise de objetos geométricos, o desenvolvimento dos toques que seguem a tríade ambientação – domínio construtivo – domínio relacional, e que as construções em um AGD para DMcTT seguem a mesma direção do olhar em interfaces digitais (esquerda→direita, na cultura ocidental). Os resultados mostraram que é possível ensinar boa parte dos conteúdos geométricos previstos para os anos finais do Ensino Fundamental a partir da abordagem de retas paralelas cortadas por uma transversal quando se valoriza a interação e as formas diversas de linguagem e assume os DMcTT como uma extensão física do nosso corpo. A pesquisa revelou desafios organizacionais na realização de atividades com o aplicativo GeoGebra, de efetivação e de cunho técnico relacionados às manipulações em telas.

Palavras-chave: *Smartphones*. Manipulações *touchscreen*. Retas e ângulos. Conceitos. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

HENRIQUE, Marcos Paulo. **Metaphors and Touching the Screen: Potentiating Student Learning in the Study of Parallel and Transversal Lines**. 2021. 194 p. Thesis (Doctorate in Education, Contemporary Contexts and Popular Demands). Institute of Education / Multidisciplinary Institute, Federal Rural University of Rio de Janeiro, Seropédica/Nova Iguaçu, RJ, 2021.

Touch screen mobile devices (TSMD), such as the smartphone, are physical extensions of the human body that reconfigure and enable the enrichment of interactions, including in the imagery-metaphorical field and in conceptual elaboration. Admitting this specificity of the device and assuming that the construction of concepts goes through experimentation and occurs as a continuous process that involves the theories (explanations) that the subjects have about ideas, categories, entities, mathematical relationships, etc., this research aims to analyze the construction and development of concepts by students with a teaching methodology that values the production of metaphors through writing for the construction of meanings, interactions, analysis and reflection in exploratory and investigative tasks through manipulations in smartphone screens when using the GeoGebra application. The question that guides the study is the following: "what contributions and challenges can a GeoGebra class environment offer for conceptual development in the study of mathematical relationships between parallel lines cut by a transversal through tasks that value the production of metaphors and the touchscreen manipulations of 8th grade elementary school students?". Development research is the methodological approach that guides this thesis, which is based on the following actions: 1. Elaborating, implementing and analyzing tasks that allow reflection from writing and interaction through construction and analysis through the GeoGebra application for smartphones. 2. Elucidating conceptual metaphors produced by students. 3. Investigating how construction and conceptual development occurs from the adopted teaching methodology. 4. Mapping contributions and challenges of an Dynamic Geometry Environment (DGE) to TSMD in addressing the relationship between lines and angles. The investigation was carried out with students from two classes of a School Unit of the Rio de Janeiro's State Education Department, at Resende city, through the discipline of Mathematical Problem Solving. The following procedures were performed for data collection: (a) audio and video recording, (b) screen capture of the touchscreen manipulations of the smartphones used by the students, (c) written responses from the activity sheets and (d) notes from the researcher. The research highlighted that, to a certain extent, visualization and conceptualization are related, as the development of the ability to visualize, enhanced by on-screen manipulations, can compose the construction and conceptual development. It exposed the rupture in the Euclidean hierarchy in the approach of geometric concepts in an DGE, the synchronicity of touches in the construction and analysis of geometric objects, the development of touches that follows the triad environment-constructive domain-relational domain, and that the constructions in an DGE for TSMD follow the same direction of looking at a digital interface (left → right, in Western culture). The results showed that it is possible to teach a good part of the geometric contents foreseen for the final years of Elementary School from the approach of parallel lines cut by a transversal one, when it values the interaction and the different forms of language and assumes the TSMD as a physical extension of our body. The research revealed organizational challenges in carrying out activities with the GeoGebra application, effective and technically related to manipulations on screens.

Keywords: Smartphones. Touchscreen manipulations. Lines and angles. Concepts. Elementary School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DEAPÊNDICES

LISTA DE SIGLAS

AGD	Ambiente de Geometria Dinâmica
BDBTD	Biblioteca Digital Brasileira de teses e dissertações
BTDC	Catálogo de teses e dissertações da CAPES
COVID - 19	*Corona Virus Disease* - 2019
EaD	Educação a Distância
EUA	Estados Unidos da América
DBR	*Design-Based Research*
DMcTT	Dispositivos Móveis com Toques em Telas
GC	*Geometric Constructer*
GEPETICEM	Grupo de Estudos e Pesquisas das Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática
GPS	*Global Positioning System*
NTE	Núcleo de Tecnologia Educacional
NTEM	Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
SEEDUC/RJ	Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
PPCAPES	Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
PPGEduc	Programa de Pós-Graduação em Educação Contextos Contemporâneos e Demandas Populares
PPGEduCIMAT	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática
PROINFO	Programa Nacional de Tecnologia Educacional
RJ	Rio de Janeiro
RPM	Resolução de Problemas Matemáticos
SMS	Short Message Service
TI	Técnico de Informática
TMC	Teoria da Metáfora Conceitual
UE	Unidade Escolar
UGB/FERP	Centro Universitário Geraldo Di Biase
UFF	Universidade Federal Fluminense
UFRRJ	Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

SUMÁRIO

DESBLOQUEANDO A TELA

A presente pesquisa defende o uso de dispositivos móveis com toques em telas (DMcTT) no ensino de retas paralelas cortadas por uma transversal[1]. Particularmente, visa analisar a construção e o desenvolvimento[2] de conceitos por discentes com uma metodologia de ensino que valoriza a produção de metáforas por meio da escrita para construção de sentidos, interações, análise e reflexão em tarefas exploratórias e investigativas a partir das manipulações em telas de *smartphones* com a utilização do aplicativo GeoGebra. Nesta empreitada, nos colocamos a pensar respeito da seguinte questão: "Q**ue contribuições e desafios uma ambiência de aula com o GeoGebra pode oferecer para o desenvolvimento conceitual no estudo de relações matemáticas entre retas paralelas cortadas por uma transversal por meio de tarefas que valorizam a produção de metáforas e as manipulações *touchscreen* de estudantes do 8.° ano do Ensino Fundamental?**".

Com base nesta proposta, esta tese se sustenta nas seguintes ações:

1. Elaborar, implementar e analisar tarefas que possibilitem a reflexão a partir da escrita e a interação mediante a construção e análise por meio do aplicativo GeoGebra para *smartphones*.
2. Elucidar metáforas conceituais produzidas pelos discentes.
3. Investigar como ocorre a construção e o desenvolvimento conceitual a partir da metodologia de ensino adotada.
4. Mapear contribuições e desafios de um AGD para DMcTT na abordagem das relações entre retas e ângulos.

Exposto os nossos objetivos, vale uma reflexão a fim de direcionar para as justificativas desta investigação. Analisemos os seguintes termos: retas paralelas e transversais, metáforas, *smartphones*, toques em telas e aprendizagem. Palavras soltas e fora de contexto podem não produzir sentido. No campo da ciência cognitiva, existe uma corrente filosófica que trata dos processos de desenvolvimento e construção de conceitos, e, dentro desse campo, há uma linha que defende a tese de que esse processo acontece por meio de conexões que aproximam os elementos constitutivos, formando uma espécie de rede de teorias. Com base nessa concepção, os termos com que iniciamos este parágrafo poderiam estar ligados por uma infinidade de teorias; entretanto, a que escolhemos diz respeito ao uso do *smartphone* em práticas pedagógicas para o ensino e para a

---

[1] Para efeito de fluidez textual, e também pela atenção dada neste estudo à outras relações, algumas vezes utilizaremos a expressão <u>retas e ângulos</u>.

[2] É importante esclarecer que empregamos os termos «desenvolvimento» e «construção» com significados distintos. Enquanto o primeiro tem por objetivo a identificação da ampliação de um conceito geométrico já conhecido, por exemplo, o de «retas concorrentes», geralmente apresentado no 7.º ano do Ensino Fundamental, o segundo visa à construção (descoberta) do novo ou a mudança de sentido, por exemplo, a ideia de CONCORRENTE COMO DISPUTA para conceituar retas concorrentes. No entanto, isso não significa que as duas ações sejam excludentes.

aprendizagem de conceitos relacionados às retas paralelas e transversais, mantendo o olhar sob o dispositivo e outros elementos que são reconfigurados a partir da integração deste.

Por conseguinte, a rede que compõe o presente estudo[3]é parte das inquietações do autor alicerçadas na prática docente. Desse modo, como a pesquisa de desenvolvimento, a abordagem metodológica adotada, mantém um olhar atento na busca por refinamentos e aprimoramentos, tal método ocorre também como um processo cíclico que representa um desdobramento da pesquisa realizada no mestrado (HENRIQUE, 2017).

Recentemente, os *smartphones* trouxeram uma gama de transformações na forma como interagimos e aprendemos. Para citar alguns exemplos, compramos, acessamos os dados de nossa conta bancária, compartilhamos textos, imagens e vídeos e interagimos assíncrona e sincronamente por meio de aplicativos de mensagens como o *WhatsApp*. Em relação à aprendizagem, o *smartphone* potencializou a *mobile learning* (aprendizagem móvel) que, conforme salienta Moura (2011), tem como característica fundamental a portabilidade dos dispositivos e mobilidade dos usuários que podem estar fisicamente distantes uns dos outros ou localizados em espaços formais de ensino. A autora ainda sublinha que a ampla utilização de dispositivos móveis pelas variadas camadas da sociedade para fins diversos como diversão, trabalho e estudo, traz imbricada a questão de se pensar tais dispositivos no campo educacional (MOURA, 2017).

A sala de aula está impregnada desses dispositivos, todavia, ainda é comum entre professores, coordenadores pedagógicos e responsáveis a ideia que a melhor alternativa para manter a atenção dos estudantes durante as aulas seria deixar os aparelhos fora do alcance discente. Concordamos em parte com os que advogam por essa alternativa: parar uma leitura para acessar as redes sociais pode retardar e atrapalhar o processo de compreensão – desde que este não seja uma proposta de um texto hipertextual – assim como tentar responder uma mensagem no aparelho enquanto dirige. Mas, é preciso lembrar que manter o celular[4] como uma espécie de “eremita” do processo educativo parece já não ser possível. Uma de nossas motivações está na inserção do dispositivo como recurso didático para o estudo de conceitos matemáticos e o *locus* dado ao *smartphone* aqui dialoga com a proposta de Agamben (2009) para “dispositivo”, que reconfigura, orienta, modela os gestos, a atuação e os discursos. Dessa forma, a inserção do *smartphone* em práticas de ensino demanda novos olhares no que se refere a sua implementação, à forma de

[3]A investigação integra o Projeto de Pesquisa Construindo e analisando práticas educativas em educação matemática com dispositivos *touchscreen*, financiado pelo CNPq, e aprovado na Comissão de Ética na Pesquisa da UFRRJ sob o parecer de número 604/2015.

[4]Celular ou *smartphone*? Frequentemente, para o senso comum, essas palavras são apresentadas como sinônimas. Todavia, enquanto a primeira é utilizada exclusivamente para ligações e envio e recebimento de mensagens do tipo *Short Message Service* (SMS), Serviço de Mensagens Curtas, a segunda, além de realizar essa função, possui um sistema operacional (por exemplo, *Android* ou iOS) que permite conexão coma Internet. Apresentamos essa breve explicação e pedimos licença a você, leitor, para que em alguns momentos possamos usufruir desse senso comum com o objetivo de dar maior fluidez ao texto.

interagir (incluindo diversos tipos de toques em tela) mediante o uso, ao tipo de tarefa a propor, entre outros (BAIRRAL, 2018).

Esses olhares demandam atenção em outros elementos. Kenski (2009), por exemplo, coloca em destaque o papel da interação mediante o uso de uma nova tecnologia. Para a autora, a interação e a comunicação social são condições necessárias aos processos de ensino e aprendizagem e não são excluídas à medida que surge ou utilizamos uma nova tecnologia. A estudiosa alega que o uso da tecnologia em si não garante a revolução do aprendizado e tampouco resolve os problemas da educação (KENSKI, 2009), o diferencial está na forma como o uso desse recurso é colocado para mediação entre professores e alunos.

É importante destacar que dadas às circunstâncias do momento atual, no qual vivemos uma pandemia de COVID-19, doença causada pelo novo Coronavírus, o *smartphone* tem sido, em muitos casos, a principal fonte de acesso à educação formal (da educação básica ao ensino superior), fato que evidencia a necessidade de se pensar propostas pedagógicas voltadas para as tecnologias digitais e ratifica o potencial do dispositivo.

Em sintonia, defendemos a proposta de tarefas que evidenciem novos elementos acerca do uso dos *smartphones* em sala de aula. Em relação à implementação desse dispositivo em situações de ensino, se faz necessário identificar potencialidades e limitações do recurso a fim de dar ao seu uso o teor adequado com objetivo de proporcionar a construção e o desenvolvimento conceitual. Em suma, o que destacamos realça o fato de que, em um cenário em que os *smartphones* estão cada vez mais presentes nas salas de aula, tornando-se dispositivos quase indispensáveis para professores e alunos, parece-nos legítimo propor situações de ensino em que o aparato se configure como recurso mediador.

Frente ao desafio de incorporar o *smartphone* à educação, buscando possibilidades e contribuições deste recurso ao ensino e aprendizagem de conceitos geométricos, acreditamos que de igual importância seja a elaboração e implementação de atividades que contemplem a mediação e a reflexão. Consideramos o uso do *smartphone* em sala de aula não apenas como recurso atrativo e motivador, mas sim um instrumento que possa assumir aspectos metodológicos que vão além dessas qualidades e seja utilizado com uma proposta pedagógica muito bem delimitada e de forma consciente por professores e alunos.

Argumentamos até agora acerca do nosso direcionamento em implementar atividades para a aprendizagem matemática por meio do *smartphone* como recurso didático, mas de que maneira usaremos o dispositivo neste estudo? Atualmente, em várias escolas de nível básico, o ensino ainda está pautado em práticas que valorizam a exposição oral, delegando ao professor o papel principal no ato da produção do conhecimento. Esse tipo de aula pode não atender à demanda de uma sociedade de inovações tecnológicas e tampouco se configurar como uma intervenção efetiva de aprendizagem. Quando estreitamos o olhar para o ensino da Matemática, identificamos problemas alarmantes. Segundo o relatório publicado pela OCDE[5], o Brasil está entre os dez países com pior rendimento escolar em matemática, ciências e leitura (OCDE, 2016). Ainda segundo o estudo, 67,1% dos estudantes brasileiros apresentam um baixo rendimento e proficiência em Matemática.

Não estamos, com a apresentação destes dados, supervalorizando a aplicação desse tipo de avaliação, frequentemente usada para inferências como essas. Entendemos que o processo avaliativo para o raciocínio matemático está além de uma resposta final de uma questão. Contudo, serve o alerta, dado que os estudantes que aprendem bem certos conceitos matemáticos, por meio de recursos variados, fugindo das tediosas listas de exercícios, são capazes de se saírem bem em qualquer conjectura.

Historicamente, projetos voltados para tecnologia informática nas escolas, como o Programa Nacional de Tecnologia Educacional (PROINFO)[6], se tornaram limitados devido ao uso de equipamentos caros, de difícil manuseio e mantidos em ambientes controlados. Esta assertiva e o fato de o celular se apresentar como mais um elemento a compor o cenário educativo, particularmente visando aos processos de ensino e de aprendizagem de conceitos geométricos, representa uma das justificativas deste estudo que desenvolvido no âmbito do Programa de Pós-graduação Contextos Contemporâneos e Demandas Populares (PPGEduc[7]) e do Grupo de Estudos e Pesquisas da Tecnologias da Informação e Comunicação Matemática (GEPETICEM[8]).

Outro argumento dialoga com as possibilidades de implementações de tarefas matemáticas para o uso do GeoGebra em sua versão aplicativo para *smartphone*. Destacamos que, para o ensino e aprendizagem de Geometria, o *smartphone* pode ser utilizado em sala de aula por meio dos mais variados AGD, o que traz novas possibilidades para o ensino em uma dinâmica que possibilita aos alunos mover, experimentar, analisar e refletir (ARZARELLO; BAIRRAL; DANÉ, 2014; BAIRRAL; ASSIS; SILVA, 2015; BAIRRAL; ARZARELLO; ASSIS, 2017) diretamente por toques na tela do próprio dispositivo.

Em face da exposição acima, a tese defendida é que mediante o ensino de retas paralelas cortadas por transversal será possível abordar boa parte dos conteúdos da geometria plana previstos para os anos finais do Ensino Fundamental. Todavia, essa abordagem deve assumir os DMcTT como uma extensão física do nosso corpo em uma dinâmica de aula que preconize interação e formas diversas de linguagem (escrita, pictórica, imagética, metafórica, …). Dessa forma, o

[5] Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
[6]Disponível em: http://portal.mec.gov.br/proinfo Acesso em: 05 mar. 2021.
[7]O estudo compõe a linha de pesquisa 1 que, entre outros atributos, objetiva refletir a respeito das práticas educativas e os processos de ensino e aprendizagem de modo a abarcar as tecnologias digitais.
[8]Grupo de Estudos e Pesquisas das Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática formado por licenciandos e professores de matemática atuantes nos diferentes níveis da educação básica e no ensino superior. Disponível em: http://www.gepeticem.ufrrj.br/ Acesso em: 05 mar. 2021.

smartphone assume um papel de destaque na nossa proposta, pois circunda as reflexões tecidas acerca da Geometria, metáforas, construção e desenvolvimento conceitual, figura nos episódios de ensino por meio das interações e reflexões dos discentes, atores principais nesta obra, e é ferramenta do pesquisador, pois está presente nos caminhos metodológicos que adotamos para coleta dos dados – como na gravação de áudio e vídeo, captura de tela das manipulações e nas notas do pesquisador – e na articulação desses e outros elementos no processo de análise, o que envolve transcrições, *printscreen*, toques e escritas.

Apresentamos parte das motivações que movem à construção desta pesquisa, argumentando e destacando as justificativas e a relevância e, na sequência, como esse movimento cíclico que citamos se torna elemento construtor e constitutivo. Além de tais pressupostos, outras "vozes" (BORBA; ALMEIDA; GRACIAS, 2018) integram o estudo: as lentes teóricas, a abordagem metodológica e as análises. Assim, seguindo um roteiro, apresentamos as cenas dos próximos capítulos.

O primeiro, *"*acendendo o display e ampliando as buscas*"* é quase a "luz cênica", pois diz respeito às inquietações (pessoal e profissional) do autor e à sistematização de um mapeamento que realizamos a fim de construir as bases para algumas de nossas escolhas e interpretações, permitindo-nos identificar novos direcionamentos, as relações entre o contexto e o problema da pesquisa.

No segundo, "dois toques na Geometria*"*, apresentamos um breve percurso histórico da Geometria e algumas de suas contribuições. Assim argumentamos a respeito da relevância do estudo de retas paralelas cortadas por uma transversal e que de modo visualização, construção e desenvolvimento conceitual podem andar juntos. Também destacamos potencialidades dos AGD aos processos de ensino e de aprendizagem e as especificidades desses ambientes em DMcTT.

No terceiro, "conceitos*"*, discutimos a concepção que adotamos para conceito neste estudo. Iniciamos, então, respondendo a seguinte questão: "o que é um conceito?". Tendo como base a neurociência e analisando a relevância dos conceitos aos processos de raciocínios, examinamos as visões a respeito de conceitos no campo da psicologia cognitiva, ressaltando o papel da visão teórica para esta pesquisa.

Em "metáforas", que compõe o quarto capítulo, discutimos a primeira versão da teoria da metáfora conceitual de George Lakoff e Mark Johnson, destacando alguns pontos principais e como algumas das ideias que a compõe estão ligadas à Matemática. Na segunda parte do capítulo, discutimos acerca de metáforas, ensinos e aprendizagens.

No quinto capítulo, "configurações metodológicas", apresentamos as características fundamentais da "pesquisa de desenvolvimento", abordagem teórico-metodológica que orientou este estudo, os sujeitos e alguns detalhamentos sobre as tarefas elaboradas. Situamos o papel do *smartphone* e como ele possibilita uma articulação entre a realização do trabalho docente e a pesquisa.

"Toques, reflexões e escritas" compõem o sexto capítulo, que trata das interações, das negociações, das manipulações e das escritas dos nossos atores, discentes participantes do estudo, evidenciados durante as implementações e que nos ajudaram a compor e a narrar os episódios de ensino.

Por fim, no "pós-créditos" respondemos ao questionamento inicial, apresentamos novas teorias que emergiram dos dados, perspectivas para pesquisas futuras e retomamos a tese.

CAPÍTULO I – ACENDENDO O *DISPLAY* E AMPLIANDO AS BUSCAS

Acender o *display* significa o primeiro passo para a visualização de uma imagem na tela. Porém, as inquietações do autor antecedem a imagem. Neste capítulo, apresentamos a mudança de percurso, dos cliques aos toques, e as novas buscas, sistematizadas no mapeamento que realizamos com a descrição e análise de estudos voltados para o ensino e para a aprendizagem de conceitos geométricos por meio de manipulações *touchscreen*, para construção de um repertório que ampare a nossa proposta.

1.1 Dos Cliques aos Toques[9]

> Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino. Esses quefazeres se encontram um no corpo do outro. Enquanto ensino contínuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago. Pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade. (FREIRE, 2009, p. 29)

Minha trajetória acadêmica iniciou em 2006, com ingresso no curso de Licenciatura em Matemática no Centro Universitário Geraldo Di Biase (UGB/FERP), na cidade de Volta Redonda (RJ). Logo de início, me senti desafiado com o estudo de disciplinas como: Álgebra Linear, Lógica, Teoria dos Conjuntos e Teoria dos Números. Estes temas, por um lado, permitiram-me um novo olhar em relação à disciplina, por representar algo totalmente diferente da matemática escolar a que eu estava habituado, e por outro lado, trouxeram-me uma tênue inquietação de que somente aquele corpo de conhecimentos técnicos poderia não ser o suficiente para lidar com uma série de questões peculiares à dinâmica de sala de aula, tais como alunos com dificuldade e pouco interesse pelo conhecimento matemático. Fato é que só mais tarde pude refletir a respeito de tais questões, embora elas já estivessem vivas em minha memória por ter observado algumas delas enquanto aluno de escola pública.

O sentimento de que ensinar Matemática estava além de apresentar definições, realizar demonstrações e propor listas de exercícios tem-me acompanhado desde aquela época e foi, ainda durante a graduação, que algumas das minhas inquietações, em relação ao ensino, tiveram amparo em duas disciplinas que, sobretudo, possibilitaram-me um olhar diferente daquele que eu havia

[9]Salvo esta seção e a introdução do capítulo conclusivo, que envolveram episódios relacionados à trajetória pessoal e profissional do autor, as demais partes desta investigação foram dissertadas sempre na primeira pessoa do plural. E sobre este fato, embora a confecção do texto tenha exigido muitos momentos de "solidão" no qual estávamos eu, o computador e o café, a escrita só foi possível por permitir que um fluxo de imagens tenha se constituído por meio de muitas interações: as leituras, as orientações, as trocas com os colegas de pesquisa, com os alunos, entre tantas outras.

vivenciado até aquele momento do curso. Assim, foi por meio das disciplinas de "Informática no Ensino de Matemática" e "Tópicos em Educação Matemática", que cursei durante os anos de 2008 e 2009, que conheci novas maneiras de pensar a aprendizagem e o ensino da Matemática.

Associado à ideia de que novas reflexões estavam reconfigurando minha forma de ver e pensar sobre o ensino da Matemática, o fato de ser técnico em informática, e sempre um entusiasta pela revolução e simplicidade que o computador trouxe às nossas vidas, escolher um tema de trabalho para conclusão do curso de graduação, no qual a pesquisa estivesse centrada na possibilidade de articular informática e aprendizagem matemática, ocorreu de forma natura. Porém, antes de prosseguir, julgo importante relatar a forma como este evento foi tomando corpo.

Durante o ano de 2009, tive a oportunidade de participar como multiplicador do "Projeto Extensivo à Comunidade", desenvolvido pelo Núcleo de Tecnologia Educacional – NTE/Volta Redonda e mantido pela Secretaria Estadual de Educação do Rio de Janeiro (SEEDUC/RJ). O objetivo do projeto era oferecer reforço escolar, em Matemática, para alunos do Ensino Médio de alguns colégios da rede estadual por meio da implementação de atividades com uso de *softwares* educacionais, como, por exemplo, o C.a.R[10] e o *Winplot*[11] no laboratório de informática das unidades escolares para estudantes com baixo rendimento na disciplina. A participação no projeto durou quatro meses e o engajamento na realização das atividades me permitiu reflexões acerca do trabalho docente e o apontamento para a escolha do meu tema de pesquisa, o qual, em conjunto com outros quatro licenciandos analisamos o papel do computador nas sociedades, o ensino de matemática como um *locus* de pouca inovação e apresentamos alguns *softwares* para o ensino e aprendizagem de Matemática. Essas reflexões propiciaram-me, entre outros aprendizados, o entendimento de que nem sempre, no calor e dinâmica de uma aula, é possível concluir todo o planejado, o que me fez perceber que a aprendizagem é algo singular, que, o ensino e a pesquisa devem caminhar juntos e necessário se faz uma busca incessante para ser o investigador da própria prática.

Após a graduação, no período entre 2010 e 2011, realizei o curso de especialização em Educação Matemática, também pelo UGB/FERP. Foi um período profícuo, com novas questões e indagações a partir de algumas reflexões que fizeram dessa, uma etapa importante na minha formação. Retomei algumas leituras relacionadas às disciplinas Informática Educativa, Etnomatemática, História da Matemática e tomei conhecimento de novas tendências em Educação Matemática, como a Educação a Distância (EaD) no ensino de Matemática. Todavia, faltava-me experimentar algo que realmente pudesse dar sentido a todas essas reflexões, o que ganhou forma no ano seguinte.

---

[10]Disponível em: http://car.rene-grothmann.de/doc_en/index.html Acesso em: 21 set. 2019.
[11]Disponível em: < https://winplot.br.softonic.com/> Acesso em: 21 set. 2019.

No início de 2012, iniciei minha caminhada no magistério, ao ser aprovado no concurso da SEEDUC/RJ, como professor docente II[12]. Fui lotado nos colégios Fagundes Varela e Alfredo Pujol, ambos localizados em Rio Claro (RJ). Nesse mesmo ano, assumi a segunda matrícula, ao ser aprovado em outro concurso também para a SEEDUC/RJ, específico para cidade de Paulo de Frontin (RJ). Desde então, atuo nas modalidades: Educação de Jovens e Adultos, anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Com ingresso no magistério, a prática docente trouxe a necessidade de novas buscas e outras questões surgiram naturalmente. A fim de buscar algumas respostas, ainda em 2012, iniciei o curso de Pós-Graduação, especialização *Lato Sensu*, em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática, oferecido pelo Laboratório de Novas Tecnologias de Ensino (NTEM) da Universidade Federal Fluminense (UFF). Concomitante ao curso, tive a oportunidade de participar do "Projeto de Formação Continuada", oferecido para professores da SEEDUC/RJ, no qual a ênfase estava em novas abordagens de conteúdos relacionados ao currículo de matemática para segunda série do Ensino Médio. Assim como a especialização, o curso também foi realizado na modalidade EaD. Destaco desse período novas reflexões que se constituíram em experiências importantes para minha formação.

Os anos seguintes também foram proveitosos. Em 2013, participei do projeto "Reforço Escolar de Matemática", oferecido para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio da SEEDUC/RJ. Durante o projeto tive a oportunidade de dialogar com professores de diferentes realidades e experimentar a implementação de um conjunto de tarefas elaboradas pelo Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro (instituição responsável pela produção do material). O objetivo era possibilitar o desenvolvimento de conceitos matemáticos mediante a exploração de tarefas variadas, fato que, naquele momento, direcionou minha atenção para a produção de tarefas com a possibilidade de explorar e investigar propriedades matemáticas a partir de situações didáticas que envolviam a construção de sólidos geométricos, jogos, entre outras situações.

No ano seguinte, 2014, concluí a especialização NTEM e fui aprovado para compor o quadro de tutores do Centro de Educação a Distância do Estado do Rio de Janeiro na disciplina de Probabilidade e Estatística. Em seguida, assumi as disciplinas de Fundamentos de Algoritmo para Computação – todas do curso de Tecnologias em Sistemas de Computação (UFF) –, e Matemática na Educação I e II, estas últimas no curso de Pedagogia da Universidade Federal do Estado do Rio

[12]Professor com formação específica para a disciplina a qual se candidatou e pode atuar com nos anos finais do Ensino Fundamental, Ensino Médio e/ou Educação de Jovens e Adultos. Atualmente a carga horária, no caso de uma matrícula, pode ser de 16 ou 30 horas.

de Janeiro. O interesse também se manteve como anseio às questões que estavam diretamente ligadas à minha atuação profissional.

O que discorri até aqui a respeito da minha trajetória acadêmica esteve mais centrado na formação profissional. Desse ponto em diante, tecerei um caminho híbrido, destacando pontos importantes na atuação docente, com aspectos relacionados à minha formação, o que, de certo modo, conduziu-me ao tema da presente pesquisa.

No breve período de atuação profissional (2012, 2013 e 2014), pude constatar um cenário bem diferente do que encontrei durante a participação do projeto pelo NTE. Laboratórios precários e de difícil acesso, equipamentos em péssimas condições e a falta de um profissional responsável pela organização e manutenção desse espaço. Contudo, aliado a essa constatação, também destaco que havia dificuldades de ordem didático-pedagógica. Embora eu já tivesse realizado algumas implementações no laboratório de informática, até aquele momento ainda sentia que o meu conhecimento era superficial, pois além do saber técnico, eram necessárias reflexões que amparassem a realização de novas intervenções.

À vista disso, no ano de 2015, iniciei como aluno na primeira turma do Mestrado em Educação em Ciências e Matemática (PPGEduCIMAT) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Assim, tive a oportunidade de ser integrado ao GEPETICEM, grupo coordenado pelo professor Marcelo Almeida Bairral.

Após ingressar no grupo, tomei conhecimento de vários eventos, seminários e congressos na área de Educação Matemática, particularmente os voltados para Tecnologias Digitais e Educação a Distância. Com a oportunidade de participar dos debates ocorridos naqueles espaços, veio a necessidade de (re)pensar algumas das minhas práticas. Se por um lado os computadores pareciam ser um caminho alternativo para o ensino e aprendizagem da Matemática, por outro lado, minha constatação de que estava cada vez mais difícil realizar atividades em tais espaços conduzia-me à busca por novas possibilidades, o que ocorreu quando direcionei minha atenção aos alunos em sala de aula. Pode parecer estranho, mas minha ideia foi de encontro ao que boa parte do corpo docente dos colégios em que eu lecionava apontava como o grande problema para falta de interesse dos estudantes, o *smartphone*.

Dessa forma, meu direcionamento para o uso dos dispositivos móveis em situações didáticas se delineava. A primeira atividade que realizei foi com estudantes do 8.º ano do Ensino Fundamental no estudo de propriedades dos quadriláteros por meio do *Sketchometry*, um aplicativo de geometria, que conheci no GEPETICEM e alguns integrantes do grupo já realizavam atividades, com a versão para *tablet*, por intermédio do projeto de pesquisa “construindo e analisando práticas educativas em Educação Matemática com dispositivos *touchscreen*”.

Minha motivação pelo tema elevou-se durante o biênio 2015-2016, quando novas reflexões entraram em cena. Pouco explorado no ensino de conceitos geométricos, o *smartphone* me oferecia uma oportunidade de vislumbrar o novo, o que me permitiu, durante o estudo que realizei (HENRIQUE, 2017), mesclar um pouco do que havia me levado até a busca por algumas respostas, o uso do laboratório de informática no ensino de tópicos da Geometria euclidiana, com a nova possibilidade: o celular. Com isso, pude aprofundar-me em leituras relacionadas ao uso dos dispositivos móveis para o aprendizado da Matemática e e, desde essa época, realizo várias implementações em sala de aula com tarefas propostas para o estudo de conceitos geométricos a partir do *smartphone*. O relato até aqui sintetiza o fato de que estou em um processo de busca e aprendizado, me reinventando e (re)construindo as minhas práticas, o que, nas palavras de Freire (2009, p. 29), pode ser lido como: “Enquanto ensino continuo buscando, reprocurando. Ensino porque busco, porque indaguei, porque indago e me indago”.

No ano de 2017, a fim de dar prosseguimento à pesquisa, ingressei no curso de doutorado em Educação pelo PPGEduc da UFRRJ. Assim, com essa retrospectiva, o breve relato constitui uma espécie de *fac-símile* da minha trajetória, no qual o objetivo está em apresentar a forma como de dos “cliques”, quando movido pelo interesse no uso do computador para aprendizagem matemática, cheguei aos “toques”, voltando-me para abordagem de conceitos geométricos por meio da exploração e análise de propriedades euclidianas no GeoGebra com toques na tela do *smartphone*.

Nas próximas linhas, então, apresento algumas reflexões que compõem a pesquisa e servem de alento para continuar a caminhada e ter a consciência de que é preciso manter o olhar atento às novas possibilidades de ensinar e de aprender, por isso: “pesquiso para constatar, constatando, intervenho, intervindo educo e me educo. Pesquiso para conhecer o que ainda não conheço e comunicar ou anunciar a novidade*”* (FREIRE, 2009, p. 29). Trata-se de novas buscas que fortalecem minhas inquietações e as motivações para este estudo.

1.2 *Menu* Iniciar

O crescimento emergente de dispositivos com telas sensíveis ao toque e a apropriação desses artefatos por professores e alunos tem permitido novos olhares na maneira de ensinar e aprender Geometria (BAIRRAL; ARZARELLO; ASSIS, 2015). Sinclair *et al*. (2016) destacam que a possibilidade de trabalhar Geometria por meio dos toques em telas representa uma das grandes mudanças em relação ao ensino da geometria com tecnologia. Para os autores, isto é decorrente de dois fatos: a ampla disponibilidade de dispositivos móveis e a familiaridade dos estudantes. Além de tais constatações, ressaltamos que a inserção dos dispositivos móveis com a tecnologia *touchscreen* em situações de ensino implica mudanças de ordem didática, cognitiva e epistemológica (BAIRRAL; ASSIS; SILVA, 2015b).

Com o intuito de compor parte do subsídio teórico da nossa investigação, que está pautada na análise do desenvolvimento conceitual de relações e propriedades entre retas e ângulos, mediante implementações e análise de tarefas exploratórias e investigativas a partir das manipulações no aplicativo GeoGebra em *smartphone,* apresentamos este levantamento. O ponto de partida para a construção da inquirição é um estudo anterior (HENRIQUE, 2017) – no qual foram identificadas lacunas, contribuições e desafios da implementação de atividades com o mesmo roteiro que adotamos –, a fim de construir as bases e alguns direcionamentos para o presente trabalho.

O estudo centrou-se na análise do desenvolvimento conceitual por meio de uma metodologia de ensino pautada na valorização do diálogo, na argumentação e na escrita, mediante a elaboração, realização e análise de tarefas propostas para a abordagem de (1) polígonos e polígonos regulares e (2) retas paralelas cortadas por uma transversal. A implementação (1) foi realizada no laboratório de informática com estudantes do 9.º ano do Ensino Fundamental no ambiente GeoGebra clássico, ou seja, em computadores e a (2) em sala de aula, com discentes do 8.º ano do Ensino Fundamental, por intermédio o aplicativo GeoGebra em *smartphone*, instalado nos dispositivos dos próprios sujeitos.

A fim de compor as bases para as inferências no processo analítico, Henrique (2017) realizou um levantamento a partir de artigos publicados em alguns dos mais importantes periódicos de educação matemática do país, como BOLEMA[13], Boletim GEPEM *online*[14], Educação Matemática Pesquisa[15], Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo[16], Vidya[17] e com intuito de ampliar a coleção acrescentou dois textos: Bairral, Assis e Silva (2015b) e Silva (2012), ambos disponíveis na Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia[18].

Os estudos localizados no mapeamento e figurado durante as análises são apresentados na Tabela, identificados os autores, o ano de publicação, a temática e as contribuições.

[13] Disponível em http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/ *Link* testado em 04 set. 2020.
[14] Disponível em http://costalima.ufrrj.br/index.php/gepem/index *Link* testado em 04 set. 2020.
[15] Disponível em http://revistas.pucsp.br/emp *Link* testado em 04 set. 2020.
[16] Disponível em http://revistas.pucsp.br/IGISP *Link* testado em 04 set. 2020.
[17] Disponível em http://periodicos.unifra.br/index.php/VIDYA/index *Link* testado em 04 set. 2020.
[18] Disponível em https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/index *Link* testado em 04 set. 2020.

Tabela 1

Tabela 1 – Estudos que apresentaram contribuições para análise de atividades matemáticas em dispositivos móveis no estudo de relações entre retas e ângulos

Ano	Autor(es)	Temática/Ensino	Contribuições
2012	Meier e Gravina	Modelagem Geométrica	Análise das implementações com computadores
2012	Silva G.	Contribuições pedagógicas de um AGD	Potencialidades de AGD; análise implementações com *smatphones*
2013	Padilha, Dullius e Quartieri,	Construção de fractais	Proposição de atividades para averiguar o conhecimento prévio dos estudantes
2014	Gobbi e Leivas	Perímetros e áreas de Figuras geométricas planas	Análise das implementações com *smartphones*
2015b	Bairral, Assis e Silva	Investigação do uso de dispositivos *touchscreen* para o ensino aprendizagem geométrica	Seleção do aplicativo para *smatphone*; Análise das implementações com *smartphones*
2015	Silva S.	Construção de conceitos	Análise das implementações com computadores

Fonte: HENRIQUE, 2017, p. 11

Embora tenha sido uma investigação mais pontual, com uma revisão narrativa (ROTHER, 2007), segundo o autor, o levantamento permitiu identificar a carência de trabalhos relacionados à abordagem de retas paralelas intersectadas por uma transversal em AGD. Das pesquisas selecionadas para análise, e consequentemente como subsídio para a investigação, nenhuma tratava da temática abordada na pesquisa em dispositivos móveis, como sinalizado por Henrique (2017). A respeito dessa constatação, uma possível explicação está no fato que no início de 2016 (momento em que foram realizadas as buscas) os estudos com dispositivos móveis no cenário nacional ainda eram incipientes. Outra possível explicação pode estar atrelada à data de lançamento do aplicativo GeoGebra, final de 2013 na versão para *tablet* e no final de 2015 na versão para *smartphones*[19] e ainda no fato que ambientes como o *Geometric Constructor*[20], utilizado na pesquisa de Assis (2016), exige a conectividade dos usuários, o que dificulta a implementação de atividades em sala de aula, principalmente em uma escola pública.

A dificuldade justifica este novo levantamento e reforça a importância e relevância desta investigação por unir dois campos férteis para abordagem geométrica: a utilização de um AGD mediado pelas manipulações em telas e a abordagem de retas paralelas cortadas por uma

[19]Disponível em <https://blog.geogebra.org/2013/09/geogebra-tablet-apps/>e <https://blog.geogebra.org/index.html%3Fp=1023.html>. Acessados em 30 de mar. 2020.

[20] Disponível em: http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc_html5e/ Acesso em: 28 fev. 2020.

transversal, tópico da Geometria euclidiana que compõe um enorme repertório para exploração de propriedades e relações presentes no estudo de polígonos.

As contribuições e os desafios que destacamos estão relacionados à implementação (2). No estudo, foram discutidos aspectos didáticos e pedagógicos, como a mobilidade, o estímulo à curiosidade e o planejamento. Para Henrique (2017), a mobilidade dos dispositivos pode remodelar o laboratório de informática, levando-o para sala de aula por intermédio dos próprios estudantes, além de estimular à curiosidade e propiciar mais autonomia dos estudantes na realização das tarefas, pelo fato de que cada aprendiz pode utilizar o próprio aparelho. Contudo, exige um planejamento com delineamento e manutenção da proposta, para que as atividades não fiquem circunscritas ao lazer, por se tratar de um dispositivo de uso pessoal com inúmeros aplicativos que podem ser mais atrativos, caso não haja continuidade e convite à reflexão.

Em relação aos aspectos cognitivos, foram analisadas as expressões metafóricas dos discentes a fim de identificar a presença de alguma metáfora conceitual, como metodologia de ensino, para subsidiar, por meio do diálogo, a ressignificação e desenvolvimento conceitual mediante análise das propriedades e relações geométricas com manipulações na tela do *smartphone*.

Esse cenário permitiu aos estudantes a visualização, análise e reflexão, o que se mostrou instigante e motivador, por possibilitar o exame de vários elementos articulados aos toques em tela. Como desafio, foi sinalizada a dificuldade de construção e análise em telas relativamente pequenas, geralmente menor ou igual a quatro polegadas (HENRIQUE, 2017).

Estabelecer o estado de uma pesquisa anterior é essencial para mostrar em que a nova investigação avança em relação à outra (RANDOLPH, 2009). Desse modo, estabelecemos o nosso ponto de partida com o propósito de ampliar as buscas e avançar na discussão entre as novas descobertas e as anteriores. Na próxima seção, apresentamos a configuração deste processo, com os protocolos estabelecidos, os métodos adotados e os textos selecionados.

1.3 *Menu* Configurações

O mapeamento bibliográfico integra a revisão de literatura e constitui um momento inicial importante. No Brasil, com a disponibilização de Dissertações e Teses no Catálogo da Capes torna-se cada vez mais frequente a busca no portal. Embora a página não seja atualizada com tanta frequência, podemos dizer que é um *locus on-line* que reúne a maioria das pesquisas brasileiras oriundas de Programas de Pós-Graduação.

A realização de um levantamento bibliográfico exige do pesquisador uma série de cuidados, a fim de delimitar a problemática evitando que a inquirição extrapole os limites da abrangência do estudo e como a pesquisa realizada na *internet* (MARQUES, 2021) é um processo não estático, exige a adoção de critérios bem definidos. Dessa forma, é preciso estabelecer a metodologia, delimitar o período de busca, a abrangência, as bases de dados, definir a *string* de busca, os critérios de inclusão e exclusão e os procedimentos adotados.

Dentro dos limites deste estudo, definimos que o levantamento, inicialmente, deveria localizar pesquisas com contribuições didáticas, cognitivas ou epistemológicas a partir das articulações entre desenvolvimento conceitual, dispositivos móveis com telas táteis no ensino e aprendizagem de propriedades e relações da Geometria euclidiana, particularmente, aquelas oriundas de retas paralelas intersectadas por uma transversal.

Para estabelecer o período de busca, nos pautamos em apontamentos apresentados em Arzarello, Bairral e Dané (2014), Bairral, Assis e Silva (2015a), Borba, Scucuglia e Gadanidis (2018) e, como já mencionamos, nas datas de lançamento do GeoGebra na versão aplicativo. Assim, o período refere-se a uma maior ascensão dos *smartphones* em sala de aula e alcança pesquisas realizadas entre 2014 e 2020 (até o momento das buscas). Estabelecidos os períodos, selecionamos as bases de dados, conforme Quadro 1.

Quadro 1 – Bases de dados utilizadas no mapeamento

Base de dados	Endereço eletrônico
Biblioteca Digital Brasileira de teses e dissertações (BDBTD)	http://bdtd.ibict.br/vufind/
Catálogo de teses e dissertações da CAPES (BTDC)	https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses
Portal de Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (PPCAPES)	http://www.periodicos.capes.gov.br/
Google Scholar	https://scholar.google.com.br/

Fonte: elaboração própria

Na primeira etapa, apresentamos buscas realizadas no âmbito nacional. Duas pesquisas que encontramos, por meio de interlocuções com os pares e ampliam nosso campo de busca para o cenário internacional, serão descritas na seção “toques para ampliar”.

A construção da *string* de busca é uma tarefa desafiante. Em Henrique (2017), encontramos dificuldades impostas pela própria elaboração dos termos de busca e os operadores das bases de dados consultadas. A fim de otimizar o processo, buscamos subsídios apresentados em Koller, Couto e Hohendorff (2014) e alguns apontamentos e percalços sinalizados por Assis (2020) para construir de maneira mais direcionada os termos de busca.

As palavras-chave, elaboradas para construção da *string* de busca, foram agrupadas por meio de categorias e subcategorias. Por exemplo, dentro da categoria dispositivos móveis temos a subcategoria *smartphone*. A ideia foi ampliar a abrangência, sem esbarrar na dificuldade da localização de um grande quantitativo de estudos não relacionados com o tema, para depois afunilar. Com isso, elencamos Geometria e dispositivos móveis como categorias principais e a elas relacionamos as seguintes subcategorias: retas paralelas, transversal, *smartphone*, *tablet*, GeoGebra. Na Figura 1 apresentamos as combinações que formulamos a partir destes termos e o operador AND.

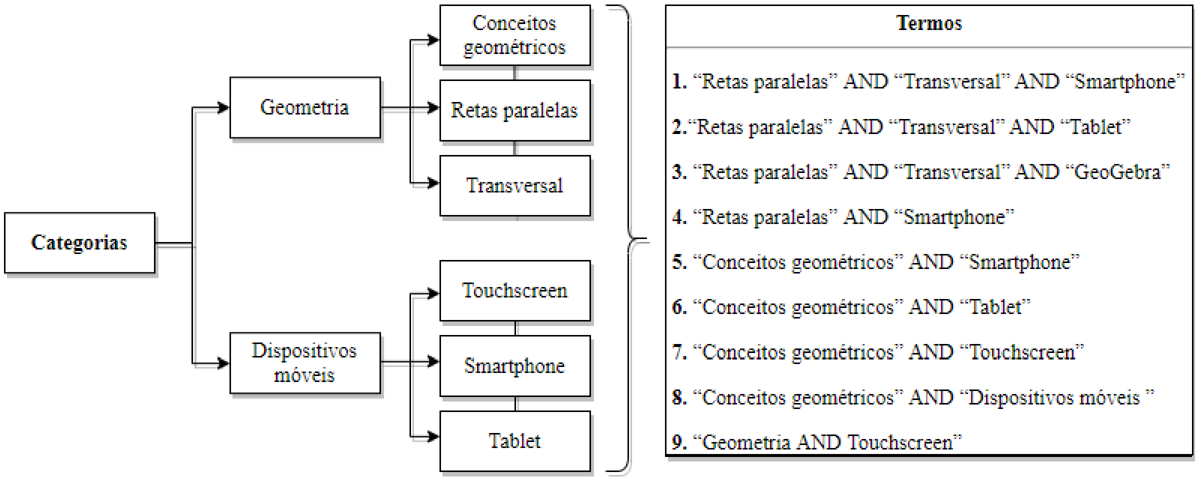


Figura 1 – Termos utilizados na string de busca
Fonte: elaboração própria

Antes de prosseguirmos com a descrição dos métodos que adotamos, fazemos dois esclarecimentos. O primeiro diz respeito aos operadores lógicos booleanos (ou simplesmente operadores booleanos). Os operadores AND, OR e NOT têm como objetivo mostrar ao sistema a forma como as palavras devem ser combinadas, direcionando, dessa maneira, as buscas. O segundo é a respeito da *string* de busca que passou por pequenas alterações durante a inquirição, pois cada base de dados utiliza operadores específicos (COSTA; ZOLTOWSKI, 2014). Na mesma direção, Assis (2020) sinaliza a importância de utilizar os filtros disponíveis nos repositórios, tais como o ano da publicação, a área de concentração, entre outros, no processo filtragem para seleção dos estudos. Para ilustrar, vejamos o PPCAPES (Figura 2).

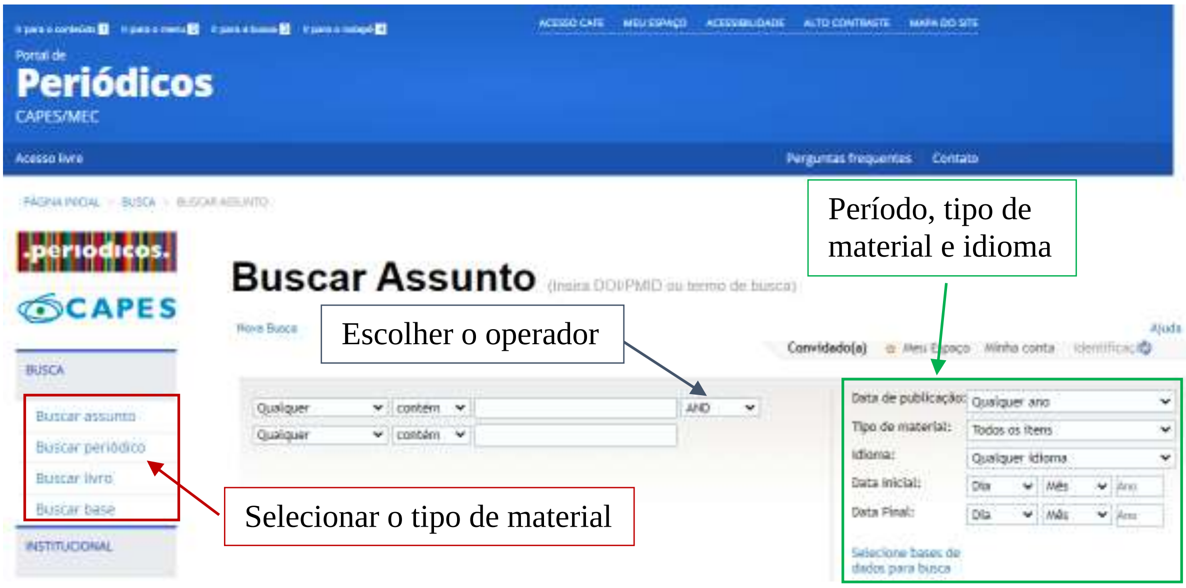


Figura 2 – Busca por assunto no PPCAPES
Fonte: *printscreen* da página

No periódico é possível realizar busca por assunto, período, tipo de material, especificar em que parte do texto o termo deverá ser identificado, selecionar o operador, o período etc.

Concluídas as primeiras etapas, elaboramos os seguintes procedimentos de filtragem para seleção:

1. Realizar a busca nas bases de dados identificando os termos construídos na *string* em qualquer parte do texto.
2. Fazer a primeira seleção a partir da leitura do título, resumo, palavras-chave e, quando houver a necessidade, introdução e conclusão.
3. Realizar a leitura completa dos textos.
4. Selecionar os textos que constituirão o aporte e subsídios para algumas de nossas reflexões.

Para seleção dos textos elaboramos os critérios de inclusão ou exclusão, conforme Quadro 2.

Quadro 2 – Critérios de inclusão ou exclusão (continua)

Critérios de Inclusão
• Contribuições de um AGD para o aprendizado de conceitos geométricos. • Contribuições das manipulações em telas para o aprendizado de conceitos geométricos. • Contribuições e desafios inerentes às implementações de atividades matemáticas com *smartphones*. • Análise dos DMcTT em práticas pedagógicas para o ensino e aprendizado geométrico. • Análise dos aspectos cognitivos do aprendizado geométrico por meio de um AGD. • Olhar atento em teorias que sustentam a análise da construção e desenvolvimento de conceitos geométricos.

‘Quadro 2. Continuação’

Critérios de Exclusão
• Textos repetidos. • Textos submetidos a eventos e relatos de experiência. • Estudos cuja temática não esteja relacionada à prática de sala de aula. • Estudos que não estejam relacionados a DMcTT.

Fonte: elaboração própria

As buscas e seleção dos textos nas bases BDBTD, BTDC e PPCAPES foram realizadas nos dias 20, 24 e 30 de abril de 2020. Um comentário de ordem técnica. A BDBTD usa o operador AND como padrão, ou seja, a busca “geometria” AND “dispositivos móveis”, conforme sinalizada na *string*, foi realizada como “geometria” “dispositivos móveis”, e, automaticamente, o operador AND foi inserido entre os termos. Fato que não acontece no BTDC. Já no PPCAPES há a possibilidade de colocar a data exata de busca. Dessa forma, o período foi inserido da seguinte maneira: 01/01/2014 a 30/04/2020, e na opção de busca avançada os operadores booleanos podem ser alocados por mecanismo de escolha.

No Quadro 3 apresentamos os resultados desta da primeira seleção, de acordo com as aproximações destacadas nos critérios de inclusão e com a exclusão apenas de textos repetidos.

Quadro 3 – Resultados da primeira seleção

String de Busca	**BDBTD**		**BTDC**		**PPCAPES**		**Total**	
	Total	**Selecionados**	**Total**	**Selecionados**	**Total**	**Selecionados**	**Repetidos**	**Para Análise**
1.	2	2	2	2	2	1	2	3
2.	0	-	0	-	1	0	0	0
3.	2	2	4	2	5	1	5	0
4.	2	2	2	2	4	1	5	0
5.	0	-	1	1	0	-	1	0
6.	0	-	0	-	3	0	0	0
7.	1	1	3	3	1	1	3	2
8.	0	-	1	1	5	1	2	0
9.	5	4	5	4	3	1	7	2
10.	15	2	20	3	21	1	4	2
Total	27	13	38	18	45	7	29	9

Fonte: elaboração própria

Selecionamos nove textos para leitura e análise, sendo um artigo, sete dissertações e uma tese. Na etapa seguinte, organizamos e fichamos as pesquisas destacando os objetivos, o embasamento teórico e os resultados. Após a mineração, selecionamos as pesquisas de Assis (2016), Gomes (2017), Henrique (2017), Meier (2017), Silva (2017), Duarte (2018) e Henrique e Bairral (2019) que apresentam perspectivas teóricas diferentes no que diz respeito ao uso de dispositivos móveis para o ensino e para a aprendizagem de conceitos geométricos, como análise dos gestos, desenvolvimento conceitual, processo de prova, e que estão embasados na teoria da cognição corporificada na qual apresentaremos em detalhes na próxima seção.

Nesta primeira etapa, por se tratar de bases mais específicas, optamos por usar apenas o operador AND na construção das combinações para a *string*. Entretanto, esse protocolo mostrou-se pouco eficaz nas buscas realizadas na quarta base estabelecida, o Google *Scholar* (Google Acadêmico). Consideramos ineficaz por apresentar discrepância entre os resultados obtidos, como podemos observar nas Figuras 3 e 4.

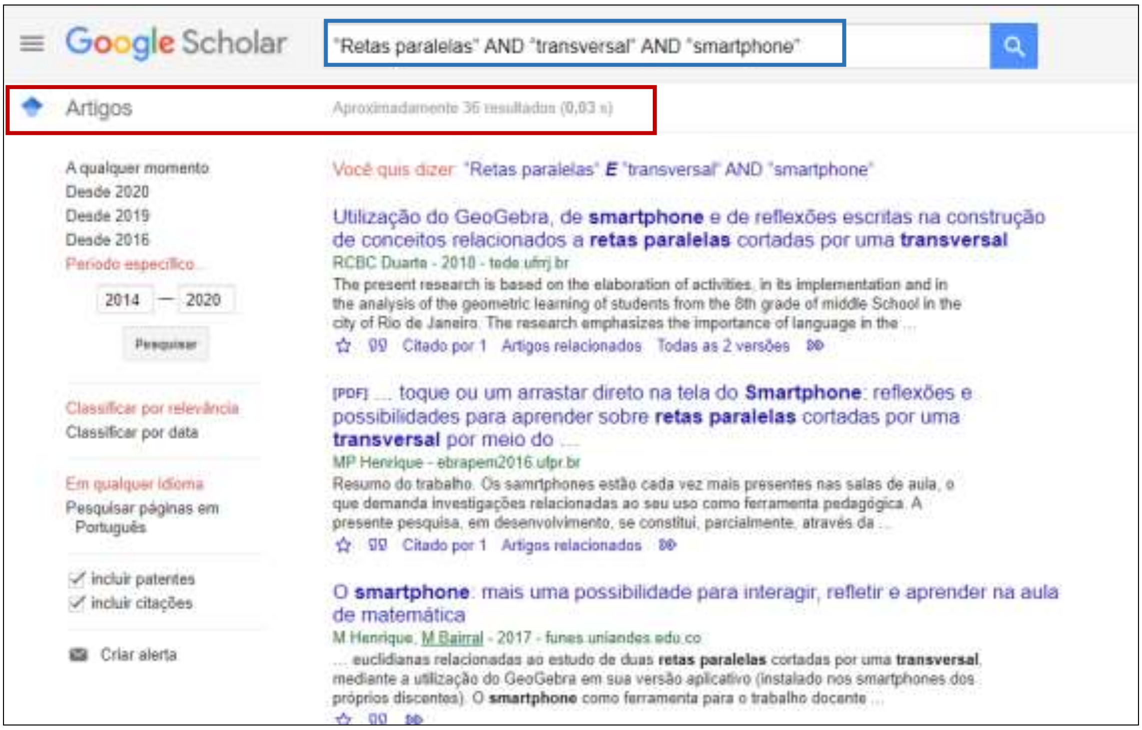


Figura 3 – Resultado da busca pelo termo “Retas paralelas” AND “transversal” AND “smartphone”
Fonte: Google *Scholar*

Figura 4 – Resultado da busca pelo termo "Geometria" AND "dispositivos móveis"
Fonte: *Google Scholar*

A dificuldade aqui está no fato de que enquanto na primeira busca "Retas paralelas" AND "transversal" AND "smartphone" (Figura 3), há 36 textos, dos quais boa parte são textos publicados em eventos ou estudos já selecionados na etapa anterior, para a busca pela combinação "geometria" AND "dispositivos móveis" (Figura 4) teve como resultado 2730 trabalhos, o que inviabiliza o processo.

Dessa forma, reformulamos a *string* com intuito de agilizar o processo e nos dias 7 e 8 de maio de 2020 realizamos novas buscas. É importante dizer que o Google Acadêmico é o maior portal de buscas disponível na *internet*. Nele é possível acessar teses, dissertações, artigos científicos e ainda uma variedade de materiais especializados (BENTO, 2012). É possível ainda realizar uma busca avançada a partir de palavras-chave articuladas aos operadores booleanos, exibir os arquivos publicados por autoria, base de dados e período, critérios que adotamos.

Diante do novo cenário reformulamos a *string* de busca inserindo o operador OR, conforme Quadro 4.

Quadro 4 – *String* de busca com o uso do operador OR

1. ("retas paralelas") AND ("transversal") AND ("smartphone"OR"tablet"OR"dispositivos móveis" OR "touchscreen") AND ("geogebra").
2. ("retas paralelas") AND ("smartphone"OR"tablet"OR"dispositivos móveis" OR "touchscreen") AND ("geogebra").
3. ("conceitos geométricos") AND ("smartphone"OR"tablet"OR"dispositivos móveis" OR "touchscreen") AND ("geogebra").

Fonte: elaboração própria

Vejamos agora os resultados obtidos no Quadro 5.

Quadro 5 – Resultados da segunda seleção

Google Acadêmico		
***String* de busca**	**Total de textos**	**Selecionados para Análise**
1.	29	1
2.	137	4
3.	153	4
Total	319	9

Fonte: elaboração própria

Para cada trabalho, iniciamos pela leitura do título, de acordo com a aproximação ao nosso objeto de estudo, realizamos a leitura do resumo e, quando necessário, introdução e conclusão. Ainda, durante o processo, utilizamos a ferramenta "artigos relacionados", disponível na plataforma, com o objetivo de localizar estudos que não tenham sido identificados pela *string* que utilizamos. Dos nove estudos selecionados para análise, apenas três compõem o nosso repertório: Bairral, Assis e Silva (2015b), Bairral (2017) e Menezes (2018). Aqui, os autores colocam em destaque questões epistemológicas relacionadas à ação de tocar na tela de um dispositivo móvel no aprendizado matemático e o apelo motivador proporcionado pelo recurso.

A revisão sistematizada nos permitiu a identificação inicial de dezoito estudos, dos quais dez estão alinhados com a nossa temática. No processo de garimpagem, ainda que alguns textos atendessem aos critérios de inclusão que elaboramos como protocolo, optamos por excluí-los por considerarmos que a discussão teórica era superficial. Por exemplo, a pesquisa relatada por Lima e Santos (2020) na qual as pesquisadoras analisaram as contribuições das tecnologias digitais, particularmente o aplicativo GeoGebra para *smartphones*, para a construção de conceitos relacionados ao estudo do teorema de Pitágoras por estudantes do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública da Paraíba. Embora haja uma aparente aproximação como o nosso tema de investigação, o estudo apresentado pelas autoras não avança no que diz respeito aos processos didático-pedagógico e cognitivo, pois não há um quadro teórico, a análise e as conclusões centram-se no desenvolvimento das atividades e na apreciação do *smartphone*. Vale ressaltar que o periódico de publicação recebe estudos das mais variadas áreas com um grande volume de publicação por número e embora o texto seja classificado como artigo, parece-nos mais próximo de um relato de experiência, dessa forma optamos por excluí-lo.

No Quadro 6, sistematizamos as pesquisas selecionadas destacando os autores, ano de publicação, as tecnologias digitais evidenciadas, o tema e os sujeitos participantes.

Quadro 6 – Síntese dos estudos selecionados a partir do processo sistemático de busca

Autor(es)	Tecnologias Digitais	Tema/tópico	Sujeitos
Bairral, Assis e Silva (2015b)	*Tablet* - *Geometric* - *Constructer* - *Sketchometry*	Teorema de Thébault Teorema de Varignon Bissectograma	Licenciandos em Matemática
Assis (2016)	*Tablet* - *Geometric Constructer* - GeoGebra - *Screen Recorder Pro*	Isometria	Alunos do 1.º ano do Ensino Médio
Gomes (2017)	*Smartphone* - GeoGebra	Ladrilhamento no plano	Alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental
Bairral (2017)	*Tablet* *Smartphone*	Não especificado	Não especificado
Henrique (2017)	*Smartphone* - GeoGebra - *AZ Screen Recorder*	Polígonos Polígonos regulares Retas paralelas cortadas por uma transversal	Alunos do 8.º e 9.º ano do Ensino Fundamental
Meier (2017)	*Smartphone* - Sketchometry - *AZ Screen Recorder*	Modelagem geométrica	Alunos do 2.º ano Ensino Médio Técnico
Silva (2017)	*Tablet* *Smartphone* - *FreeGeo* - *Sketchometry* - GeoGebra	Quadriláteros	Licenciandos em Matemática
Duarte (2018)	*Smartphone* - GeoGebra	Retas paralelas cortadas por uma transversal	Alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental
Menezes (2018)	*Smartphone* - Geogebra	Cálculo de área de um triângulo particular	Alunos do 3.º ano do Ensino Médio
Henrique e Bairral (2019)	*Smartphone* - Geogebra - *AZ Screen Recorder*	Retas paralelas cortadas por uma transversal	Alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental

Fonte: elaboração própria

No processo sistemático, apresentamos as configurações e os textos que compilamos nesta etapa. Nas linhas que seguem, mostramos como os textos dialogam e quais as contribuições para elaboração do nosso aporte.

1.4 Toques Teóricos

Tocar em uma tela é diferente de clicar com o *mouse*? E quais as contribuições um AGD mediado por esse tipo de interação para o aprendizado matemático? Para responder a tais perguntas, iniciamos pelo estudo apresentado por Bairral (2017). Nele, são discutidas questões teóricas relacionadas ao campo da cognição, da linguagem e da neurociência a fim de esclarecer como o arcabouço teórico pode orientar pesquisas com manipulações em DMcTT, particularmente *tablets* e *smatphones*, relacionadas à implementação de tarefas matemáticas.

O autor destaca que, no cenário nacional, fazem-se necessárias investigações no âmbito da Educação Matemática pautadas na tecnologia *touchscreen*, pois as manipulações em tela compõem mais um ente relacionado à dimensão da cognição corporificada. As reflexões de ordem didático-pedagógicas, cognitivas e epistemológicas apresentadas no estudo, são resultados de pesquisas orientadas pelo estudioso e vinculadas ao projeto "*Construindo e analisando práticas educativas em educação matemática com dispositivos touchscreen*".

As manipulações em tela constituem diferentes tipos de toques, tais como: toque simples, duplo, pressionar, deslizar, mover, ampliar, reduzir etc. Tocar em uma tela *touchscreen* e clicar em um mouse são ações distintas, pois cada uma remete a uma percepção sensorial. A manipulação em tela constitui uma forma de linguagem, com particularidades e implicações no pensamento, pois assim como os gestos, representa formas de materialização do pensamento no ato comunicativo. Por outro lado, se alguns gestos podem ocorrer de forma espontânea, sem uma intencionalidade aparente, as manipulações em tela são movimentos específicos, situados e intencionais, complementa o estudioso (BAIRRAL, 2017).

Bairral (2017) destaca que os gestos e as manipulações em tela possuem uma diversidade de intenções comunicativas, relacionadas ao contexto cultural no qual estão inseridas. À vista disto, se um conjunto de expressões metafóricas constitui uma metáfora conceitual, podemos supor que um conjunto de gestos e/ou manipulações em tela pode representar uma metáfora. A expressão "dar um *zoom*", por exemplo, mais evidenciada com os DMcTT, traz imbricada gestos e toques que podem ser explorados em contextos culturais variados.

Em relação às contribuições do uso de um dispositivo móvel em situações pedagógicas, o estudo destaca que a implementação de uma tarefa matemática para manipulações *touchscreen* evidencia a conjunção entre fala, gestos, toques, escrita e construção na tela, para o desenvolvimento do conceito matemático, sem, no entanto, priorizar uma, mas mantendo uma equidade entre as ações conforme as descobertas e os refinamentos (BAIRRAL, 2017).

Anterior, com contribuições epistemológicas e cognitivas, o estudo de Bairral Assis e Silva (2015b) teve como objetivo o levantamento de aplicativos para dispositivos móveis com tela sensível ao toque voltado ao ensino e aprendizagem de matemática e a apresentação de resultados preliminares de atividades realizadas com licenciandos em matemática por meio dos aplicativos

Geometric Constructer[21] (GC) *e Sketchometry* (catalogados no levantamento). As tarefas propostas para o GC abordaram dois teoremas relacionados ao estudo de quadriláteros (os teoremas de Thébault e Varignon), e a tarefa para o *Sketchometry* o estudo do bissectograma (quadrilátero obtido a partir da interseção das bissetrizes internas de um quadrilátero).

O levantamento permitiu a identificação e classificação de dois tipos de aplicativos: *softwares* e jogos. No primeiro, o poder de criação está nas mãos do usuário e é mais voltado para o estudo da geometria. O segundo possui regras pré-estabelecidas e a temática predominante é a álgebra. Além da análise mais centrada na particularidade de cada aplicativo, são sinalizados aspectos inerentes à proposta de uma atividade em sala de aula, como a análise do aplicativo para confecção da tarefa e a proposição de um momento de ambientação para que os discentes possam conhecer as ferramentas necessárias para cada atividade.

No estudo, não há ênfase em relação ao desenvolvimento conceitual dos estudantes, pois o foco centrou-se na análise, comparação e contribuições dos aplicativos à aprendizagem geométrica. No entanto, o estudo aponta que a proposta de uma tarefa que permita a visualização de um objeto geométrico, com a possibilidade de investigação e formulação de conjecturas, com manipulações com as pontas dos dedos, gera mais autonomia aos discentes traz contribuições de ordem curricular, cognitiva ou epistemológica à aprendizagem matemática (BAIRRAL, ASSIS, SILVA, 2015b).

Na mesma direção, Assis (2016) centrou-se na elaboração, implementação e análise de atividades para o estudo de isometrias, por meio do *tablet* em AGD, com alunos do 1º ano do Ensino Médio. A questão central apresentada na pesquisa visou investigar "que contribuições os dispositivos *touchscreen* podem trazer para o processo de ensino e aprendizagem de geometria plana no Ensino Médio?" (ASSIS, 2016, p. 13). Outros direcionamentos mais específicos foram a análise das performances de manipulações em telas na resolução das tarefas propostas e como os discentes realizam as rotações nos dois AGD utilizados no estudo, o GeoGebra na versão aplicativo para *tablet* e o GC.

O subsídio teórico adotado evidenciou a importância dos artefatos mediadores para construção de sentidos e ressignificação, e os gestos que compõem os processos de comunicação entre os interlocutores com/na manipulação em tela. O autor ainda destaca que gestos compõem o repertório de recursos utilizados pelo docente na tentativa de facilitar a produção de significados (ASSIS, 2016).

Um avanço do estudo de Assis, para a pesquisa com implementações em AGD para telas táteis e que chancela a contribuição apresentada por Bairral Assis e Silva (2015b), diz respeito à

[21]Disponível em: http://www.auemath.aichi-edu.ac.jp/teacher/iijima/gc_html5e/ Acesso em: 28 fev. 2020.

ambientação e ao processo de familiarização com o aplicativo utilizado. No entanto, Assis avança na criação de uma tarefa que ambienta e possibilita a construção conceitual.

A partir da observação das dificuldades apresentadas pelos estudantes no manuseio do aplicativo GeoGebra, Assis (2016) elaborou uma tabela, denominada por ele como folha de ícones, com alguns ícones das ferramentas do GeoGebra para que os discentes identificassem a função da ferramenta no aplicativo e preenchessem a tabela, formando assim um material de consulta.

Assis (2016) destaca que o objetivo inicial da folha de ícones foi familiarizar os estudantes com algumas ferramentas que seriam utilizadas nas tarefas propostas e propiciar um contato com entes matemáticos desconhecidos, pois, como relata o autor, os sujeitos da pesquisa não haviam estudado geometria durante o Ensino Fundamental.

O estudo traz ainda o mapeamento com as manipulações *touchscreen* identificadas a partir das implementações com o GC e o GeoGebra. Para o autor, as práticas com *tablet*, possibilitadas por manipulações naturalizadas pelos discentes, se apresentou como artefato mediador na composição de um cenário multimodal e para construção de conceitos à medida que o desenho da tarefa considerou as especificidades e limitações do dispositivo em jogo (ASSIS, 2016).

Os três primeiros estudos se articulam com apontamentos epistemológicos e didáticos pedagógicos. De maneira complementar, a pesquisa realizada por Meier (2017) teve como objetivo investigar a inserção do *smartphone*, a partir das contribuições promovidas pelos toques direto na tela, para o desenvolvimento do pensamento matemático com base na elaboração e implementação de atividades para abordagem de conceitos geométricos em que a modelagem geométrica foi utilizada como metodologia de ensino. Para a autora, entende-se como modelagem geométrica uma representação de eventos que se constitui por meio da geometria na qual, baseado em elementos e relações matemáticas, como ponto, segmento, retas perpendiculares e bissetriz, é possível representar modelos do cotidiano, por exemplo, o ventilador (MEIER, 2017).

Com o intuito de responder a seguinte questão de pesquisa: "que singularidades no desenvolvimento do pensamento matemático a interação *touchscreen* pode proporcionar a alunos da Escola Básica em atividades de Modelagem Geométrica?" (MEIER, 2017, p. 19), a autora, professora regente, propôs três tarefas de modelagem para estudantes, com idades entre 15 e 17 anos, do 2.º ano do Ensino Médio Técnico. As atividades tiveram como objetivo a construção de três objetos do cotidiano: porta pantográfica, ventilador e outro de escolha livre por meio do *Sketchometry*, instalado nos *smatphones* dos discentes.

A análise se pautou no estudo de caso com o objetivo de identificar os tipos de interações com toques em tela e os processos de raciocínios matemáticos produzidos pelos estudantes. O subsídio teórico adotado por Meier (2017) tem como referência a teoria da cognição corporificada, na qual os conceitos que possuímos são estruturados mediante nossas experiências cotidianas corpóreas e os hábitos do pensamento matemático analisados à luz da teoria de Paul Goldenberg.

Para a coleta dos dados a autora, além de ferramentas convencionais, como diário de campo e gravação em áudio e vídeo, usou a captura da tela dos dispositivos dos participantes que utilizaram o aplicativo *AZ Screen Recorder*.

Segundo Meier (2017), a aprendizagem por meio de modelagem geométrica proporciona um aprendizado mais dinâmico, na qual a resolução de problemas constitui-se como elemento central do processo, o que possibilita a construção de novos conhecimentos. Acrescenta ainda que o uso de DMcTT, inseridas em espaços convencionais de ensino, articulados a uma flexibilização desses modelos, promove o desenvolvimento do pensamento matemático.

O estudo está em sintonia com a proposta de Bairral (2017) ao articular a teoria da cognição, corporificada com a ação de manipular em tela, na proposta de tarefas que possibilitem o desenvolvimento conceitual. Apresenta contribuições didáticas e metodológicas, apontando caminhos para professores e pesquisadores.

Meier (2017) defende o uso *Sketchometry* na versão aplicativo por este não possuir a barra de ferramentas, como o GeoGebra, o que faz com que o aplicativo seja totalmente *touchscreen*, pois as construções são realizadas a partir de toques na tela (comandos) que são identificados pelo sistema e convertidos em elementos geométricos. Segundo a estudiosa, o fato de o *Sketchometry* possibilitar a construção com toques direto na área de trabalho – sem, em alguns casos, a mediação de uma barra de ferramentas – pode ser encarada como um avanço em relação aos aplicativos, nos quais o processo de criação passa pela mediação de uma barra de ferramentas e seleção da função desejada.

Entendemos que o GeoGebra não é intuitivo, como mostraram as pesquisas de Henrique (2017) e Assis (2016), por exemplo, nas quais foi necessário um momento de ambientação. Contudo, consideramos essas diferenças como singularidades que devem ser consideradas na confecção da tarefa. Em relação ao fato de o *Sketchometry* não possuir uma barra de ferramentas, analisemos o caso no qual o usuário precisa construir um ponto médio[22], por exemplo. Desse modo, consideramos que a manipulação específica realizada na tela pode ser considerada um elemento mediador.

Os primeiros estudos respondem as nossas questões iniciais e evidenciam contribuições relacionadas às manipulações em telas e de um AGD para a aprendizagem matemática. Enquanto Meier (2017) apresentou uma nova maneira de explorar os conceitos matemáticos com manipulações em tela, a pesquisa desenvolvida por Silva (2017) traz uma inovação na forma de

[22]Aqui é possível visualizar os gestos específicos para cada construção. Disponível em: https://sketchometry.org/en/documentation/gestures/index.ht ml Acesso em: 10 set. 2020.

validar os conceitos. A pesquisa de Silva (2017) teve como objetivo analisar os processos de provas de licenciandos em matemática a partir da implementação de um conjunto de atividades para abordagem de quadriláteros em um DMcTT, identificar as contribuições do desenho da tarefa e dos AGD utilizados, *FreeGeo* e *Sketchometry* em *smartphones* e o *GeoGebra* em *tablets*. A investigação ocorreu fundamentada na seguinte questão: "que contribuições o uso da tecnologia *touchscreen* e de atividades com recursos variados podem proporcionar ao ensino de geometria, especificamente nos processos de argumentação sobre quadriláteros?" (SILVA, 2017, p. 12).

Silva (2017) afirma que as tecnologias digitais, a partir das nossas interações, recriam e modificam a maneira como compartilhamos as informações e nos relacionamos, alterando a forma com a qual desenvolvemos os processos cognitivos. Desse modo, as manipulações compõem um elemento na concepção da cognição corporificada por envolver expressões corporais na composição dos discursos presentes na elaboração da argumentação.

A estudiosa analisou os gestos realizados pelos sujeitos, durante as manipulações, a fim de evidenciar aspectos inerentes ao processo de aprendizagem em um AGD e o papel da argumentação no desenvolvimento conceitual, que, segundo aponta o estudo, mediante o uso de um AGD esse processo é favorecido, o que pode levar os discentes a formularem e experimentarem as ideias matemáticas de cada um deles.

As contribuições apontadas no estudo referem-se ao delineamento da tarefa e à mobilidade. A primeira, por permitir aos discentes a análise dos objetos geométricos sob a perspectiva do dinâmico, o que colaborou para o processo de elaboração de provas, argumentos e formulação das ideias matemáticas dos graduandos, e a segunda, por oportunizar a proposta de tarefas variadas e adequação à demanda dos estudantes, mediante diferentes aplicativos.

A pesquisa de Silva (2017) inaugura uma nova agenda na investigação dos processos de prova e demonstração por meio de um ADG com DMcTT. Não se trata de substituir e minimizar os processos convencionais de prova, mas pensar qual matemática é essa que está sendo trabalhada e que nesse novo ambiente novos conceitos estão sendo criados (BAIRRAL, 2018), o que evidencia a necessidade de se pensar no tipo de tarefa proposta.

Com um olhar mais voltado para contribuições didático-pedagógicas relacionadas às implementações de atividades com aplicativos em sala de aula, Gomes (2017) implementou e analisou uma sequência de atividades propostas para alunos do 8.º ano do Ensino Fundamental, por meio do GeoGebra em *smartphone*, na abordagem de ladrilhamento no plano. Tendo como pressuposto teórico a engenharia didática, o estudo teve como objetivo "favorecer o pensamento de que o uso da tecnologia pode ser positivo, por ser uma abordagem diferente no ensino da Geometria" (GOMES, 2017, p. 13).

No trabalho, são detalhados as definições e os tipos de ladrilhamentos (pavimentações com polígonos regulares e irregulares), possibilidades de aplicação às artes e um breve comentário acerca do tema como forma de integração entre tecnologias digitais, arte e Geometria. Fato que ajuda a compor as justificativas para a escolha de um AGD em *smartphones*. Gomes (2017) destaca também as potencialidades de caráter didático e cognitivo do dispositivo. Por exemplo, a facilidade de realizar atividades em sala de aula, se comparada ao laboratório de informática, por permitir que os estudantes usem os equipamentos deles, fato que possibilita o protagonismo dos discentes na construção dos conceitos matemáticos em um processo no qual é possível investigar, realizar testagens e formular conjecturas com toques na tela do próprio dispositivo.

A pesquisa aponta que o uso do aplicativo Geogebra em *smartphone* permitiu aos alunos a construção de conceitos relacionados ao ladrilhamento no plano por agregar um conjunto de elementos, como a visualização e exploração dos objetos geométricos, à dinamicidade do AGD (GOMES, 2017).

O estudo traz contribuições concernentes a continuidade e direcionamento de uma tarefa. Para o autor, a possibilidade de uso de um AGD no *smartphone* do estudante permite que ele salve e revisite a construção para análises futuras que podem ocorrer em sala de aula ou em casa, o que permite ao docente propor novos questionamentos a fim de dar continuidade à tarefa iniciada em sala de aula. Gomes (2017) ressalta também que a dinamicidade do AGD exige a atenção constante do professor a fim de evitar que manipulações sem direcionamento da atividade e acompanhamento conduzam a conclusões equivocadas.

Corroborando algumas ideias apresentadas no estudo anterior, a pesquisa de Duarte (2018) objetivou analisar e identificar as contribuições do aplicativo GeoGebra em *smartphones* para a construção de conceitos, relacionados ao estudo de retas paralelas cortadas por uma transversal, por alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, em uma prática docente que valorizou as linguagens que se configuram no espaço de sala de aula (os diálogos e a escrita).

A análise trata da fala e da escrita como uma ação construtiva e reflexiva do pensamento baseada na escola Vigotskiana – embora as ideias para construção desse repertório tenham ocorrido por fontes secundárias – e analisa a leitura e a articulação das linguagens escrita e pictórica, em uma aula de geometria, para construção e representação do pensamento geométrico.

Duarte (2018) trabalhou a ressignificação de conceitos relacionados ao estudo de retas paralelas cortadas por uma transversal, propondo inicialmente uma reflexão acerca de palavras relacionadas ao tema de estudo, como correspondente, alterno e colateral. Para a autora, em relação a esse tipo de atividade, em que "a linguagem utilizada na busca por significados e a transferência desse pensamento para o papel" (DUARTE, 2018, p. 33) foi importante para o desenvolvimento das demais atividades. Concordamos que o desenho da tarefa proposta possibilite a ressignificação e que, por intermédio dela, os discentes possam desenvolver os conceitos. Contudo, entendemos que a linguagem escrita é a continuação do processo reflexivo que ocorre por meio das imagens produzidas pelos sujeitos e não como uma mera transferência.

Como metodologia de ensino, Duarte (2018) comparou as respostas apresentadas pelos discentes com as respectivas definições do dicionário a fim de valorizar o repertório linguístico dos aprendizes e oportunizar a ressignificação dos termos alterno, correspondente e colateral para o contexto matemático.

A análise do estudo sinaliza dificuldades relacionadas à dependência dos alunos, algo comum em uma prática centrada no professor, e como a postura dialógica adotada pela docente proporcionou novos encaminhamentos às implementações e às contribuições das manipulações na tela do *smartphone*, na qual os estudantes fizeram testagens, refletiram a respeito das ações de cada um e inovaram com uma linguagem própria na elaboração dos significados matemáticos, como forma de elaborar conceitos.

O estudo não evidencia o desenvolvimento conceitual de todas as propriedades e relações matemáticas envolvidas no tema tratado, contudo mostra a importância das linguagens (fala, escrita, pictórica, em toques) e o papel da mediação do professor na composição de uma atividade matemática como dispositivos móveis (DUARTE, 2018).

Neste ponto, vale um comentário. A pesquisa de Duarte mostrou maior aproximação com o nosso tema. Não traz novos conceitos relacionados ao estudo de ângulos e retas por meio de manipulações na tela do *smartphone*, todavia avança por demonstrar como os toques estão imbricados, à medida que compõem a linguagem, e são destacados nos vários momentos de interações (docentes-estudantes, estudantes-estudantes, estudantes-tecnologias).

Menezes (2018) propôs uma atividade para estudantes do 3º ano do Ensino Médio na qual o aplicativo GeoGebra foi utilizado como recurso para auxiliar a resolução de uma questão envolvendo o cálculo da área de um triângulo equilátero particular. Em relação aos aspectos didático-metodológicos, a autora destaca a forma de compartilhamento e apresentação do aplicativo em sala de aula.

O quadro teórico adotado no estudo é composto da ideia de conceito figural (FISCHBEIN, 1993) e de cenário de investigação (SKOVSMOSE, 2000), no qual os discentes são convidados a pensar sobre o problema proposto (MENEZES, 2018). Destacamos que o convite não ficou circunscrito ao uso do aplicativo, podendo, de acordo com os interesses dos alunos, incluir a apresentação de soluções escritas.

No estudo, são analisados dois tipos de soluções, uma escrita e outra por meio do aplicativo. Em relação à primeira, segundo Menezes, o desenho construído pelo sujeito analisado não oferece um rigor matemático e, diante do algoritmo apresentado na resolução, não é possível inferir se o estudante apenas aplicou uma fórmula conhecida ou se usou conscientemente a relação matemática envolvida no processo. Para a segunda solução, os alunos passaram por algumas descobertas relacionadas ao AGD, como a necessidade de usar uma ferramenta específica ou um conjunto de elementos que garantam a existência do objeto geométrico desejado, no caso o triângulo equilátero (MENEZES, 2018).

A pesquisa não traz uma discussão no que diz respeito ao quadro teórico adotado, pouco se evidenciou a respeito das manipulações em tela e não se criou um cenário de investigação a partir da questão proposta. Todavia, é importante ressaltar o convite que esse tipo de atividade possibilita, o tempo de resposta na resolução de uma questão e a necessidade de se pensar novos problemas em face de novas tecnologias.

Com apontamentos mais acentuados acerca do DMcTT e das manipulações em tela em situações de ensino na abordagem de conceitos geométricos, Henrique e Bairral (2019) apresentaram contribuições e desafios relacionados à implementação de duas atividades no aplicativo GeoGebra para *smartphone*, realizadas em sala de aula com estudantes do 8.º ano do Ensino Fundamental, nas quais os sujeitos manipularam os próprios dispositivos. O estudo visou à análise e ao desenvolvimento conceitual de relações e propriedades envolvendo retas e ângulos, na abordagem de retas concorrentes e retas paralelas cortadas por uma transversal, e uma atividade adicional para análise de retas e ângulos em outro contexto.

Os autores elencaram algumas características do *smartphone* que podem facilitar a realização de atividades em sala de aula e promover a aprendizagem, tais como: a mobilidade, por favorecer a inserção de tarefas no âmbito escolar; estímulo à curiosidade e à motivação; oportunidade de instalação de aplicativos com objetivos variados; uso pelo próprio dono, e com essa possibilidade na palma da mão, dispensa o laboratório de informática. No entanto, atividades realizadas no *smartphone* não eximem a necessidade de um planejamento com objetivos bem delimitados, complementam Henrique e Bairral (2019). Os autores destacaram ainda contribuições e singularidades de um AGD para a aprendizagem geométrica, que deve possibilitar aos discentes a interação contínua com o dispositivo e o coletivo, possibilitando formas variadas de comunicação (toques, fala, escrita etc.) e elaboração de estratégias.

O estudo apontou que o uso de nomenclaturas, como ângulos alternos internos, colaterais externos, correspondentes etc., é um obstáculo na compreensão conceitual, dessa forma optou-se por valorizar as descobertas mediante as manipulações para depois apresentar as expressões, articulando-as aos conceitos prévios dos estudantes. Para os autores, a intervenção mostrou-se instigante, pois possibilitou aos alunos formas variadas de registros, articuladas a um conjunto de elementos, como soma dos ângulos, análise das relações entre ângulos e retas (HENRIQUE; BAIRRAL, 2019).

Os pesquisadores relatam dificuldades informáticas e pedagógicas relativas ao manuseio e insegurança dos discentes, natural nesse tipo de atividade na qual o conhecimento é descentralizado da figura do professor. Como contribuição, o estudo e aponta a percepção de uma geometria não estática, possibilidade de investigação e formas variadas de linguagens como processo reflexivo para o desenvolvimento conceitual.

Os estudos até aqui evidenciam contribuições relacionadas de um AGD mediante as manipulações em tela à aprendizagem de conceitos geométricos, evidenciam algumas perspectivas dos DMcTT em práticas pedagógicas e sinalizam desafios intrínsecos à realização de atividades em sala de aula por meio do *smartphone*, incluindo singularidades do dispositivo que podem ser exploradas pelo docente com o objetivo de potencializar as aprendizagens. Consideramos que os referidos estudos oferecem subsídios que podem fundamentar algumas das nossas análises. Todavia, a fim de enriquecer o repertório, acrescentamos mais trabalhos com contribuições de ordem cognitiva no campo geométrico referentes à realização de uma atividade em um DMcTT em um AGD, apresentados na seção seguinte.

1.5 Toques Para Ampliar

A fim de ampliar as possibilidades, acrescentamos dois estudos, cujos os escopos não estavam ao alcance do nosso mapeamento em função do idioma de publicação, mas que tomamos ciência por meio de interlocuções com os pares.

Arzarello, Bairral e Dané (2014) se dispuseram a investigar "quais singularidades cognitivas baseadas na manipulação com toques em tela podem ser observadas no pensamento geométrico no aplicativo *Geometric Constructer*" (ARZARELLO; BAIRRAL; DANÉ, 2014, p. 39). O objetivo do estudo foi identificar os tipos de manipulações utilizadas por um grupo de cinco discentes italianos – com idades entre 16 e 17 anos, divididos em dois grupos – na resolução de duas tarefas para abordagem de conceitos geométricos por meio do GC em *tablets* e elaborar uma linha do tempo ilustrando os tipos e descrevendo aspectos geométricos envolvidos na interação dos estudantes no aplicativo.

Os autores elaboraram uma linha do tempo a partir das gravações em vídeo, mostrando as ações básicas dos estudantes na manipulação com o GC e descreveram aspectos do pensamento geométrico dos discentes ao lidarem com o aplicativo. O objetivo foi identificar o tipo de ação dominante. Para relacionar os processos geométricos às ações básicas, os pesquisadores mostraram os vídeos aos aprendizes e pediram que eles comentassem a respeito das manipulações.

Além das ações básicas (toque simples ou duplo, mover, pressionar etc.), os estudiosos observaram um modo de manipulação, denominado por eles como arrasto para aproximar, relacionado a um tipo de raciocínio no qual o objetivo é lidar com alguma propriedade geométrica particular, forma ou construção (ARZARELLO; BAIRRAL; DANÉ, 2014).

No estudo, foi identificado que os processos cognitivos usando o GC podem ser vistos como dois domínios de manipulação, o construtivo e o relacional, que estão arrolados entre si. O domínio construtivo envolve as ações de tocar e segurar em construções básicas ou isoladas de objetos geométricos como ponto, reta, circunferência. O domínio relacional ocorre por meio de uma combinação entre o domínio construtivo e novas formas de manipulação, como arrastar e girar, e nas quais as construções estão vinculadas às interações, formulação de conjecturas e análise conceitual na resolução de problemas.

Como resultados, Arzarello, Bairral e Dané (2014) sinalizaram que, durante a resolução da tarefa proposta, houve a predominância do domínio relacional, como toques de arrasto livre, mover, arrasto para aproximar, giro e rotação, o que pode ser explicado devido à natureza da tarefa proposta. A realização de implementações com DMcTT oferece novas questões pedagógicas ao ensino da matemática e a identificação dos tipos de manipulações pode promover melhorias no aplicativo analisado, complementam os autores.

O estudo avança por apresentar tipos de manipulações relacionadas aos processos de raciocínios dos estudantes na resolução de um problema geométrico, identificando os processos de raciocínio matemático atrelados às manipulações em tela.

Em sintonia, Bairral, Arzarello e Assis (2015) apresentam os resultados de uma investigação que analisou as estratégias utilizadas por estudantes do ensino médio, com idade entre 15 e 17 anos, para resolver tarefas que envolvem transformações no plano, particularmente o conceito de rotação por meio do aplicativo GeoGebra com manipulação em *tablets*.

Os autores destacam que o crescimento emergente dos DMcTT, assim como a sua apropriação por professores e alunos, tem permitido novos olhares para a maneira de ensinar e aprender matemática. Dessa forma, identificar o tipo de manipulação em uma tela tátil pode fornecer novos *insights* para a aprendizagem geométrica com dispositivos móveis (BAIRRAL; ARZARELLO; ASSIS, 2015).

A pesquisa traz contribuições de ordem epistêmica, tais como: a maneira peculiar de uma construção por meio de toques em telas. Para os estudiosos, clicar com o *mouse* é diferente de tocar em uma tela sensível ao toque, da mesma maneira que há nuances na realização de uma construção se o usuário usa um ou mais dedos, que se estende numa perspectiva de cognição corporificada, na qual a manipulação na tela implica a continuação do pensamento. Bairral, Arzarello e Assis (2015) esclarecem que, durante a manipulação de um objeto na tela de um DMcTT, realizamos um conjunto de movimentos, alguns dos quais relacionados a conceitos matemáticos específicos, como por exemplo, a ampliação ou redução de uma figura. Realizar essa ação, por intermédio do clique, arrastando um dos vértices da figura ou por meio do toque, “esticando” a diagonal com o uso de dois dedos, ainda que ambas envolvam o método da diagonal, epistemologicamente são ações distintas.

Em relação ao desenvolvimento conceitual o estudo traz contribuições importantes. Sinaliza que as manipulações em um DMcTT são baseadas em imagens visuoespacial, que abrange a capacidade de manipular representações mentais, e que fatores linguísticos influenciam os gestos e as formas de toques são ações comunicativas (BAIRRAL; ARZARELLO; ASSIS, 2015).

Os pesquisadores observaram que os discentes utilizaram estratégias variadas na aplicação dos conceitos de rotação e reflexão, incluindo uma composição entre eles, e que a natureza do aplicativo GeoGebra, que permite toques únicos, não foi uma restrição. A seguir, elencamos algumas contribuições dos estudos que selecionamos.

1.6 Pressionar e Arrastar

Como descrito na introdução, esta pesquisa visa à análise da construção e do desenvolvimento de conceitos geométricos de estudantes por meio de uma metodologia de ensino que considera a elaboração de metáforas e a escrita, para ressignificação e produção de sentidos, e as interações e reflexões provocadas pelas manipulações em telas.

As ações de pressionar e arrastar conceituam-se por um tipo de toque que realizamos na tela quando, por exemplo, movimentamos um aplicativo, com intuito de evidenciá-lo na tela principal, reajustando sua configuração inicial. Dessa forma, a metáfora que usamos no subtítulo traz a ideia de (re)configuração, na qual elementos, evidenciados nos estudos mapeados, ajudaram a moldar a a problemática da pesquisa ao passo que se constituem em contribuições e subsídios para a abordagem metodológica que adotamos, assim como para nossas análises. Mas estes estudos endossam ainda algumas justificativas como a proposta de atividades por meio do aplicativo GeoGebra em *smartphones*. Assim no Quadro 7, destacamos alguns dos contributos de cada pesquisa para o nosso estudo.

Quadro 7 – Contribuições do mapeamento para o estudo (continua)

Ano	Autores	Contribuições
2014	Arzarello, Bairral e Dané	Foco na Análise: • Tipos de manipulações em tela e ações dominantes. • Domínios de manipulações.
2015	Bairral, Arzarello e Assis	Foco na análise: • Tipos de manipulações em telas. • Estratégias dos discentes na resolução de uma tarefa com DMcTT.
2015	Bairral, Assis e Silva	Foco no planejamento: • Proposta de tarefas pensadas para o DMcTT, considerando o AGD escolhido. • Ambientação.
2016	Assis	Foco na análise: • Tipos de manipulações em tela. Metodologia de ensino: • Ambientação. Métodos de pesquisa: • Uso de aplicativos como fonte de coleta de dados.
2017	Bairral	Foco na análise: • Manipulações em telas como extensão do pensamento. • Contribuições didático-pedagógicas, cognitivas e epistemológicas. • Articulação com a teoria da cognição corporificada.
2017	Gomes	Foco no planejamento: • Especificidades da inserção dos *smartphones* em práticas pedagógicas. • Continuidade de uma tarefa em AGD com DMcTT. Foco na análise: • Protagonismo dos estudantes mediante manipulação, interação e formulação de conjecturas.
2017	Henrique	Foco no planejamento: • Proposta de tarefas que possibilitam a produção de metáforas e consideram as particularidades de um AGD em DMcTT. • O *smartphone* como recurso que promove o estímulo à curiosidade e propicia a autonomia dos estudantes. Foco na análise: • Desenvolvimento e construção de conceitos mediante manipulações em tela. • Análise do AGD no estudo de conceitos geométricos. Métodos de pesquisa: • Uso de aplicativos como fonte de coleta de dados. Metodologia de pesquisa: • Olhar para o redesenho da tarefa.
2017	Meier	Foco na análise: • Tipos de interações com toques. Abordagem metodológica • Uso de aplicativos como fonte de coleta de dados.

‘Quadro 7. Continuação’

2017	Silva	Foco no planejamento: • A importância do desenho da tarefa. • Proposta de tarefas variadas. Foco na análise: • Manipulações em telas como expressões corporais na composição dos discursos. • O papel da argumentação. • A validação das conjecturas tendo o AGD em DMcTT como fonte de criação.
2018	Duarte	Foco na análise: • Valorização do diálogo e da escrita como ações construtivas e reflexivas do pensamento. • A mediação do professor no cenário que envolve toques, reflexão e linguagem. Metodologia de ensino: • Evidenciar, analisar e discutir os conceitos que os estudantes já possuem como estratégia de ressignificação dos conceitos e produção de sentidos.
2018	Menezes	Metodologia de ensino: • Tarefas como um convite à reflexão. • Proposta de tarefas com possibilidades variadas de resolução.
2019	Henrique e Bairral	Foco no planejamento: • Especificidades a considerar do *smartphone* em situações de ensino. Foco na análise: • Desenvolvimento e construção de conceitos relacionados à exploração entre ângulos e retas nas manipulações em tela. • AGD no estudo de conceitos geométricos.

Fonte: elaboração própria

As contribuições que apresentamos nos permitem a construção de um conjunto de elementos que subsidia as análises, mas que também são ferramentas para o desenvolvimento deste estudo, ou seja, ajustes na problemática, na metodologia de ensino, nos métodos e abordagem metodológica da pesquisa. No que segue, discutimos questões de ordem didática e cognitiva relacionadas à aprendizagem geométrica, o AGD e os DMcTT.

CAPÍTULO II – DOIS TOQUES NA GEOMETRIA

Neste capítulo, traçamos um breve percurso histórico da Geometria e algumas contribuições ao desenvolvimento cognitivo e social. Discutimos a relevância da abordagem de retas paralelas intersectadas por uma transversal e como visualização, construção e desenvolvimento conceitual podem caminhar juntos. Finalmente, destacamos potencialidades dos AGD aos processos de ensino e aprendizagem e as especificidades dos AGD em DMcTT e suas colaborações ao estudo.

2.1 Geometria, Visualização e Conceituação Geométrica

A origem da Geometria é tão antiga quanto a arte de escrever. Heródoto e Aristóteles concordavam que a Geometria se originou no Egito, embora tivessem visões distintas em relação ao desenvolvimento dela. Enquanto Heródoto acreditava que o nascimento desse campo da matemática se deu a partir de uma necessidade de fazer medições do Nilo, em cada inundação anual, para Aristóteles ela se constituía em objeto de lazer dos sacerdotes (BOYER, 1996). O fato é que a história da Matemática se confunde com a própria história do desenvolvimento da humanidade e que essa dualidade acerca da origem da Geometria coloca em evidência o seu potencial como aplicação prática da Matemática e objeto de análise e abstração.

Para Atiyah (1982), não foi por acaso que a Geometria foi o primeiro ramo da Matemática a se desenvolver. A aplicabilidade direta na vida cotidiana exigiu menos esforço intelectual para compreendê-la. Para o estudioso, a Matemática é uma atividade estritamente humana que reflete a natureza de nosso entendimento e que na Geometria, como parte da Matemática, há a predominância do pensamento visual e representa uma forma de raciocinar que está presente em todas as áreas da Matemática.

Tais constatações evidenciam a Geometria como uma necessidade do homem de compreender e descrever o meio em que vive. Esse argumento por si só parece convincente frente à importância do aprendizado geométrico para o desenvolvimento cognitivo e social dos discentes, todavia vejamos o que dizem alguns pesquisadores da área.

De acordo com Araújo (1994), o estudo da Geometria permite ampliar o referencial de observação pelo qual vemos o mundo, importante no desenvolvimento do conhecimento lógico-matemático, o qual nos possibilita passar da análise à abstração. Em sintonia, para Bairral (2009), o trabalho com a Geometria contribui para a capacidade de imaginar, analisar, argumentar e desenvolver estratégias próprias. O autor acrescenta que "[...] o desenvolvimento do pensamento geométrico tem singularidades de visualização e de representação e, consequentemente, envolve processos cognitivos que contribuem, diferentemente, no desenvolvimento da construção conceitual" (BAIRRAL, 2009, p. 26).

Pavanello (2004) argumenta que a aprendizagem da Geometria amplia a capacidade de percepção espacial, requisitada para o exercício e compreensão nas mais variadas áreas de atuação profissional, além de se apresentar como um campo fértil para o desenvolvimento da capacidade de abstração e generalização, pois o estudo e a análise do objeto conduzem ao pensamento a respeito das relações, acrescenta a autora.

Lorenzato (1995) alega que valorizar o pensamento geométrico e o raciocínio visual permite que os aprendizes sejam capazes de resolver problemas em situações geometrizadas nos mais variados contextos. Em complemento, para Settimy (2018), o pensamento visual não prioriza um tipo de representação em detrimento de outra. Esse é um processo que se articula nas diferentes dimensões, plana ou espacial, com harmonia (SETTIMY, 2018). A estudiosa defende que o desenvolvimento do pensamento visual deve acontecer por meio da utilização de recursos variados nos processos de ensino e aprendizagem de Geometria.

Essas breves constatações direcionam para uma habilidade importante que pode ser desenvolvida por meio do estudo da Geometria: a visualização. À vista disso, consideramos pertinente trazer uma caracterização sucinta de tal aspecto, habilidade indispensável a uma variedade de atividades da vida cotidiana e para a construção e desenvolvimento conceitual.

Em um contexto mais amplo, a visualização tem origem no latim *visualis*, que é relativo à vista, que podemos entender como o ato ou efeito de ver. A palavra "ver", neste caso, assume não só os objetos que estão diante dos olhos, como um livro impresso ou uma representação gráfica na tela do *smartphone*, mas as imagens mentais que conseguimos formar e manipular e é para este sentido que nossas reflexões convergem.

De acordo com Costa (2000), o termo visualização, em uma perspectiva geométrica, possui significados distintos, sendo relacionado à mente do sujeito ou ao processo de inter-relacionar domínios distintos, porém independentemente da perspectiva adotada, a visualização é vista como a habilidade de manipular imagens visuais[23]. Na mesma direção, Zimmermann e Cunningham (1991), apontam o caráter multifacetado da visualização, tanto quanto a Geometria está enraizada na Matemática por se relacionar com diversas áreas dela, entre outros aspectos, possui perspectivas históricas, filosóficas, pedagógicas e tecnológicas.

Zimmermann e Cunningham (1991) ampliam a definição de visualização matemática. Para os autores, não se trata de apenas manipular uma imagem mental, mas sim de um processo que

[23]Presmeg (1986, p. 46) define imagem visual como "um esquema mental que descreve informações visual ou espacial".

envolve a representação de um conceito, sem ou com o auxílio de uma tecnologia, para a compreensão e descobertas matemáticas. Os autores ainda defendem que a visualização implica em um tipo de intuição que dá significado à compreensão, à medida que direciona para construção de ideias criativas e serve como um guia para resolução de problemas. Para obter esse tipo de intuição, a visualização deve se relacionar com toda a matemática. Portanto, "o pensamento visual e as representações gráficas devem estar ligados a outros modos de pensamento matemático e outras formas de representação." (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991, p. 4).

De modo semelhante, Leivas (2009) define visualização como um processo de formar imagens mentais, que implica na construção e comunicação de um conceito matemático com o intuito de amparar a resolução de problemas, seja de natureza analítica ou geométrica. O autor também acrescenta o caráter intuitivo nesse processo, por considerar que a intuição está relacionada à construção de um conceito matemático a partir das experiências concretas e a análise que o sujeito tem do objeto.

Nacarato e Passos (2003) acrescentam a representação como um elemento essencial à visualização. Elas alegam que a visualização e a representação são dois entes interligados e que desempenham um papel fundamental para o desenvolvimento de conceitos geométricos. Definem que a visualização é a habilidade de pensar em termos de imagem mental, representação mental de um objeto ou relação. A representação nesse contexto assume um caráter duplo, sendo a evocação de uma imagem ou sua apresentação que, conforme esclarecem a autoras, ocorre de maneiras diversificadas,ou seja, as apresentações gráficas, como um desenho no papel, ou uma figura na tela do computador ou por meio da própria linguagem, e que expressam as estratégias dos sujeitos nas ideias geométricas deles.

Em sintonia, Hershkowitz (1994) esclarece que a visualização estabelece um papel complexo no processo de desenvolvimento conceitual e atua em duas direções. Assim, não é possível formar a imagem de um conceito e sua classe de figuras sem visualizar seus elementos e, por outro lado, caso os elementos visuais sejam restritos e limitados, podem empobrecer a imagem conceitual.

Tratando-se de visualização, há nuances como raciocínio visual, pensamento visual e elementos, como imaginação, intuição, percepção visual e representação, que se relacionam na elaboração do processo de visualizar. Conforme afirma Gutierrez (1991), tem como entidade fundamental as representações mentais que fazemos de objetos físicos, de relações, dos conceitos, entre outras.

Embora alguns autores apresentem perspectivas diferentes quanto à definição de visualização, elas se complementam e apontam o papel da visualização para a construção e desenvolvimento conceitual. Geralmente, estudos que evidenciam a visualização deixam em outro plano a conceituação e vice-versa. Nossa intenção aqui é mostrar que esses processos se relacionam e em certa medida estão imbricados, pois o desenvolvimento da habilidade de visualizar, potencializada pelas manipulações em tela, compõe a construção e o desenvolvimento conceitual. No terceiro capítulo, apresentamos uma discussão mais ampla em relação a conceitos, definição, construção e desenvolvimento conceitual. Todavia, para o nosso propósito, julgamos necessário uma breve caracterização a respeito de conceitos.

Entendemos que conceito é a representação mental de uma categoria. E a construção e o desenvolvimento conceitual ocorrem quando um sujeito, a partir das suas experiências, consegue elaborar uma imagem mental, visualizar os elementos que abrangem não apenas o caso particular, mas toda uma classe de objetos (FERREIRA, 1963; LOMÔNACO1997 *apud* ALMEIDA; LOMÔNACO, 2018). Nesse âmago, “os conceitos matemáticos são derivados da sua definição matemática. A definição estabelece um corte claro e preciso na definição entre as instâncias que são exemplos daquele conceito e os exemplos que não são” (HERSHKOWITZ, 1994, p. 57), quer dizer, a definição e o conceito se relacionam, sendo a primeira os limites do segundo.

No contexto da Geometria, outro elemento importante na articulação dos processos que compreendem visualizar e conceituar é o objeto geométrico. Recorremos a Fischbein (1993) que discorre acerca de um estudo que visa compreender o papel do conceito e da imagem na composição do objeto geométrico. Fischbein sustenta que é considerar a definição, a imagem e o conceito figural como categorias de um objeto geométrico. O autor estabelece conceito figural como a construção tratada pelo raciocínio matemático no domínio da geometria, controlada e manipulada por princípios lógicos de um sistema axiomático.

Conforme esclarece Fischbein (1993), o objeto geométrico depende de uma natureza conceitual e outra figural e é o equilíbrio entre esses dois componentes que permite a noção exata do objeto. Para o autor, da natureza conceitual deriva a ideia geral que expressa a classe de objetos, enquanto a natureza figural, a imagem mental, é a representação de um objeto ou fenômeno. Para compreender melhor essa relação, é importante destacar que os objetos matemáticos, como ponto, reta, retas paralelas, são modelos ideais de entidades mentais, nas quais somente em um sentido conceitual é possível considerar a perfeição desses objetos. Eles são representações gerais, não existem no mundo real, são abstrações que pertencem ao domínio dos conceitos, acrescenta o autor.

Vamos considerar o seguinte postulado apresentado em Alexander e Koeberlein (2013, p. 75): “se duas retas paralelas se cortam por uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes”. Esse objeto geométrico é construído por entidades que são abstrações e a validade da relação (ângulos correspondentes congruentes) depende de uma manipulação mental. Vejamos a Figura 5.

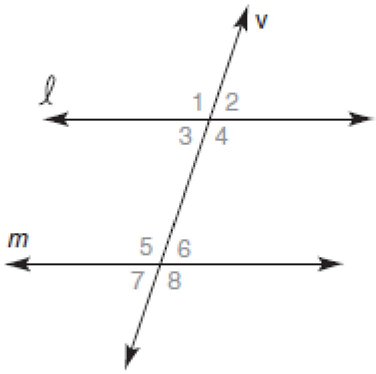


Figura 5 – Ângulos correspondentes formados a partir de duas retas paralelas e uma transversal
Fonte: Alexander e Koeberlein (2013, p. 75)

Imagine que se possa deslocar a reta *l* de maneira que seja possível sobrepô-la a *m*, dessa forma veremos que os vértices dos ângulos 1 e 5, por exemplo, coincidirão. Como *l* e *m* são retas paralelas, podemos supor que as semirretas (os lados) dos ângulos também coincidirão de maneira que será verificada a validade da relação. Usando esse mesmo raciocínio, é possível estabelecer outras manipulações a fim de comprovar a validade dos teoremas correlatos desse postulado (ângulos alternos e ângulos colaterais). Na manipulação mental, temos envolvidos dois tipos de imagens: a do objeto geométrico formado por duas retas paralelas e uma reta transversal e a da operação, manipulada a partir do deslocamento de uma das retas paralelas com o intuito de verificar a relação matemática.

Fischbein alega que conceitos não se movem, não é possível deslocá-los, tampouco esses objetos existem no mundo real, são representações nas quais há uma inter-relação entre o conceitual e o figural. Dessa forma, conforme alega o autor,

> [...] os objetos de investigação e manipulação do raciocínio geométrico são então entidades mentais, denominadas conceitos figurais, que refletem propriedades espaciais (forma, posição, magnitude) e, ao mesmo tempo, possuem qualidades conceituais, como idealidade, abstração, generalidade e perfeição. (FISCHBEN, 1993, p. 143).

Por outro lado, esse processo exige a habilidade de manipular uma entidade mental, a visualização.

Corroborando com tais constatações, é possível inferir que a construção e o desenvolvimento conceitual são processos que se relacionam com a visualização a partir da análise do objeto, que possui duas componentes: uma figural e outra conceitual. Vejamos um exemplo que ajuda a elucidar a afirmação: considere o quadrilátero ABCD, cujos lados opostos são paralelos (Figura 6). Qual a relação entre ∠DAB e ∠BCD?

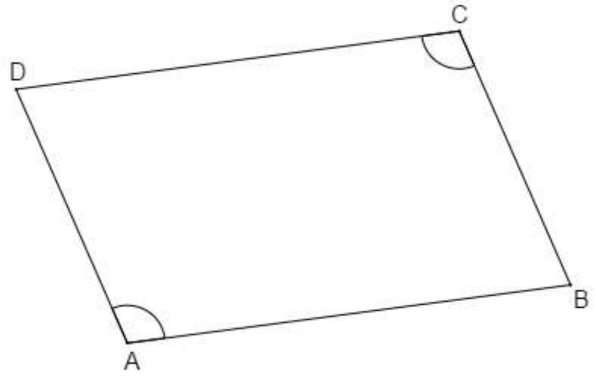


Figura 6 – Exemplificação de visualização na análise de um objeto geométrico
Fonte: elaboração própria

Como todos os lados são paralelos podemos deduzir que ∠DAB e o ângulo externo adjacente ao ∠ABC são congruentes, pois são correspondentes. Esse processo pode ser visualizado pelo deslocamento do segmento DA sobre as retas que contém DC e AB. Uma conclusão imediata é que∠DAB e ∠ABC são colaterais internos. Desta observação, implica que ∠DAB e ∠ABC são suplementares e em conclusão∠DAB e ∠BCD são congruentes.

A proposta de um problema que envolve o desenho de um objeto geométrico parte de questões teóricas atreladas ao objeto, mas a solução representa suposições, pois se trata de um caso particular. Laborde e Capponi (1994) distinguem desenho geométrico de objeto geométrico. Para os autores, a passagem do primeiro para o segundo depende das experiências prévias do sujeito, o contexto e o sentido formado. Figura geométrica remete à relação entre objeto geométrico e todas as suas representações possíveis (LABORDE, 1998). Dessa forma, podemos definir o desenho de um objeto geométrico como um caso particular no qual sua representação está associada ao conceito que o sujeito possui acerca da teoria tomada como referência.

Outrossim, percebemos que o estudo da Geometria desempenha um papel importante para o desenvolvimento cognitivo, lógico-matemático e social. Potencializa a imaginação, a intuição e a visualização, o que contribui para a construção e o desenvolvimento conceitual. Neste cerne, para uma melhor compreensão acerca do ensino e aprendizagem da Geometria, refletimos a respeito da seguinte questão: o aprendizado da geometria euclidiana deve seguir a forma hierarquizada na qual ela está organizada?

2.2 Ângulos Entre Retas Paralelas e Uma Transversal

Valemo-nos da importância da Geometria, destacando a visualização como habilidade necessária ao desenvolvimento cognitivo, algumas implicações teóricas, didáticas e pedagógicas imbricadas aos processos de construção e desenvolvimento conceitual. Em nossa investigação, por representar uma parte substancial da Geometria Euclidiana, centralizamos no estudo e análise das relações entre ângulos formados a partir de duas retas paralelas intersectadas por uma transversal.

A Geometria Euclidiana segue uma estrutura que se estabelece a partir de entes primitivos, como ponto, reta e plano; axiomas ou postulados, verdades que se estabelecem por si mesmas; e definições. Por meio da combinação desses elementos, lançando mão de uma sequência lógica de raciocínio, constroem-se os teoremas (KALEFF, 1994). Mas, para aprender Geometria é necessário seguir essa hierarquização?

Partindo do estudo de retas paralelas cortadas por uma transversal, pode-se abordar teoremas relacionados ao estudo dos triângulos (teorema do ângulo externo[24] e a soma dos ângulos internos[25]), relações existentes em alguns quadriláteros, como a relação entre ângulos opostos ou ângulos adjacentes de um paralelogramo[26], utilizar as propriedades no sentido de alicerce para abordagem de outros conceitos como o teorema de Tales[27] e o aprofundamento do próprio tema, por exemplo a relação entre os ângulos formados por linhas poligonais entre duas paralelas.

Todavia, não achamos que seguir essa sequência seja uma condição necessária. É possível (re)visitar outros conceitos: de retas concorrentes, ângulos opostos pelo vértice[28], ângulos suplementares[29], bissetriz[30] e a própria ideia de ângulo[31], por exemplo.

Em relação à abordagem desse tema, vale destacar que, tradicionalmente, os livros didáticos enfatizam a apresentação de nomenclaturas e a proposta de questões cujo enfoque está muito mais na resolução de equações do que na análise das relações entre os ângulos, apesar da supervalorização de imagens estáticas, sem uma proposta de recursos dinâmicos. Veja, por exemplo, Giovanni, Castrucci e Giovanni (2002; 2019) e Centurión e Jakubovic (2015).

Em uma análise documental em relação à maneira como o conteúdo retas paralelas cortadas por uma transversal é abordado nos livros adotados nas escolas públicas do Rio de Janeiro, Martins e Mandarino (2014) constataram que os livros em geral apresentam o conteúdo com explicação teórica na qual as propriedades são retratadas seguindo seis maneiras distintas de introduzir o conteúdo: medição; exemplificação; algebrização; construção; translação; definição, seguidas de exercícios resolvidos (exercícios modelos) e exercícios de aplicação. Nota-se que é adotada como abordagem a tríade: definição – exercícios modelo – exercícios de aplicação, o que pode ser lido

[24] O ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois outros ângulos internos não adjacentes.
[25] Resulta em dois ângulos retos.
[26] Em todo paralelogramo os ângulos opostos têm a mesma medida e a soma dos ângulos adjacentes resulta em dois ângulos retos.
[27] De acordo com o Teorema de Tales duas retas transversais em um feixe de retas paralelas formam segmentos proporcionais. Dessa forma, considerando as retas paralelas, a razão entre dois segmentos quaisquer de uma reta é igual à razão dos segmentos correspondentes da outra.
[28] São ângulos que têm a mesma medida.
[29] Ângulos cuja soma resulta em dois ângulos retos.
[30] Semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos de mesma medida.
[31] Objeto geométrico formado pela união de duas semirretas (não colineares) de mesma origem.

também como o paradigma do exercício proposto por Skovsmose (2000), partindo da teoria para prática, o que pode deixar de evidenciar aspectos inerentes ao pensamento geométrico, e envolve a visualização, a formulação de conjecturas, a descoberta e o desenvolvimento conceitual.

A forma estática como a Geometria é abordada pode ter implicações didáticas e epistemológicas. Fischbein (1993), destaca a importância de explorar aspectos inerentes às propriedades e definições em detrimento de se ater apenas na figura durante a realização de tarefas que envolvam problemas geométricos. Dessa forma, parece-nos mais aceitável que o ensino de geometria seja pautado na manipulação, na exploração, e, por conseguinte, na descoberta a partir da formulação de conjecturas. Em sintonia, Costa (2000) alega que as tecnologias informáticas, e aqui ampliamos para as tecnologias digitais, lançam uma nova perspectiva ao ensino de Geometria, pois colocam nas mãos dos estudantes o poder experimental no desenvolvimento de uma atividade. Deste modo, o cerne pode estar na descoberta ou na compreensão de relações, propriedades e teoremas. Tais argumentos nos direcionam para a relevância da aprendizagem geométrica mediada pelos ambientes de geometria dinâmica, que, a nosso ver, rompe a lógica Euclidiana, por possibilitar uma abordagem descentralizada dessa hierarquia, e, inclusive, permitir a construção de novos conceitos.

Da mesma maneira que a investigação a respeito de o quinto postulado de Euclides[32] possibilitou o descobrimento de outras geometrias, as investigações em um AGD, inicialmente em computadores e recentemente em DMcTT, como *smartphones* e *tablets*, lançam mão de uma nova geometria que possibilita a construção de novos conceitos a partir da análise de velhos entes geométricos. Como alega Bairral (2018), diferentes tipos de dispositivos geram diferentes *insights* para nossa aprendizagem. A interação com eles possibilita o desenvolvimento ou criação de novos conceitos. A esse respeito, o autor esclarece que é possível criar um novo conceito matemático. Ele usa como exemplo o caso das operações com medidas de ângulos como graus, minutos e segundos. Diante da possibilidade de um AGD, esse tipo de operação não faz sentido, o que se faz necessário é a construção de novas maneiras de explorar as relações entre ângulos e retas, por exemplo, (BAIRRAL, 2018). Pode-se também dar maior visibilidade ao estudo dos polígonos não convexos e suas relações, algo pouco valorizado nos livros didáticos.

Por acreditarmos no potencial dessa nova geometria na construção e desenvolvimento conceitual, faremos uma pequena explanação de algumas características de um AGD e das particularidades dos AGD em DMcTT.

[32] Em uma linguagem mais atual é possível enunciar o quinto postulado da seguinte maneira: em um mesmo plano, por um ponto exterior a uma reta pode-se passar uma única reta paralela à reta dada.

2.3 Ambientes, o Dinâmico e os Toques

Filho, Freire e Castro (2017), fizeram um breve apanhado histórico das tecnologias (informáticas, da informação e as digitais) no estudo de conceitos matemáticos em vários campos (aritmético, algébrico e geométrico). Segundo os estudiosos, o resgate histórico serviu de base para evidenciar que a aprendizagem de conceitos matemáticos passa pelo experimento de uma variedade de situações. Em relação à informática educativa no ensino e na aprendizagem de Geometria, os autores alegam que o desenvolvimento da informática e aparição de *softwares* como o Cabri-Géomètre, inauguraram a geometria dinâmica. Concordamos que a proposta de tarefas variadas potencializa o aprendizado matemático, contudo entendemos que a dinamicidade proporcionada pelo *software* é um tipo de geometria dinâmica. Trata-se, na verdade, da dinamicidade proporcionada pelos computadores.

Como discutido por Henrique (2017), dinâmico pressupõe movimento, dessa forma a geometria proporcionada pelas dobraduras, por exemplo, também é dinâmica. Em complemento, Bairral (2017) esclarece que o dinâmico não está apenas na tecnologia digital, mas no que não é estático. Assim, recursos convencionais, como lápis, papel, compasso etc., podem proporcionar aulas dinâmicas. Essa discussão busca esclarecer o significado da expressão terminológica presente nos estudos que tratam do ensino e na aprendizagem de Geometria, seja em computadores, seja em DMcTT e aclarar algumas características de um AGD, particularmente aqueles em DMcTT, como o aplicativo GeoGebra na versão para *smartphone*.

Quando falamos do uso de um AGD para a abordagem de conceitos geométricos, não estamos superestimando esse recurso em detrimento de outro, contudo acreditamos no seu potencial frente a um modelo que supervaloriza a figura do professor e centraliza o conhecimento. Deixe-nos apresentar um exemplo. Vamos relacionar o modelo baseado na definição – exercícios modelo – exercícios de aplicação e uma proposta que valoriza a manipulação e a descoberta com o estudo de um instrumento musical de cordas como o violão.

Imagine a situação na qual uma banda, em um programa de auditório, é solicitada pelo apresentador para acompanhar um cantor na música X sem que tivesse sido previamente combinado entre as partes. O que os músicos fazem em situações assim é colocar em prática conceitos que dizem respeito à teoria musical, tais como a identificação do tom da música, o ritmo, a harmonia, a construção do campo harmônico. Essas habilidades podem ser desenvolvidas por um aprendiz, desde de que o estudo não esteja centrado na memorização de um conjunto de regras, como tipos de batidas, e excessivo uso de cifras, e sim na articulação entre teoria e prática e tendo contato com uma variedade de atividades.

De maneira similar podemos relacionar o estudo baseado na tríade definição – exercícios modelo – exercícios de aplicação com o estudo por memorização de um instrumento e outro fundamentado na experimentação com aquele que oferece mais recursos cognitivos aos alunos. É comum encontrarmos em sala de aula aquele estudante que sabe aplicar uma fórmula para resolução de um exercício, mas tem dificuldade em compreender o mesmo conceito em outros contextos.

Ressaltamos a importância de promover o ato de experimentar, a exposição de ideias, o diálogo, as várias representações para ampliar a habilidade de visualização geométrica, a construção e o desenvolvimento conceitual. Recursos distintos devem compor o cenário de aprendizagem a fim de proporcionar novas descobertas, dessa forma os DMcTT podem ser mais um elemento com possibilidade de viabilizar inéditas formas de explorações de conceitos e procedimentos (BAIRRAL, 2017).

2.4 Contribuições e Singularidades de um AGD

Muitos autores têm destacado as características e as potencialidades de um AGD[33]. Por exemplo, Gravina (2001, p. 82) alega que "[...] os ambientes de geometria dinâmica são ferramentas informáticas que oferecem régua e compasso virtuais, permitindo a construção de objetos geométricos a partir das propriedades que os definem". Em complemento, Laborde (1998) destaca a ação biunívoca que a experimentação com um AGD proporciona. Ao variar os elementos de um objeto geométrico, o sujeito obtém o *feedback* do aplicativo, algo que não acontece em uma dinâmica com lápis e papel, por permitir a retroação para elaboração de conjecturas.

Também Arzarello *et al*. (2002), destacam a possibilidade de experimentações variadas na construção em um AGD, que além de permitir uma visão mais ampla de um mesmo objeto pode contribuir para o processo de prova de uma conjectura, por dar ao usuário a possibilidade de explicar as conjecturas a fim de identificar propriedades. Os autores também argumentam que os estudantes se apropriam das diferentes modalidades de manuseio (arrastamento) com finalidades distintas, como explorar, formular e validar conjecturas (ARZARELLO *et al.*,2002), o que, por outro, lado refuta a falsa sensação de que os alunos podem ser levados a construir um conhecimento matemático baseado em um "ato de fé", com afirmações do tipo "é verdade porque vi no GeoGebra". Pode-se, por meio do próprio GeoGebra, explorar a validade das relações e dos teoremas. Além do mais, na verificação em um AGD é possível suscitar no aprendiz uma nova curiosidade questionando-lhe a respeito da validade de um resultado e desafiando-lhe a outras

[33]As características que apresentamos são universais, contempladas por boa parte dos AGD, tanto nas versões *desktop* quanto para DMcTT (*tablet* ou *smartphone*). Contudo, nossa análise está voltada para o aplicativo GeoGebra na versão geometria para *smartphones*, que figurou a maior parte das nossas implementações.

funções desempenhadas pela demonstração: explicação, descoberta, verificação, desafio intelectual e sistematização (DE VILLIERS, 2001). E, conforme demonstrou o estudo de Silva (2017), o processo de elaboração de prova em um AGD faz com que os estudantes explorem, argumentem e formulem as próprias conjecturas.

Laborde e Capponi (1994), ressaltam que os conhecimentos matemáticos apresentados em um AGD, em função das limitações, sejam do *software* ou do dispositivo, têm um funcionamento peculiar e em alguns casos distintos daquele conhecimento utilizado como referência. Em relação a este fato, exemplificaremos. É recorrente, em análises envolvendo ângulos colaterais internos, os estudantes apresentarem dificuldades em supor a relação matemática envolvida (ângulos suplementares), no caso de uma análise aritmética, dado uma particularidade e limitação do GeoGebra quanto ao número de casas decimais, o que impossibilita, com frequência, que a soma dos ângulos seja dois ângulos retos.

Além dessas características, em um AGD é possível transitar entre o particular e o geral, por permitir a construção de uma classe de figuras (ARZARELLO *et al.*, 2002). Vejamos mais um exemplo:

Na Figura 7, para construção do objeto matemático[34], foram realizados os seguintes passos:

1. Construiu-se o triângulo ABC e as retas CD e BD paralelas à AB e à AC, respectivamente.

2. Marcou-se a interseção entre as retas (ponto D) e, em seguida, mediu-se os ângulos ABD, BDC, DCA, CAB.

Uma questão a ser analisada é a seguinte: que relações existem entre os ângulos? Explique.

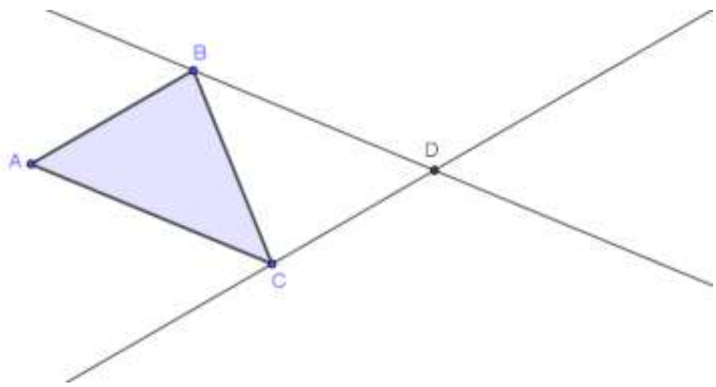


Figura 7 – Construção de um quadrilátero a partir de um triângulo e retas paralelas
Fonte: elaboração própria

Em uma proposta escrita essa tarefa representa a análise de um caso particular, pois envolve uma figura estática. A resolução desse tipo de tarefa demanda do aprendiz o conhecimento prévio

[34] Essa proposta foi inspirada em Ponte, Oliveira e Candeias (2009).

das relações entre os ângulos colaterais internos e/ou a identificação do tipo de quadrilátero (paralelogramo) e aplicação dessa propriedade e uma tentativa de problematizar torna-se um exercício rotineiro (POLYA, 2006). A mesma situação proposta para um AGD, na qual pode ser apresentado o objeto geométrico ou os sujeitos podem construí-lo, possibilita a análise do geral, pois é possível construir uma nova figura a cada modificação realizada, o que envolve uma classe de figuras relacionada à propriedade, que além da análise, possibilita a visualização, a intuição, outras representações, a formulação de conjecturas e a descoberta de uma variedade de casos particulares.

Além dessas características, vale destacar que em um AGD, uma vez que as construções não são estáticas, permite novas alternativas diante de um objeto geométrico, como modificar ou arrastar, pode enriquecer o processo de elaboração e manipulação de uma imagem mental e, por conseguinte, contribuir para o desenvolvimento da visualização (HENRIQUE, 2017).

Destacamos apenas algumas características de AGD em ambientes informatizados e, embora essas características sejam universais, clicar com *mouse* e tocar em uma tela são ações distintas. Como já mencionado no primeiro capítulo, de acordo com Bairral (2017), as manipulações *touchscreen* estabelecem e inauguram um campo de manifestação da linguagem e da cognição. Os movimentos dos dedos e das mãos compõem e moldam o nosso pensamento. O autor destaca que, embora alguns toques se assemelhem a ações realizadas aos movimentos de clique ou arrasto realizadas em um AGD, em *desktop*, eles possuem diferenças em termos de orientação. Enquanto por meio do clique a ação é mediada por uma ferramenta, no DMcTT a ação se dá a partir de um ato contínuo aproximando objeto-sujeito.

Por exemplo, durante a manipulação de um objeto na tela de um DMcTT, realizamos um conjunto de movimentos, alguns relacionados a conceitos matemáticos específicos, como por exemplo, a ampliação ou redução de uma figura. Realizar essa ação, por meio do clique, arrastando um dos vértices da figura ou valendo-se do toque "esticando" a diagonal com o uso de dois dedos, ainda que ambas envolvam o método da diagonal, epistemologicamente são ações distintas (BAIRRAL; ARZARELLO; ASSIS, 2017).

Conforme sinalizado no capítulo anterior, Arzarello, Bairral e Dané (2014) identificaram dois domínios de manipulação: o construtivo e o relacional nos processos cognitivos que se articulam durante a ação. Enquanto o domínio construtivo envolve ações básicas, geralmente atreladas às construções e reorganização do objeto geométrico, o relacional tem um cunho mais conjectural, com a intenção de análise e envolve outros elementos exteriores como as interações e a argumentação.

Além das características e singularidades apresentadas acerca de um DMcTT, nossa hipótese é que a percepção visual de quem analisa um objeto com a tela na vertical, no caso dos computadores, pode ser diferente diante da tela do *smartphone* ou *tablet* nos quais a visão é influenciada pela posição da tela, na verdade aproxima-se da verticalidade no caso de computadores *desktop* ou *notebook* e da horizontalidade em se tratando de DMcTT.

Outra questão diz respeito ao movimento dos olhos dos sujeitos em interfaces digitais. A direção do olhar em uma tela computadorizada está estritamente relacionada a uma questão cultural, ou seja, temos como referência o sentido da leitura da esquerda para direita, na cultura ocidental (MORAES, 2006). Tal assertiva denota ponto de congruência em relação ao processamento humano na visualização de imagens na tela de um *smartphone*. Essa observação evidencia ainda mais um ponto de destaque em relação a um AGD: nossas construções e manipulações tendem a seguir essa mesma orientação. Contudo, em um DMcTT, a percepção visual além de ser distinta é influenciada por meio de sensores de toques mapeados pelo cérebro, pois como mostrou Damásio (2000), o objeto é processado pelo cérebro em termos sensorial e motor e o aprendizado se dá pela categorização em termos conceituais ou linguísticos, em que a recuperação envolve a evocação ou reconhecimento.

As especificidades que apresentamos de um AGD representam contribuições aos processos de ensino e aprendizagem de Geometria e entender que a ação de tocar na tela é diferente de clicar com *mouse* e implica olhar os AGD em DMcTT sob um novo prisma, além de possibilitar a análise de como acontece o processo de desenvolvimento conceitual a partir do aplicativo GeoGebra. Nossa hipótese é que a mediação, que ocorre a partir da análise de um objeto geométrico em um AGD por meio de manipulações em tela, na realização de uma atividade, evidencia a emergência de propriedades, intensificando o desenvolvimento da visualização, pois os sujeitos constroem, modificam, (re)criam, compartilham toques e ideias, em uma ação mútua, tudo isso como uma extensão do pensamento no ato de tocar na tela. Dessa maneira, dialogam, argumentam e compartilham ideias, o que pode potencializar a construção e o desenvolvimento conceitual.

Discorremos até aqui, entre outros tópicos, a respeito do papel da visualização, habilidade cognitiva essencial para a vida cotidiana e intrínseca aos processos de raciocínio matemático e de construção e desenvolvimento conceitual. Evidenciamos a importância do estudo das relações entre ângulos e retas e apontamos que os AGD proporcionam uma nova Geometria. Destacamos também como os AGD em DMcTT se diferenciam daqueles em ambientes informatizados e de que maneira a visualização e conceituação podem caminhar juntas. Todavia, evidenciamos muito mais o papel da visualização do que a conceituação. Afinal, o que é um conceito? Como ocorre o processo de construção e desenvolvimento conceitual?

No âmbito da ciência cognitiva, existem várias concepções acerca dos estudos de conceitos. Há uma concepção filosófica[35] já alicerçada a respeito do tema. Na Educação Matemática, muitos autores têm explorado a teoria dos campos conceituais de Gerard Vergnaud[36] e a ideia de conceito espontâneo e conceito científico de Vigotski[37]. Contudo, de todas as possibilidades, escolhemos, pela especificação do objeto de estudo dessa pesquisa, ou seja, uma articulação entre neurociência, psicologia cognitiva e linguística, que será abordada nos próximos capítulos.

[35]Ver, por exemplo, Deleuze e Guattari (2005).
[36]Ver Vergnaud (1993).
[37]O leitor interessado pode consultar Vigotski ([1934]2010) eVeer e Van Der (1996).

CAPÍTULO III – CONCEITOS

Este capítulo objetiva apresentar a ideia de conceito que assumimos para o texto. Começamos respondendo a seguinte questão: "o que é um conceito?". Para isso, nos apropriamos de algumas ideias da neurociência e destacamos a relevância dos conceitos para os nossos processos de raciocínio. Na sequência, focalizamos o estudo de conceitos no campo da psicologia cognitiva e direcionamos para novos apontamentos.

3.1 O Que é um Conceito?

Do Latim *conceptum,* conceito é uma palavra polissêmica. Pode aparecer em diferentes contextos, representando definição, opinião, avaliação, reputação, princípio ou compreensão. Essa última é a que se aproxima mais da noção de conceito tratada pelos cientistas cognitivistas e a que assumiremos para os propósitos deste trabalho.

Estudos acerca do processo de formação de conceitos tem sido objeto de investigação de filósofos, antropólogos, psicólogos e linguistas ao longo de décadas e, embora ainda não haja entre eles uma convenção de como se dá esse processo, parece, pelo menos, haver uma concordância de que um conceito é uma representação mental que construímos de um objeto ou de uma ideia.

Para Fischbein (1993), um conceito pode ser caracterizado como a capacidade de expressar uma ideia, ou seja, uma representação ideal geral de uma categoria, baseada em uma característica comum. De acordo com Lomônaco (1997 *apud* ALMEIDA; LOMÔNACO, 2018), um conceito é formado pelo sujeito quando este, a partir de suas experiências, elabora uma representação mental que abrange não apenas o caso particular, mas todos os exemplos da categoria[38]. De maneira similar, Ferreira (1963) defende que os conceitos são conteúdos mentais elaborados a partir de experiências correlatas que se caracterizam por sua generalidade, diferenciação, abstração e simbolização.

[38]Almeida e Lomônaco (2018), Medin (1989) e Oliveira, M.B. (1999) chamam a atenção para a importância de distinguir conceito e categoria (ou classe), que frequentemente são apresentados de forma equivocada como sinônimos. "Conceito" diz respeito à representação mental, enquanto "categoria" indica o conjunto de membros representados pelo conceito. Vejamos o conceito de "cadeira": a representação mental que possuímos para esse objeto é o conceito que temos dele, e o conjunto de todas as cadeiras (cadeira de escritório, cadeira de balanço etc.) é a categoria. Nesse sentido, quando nos referirmos ao conceito de cadeira, falamos de um tipo de representação mental e, quando falamos da categoria cadeira, nos referimos a todos os tipos de cadeira que existem, existiram e existirão. Vale ressaltar, conforme relatado por Medin (1989), que é convidativo pensar as categorias como algo do mundo real e os conceitos como a representação mental delas, mas isso não está correto. Para o autor, os conceitos não precisam de um representante no mundo real, por exemplo um unicórnio ou um quadrilátero.

À primeira vista pode parecer frívolo investir tempo na investigação do processo de construção de conceitos. Todavia, imagine como seria caótica a vida, caso não fossemos capazes de categorizar (MACEDO, 2002). Assim, propomos a seguinte situação: alguém que já tenha estado em uma sala de aula sabe qual a finalidade de todos os objetos (ou de boa parte deles) que lá estão, ou seja, a cadeira, a lousa, a caneta etc. Baseados em nossas experiências anteriores, conseguimos categorizar, isto é, agrupar, de acordo com as categorias, cada um desses artefatos, sem que, naquele momento seja preciso alguém nos dizer a utilidade de cada objeto presente na sala. Uma pessoa que não consegue categorizar está sempre "entrando no novo", e qualquer mudança de ambiente causará estranheza, mesmo que ela já tenha estado, em algum momento, no ambiente.

Cazeiro (2013, p. 17) destaca a importância da categorização para as atividades diárias. Segundo a pesquisadora, os conceitos são essenciais "[...] para funcionamento cognitivo do ser humano e para a sua relação com o mundo. Eles possibilitam a identificação e a ordenação das coisas, pessoas e eventos que o cercam", o que dispensa a necessidade de lidar com casos particulares e favorece sempre categorizar ou criar uma nova classe. A autora afirma ainda que tudo que conhecemos, do simples ao complexo, está representado na mente por meio de conceitos.

Em sintonia, Ferreira (1963) sinaliza que os conceitos são uma importante forma de organizar as experiências. Em caráter de explicação, tente descrever todo o ambiente em que você está neste momento. Para realizar esta tarefa, será necessário que pare a leitura e volte a atenção para detalhes que passavam despercebidos

Dessa forma, se os nossos sentidos fossem obrigados a captar todos os detalhes, o tempo todo estaríamos sendo bombardeados por estímulos, o que nos acarretaria desperdício de energia e tempo. E qual a função dos conceitos aqui? Nossa atenção está voltada para a organização dos pormenores mais importantes de cada situação. Como consequência, ao passo que lê este texto, vários outros estímulos não o impediram de continuar a leitura; por exemplo, os estímulos sonoros, como um cachorro latindo, um carro de som que passou próximo a sua casa, o som de uma TV no cômodo ao lado etc.

Tais observações evidenciam a economia cognitiva proporcionada pelos conceitos, tendo como função de organização aquilo que possuímos de experiência. Ferreira (1963) também acrescenta que dificilmente os seres humanos conseguiriam agir de modo racional sem o uso da engenhosa possibilidade de formular e desenvolver um conceito. Afinal, a conceituação é uma característica essencial do pensamento humano.

Essas primeiras asserções evidenciam aspectos inerentes aos conceitos, como sua definição a partir de pesquisas psicológicas de formação de conceitos, a importância da categorização para o desenvolvimento cognitivo e a realização de atividades diárias. Desse modo, parece que até aqui conseguimos responder "o que é um conceito" e avançamos na discussão da temática destacando o papel dos conceitos na vida cotidiana. Mas, é preciso entender como ocorre o processo de formação de conceitos.

Formar o conceito para uma entidade é exercício criativo da mente, e é também um tanto quanto engenhosa a forma como se dá esse processo do ponto de vista neurobiológico. Como pesquisador da área, o neurocientista português António Damásio explica que a formação de um conceito está estritamente ligada à elaboração de imagens[39] no cérebro: um conceito é formado primeiramente por meio de evocações de imagens não verbais que correspondem à palavra (seja ela escrita ou verbal), signo da entidade que pretendemos conceituar. Nesse sentido, o estudioso também destaca a memória que cada um constitui para a entidade cujo conceito se pretende formar (DAMÁSIO, 2011).

Acrescenta o autor que nossa mente é estruturada por meio de um fluxo de pensamento conceitual. Por exemplo, à medida que se lê as palavras e sentenças que formam este texto, elas são decodificadas na mente mediante mensagens não verbais que irão formar as imagens dos conceitos, uma vez que as palavras e as sentenças são utilizadas para traduzir conceitos e estes por sua vez constroem de maneira não linguística as definições, os objetos, ações, eventos, relações, entre outros (DAMÁSIO, 2000).

Outro aspecto importante, no que diz respeito à análise da formulação de um conceito do ponto de vista neurobiológico, que deve ser considerado, se refere à linguagem. De acordo com Damásio e Damásio (1992, p. 20), “a linguagem surgiu e se manteve ao longo da evolução porque constitui um meio de comunicação eficaz, sobretudo para conceitos abstratos”. Segundo os estudiosos, a linguagem tem como função a cognição, pois é por meio dela que conseguimos estruturar o mundo em conceitos e diminuir a complexidade de estruturas abstratas com o objetivo de compreendê-las. Acrescentam que “a economia cognitiva da linguagem – sua facilidade para reagrupar muitos conceitos sob um mesmo símbolo – é o que nos permite elaborar conceitos complexos que sem o uso da linguagem seriam inacessíveis” (DAMÁSIO; DAMÁSIO, 1992, p. 20).

Nesse sentido, citamos como exemplo a palavra “cadeira”. É possível evocar muitas sensações atreladas a esta palavra: a representação visual, as formas de uso, as percepções provocadas pelo corpo quando é utilizada. Isso também se dá com um conceito complexo, como inflação, que pode ser associado a várias representações conceituais (DAMÁSIO; DAMÁSIO,

---

[39] O termo “imagem” que utilizamos neste texto está relacionado também a um processo de criação do cérebro e não apenas às imagens externas. Damásio (2010, p. 97-99) explica que “as imagens nas nossas mentes são os mapas instantâneos do cérebro para tudo e mais alguma coisa, dentro do corpo e à sua volta, tanto concreto como abstrato, do presente ou daquilo que foi anteriormente gravado na memória. [...] as imagens representam propriedades físicas de entidades, e as suas relações espaciais e temporais, bem como as suas ações”.

1992). Uma metáfora que ajuda a sintetizar essas ideias é a da linguagem como matriz[40]. Em uma matriz é possível "colocar" em cada elemento uma outra, repetindo o processo quando for necessário. De igual maneira, a linguagem nos permite reagrupar os conceitos a partir de outros.

Essa rede de conceitos se organiza de maneira pouco perceptível e eles estão prontos para entrar em ação à medida que o contexto assim exigir. Vejamos a imagem (Figura 8) a seguir.

Figura 8 – Conceitos associados a uma xícara de café
Fonte: Google imagens

Para Damásio e Damásio (1992, p. 26),

> [...] os conceitos são armazenados no cérebro sob a forma de registros "adormecidos". Quando estes registros são reativados, podem re-criar as diversas sensações e ações associadas a uma determinada entidade ou a uma classe de entidades. Uma xícara de café, por exemplo, pode evocar representações visuais ou táteis de sua forma, cor, junto com as de aroma e sabor do café ou as da trajetória da mão e do braço quando levam a xícara à boca. Todas estas representações são re-criadas simultaneamente em distintas regiões do cérebro.

Damásio (1989, p. 26, tradução nossa) ainda explica que

> [...] a gama de representações que formam a base para um conceito varia de indivíduo para indivíduo, dependendo do conhecimento do objeto, do tipo de experiência que o observador teve em relação ao objeto, do grau de exposição, do valor do objeto para o observador e assim por diante.

De maneira similar, Rosch (2012) destaca que os conceitos só existem como partes de uma rede de sentidos viabilizada tanto por outros quanto por atividades vitais relacionadas entre si. Citamos como exemplo o conceito "grande", que só tem sentido em relação a "pequeno".

Nesse enfoque, parece que um conceito está além de uma simples construção mental. Mas quais elementos devemos considerar para entender o processo de sua construção?

Embora a neurociência tenha permeado nosso tema com o objetivo de entender melhor o que é um conceito; e os estudos dessa área podem ajudar a esclarecer a natureza do pensamento, o

[40]Atribuímos ao termo o sentido matemático.

que, como consequência, pode contribuir para o entendimento do desenvolvimento conceitual e a sua relação com o contexto cultural (RADFORD; ANDRÉ, 2009), não existe, nesse campo, uma tradição em relação ao estudo sistemático do processo de formação de conceitos, incluindo os matemáticos mediados por dispositivos móveis. Ao que tudo indica, essa tarefa foi delegada à psicologia cognitiva, como veremos a seguir.

3.2 Três Visões Sobre Conceitos

Como formamos os conceitos que temos? São os conceitos formados por similaridades entre as entidades de uma categoria em que todos os elementos de uma categoria são regidos por uma lista de propriedades necessárias e suficientes ou existem exemplares que se destacam mais do que outros formando uma espécie de protótipo da categoria? Ou, ainda, estão os conceitos conectados por uma rede, em que cada um deles é parte de uma teoria na qual está inserido ao passo que se torna um elemento criador?

Historicamente, no campo da ciência cognitiva, as investigações acerca de o processo de formação de conceitos estão organizadas em três[41] abordagens principais sobre conceitos: a visão clássica, a visão dos protótipos naturais e a visão teórica (MEDIN, 1989; OLIVEIRA, M. B., 1999a; POZO, 1998; ROSCH, 2012), e que serão explicadas nas páginas seguintes. Por ora, vale esclarecer que delimitando uma linha do tempo para cada concepção, Oliveira, M.B (1999a) destaca que a visão clássica perdurou desde Aristóteles, na Grécia antiga, até o início da década de 1970, quando alguns questionamentos, propostos a partir do trabalho pioneiro da antropóloga norte-americana Eleanor Rosch, acerca da validade da visão clássica, contestou a precisão dos conceitos descritos nessa concepção.

O trabalho de Eleanor Rosch inaugurou uma tradição na investigação a respeito de conceitos, que posteriormente viria receber o nome dela: a tradição roschiana. As pesquisas da estudiosa representam o segundo marco dessa tradição. Por priorizar a formação de conceitos a

---

[41] É possível acrescentar uma quarta teoria: a visão dos exemplares, mas por concordarmos com alguns autores (por exemplo, Cazeiro, 2013; Medin, 1989) que esta concepção surgiu como uma variação da visão dos protótipos, limitar-nos-emos a dar apenas esta breve descrição. Para a visão dos exemplares, os conceitos se constituem a partir de exemplos específicos da categoria e não por uma lista de atributos, conforme ocorre nas visões clássicas e dos protótipos (CAZEIRO, 2013; LOMÔNACO *et al.,* 2000; MEDIN, 1989). Dessa maneira, os conceitos são representados por alguns casos particulares. Vejamos um exemplo apresentado em Lomônaco *et al.,* (2000), que pode ajudar a esclarecer melhor a ideia central da concepção em questão. Imagine a situação de um professor experiente que, durante anos de prática docente, tenha se deparado com vários tipos de alunos (alguns aplicados, outros mais esforçados e alunos os desinteressados). A visão dos exemplares leva a supor que, no decorrer do seu trabalho, esse o professor irá gradativamente selecionar alguns exemplos de alunos bons e alunos ruins e usará da experiência dele para inclusão (ou exclusão) de novos membros dentro das categorias “aluno bom” e “aluno ruim”.

partir de categorias naturais – conceitos que podem ser aprendidos naturalmente na vida cotidiana sem a necessidade de ensino formal para sua construção –, tal tradição é denominada “visão dos protótipos naturais”. É importante destacar que a visão clássica ficou assim conhecida somente a partir dos questionamentos levantados por Rosch (ALMEIDA; LOMONÂCO, 2018).

A terceira etapa surgiu em meados da década de 1980, instalando uma série de críticas à maneira como um conceito é concebido do ponto de vista dos protótipos naturais. Entre os opositores que adotam esta visão está o norte-americano Frank Keil. As críticas dele são percebidas como um possível prelúdio para um novo marco na tradição roschiana, a visão teórica (LOMÔNACO *et al*., 2000).

Vale destacar que as teorias a respeito das visões não são excludentes, pelo contrário é possível que, juntas, formem uma espécie híbrida de formação de conceitos. Destacamos, contudo, que as observações a respeito das formas de conceber um conceito abrem possibilidades de questionamentos, novas ideias e novos posicionamentos. A seguir, destacaremos os principais pontos de cada visão.

3.2.1 Visão clássica

A ideia de nomear, definir e categorizar tem sido submetida à investigação filosófica desde a época de Aristóteles (GARDNER, 1995). A abordagem da de classificação da visão clássica tem origem na filosofia ocidental. Muito provavelmente, quando o homem começou a pensar acerca da própria experiência por meio da razão, apareceram questões que colocavam em dúvida a confiabilidade dos sentidos e as bases do conhecimento, e algumas dessas questões evidenciavam o fato de as categorias serem gerais, e de os conceitos na mente correlatar com as categorias existentes no mundo (ROSCH, 2012).

O primeiro estudo sistemático de formação de conceitos é creditado ao psicólogo norte-americano Clark Leonard Hull, em um trabalho publicado em 1920 (ALMEIDA; LOMÔNACO, 2018; POZO, 1998). Nessa pesquisa, o psicólogo apresentou a um grupo de estudantes universitários caracteres chineses como os apresentados na Figura 9, a seguir.

Figura 9 – Caracteres chineses apresentados por Clark Hull em 1920 no trabalho sobre a elaboração de conceitos
Fonte: POZO, 1998, p. 67

Os caracteres alinhados em uma mesma fila possuem certas características básicas, que formam o conceito a ser aprendido. A ideia do experimento era bem simples: os caracteres foram apresentados a cada participante, e cada um ficava incumbido de descobrir o nome correto. A cada tentativa, o pesquisador dizia a designação verdadeira de cada caractere aos participantes, que continuavam experimentando.

Segundo o estudo, em poucos ensaios, os sujeitos eram capazes de aprender o nome de cada conceito e até mesmo aplicar em outros contextos o conceito aprendido. Para Clark Hull, como destacado por Pozo (1998), a maneira pela qual os sujeitos formavam os conceitos na situação com os caracteres chineses poderia explicar a maneira que ocorre o processo de formação de conceitos. O estudo pioneiro de Clark Hull parece ter criado toda uma tradição na pesquisa psicológica de formação de conceitos. Estudos posteriores tentaram identificar a construção de conceitos a partir de estímulos artificiais e este modelo viria a ser reconhecido posteriormente como a visão clássica de categorização (ALMEIDA; LOMÔNACO, 2018).

Para Oliveira, M.B. (1999a), os estudos dessa abordagem se valeram de experimentos com conceitos artificiais, inventados apenas como parte do experimento. Aos sujeitos, eram apresentados um conjunto de peças que hoje chamamos de blocos lógicos (ou outro tipo de material com características bem definidas como os caracteres chineses de Hull) e alguns conceitos artificiais (representativo do material). Por exemplo, o conceito *lag* poderia representar a categoria "círculo azul". A função do sujeito no estudo era identificar quais atributos constituem o conceito em questão.

Na visão clássica, um conceito é compreendido como algo preciso, construído e definido por uma lista finita de propriedades que são regidas por critérios determinados (GARDNER, 1995). Dessa forma, como alega Sternberg (2008), para que uma categoria seja classificada como X, ela deverá possuir a característica definidora (lista de propriedades/atributos), de outro modo, não será X. Na mesma linha, para Lakoff (2012), a lógica proposicional das categorias clássicas pode ser entendida seguindo a lógica dos recipientes e está organizada da seguinte maneira: dado uma entidade X contida em um recipiente A, e A pertence ao recipiente B, então X está no recipiente B. Como veremos no próximo capítulo a lógica da visão clássica pode ser entendida por meio da metáfora conceitual "categorias clássicas são recipientes".

A ideia de que todas as entidades de uma determinada categoria partilham de características essenciais em comum, que geram sua participação na categoria, é muito conveniente e essa é a lógica que rege a visão clássica (MEDIN, 1989). Para este autor, a visão clássica assume que representações mentais de categorias consistem em listas de atributos (propriedades) que individualmente são necessárias para a associação à categoria e, coletivamente, são suficientes para determinar a associação à categoria.

Gardner (1995) elencou três características definidoras da visão clássica. Vejamos:

1. As categorias são arbitrárias. Não existe nenhum tipo de interação (interna ou externa) que determine a maneira como devemos categorizar. Esta tarefa fica delegada às culturas e às línguas. Entidades podem ser categorizadas de inúmeras maneiras, sendo os sujeitos capazes de aprender a construir essas categorias definidas pela cultura de cada um em particular.
2. As categorias possuem atributos definidores. De acordo com esta característica, todos os membros de uma categoria compartilham de, pelo menos, as propriedades definidoras. Dessa forma, não é possível que um não-membro possua os mesmos atributos.
3. A lista de propriedades determina quais entidades pertencem a uma categoria. Disso implica que não faz sentido dizer que uma categoria possui atributos mais relevantes capaz de tornar um exemplar o modelo de uma categoria.

De acordo com a visão clássica, esse conjunto de propriedades constitui a definição de um conceito, ou seja, é definido por uma lista de características necessárias e suficientes (OLIVEIRA, M.B., 1999a). Ainda, conforme alega Rosch (2012), as categorias eram vistas como conjuntos lógicos. Uma classe deveria ser exata, o que exclui a possibilidade de imprecisão (não vaga) e possuir atributos em comum que se constitui em condições necessárias e suficientes que identificam os seus membros. Dessa lógica, é possível concluir que os membros de uma categoria deveriam ser igualmente verdadeiros em relação a participação na categoria. Ou eles possuíam as propriedades necessárias coletivas, ou não.

Para elucidar a ideia central da visão clássica, analisaremos a categoria paralelogramo. Conforme alegam Alexander e Koeberlein (2013), um paralelogramo é um tipo de quadrilátero em que os dois pares de lados opostos são paralelos, e atende aos seguintes critérios: (a) ser um quadrilátero e (b) possuir os lados opostos paralelos. Para que uma forma geométrica seja considerada paralelogramo, é necessário verificar apenas essas duas propriedades. Outras propriedades poderiam ser agregadas à lista inicial, como ângulos opostos iguais, ângulos subjacentes suplementares, mas estas não definem o paralelogramo, na verdade são consequências das duas anteriores.

Neste caso, empregamos o conjunto de características que definem a categoria paralelogramo como o conceito. Na visão clássica, em particular para os conceitos científicos, é muito comum associar a definição de uma categoria ao seu conceito. Dahlberg (1978) explica que a definição tem por objetivo determinar os limites de uma ideia ou conceito. Trata-se de uma delimitação ou estabelecimento das características que compõem o conceito. Esse tipo de definição conceitual, que estrutura a Geometria euclidiana, tem origem na matemática grega, propósito fundamental da lógica aristotélica, que predominou ao longo de quase toda a história da lógica e da filosofia (OLIVEIRA, M.B., 1999a), todavia manteve seu pressuposto em estudos realizados acerca da formação de conceitos nos campos da antropologia e psicologia cognitiva.

Como vimos, a visão clássica consegue explicar bem a definição de conceitos científicos, porém deixa de considerar alguns elementos, por exemplo, como se dá a construção de conceitos naturais (aqueles aprendidos sem a necessidade do ensino formal, como as cores) ou por que alguns membros parecem ser melhores representantes de suas categorias? Rosch (2012) declara que a visão clássica pode não dar conta de algumas necessidades para o ato da compreensão cognitiva, por exemplo, por não considerar o conhecimento proveniente da experiência, tampouco as interações com o mundo material e social. Algumas lacunas permitiram que uma nova visão fosse concebida como um novo modelo para as investigações em relação a conceitos, a visão dos protótipos naturais, que apresentaremos a seguir.

3.2.2 Visão dos protótipos naturais

Inspirada nas ideias de Wittgenstein[42], o primeiro a levantar questionamentos a respeito da hegemonia da visão clássica de categorização de conceitos, a antropóloga e psicóloga norte-americana Eleanor Rosch formulou a teoria dos protótipos naturais[43]. Para Rosch (1973) as

---

[42] Ver Ludwig Wittgenstein (1999). Investigações Filosóficas (Coleção os Pensadores) e Oliveira M.B. (1999b).

[43] Existem variações quanto à terminologia. Por exemplo: visão probabilística (MEDIN, 1989), visão natural (GARDNER, 1995), concepção prototípica (OLIVEIRA M.B., 1999a). Em Rosch (2012), é apresentada uma crítica em

categorias que compõem a linguagem natural não são construídas por uma composição de atributos já aprendidos. E boa parte (talvez todos) dos conceitos da linguagem natural recebe estímulos que fazem com que alguns exemplares se tornem melhores representantes de um conceito do que outros. Para os melhores membros de uma categoria conceitual, Rosch (1973; 1978; 2012) os chamou protótipos.

Em um estudo realizado com os *dani*[44] – membros de uma cultura da idade da pedra da Nova Guiné – Rosch (1973) observou que existem, no universo das cores e das formas, membros que são mais perceptivelmente salientes do que outros estímulos em seus domínios.

Conforme o estudo, Rosch identificou que o aprendizado de categorias naturais difere do processo de abstração apresentado na visão clássica, em que o aprendizado se dava por meio de categorias artificiais, da seguinte maneira:

a) Aprender categorias nas quais o protótipo natural é central se torna mais fácil para um conjunto de variações do que aprender categorias nas quais uma distorção de um protótipo é central e o protótipo natural ocorre como um membro periférico.
b) O protótipo natural tem uma tendência a ser assimilado primeiro, independentemente de ser o centro da categoria.
c) Os sujeitos estão mais inclinados a definir a categoria como um conjunto de variações do protótipo natural, que, neste caso, é identificado como membro mais típico da classe até mesmo quando o arquétipo não é central para o grupo

Os resultados experimentais colocam em evidência um aspecto fundamental da visão dos protótipos naturais: quando os nomes das categorias são aprendidos, eles tendem a se apegar primeiro aos estímulos salientes, apenas mais tarde são generalizados para outras instâncias, e dessa forma os protótipos naturais se apresentam como centro de organização das categorias (ROSCH, 1973).

Para Rosch (2012), todas as categorias apresentam uma relação gradativa entre os seus membros. Disto, implica outra característica fundamental da visão dos protótipos naturais: avaliamos de maneira fácil, rápida e significativa o quão bem um determinado elemento satisfaz a própria ideia ou imagem da classe à qual o componente pertence.

Conforme destacado por Gardner (1995), a visão dos protótipos estabelecida por Rosch ajudou a minar a visão clássica dos conceitos. Vale lembrar que para essa abordagem uma categoria

---

relação à ideia de que membros prototípicos de uma categoria sejam organizados por meio de frequência estatística como proposto em Medin (1989).

[44] O empreendimento inicial de Rosch estava centrado na hipótese de Whorf-Sapir que, de forma sumária, diz que a língua materna condiciona a forma como uma pessoa vê e vive no mundo. Entretanto, tendo a oportunidade de visitar os *dani*, que possuíam apenas dois termos para cores: *mola* para matizes claros e quentes e *mili* para gradações de cor escuras e frias, Rosch ficou curiosa a respeito dos efeitos de um vocabulário de cores muito limitado. A respeito deste assunto, ver Gardner (1995) e Oliveira M.B. (1999a). Para uma descrição completa da metodologia adotada no experimento, consultar Rosch (1973).

é determinada principalmente a partir de estímulos artificiais, as categorias são definidas a partir de uma lista de atributos. Todos os membros de uma categoria exibem esses atributos, enquanto os não membros não exibem, um conceito é preciso. Não existe, para visão clássica, casos limítrofes. Todavia, a visão dos protótipos também considera uma lista de atributos, embora, para esta, cada conceito se valha de atributos mais evidentes. Dessa forma, as propriedades que compõem um conceito não são necessárias e suficientes.

Com objetivo de tornar essas ideias um pouco mais claras, vamos pensar na seguinte questão: o que é uma cadeira? De acordo com a visão clássica, no domínio da mobília, para ser classificada como cadeira a categoria precisa atender uma lista de atributos. Esta é também a lógica presente na lexicografia. Conforme Borba (2005), uma cadeira é uma peça do mobiliário com assento, podendo ou não ter braços, com costas para uma pessoa. Desta forma, a categoria cadeira possui os seguintes atributos: 1. Tem assento. 2. Possui encosto para as costas. 3. Abanca uma única pessoa. Pode ter apoio para os braços. Em relação a este último, é possível verificar que ele não se constitui em um atributo necessário. Porém, a questão central não é essa e sim outras que podem emergir a partir dessa caracterização. Por exemplo: uma cadeira de jantar ou uma cadeira de escritório são melhores exemplos da categoria cadeira do que cadeira de balanço? Para os conceitos matemáticos existem membros mais representativos?

Em outros estudos (por exemplo, ROSCH; MERVIS, 1975; ROSCH, 1978;2012), Rosch verificou que a pertinência dos protótipos não estava restrita ao universo das cores, mas podia ser estendida para outros domínios, por exemplo para categorias como as dos artefatos, as biológicas, as sociais, as políticas e as matemáticas.

Rosch e Mervis (1975) apontam que membros mais prototípicos são aqueles que apresentam um maior número de atributos de uma categoria e menor semelhança com outras. Desse modo, temos, por exemplo, a cadeira como modelo no domínio de mobília, laranja no domínio de frutas, entre outros.

Para Cazeiro (2013), o protótipo de cada categoria pode variar de pessoa para pessoa, pois o que influencia a formação do arquétipo são as características mais frequentes dos exemplos com que cada pessoa teve contato. Em nosso entendimento, os atributos dos protótipos também alteram de acordo com os grupos distintos. Por exemplo, o modelo de fruta no Pará pode ser diferente do protótipo de fruta no Rio de Janeiro.

De acordo com Medin (1989), a ideia central dos protótipos (visão probabilística, segundo denominação do autor) é que, por meio da experiência de exemplos de uma categoria, as pessoas, no geral, abstraem a tendência central (protótipo) que se torna a representação mental para categoria. Na mesma direção, Sternberg (2008) afirma que o protótipo de uma categoria contém as características que tendem a ser típicas de um exemplo, o que não significa que essas peculiaridades sejam definidoras do protótipo, todavia pode servir para afirmar qual elemento pertence (ou não) ao conceito.

Objetivando exemplificar as ideias que regem o entendimento de protótipo, Sternberg (2008) analisa o conceito de ladrão. O que é? Todos concordam que pode ser aquele que, sem permissão, furta algo de alguém. Frequentemente, nos deparamos com reportagens a respeito de um morador de alguma comunidade que foi preso por engano. Simultaneamente, noticia-se também que o empresário ou político tal, mesmo sendo comprovado envolvimento com crime de lavagem de dinheiro, por exemplo, não foi preso. Por quê? Muito provavelmente por esse tipo de criminoso não ter o protótipo de ladrão, que, ao que tudo indica e erroneamente, está mais próximo do morador da periferia.

Em relação aos conceitos matemáticos, Hershkowitz (1994) alega que cada conceito possui um ou mais exemplos prototípicos. Para a autora, os protótipos são aqueles que possuem maior número de atributos de um conceito e fortes características visuais. A estudiosa apresenta o quadrado, principalmente na posição em que os lados são paralelos à margem da folha, como clássico exemplo (protótipo) de quadrilátero, pois além de ser um paralelogramo, ele possui quatro lados de mesma medida, quatro ângulos iguais. Em sintonia, no estudo a respeito do uso de exemplos na ampliação de um conceito, Zazkis e Leikin (2008) encontraram treze atributos que fazem do quadrado um protótipo de quadrilátero.

A este respeito vale uma reflexão. Geralmente, quando rotacionamos o quadrado de modo que os vértices fiquem alinhados com as margens de uma folha de papel, por exemplo, os estudantes dizem se tratar de um losango, o que reforça a presença do modelo prototípico, tanto para o quadrado quanto para o losango. Para Scaglia e Moriena (2005) a maneira simples como os quadriláteros são trabalhados nos primeiros anos da vida escolar faz com que esses modelos sejam os protótipos de suas categorias. Nossa hipótese é que essa forma simplista e a presença de alguns desses modelos matemáticos na arquitetura ocidental, basta olhar ao redor para e observar as janelas e portas, reforçam, pelo menos para boa parte dos quadriláteros, o processo de formação do protótipo.

Em relação à aprendizagem de Geometria, vale considerar os argumentos de Scaglia e Moriena (2005) a fim de definir melhor as expressões terminológicas empregadas neste contexto. Para as autoras, o sujeito produz uma representação gráfica estereotipada ao ter contato com exemplos prototípicos e, assim, tem a imagem mental como uma condição necessária, ou seja, o modelo prototípico é a representação mental enquanto o desenho, a imagem estereotipada.

Em suma, como sublinhado por Pozo (1998), segundo a visão dos protótipos naturais, os conceitos possuem uma representação única que se constitui em uma abstração dos aspectos mais relevantes dos membros das categorias. Dessa forma, o protótipo ou membro modelo da categoria é constituído a partir de uma medida de tendência central ou valor médio dos diferentes atributos proeminentes das categorias (POZO, 1998).

Os estudos conduzidos por Rosch também alertaram para outros aspectos estruturais de uma categoria. Segundo a autora, os membros de uma classe são organizados pelos níveis básico, subordinado e superordenado. De acordo com esses três princípios, um conceito possui uma dupla estrutura: ou seja, uma vertical e outra horizontal. Conforme a composição vertical, os conceitos estão organizados hierarquicamente em planos de abstração. Por exemplo, cadeira - nível básico -, cadeira de balanço - subordinado -, e mobília - superordenado -. E para a estrutura horizontal, dentro de um mesmo nível hierárquico, existem melhores exemplos (protótipos) de uma categoria, o que, de certa forma, contribui para minar com o critério de homogeneidade da visão clássica (GARDNER, 1995; POZO, 1998).

Como especificado por Rosch (1978), o nível básico representa a entidade que carrega maior número de características de uma categoria, dessa forma poderíamos, no domínio dos conceitos geométricos, colocar o quadrado em tal condição. Com escalas diferentes de similaridades e características perceptivas, o paralelogramo como subordinado, e no topo dessa taxinomia, o quadrilátero como membro representativo do superordenado. Como destacado por Gardner (1995), a esse respeito, crianças pequenas têm uma tendência em nomear todos os objetos no nível básico. Mas será que esta afirmação diz tudo a respeito de um protótipo?

Outro aspecto importante sinalizado por Rosch (2012), no que diz respeito aos protótipos, é que eles são fortemente influenciados pelo contexto. Rosch (1973) verificou que o futebol é um protótipo de esporte. Certamente, no Brasil, ninguém colocaria dúvidas para esta alegação. Todavia, o que diriam as pessoas no Canadá, onde o esporte mais praticado é o Hóquei no gelo? No âmbito da Matemática, como vimos, o quadrado é um protótipo de quadriláteros (HERSHKOWITZ, 1994; ZAZKIS; LEIKIN, 2008). É possível que, com forte influência arquitetônica, o quadrado tenha adquirido características perceptivas que o colocam como protótipo, no entanto, na arquitetura islâmica na qual parece haver menos abrangência desse estilo euclidiano na arquitetura, o quadrado possui as mesmas evidências de um membro protótipo?

Algumas dessas questões conduzem a outro contraponto em relação à visão clássica: para a visão dos protótipos existem casos limítrofes. Para Oliveira, M.B. (1999a), um tomate é um caso limítrofe entre fruta e legume. A fim de entender melhor o significado de “casos limítrofes”, é preciso introduzir outra ideia: a de conceitos e subconceitos (o que já aparece de forma implícita no texto). Por exemplo, cadeira e sofá são subconceitos de mobília. Nota-se que existe uma relação hierárquica entre conceitos e subconceitos. À vista disso, temos o tomate como um subconceito que possui características de dois conceitos: legume e fruta.

A nosso ver a ideia de conceitos e subconceitos, por ser constituinte fundamental acerca do processo classificatório do primeiro, merece destaque. Essa apreciação também aparece em outros autores. Dahlberg (1978), por exemplo, em sua “teoria do conceito”, apresenta-o por meio de duas perspectivas: os individuais - dizem respeito a algo mais pontual -, e os gerais - se constituem de todos os casos pontuais -. Dessa forma, cadeira é um conceito individual presente no geral da mobília, de tal forma que o quadrado representa um caso individual da formulação mais geral que é o quadrilátero.

Todas essas constatações evidenciam a importância da visão dos protótipos naturais aos estudos a respeito de conceitos. Ressaltamos que o apresentado aqui foi apenas uma síntese dessa abordagem, dada sua influência e relevância, no entanto, ela não se constitui em uma teoria inquestionável, pois também teve seus críticos, como destacado por Gardner (1995) e Oliveira, M.B. (1999a). O terceiro marco da tradição roschiana, a visão teórica, surge a partir de alguns questionamentos feitos a clássica e a dos protótipos conforme veremos a seguir.

3.2.3 Visão teórica

A visão dos protótipos, incluindo suas variações, por exemplo, a visão exemplar, prevê a formação de um conceito a partir do fator similaridade[45]. Como assegura Medin (1989), ao que tudo indica, não parece que a similaridade, pelo menos na forma que adquire nessas visões, seja de todo adequada para explicar a categorização. A similaridade pode ser um subproduto da coerência conceitual e não uma causa. Desse modo, com objetivo de explicar a formação dos conceitos sem a exclusividade da semelhança (ALMEIDA; LOMÔNACO, 2018) e sem levar em consideração apenas as características compartilhadas entre um membro e o protótipo, chegamos a terceira e última etapa da tradição roschiana: a visão teórica.

De acordo com Lomônaco *et al.* (2000), um dos precursores da visão teórica é o norte-americano Frank Keil – professor de psicologia da universidade de Yale (EUA) –, a partir de alguns dos trabalhos dele realizados na década de 1980. Conforme explicam Lomônaco *et al.* (2000),Keil, em seu no livro intitulado *Concepts, Kinds, and Cognitive Development*, alega que os conceitos são classificados em três tipos: os nominais, os naturais e os artefatos. Os nominais são aqueles estabelecidos por uma convenção histórica e socialmente construídos, de maneira que são apresentadas as propriedades necessárias e suficientes, como em “irmão”, “quadrilátero” e “número primo”. Os naturais dizem respeito a classes de entidades que ocorrem no mundo sem interferência

[45] Embora não haja concordância entre os autores na forma como a similaridade (ou semelhança) possa ser medida (STERNBERG, 2008), tal qual este autor, vamos considerar para este texto similaridade (ou semelhança) entre os exemplos de uma categoria da mesma maneira que o número de características compartilhadas entre um membro e o protótipo da categoria.

humana, por exemplo, os animais: sabiá e avestruz, frutas: maça e tomate. Por último, os artefatos representam um subconjunto de espécies de conceitos nominais criados pelo homem. Apenas para citar alguns exemplos, temos: “cadeira”, “chave de fenda” e “relógio”.

A visão teórica surge como uma contestação de que conceitos se estabelecem como um agregado de propriedades, ideia compartilhada pela visão clássica de categorização e a dos protótipos naturais (OLIVEIRA, M.B., 1999a). Para a teórica, um conceito não é constituído apenas por uma lista de atributos, mas é composto por uma relação existente entre conceitos, e o agregado dessas relações estabelece, entre elas, redes que formam teorias (ALMEIDA; LOMÔNACO, 2018; CAZEIRO, 2013; LOMÔNACO *et al*., 2000; MACEDO, 2002; MEDIN, 1989; OLIVEIRA, M.B., 1999a; STERNBERG, 2008). Para esse contexto, teorias não dizem respeito apenas às teorias científicas, mas abarcam também as estruturas cognitivas que formam explicações para o que chamamos de “senso comum”. Dessa forma, o princípio fundamental da visão teórica pode ser entendido da seguinte maneira: “[...] cada conceito deve ser visto como parte da teoria em que se encontra inserido – e de que, na verdade, é elemento construtivo” (OLIVEIRA, M. B., 1999, p. 26).

Como indicam Cazeiro e Lomônaco (2016), de acordo com a visão teórica, os conceitos são formados não somente por similaridade entre categorias, mas, também, em função dos conhecimentos prévios que os sujeitos já possuem acerca do mundo. Em consonância, para Oliveira, M.K. (1999), os conceitos não são representações mentais isoladas, mas se organizam em torno de um “todo estruturado”, uma rede de significados em que cada elemento se relaciona aos demais. Para esta autora, a visão teórica “[...] parece captar melhor a complexidade da organização conceitual da mente humana, trabalhando não com elementos isolados, mas com relações e estruturas, e sendo aplicável não só a conceitos científicos, mas a todas as espécies de conceitos” (OLIVEIRA, M.K., 1999, p. 59).

De acordo com Macedo (2002), a visão teórica surge a partir de uma lacuna da visão dos protótipos, por ter como base apenas as correlações de similaridades e os traços entre conceitos, o que não permite explicar, para um determinado domínio, a estrutura interna de cada um e as relações entre eles. Segundo essa estudiosa, um conceito não inclui somente uma lista de atributos – o que constitui um ponto comum com a visão clássica e a e a dos protótipos –, mas se compõe por meio de relações, em rede, com outros conceitos, resultando nas teorias científicas e os conhecimentos de mundo dos sujeitos.

Conforme alega Medin (1989), a visão teórica levanta alguns questionamentos relacionados à forma como categorizamos o mundo, por exemplo: por que temos essas e não outras categorias ou por que as categorias são sensíveis[46]? Para o autor, a coerência pode ser alcançada até mesmo sem uma fonte de similaridade entre os exemplos, conforme preconiza a visão dos protótipos.

[46] Sensíveis (ou sensatas) para o autor denota fazer sentido, ter coerência.

Analisemos um exemplo, exposto pelo autor, que pode esclarecer essas ideias. Imagine uma categoria composta por criança, cachorro, dinheiro, documentos e computador portátil. Fora de contexto, talvez pareça estranho pensar em uma categoria formada por esses membros, mas se a classe se constituir por coisas a serem retiradas de uma casa que está pegando fogo[47], é possível que a categoria se torne sensível.

Vejamos mais um exemplo, agora de Medin e Shoben (1988 *apud* MEDIN, 1989, p. 1475). Estes autores, "[...] descobriram que os termos cabelos brancos e cabelos grisalhos são considerados mais semelhantes do que os termos cabelos grisalhos e cabelos pretos, porém os termos nuvens brancas e nuvens cinzentas são julgados como menos similares do que nuvens cinzentas e negras".

Para Medin (1989), os termos "cabelos brancos" e "cabelos grisalhos" estão conectados por meio de uma teoria, a do envelhecimento, porém não existe nenhuma teoria que conecte os termos "nuvens brancas" e "nuvens cinzentas".

Como podemos observar, a visão teórica concebe a formulação de teorias por meio de relações que requerem a construção do sentido e do significado demandados pelo contexto. Mediante essa constatação, consideremos os termos "retângulo" e "monitor de vídeo", por exemplo. É possível pensar em uma categoria que mediante uma teoria os conecte? Vejamos a imagem a seguir (Figura 10).

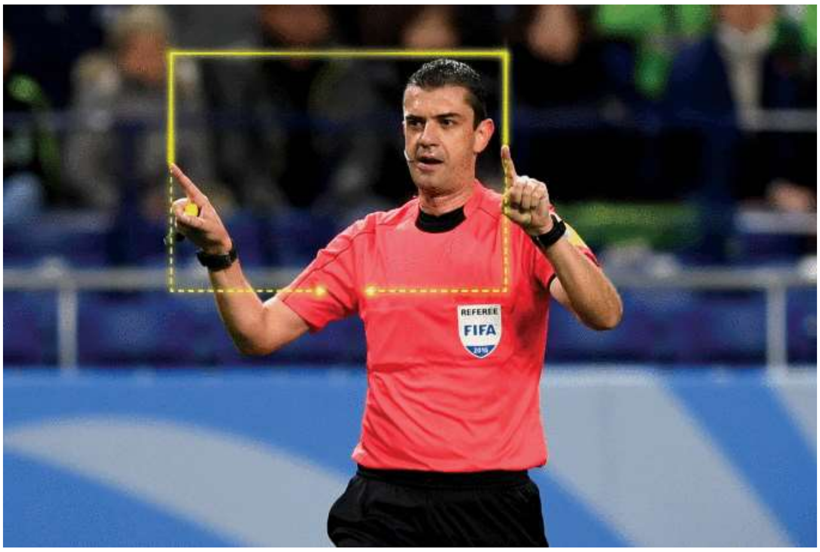


Figura 10 – Juiz de futebol sinalizando o auxílio do árbitro de vídeo
Fonte: Google imagens

Temos o gesto – que ficou famoso durante o campeonato mundial de futebol, realizado na Rússia em 2018 – de um juiz de futebol indicando que será necessária a utilização do árbitro de vídeo a fim de esclarecer uma jogada que tenha causado dúvidas.

[47]Grifo nosso.

A reconstrução do cenário coloca em evidência os aspectos inerentes à formação de um conceito segundo a visão teórica. Conforme observamos, tal aspecto não estabelece a necessidade de similaridade entre as entidades. No entanto, exige a reconstrução do contexto para o estabelecimento de suas teorias.

Sayeg (1999) explica que a diferença conceitual impregnada a exemplos, como o anterior, está relacionada à maneira com que cada pessoa forma uma teoria (ou conjunto de explicações) acerca de uma entidade, ou seja, depende das interações com o objeto ou o uso de metáforas para atribuir um conceito a uma entidade ou ideia.

As ideias que apresentamos em relação à visão teórica colocam em evidência pontos que merecem um destaque maior. Se os conceitos são vistos como uma rede de teorias, e por teorias se entendem desde as científicas até as do senso comum, então importa levar em consideração o contexto, o sentido, o significado e as metáforas produzidas como forma de verbalizar um conceito. Em função disso, acreditamos que a visão teórica nos permite um paralelo com a teoria da metáfora conceitual relacionada à formação de um conceito. No campo da linguística, há uma vertente em relação aos estudos a respeito de conceitos que está pautada na ideia de produção de metáforas como forma de verbalizar um conceito (LAKOFF; JOHNSON, 1986).

Os conceitos são comunicados por meio de palavras, o que inclui as metáforas que utilizamos na comunicação cotidiana, sons (em um sentindo mais amplo), imagens, gestos e os meios táteis como os toques em tela (CHUEKE, 2005). No próximo capítulo, discutimos alguns aspectos decorrentes dessa teoria e nos encaminhamos à aproximação dela com a visão teórica.

CAPÍTULO IV - METÁFORAS

Neste capítulo, discorremos a respeito da primeira versão da teoria da metáfora conceitual, destacando alguns dos pontos principais e relacionamos tal hipótese com algumas ideias ligadas à Matemática. Na sequência, apresentamos uma breve discussão acerca de metáforas, ensinos e aprendizagens e as articulações e contribuições ao estudo.

4.1 A Metáfora Conceitual

Tradicionalmente, a metáfora representa um fenômeno puramente linguístico. No âmbito das figuras de linguagem, ela é vista como um ornamento poético, um recurso disponível à a esse modelo literário e que não abrange a linguagem cotidiana. Tal princípio serviu de alicerce figurativo dos vocábulos, todavia o trabalho pioneiro do linguista George Lakoff e do filósofo Mark Johnson, ambos norte-americanos, intitulado *Metaphors we live by*[48] e publicado em 1980, trouxe para as ciências cognitivas uma inovação na perspectiva em relação às metáforas (FARIAS, 2014). Como destacam Feltes, Pelosi e Lima (2014), a partir da obra de George Lakoff e Mark Johnson, essa nova abordagem para as metáforas passou a ser conhecida como Teoria da Metáfora Conceitual (TMC[49]) e tem ocupado um lugar de destaque como problema da filosofia, linguística e psicologia cognitiva (JOHNSON, 1991).

A metáfora está presente em todas as áreas da atividade linguística, dispõe de uma rica história intelectual e destaca-se no entendimento da própria compreensão humana (SACKS, 1992). Conforme alegam Lakoff e Johnson (1986, p. 41), "a essência de uma metáfora é compreender e experienciar uma coisa em termos de outra". Também Lakoff (1985) anuncia que os conceitos metafóricos são compreendidos e estruturados em termos de outros conceitos, o que acarreta

[48] O livro foi traduzido para a Língua Portuguesa e publicado em 2002 com o título *Metáforas da vida cotidiana*.

[49] Para este trabalho, vamos nos ater apenas a versão original. Uma boa síntese dessa versão e as variações (versão expandida) é apresentada em Feltes, Pelosi e Lima (2014). À formulação de tal teoria, foi incluída a metonímia conceitual, que nos últimos anos vem ganhando espaço como processo cognitivo. Para Lakoff e Johnson (1986) e outros autores, por exemplo Barcelona (1998), do qual o trabalho acerca do tema é ascendente, a metonímia, tanto quanto a metáfora, não é apenas um recurso poético ou retórico e está presente nos nossos pensamentos e ações. A ideia principal da metonímia é usar uma entidade para referir-se a outra e, dessa forma, "os conceitos metonímicos nos permitem conceptualizar uma coisa em virtude de sua relação com outra" (LAKOFF; JOHNSON, 1986, p. 77). Para Farias (2007), a metáfora e a metonímia (no sentido dos processos cognitivos) concorrem na tentativa de explicar a figuratividade dos conceitos, muito embora seja tênue a linha que separa os referidos processos. Um exemplo de metonímia analisado por Lakoff e Johnson (1986) é a do ROSTO PELA PESSOA. Analisemos, por exemplo, o caso das fotos que usamos no perfil das redes sociais. Se alguém coloca apenas a foto do rosto, já é o suficiente para termos uma noção de como a pessoa é e nos damos por satisfeitos. Entretanto, imaginemos o quanto pode parecer estranho um perfil com outras partes do corpo que não seja a face, além, é claro, de não nos dar evidências de do sujeito verdadeiramente.

conceitualizar um determinado tipo de objeto ou experiência em termos diferentes. Os autores defendem que as metáforas emergem das experiências dos nossos corpos com o meio físico e das interações sociais e estão presentes na comunicação ordinária, não como um mero recurso linguístico ou poético, mas sim um mecanismo de pensamento e ação por consequência e que boa parte do nosso sistema conceitual ligado às atividades cotidianas é estruturado metaforicamente (LAKOFF, 1985; LAKOFF; JOHNSON, 1986; LAKOFF NÚÑEZ, 2000). Nas palavras de Lakoff e Johnson (1986, p. 146): "as metáforas emergem de nossas experiências concretas e claramente delineadas, e nos permitem construir conceitos altamente abstratos, como é o de um argumento".

Essas premissas têm por base evidências encontradas em expressões linguísticas. Os estudiosos analisaram uma série de metáforas, ligadas à comunicação ordinária que, em boa parte, se relacionam às experiências físicas e sensório-motoras. Expressões metafóricas como: (a) *nosso relacionamento não está indo bem*, (b) *esse casamento não vai me levar a lugar algum* e (c) *nossa relação chegou a um beco sem saída* subjazem a ideia de que o amor, presente aqui na figura do relacionamento, é algo que conduz a algum lugar. Assim, segundo os autores, a metáfora conceitual[50] imbricada em expressões como essas é significa que O AMOR É UMA VIAGEM[51].

Para Lakoff (2012), o que está por trás da metáfora conceitual O AMOR É UMA VIAGEM, fruto das várias expressões cotidianas, não diz respeito a apenas uma linguagem convencional, mas a uma forma convencional de se pensar. No jogo de expressões linguísticas que usamos para nos referirmos ao «amor», tal qual uma viagem, mapeamos o casal no sentido de passageiros que viajam juntos, com os mesmos objetivos de vida, que são vistos como metas/destinos a serem alcançados. O relacionamento representa o veículo que conduz. A viagem pode não ser fácil e haver obstáculos. Por consequência, a metáfora envolve o entendimento de um domínio de experiência conhecido, no caso, viagens, para explicar outro domínio desconhecido, o amor.

A compreensão de que a metáfora conceitual ocorre por meio do transplante do discurso de um determinado domínio para outro (SFARD, 2009), permite-nos a análise acerca do nosso entendimento de uma música, por exemplo. A presença das metáforas na comunicação não interfere no processo de inferência de uma mensagem, por mais que contenha inúmeras expressões

[50] É importante esclarecer a diferença entre expressões metafóricas e metáforas conceituais. De acordo com Cuenca e Hilferty (1999), as metáforas conceituais representam esquemas abstratos que são os meios pelos quais determinadas expressões metafóricas são agrupadas dentro de uma mesma ideia. Dessa forma, os itens (a), (b) e (c) representam as expressões metafóricas que juntamente com outras expressões formam a metáfora conceitual O AMOR É UMA VIAGEM.

[51]Para fins didáticos, apresentamos as metáforas identificadas por meio de letras maiúsculas, enquanto o conceito está entre dois símbolos. Deste modo, CONCORRENTE É UMA DISPUTA representa a metáfora e «concorrente» o conceito. Expressões ou termos apresentados pelos estudantes, capítulo 6, que, no entanto, não configuram uma metáfora ou um conceito, estão destacados entre aspas ou sublinhados.

metafóricas. Com intuito de esclarecer algumas dessas ideias, vejamos a letra da música "oceano[52]" de Djavan, fonte rica de expressões metafóricas:

> Assim que o dia amanheceu
> Lá no mar alto da paixão
> Dava pra ver o tempo ruir
> Cadê você? Que solidão!
> Esquecera de mim?
>
> Enfim, de tudo o que há na Terra
> Não há nada em lugar nenhum
> Que vá crescer sem você chegar
> Longe de ti tudo parou
> Ninguém sabe o que eu sofri
> Amar é um deserto e seus temores
> Vida que vai na sela dessas dores
> Não sabe voltar, me dá teu calor
>
> Vem me fazer feliz porque eu te amo
> Você deságua em mim, e eu, oceano
> Esqueço que amar é quase uma dor
> Só sei viver se for por você!(DJAVAN, 1989).

Por meio da canção, é possível observar que o artista fala das dificuldades, os desafios, os dilemas etc., de uma relação, da desilusão, da importância de ter por perto o/a amante. Para isso, ele faz uso de certas expressões linguísticas que poderiam ter sentidos totalmente diferentes para alguém que, digamos por algum tipo de lesão cerebral, não fosse capaz de interpretar uma metáfora. A construção do enredo da música com algumas expressões como "*cadê você*? *Que solidão*!" e "*vem me fazer feliz porque eu te amo*" permite a identificação do sentido descrito no início do parágrafo.

Como relata Lakoff (2012), embora as metáforas utilizadas neste caso sejam um recurso poético, a letra da música só pode ser compreendida por falantes da Língua Portuguesa (no caso do exemplo escolhido) em função de existir correspondências metafóricas preexistentes em nosso sistema conceitual. O mesmo fato acontece em um diálogo no qual os participantes utilizam o mesmo sistema conceitual, o que permite a compreensão (LAKOFF, 1985). Em contrapartida, imagine o quão difícil pode ser duas pessoas, que possuem sistemas conceituais distintos, tentarem estabelecer um diálogo. De caráter ilustrativo, considere a conversa entre progressistas e conservadores, ainda que seja harmoniosa, com respeito mútuo, não avança, pois há sistemas conceituais distintos envolvidos.

Já em relação à escolha das expressões utilizadas pelo artista, Kövecses (2009) esclarece que assim como a história cultural de um país desempenha um papel importante na formação de

[52] Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=2kqdlAYNEzk>. Acesso em: 07 ago. 2019.

metáforas, a história pessoal, do artista no caso, também o faz, tanto na escolha das metáforas quanto no processo de formação de novas metáforas.

Feltes, Pelosi e Lima (2014) analisaram expressões linguísticas similares às seguintes: (d) *não estou conseguindo acompanhar seu raciocínio*, (e) *não sei se estou no caminho certo* e (f) *você pode voltar àquele ponto*? E concluíram que os processos de ensino e aprendizagem também podem ser vistos como caminhos a serem percorridos. O que, com certo grau de abstração, pode sugerir a metáfora conceitual A APRENDIZAGEM É UMA VIAGEM.

As expressões metafóricas que destacamos conduzem às metáforas conceituais em que o AMOR e a APRENDIZAGEM são VIAGENS. Ainda que seja um pequeno ponto no mundo de possibilidades para análise, colocam em evidência a necessidade de uma definição mais ampla para metáfora conceitual e concordamos com Feltes, Pelosi e Lima (2014, p. 89-90), quando afirmam que

> [...] uma metáfora conceitual é, portanto, uma construção cognitiva, baseada nas experiências socioculturais vividas; é um modo de construção de conhecimento na forma de um mapeamento entre domínios de conhecimentos, em geral orientado por relações analógicas motivadas por propósitos e interesses, por determinadas situações e suas demandas.

A metáfora conceitual tem um significado técnico, dado por meio de um mapeamento entre dois domínios, que preserva a inferência. Um mecanismo neural, que possibilita o uso de uma estrutura inferencial de um domínio conceitual para raciocinar em relação a outro domínio conceitual, por exemplo, nos casos anteriores em que o «amor» é entendido em termos de «viagem» ou ainda «aritmética» como «geometria» quando consideramos a metáfora NÚMEROS SÃO PONTOS EM UMA RETA (LAKOFF; NÚÑEZ, 2000). Nesse sentido, a metáfora conceitual representa um mecanismo de pensamento ordinário, realizada, por vezes, de maneira inconsciente, que emprega aspectos da linguagem cotidiana, e também técnica, aos seres humanos, o que permite a imaginação e a abstração (NÚÑEZ, 2018).

Como podemos perceber, da simbiose entre várias expressões cotidianas pode-se sugerir uma mesma metáfora conceitual. Para Lima, Gibbs e Françoso (2001, p. 108), “[...] as metáforas presentes na língua são uma manifestação da maneira como entendemos e conceitualizamos determinados conceitos.” Os estudiosos destacam que a metáfora é uma operação cognitiva entre dois domínios, o primeiro oriundo de nossas experiências com o mundo para conceituar o segundo, mais abstrato, em que nossas experiências não permitem uma representação direta (LIMA; GIBBS; FRANÇOSO, 2001).

De acordo com Feltes, Pelosi e Lima (2014), a metáfora conceitual pode aparecer nos discursos por vezes de forma sutil e em outras, mais perceptíveis. No entanto, em ambos os casos é necessário fazer interpretações a partir dos mapeamentos a fim de se construir inferências acerca das expressões de origem. Para analisar a metáfora conceitual, imbricada no processo comunicativo, é preciso apresentar dois conceitos que estão relacionados à TMC: domínio fonte e domínio alvo.

Com objetivo de dar maior clareza aos conceitos em questão, vamos analisar a situação a seguir: é comum o professor ser questionado pelos alunos a respeito da relevância do estudo de um determinado tópico, pergunta que inclui a Matemática, tanto para a formação, quer seja como corpo de conhecimentos técnicos adquiridos durante a vida escolar, ou como um conjunto de conhecimentos necessários para a formação humanista. Entre os vários caminhos que o professor poderia escolher – por exemplo, falar de algumas características, tais como a objetividade, a precisão, o rigor, a possibilidade de generalização, a aplicação concreta no mundo real, (NÚÑEZ, 2018) − na tentativa de explicar aos alunos a respeito da importância do estudo da Matemática, uma possibilidade seria argumentar que várias outras áreas do conhecimento (das Ciências Naturais às Humanas) se apropriaram da Matemática como ferramenta de abordagem e desenvolvimento. Assim, a fim de enfatizar o discurso, o docente pode alegar que a "*Matemática possui várias ramificações"*. Entre outras formas de conduzir o diálogo, um professor que tenha escolhido essa ou outra expressão metafórica similar, na tentativa de validar o argumento, expõe os conceitos dele por meio de dois domínios: o **domínio alvo,** que busca a compreensão de algo mais abstrato, neste caso, as várias possibilidades e conexões da Matemática, e o **domínio fonte**, que tem por base a experiência mais direta, as ramificações de uma planta. A metáfora conceitual entendida a partir desses mapeamentos é que IDEIAS SÃO PLANTAS conforme exposto em Lakoff e Johnson (1986).

Para Ferrari (2011), o domínio fonte, frequentemente, envolve propriedades físicas ligadas à nossa experiência sensório-motora, enquanto que o domínio alvo se inclina a ser mais abstrato. De maneira similar, Bolite Frant (2011) argumenta que as metáforas se caracterizam por criar uma relação conceitual entre o domínio fonte e o domínio alvo, nas quais são projetadas propriedades e inferências do domínio fonte. A respeito disto, Feltes, Pelosi e Lima (2014, p. 95) realizaram uma análise minuciosa, destacando as características dos modelos metafóricos estruturados a partir dos domínios fonte-alvo. Vejamos:

1. Há um domínio conceitual **A** bem-estruturado (diretamente significativo) chamado **domínio-fonte**.
2. Há um domínio conceitual **B** que carece de estruturação para efeitos de sua compreensão: o **domínio-alvo**.
3. Há um mapeamento que liga o domínio-fonte ao domínio-alvo: **projeção metafórica**.
4. A projeção metafórica de **A** para **B** é motivada naturalmente por uma correlação estrutural regular que associa **A** a **B**.
5. Os detalhes do mapeamento entre **A** e **B** são motivados pelos detalhes da correlação estrutural, sendo a relação especificada de **A** para **B**.

Em complemento, ao apresentado por Farias (2007), a metáfora conceitual está alicerçada sob a seguinte estrutura proposicional X é Y em que o domínio fonte X é o elemento construtivo e o domínio alvo Y, o constitutivo.

O entendimento desse conceito presente na TMC nos permite avançar para uma análise de alguns tipos de metáforas presentes nessa teoria. Feltes, Pelosi e Lima (2014) explicam que essas metáforas conceituais são chamadas de metáforas literais ou metáforas básicas, uma vez que emergem, em grande parte, de forma automática, inconsciente e são utilizadas cotidianamente, o que as difere das metáforas criativas ou literárias. De acordo com Bolite Frant (2007), as metáforas básicas (orientacionais, ontológicas e estruturais) são essenciais à Matemática, o que justifica o nosso interesse em analisar cada tipo.

4.1.1 Metáforas orientacionais

De acordo com Lakoff e Johnson (1986), as metáforas orientacionais organizam todo um sistema de conceitos em termos de outro e eles têm relação com orientações espaciais como: PARA CIMA – PARA BAIXO, CENTRO – PERIFERIA, DENTRO – FORA, FRENTE – ATRÁS, entre outras. Os autores alegam que essas orientações emergem do fato de nossas experiências sensório-motoras atuarem da mesma maneira como agem no nosso ambiente físico e que as expressões que usamos, baseadas nessas orientações, não são facultativas, uma vez que possuem uma base em nossa experiência física e cultural. Se por um lado, a metáfora conceitual FELIZ É PARA CIMA está presente em expressões do tipo: (g) e*stou de alto astral hoje* e (h) *ela elevou minha moral*, por outro lado, a metáfora conceitual TRISTE É PARA BAIXO pode ser identificada em sentenças como: (i) *hoje estou me sentindo pra baixo* e (j) *ela está cabisbaixa, parece deprimida*. Essas expressões linguísticas possuem uma base física. Postura ereta, um estado emocional positivo, e postura caída corresponde a estar deprimido. Os conceitos metafóricos orientacionais são estruturados linearmente, tendo como referência orientações lineares não metafóricas (LAKOFF, 1985).

Para Bolite Frant (2007), durante uma aula de matemática acerca de estudo de funções, é comum o professor se referir aos eixos (abscissas e ordenadas) como eixo vertical e eixo horizontal, respectivamente, por meio de gestos com um dos braços indicando a posição de cada eixo. Esse tipo de orientação, conforme argumenta a estudiosa, pode ser caracterizado como a presença de uma metáfora orientacional. Outra situação em que é possível identificar a tal aspecto no ensino de matemática está na caracterização de retas paralelas pelo professor no uso dos gestos (Figura 11), indicando a orientação das retas em ambos sentidos e a distância entre elas (no caso de paralelas não coincidentes).

Figura 11 – Gestos utilizados pelo professor para explicar retas paralelas
Fonte: Vídeo do *YouTube*. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=T-gsg4Ca0-U&t=28s
Acesso em: 24 mar. 2019

Embora os gestos não sejam objeto deste estudo, é importante destacar que eles, de certa maneira, influenciam a compreensão da linguagem metafórica (ALDUNATE *et al*., 2009) e, conforme destaca Bolite Frant (2007), pelo fato de as metáforas orientacionais se originarem das experiências dos nossos corpos com o ambiente físico, isso acaba por determinar um sistema de referência egocêntrico, como especificado nos exemplos anteriores.

4.1.2 Metáforas ontológicas

As orientações espaciais fornecem uma gama de possibilidades para identificação de conceitos em termos orientacionais. Todavia, elas deixam de considerar alguns casos, por exemplo, aqueles em que usamos experiências com objetos e substâncias físicas (FELTES; PELOSI; LIMA, 2014; LAKOFF; JOHNSON, 1986). As metáforas ontológicas emergem de nossa experiência com objetos físicos e desta forma nos permitem considerar atividades, acontecimentos, emoções, conceitos abstratos etc. como se fossem entidades ou substâncias (BOLITE FRANT, 2007). Assim, elas atribuem características de uma entidade ou substância a algo que não possui tais características (LAKOFF, 1985).

Conforme salientam Lakoff e Johnson (1986), as metáforas ontológicas podem nos ajudar a entender eventos, ações, atividades e estados. Tendo em vista que podemos identificar nossas experiências como entidades ou substâncias, podemos raciocinar a respeito delas, o que nos permite agrupar, quantificar e categorizar tais entidades, conforme se observa no excerto:

> [...] daqui a pouco já não será mais surpresa ficar surpreso com o comportamento da inflação. Mas que ninguém se engane. O dragão dorme profundamente,

> hibernando depois de pelo menos cinco anos se alimentando impiedosamente do poder de compra dos brasileiros. (G1, 27/04/2017).

A inflação assume o papel de entidade com a capacidade de destruir, o que pode conduzir à metáfora conceitual INFLAÇÃO É UMA ENTIDADE ou à metáfora A INFLAÇÃO É DRAGÃO[53]. O que está em jogo é que a inflação (um conceito abstrato) é personificada de modo que possibilite nossa capacidade de compreender e quantificar o poder de destruição da inflação em termos de uma entidade "física". Em relação a esta comparação vale um comentário. Pode parecer estranho a ideia de dragão como entidade física, uma vez que ele, assim como a inflação, também é uma criação da mente humana. No entanto, nossa conjectura é que o dragão, como um ícone mitológico presente em várias culturas ao redor do mundo, parece figurar muito mais como uma entidade concreta por ser mais fácil de compará-lo a outros animais, como dinossauros ou crocodilos, do que a inflação, um conceito estritamente abstrato.

Outro exemplo bastante difundido em nossa sociedade é a metáfora A MENTE É UM RECIPIENTE, implícita em expressões metafóricas como as descritas a seguir: (k) *não consigo tirar aquela música da minha cabeça* e (l) *tenho andado de cabeça cheia*. Tais frases projetam características inerentes de uma entidade, no caso o recipiente, à outra diferente, a mente. A própria lógica que estrutura a Geometria euclidiana, presente em alguns conceitos primitivos como o de ponto ereta, por exemplo, pode ser vista sob a perspectiva das metáforas ontológicas. Ponto é concebido como um objeto matemático que não possui dimensão nem forma e reta como um conjunto infinito de pontos unidimensionais. O que coloca para a ideia abstrata de conceber algo sem grandezas ou partes a possibilidade de comparar o ponto a um objeto, ou seja, um conceito abstrato pode ser entendido em termos de uma entidade.

4.1.3 Metáforas estruturais

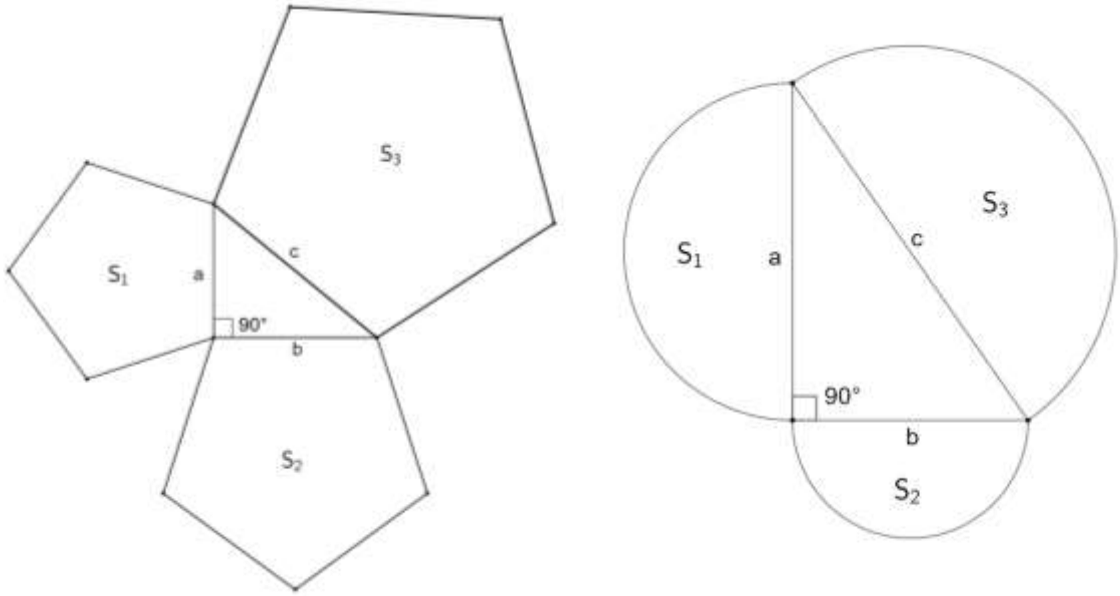
Expressões em que os conceitos são estruturados em termos de outros conceitos ou atividades como em (m) *estou perdendo muito tempo com coisas banais* e (n) *ela não sabe administrar seu tempo*, orientam um tipo de metáfora conceitual presente em nossa cultura, de que TEMPO É DINHEIRO. Essas metáforas, segundo Lakoff e Johnson (1986), estruturam de maneira profunda as atividades cotidianas, uma vez que entendemos o tempo como um recurso limitado.

Para Lakoff (1985), expressões metafóricas do tipo (o) *não estou vendo onde você quer chegar com essa afirmação* e (p) *não consigo enxergar seu ponto de vista*, implicam na metáfora conceitual COMPREENDER É VER, que buscam construir um tipo de atividade ou experiência em relação a outro tipo de atividade ou experiência.

---

[53]Para mais esclarecimentos acerca desta e outras metáforas relacionadas à inflação, ver Gurgel e Vereza (1996).

Estruturar um conceito em termos de outro, pode, em alguns casos, representar um obstáculo por empobrecer o processo de construção conceitual na tentativa de simplificá-lo. Vejamos o exemplo o teorema de Pitágoras. Parece estar bastante difundida a ideia de que o teorema de Pitágoras se resume na equação $a^2 + b^2 = c^2$, que comumente enunciamos da seguinte maneira: "*para um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos*". Neste caso, propriedades geométricas, tal qual a extensão do teorema (ver Figura 12), são deixadas de lado por evidenciar apenas a validade da relação algébrica, o que pode acarretar dificuldades no desenvolvimento conceitual.



(a) (b)

Figura 12 – Figuras semelhantes construídas sobre os catetos de triângulos retângulos. (a) Pentágono regular (b) Semicírculo
Fonte: elaboração própria

Minimizar o conceito apenas em termos de uma relação, como no exemplo, implica desprezar as propriedades geométricas. Isto não significa que as metáforas estruturais não tenham validade. Todavia, seria muito mais produtivo assimilar não apenas a relação, mas a ideia implícita à equação $S_1 + S_2 = S_3$, que constitui a generalização do teorema de Pitágoras e não evidencia apenas a equação, mas o fato de que se S_1, S_2 e S_3 representam figuras semelhantes, então é igualmente válido que a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas das demais figuras construídas sobre os catetos. Para este propósito o trabalho manipulativo, seja em aplicativos, ou com materiais concretos como o quebra-cabeças Tangram (KINDEL *et al*, 2019) pode ampliar o repertório conceitual dos estudantes.

O exemplo escolhido se constitui em uma rica fonte de análise para produção metafórica. Poderíamos, por exemplo, tê-lo inserido como uma metáfora ontológica e analisado sob as lentes dos processos infinitos gerados na construção das ternas pitagóricas dadas pela relação $a^2 + b^2 = c^2$, o que nos conduziria à metáfora PROCESSO SÃO COISAS, ou seja, conceituamos processos em termos de coisas (objetos físicos, ou caminhos em movimentos) (LAKOFF; NÚÑEZ, 2000).

Outro exemplo, no contexto do ensino de Geometria, diz respeito a relacionar as propriedades matemáticas entre ângulos formados a partir de duas retas paralelas e uma reta transversal com a resolução de equações do primeiro grau. Essa escolha, desprovida de significado, reduz o estudo das relações à resolução de uma equação, e ao arrolar os conceitos (relações matemáticas entre os ângulos – equação do primeiro grau), não possibilita, nesse caso, o exercício da visualização, a formulação de conjecturas, a descoberta etc.

Essas primeiras análises teóricas tiveram como objetivo discutir questões centrais da TMC e uma apreciação em pormenores das metáforas básicas. Na seção seguinte abordamos sucintamente aspectos das metáforas inerentes aos processos de ensino e aprendizagem, em particular aos conceitos científicos, no qual a matemática está inserida.

4.2 Metáforas, Ensinos e Aprendizagens

Conforme apresentado anteriormente, os aspectos relacionados à TMC foram analisados como um conjunto de expressões ordinárias que compõe uma metáfora conceitual. Identificar as metáforas presentes na vida cotidiana parece ser uma tarefa mais simples do que reconhecer as aquelas no âmbito das interações no processo formativo para que possamos abordar os conceitos matemáticos.

Para falar dos conceitos matemáticos, inicialmente pensemos na seguinte situação que envolve outros conceitos: de que modo explicar a uma criança, ou até mesmo a um adulto, conceitos abstratos relacionados a amor, inflação ou retas paralelas? Muito provavelmente, usar apenas a lexicografia como referência, tendo por base, no caso dos conceitos matemáticos, as definições, pode não ser o suficiente. Mais do que o uso de termos específicos para construção destes e de outros conceitos abstratos, será necessário empregar, como referência, palavras que façam parte do vocabulário do aprendiz e das experiências dele com o mundo; e, ainda, será necessário que o principiante experimente os novos conceitos tanto para se aproximar dos significados social e historicamente atribuídos (VIGOTSKI, [1934]2010) quanto para dar-lhes novos sentidos.

Acerca deste assunto, Goes e Cruz (2006) explicam que o desenvolvimento da elaboração conceitual perpassa pela constituição dos vários sentidos atribuídos à palavra, e é por meio das interações verbais com os adultos que, aos poucos, as crianças constroem a independência e atribuem sentidos diferentes a significações que antes eram únicas. De forma complementar, Macedo, Farias e Lima (2009) esclarecem que a significação é uma atividade subordinada à composição das variadas experiências, sejam elas coletivas ou individuais. Segundo as estudiosas, a TMC atribui à construção de conceitos uma visão experimentalista da cognição, na qual os conceitos perpassam por propriedades que aceitam como elemento constituinte a interação com o objeto (MACEDO; FARIAS; LIMA, 2009).

Pensar a respeito desse processo, que pode representar a gênese da elaboração metafórica, requer uma criação um pouco mais abstrata. Para Damásio e Damásio (1992), a chave para o esclarecimento dessa questão está na linguagem. Eles defendem que a elaboração da linguagem pelo cérebro se dá, inicialmente, a partir de interações não linguísticas, ou seja, forma, cor etc., ligadas à estrutura perceptiva, entre o corpo e o meio, o que nos permite ordenar intelectualmente objetos, relações, eventos, e, por conseguinte, gerenciar a capacidade de lidar com ideias e abstrações como as metáforas.

Outro aspecto, que tem ajudado linguistas cognitivistas e os neurocientistas a entenderem a elaboração do pensamento metafórico tem como pressuposto as experiências corpóreas. Segundo Damásio (2000), todas as coisas, estejam elas no organismo humano, no caso das ideias abstratas como as metáforas, ou fora, por exemplo, um carro em movimento, se apropriam do corpo como referência. A perspectiva da experiência nos permite analisar um objeto, destacando o comportamento: parado ou em movimento, perto ou longe, entre outros. A mesma ideia alicerça a construção de metáforas orientacionais: PARA CIMA – PARA BAIXO, descritas em Lakoff e Johnson (1986).

A metáfora constitui um tipo de signo representativo de um objeto. Almeida (2010) a descreve como algo usado para representar outro. De modo geral, conforme já mencionamos, Lakoff e Johnson (1986) concebem, para as metáforas, a existência de ideias do domínio alvo, que são mapeadas por meio do domínio fonte. As metáforas representam um importante elemento da comunicação e conceituação matemática, uma vez que a construção de um modelo matemático para uma situação-problema, por exemplo, demanda a articulação entre dois domínios conceituais, que se realiza por meio de metáforas (ALMEIDA, 2010). Em consonância, Lakoff e Núñez (2000) complementam que a Matemática faz uso da metáfora conceitual para definir os conceitos matemáticos e acatam a metáfora responsável pela natureza da estrutura matemática conforme a conceituamos.

Com o olhar inclinado à Educação Matemática, em estudos que visam abarcar a relação entre pensamento e comunicação, a pesquisadora israelense Anna Sfard vê a metáfora como um elemento constitutivo do nosso pensamento, da comunicação e da ação. Segundo a estudiosa, talvez nós não fossemos o que somos sem as metáforas, pois elas compõem os pensamentos e, por meio deles moldam nossas ações (SFARD, 2009).

Na empreitada de elucidar de que maneira as metáforas se revelam na comunicação, Sfard (2009) destaca os marcadores linguísticos que evidenciam a presença de metáfora. Vejamos dois exemplos:

1. *Ensinar é como cultivar um jardim* (SFARD, 2009, p. 40).
2. *Retas são como linhas esticadas infinitamente.*

Nas duas expressões acima, a palavra "como" indica a comparação entre o conceito que se deseja construir e uma ideia familiar. Na assertiva (1), o discurso de jardinagem é colocado no contexto da educação. Na afirmação (2), frequentemente usada por professores para explicar a definição de reta, o objeto matemático é comparado a uma linha esticada que não possui fim. Entretanto, a autora destaca que uma metáfora não se caracteriza somente pelo uso de marcadores linguísticos. Na expressão metafórica "*Ele está doente de amor*", o que está em jogo é o uso de palavras que pertencem a uma temática sendo incorporada a outra, ou seja, as palavras são transplantadas de um discurso para outro. Há ainda casos em que os marcadores linguísticos ficam implícitos, conforme se observa em 3: *Homens são lobos*; ou em 4: *Pontos são objetos matemáticos sem dimensão e formas.* Nestes dois últimos casos, ficam subentendidos que homens são como lobos, ou seja, podem carregar algumas das características deles, como a agressividade (CIAPUSCIO, 2003) e que pontos são uma espécie de objeto que não possui dimensão.

Tal fato remete a uma reflexão, ou seja, se *"homens são lobos*", o que se constata é que, conforme já mencionamos, homens podem carregar certos atributos dessa espécie animal. Desse modo, analisemos outro exemplo comparando homem e animal. Em uma partida de futebol, realizada entre Santos e Grêmio, no ano de 2014, alguns torcedores do Grêmio chamaram o goleiro Mário Lúcio Duarte Costa (conhecido como Aranha) do clube paulista de macaco, o que pode ser lido como "*homem* (o goleiro Aranha) *é macaco*". Devido o fato de Aranha ser afrodescendente, a expressão usada pelos torcedores não conota da mesma maneira que em "*homens são lobos"*, comparando, por exemplo, sua agilidade como goleiro a de um macaco. Representa, na verdade, um ato racista cuja finalidade é inferiorizar a pessoa pela cor da pele. Esse exemplo evidencia outro aspecto presente em algumas expressões metafóricas: a intencionalidade, que representa, aliada ao entendimento, uma metáfora que envolve a dimensão social e o contexto cultural (KÖVECSES, 2009).

Para Sfard (2009), as metáforas não são meros recursos linguísticos, pois representam uma nova forma de produzir discursos. Nessa perspectiva, o cruzamento de discursos, transplantando de um contexto para outro, implica na ampliação da nossa forma de comunicação e, à medida que esse processo se torna mais habitual, novos discursos são produzidos e, por consequência, novos sistemas conceituais são criados. Em relação a esse último, consideremos os ícones na tela do computador, que equivalem a metáforas (CHUEKE, 2005). Da mesma maneira, podemos considerar os ícones na tela de um *smartphone* como metáforas. Vejamos, por exemplo, a Figura 13 com o ícone do aplicativo GeoGebra na versão clássica.

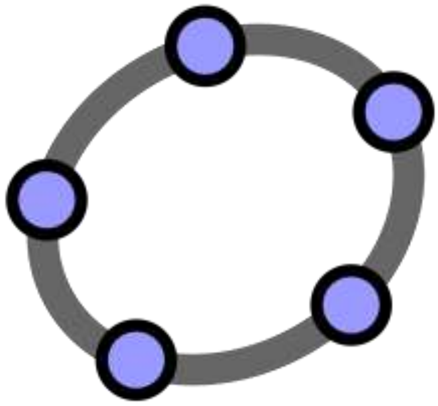


Figura 13 – Ícone do GeoGebra Clássico
Fonte: Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/GeoGebra>. Acesso em: 06 de jan. 2021

Analisando apenas a representação, trata-se de uma elipse com cinco círculos em seu contorno. Poderíamos, inclusive, dar uma descrição mais detalhada, contudo para pessoas familiarizadas com o aplicativo, o signo representado pelo ícone dar a entender, implicitamente, uma variedade de mensagens que podem ser um episódio ou um conteúdo ensinado (ou estudado), ou seja, há a criação de um novo sistema conceitual por meio do cruzamento de novos discursos, ainda que seja na forma de um signo.

Segundo Sfard (2009, p. 40), "[...] frequentemente as metáforas atravessam as fronteiras entre o físico e o mental, o concreto e o abstrato". Esse fato pode ser comprovado em expressões linguísticas como: "agarrar o significado", "pensar fora da caixa". A alegação coloca as metáforas como uma possível saída para um velho problema: o paradoxo da aprendizagem. Então, questionamos: "como podemos construir o conhecimento de algo que ainda desconhecemos?". Dessa maneira, uma metáfora, mesmo transplantada para um contexto desconhecido, possibilita um entendimento inicial em relação ao que está sendo discutido.

Analisemos a palavra «correspondente». Independente do contexto, parece que a palavra sugere alguma relação, por exemplo, um amor não correspondido, ou seja, a falta de uma ligação, de conexão, quer dizer, não ter correspondência. No contexto de uma aula de geometria acerca de ângulos correspondentes, transplantar o discurso do amor não correspondido para a relação entre retas que se correspondem em um ponto para explicar o conceito de ângulos correspondentes pode ajudar na construção do novo conceito. O exemplo ajuda a ilustrar as potencialidades das metáforas na aprendizagem, no caso da construção conceitual, na análise para o entendimento de como o processo ocorre e no ensino, como ferramenta pedagógica à disposição do docente na metodologia de ensino.

De acordo com Sfard (2009), as metáforas ocorrem por meio da transmissão de um discurso para outro, o que permite, por exemplo, a mudança (transição) de um discurso coloquial para o científico[54]. À primeira vista, pensar a construção do conhecimento por meio de metáforas pode parecer frívolo, conforme destacado por Sfard (2009). No entanto, vale lembrar o paradoxo da aprendizagem e, discute Guiomar Ciapuscio, linguista argentina, a importância das metáforas para produção do conhecimento científico.

De acordo com Ciapuscio (2003), a metáfora possui um duplo papel na produção do conhecimento científico. Se, para o pesquisador, ela permite o avanço na resolução de um problema ou na criação de uma teoria, para o público não especializado, se constitui como um recurso capaz de conceituar fenômenos abstratos em termos de domínios da experiência cotidiana. Ciapuscio (2003) apresenta um exemplo que ajuda a esclarecer essa assertiva e tem como fundamento a pesquisa do DNA: a metáfora O DNA É UM CÓDIGO/TEXTO permitiu aos pesquisadores construir novas linhas de raciocínio para a solução do problema, entender o funcionamento do DNA fez com que o público leigo tivesse uma ideia mais clara a respeito do assunto.

No capítulo anterior, destacamos que os conceitos científicos, nos quais a Matemática está inserida, se enquadram na visão clássica dos conceitos. Neste caso, eles são precisos e provém da sua definição (HERSHKOWITZ, 1994). Lakoff e Núñez (2000) discutem que a lógica da visão clássica – um caso particular que pertence a uma categoria maior e assim por diante – enquadra essa visão como um exemplo daquilo que os autores chamam de “Metáfora Básica do Infinito”. A visão clássica também está alicerçada sob a ótica da metáfora CATEGORIAS CLÁSSICAS SÃO RECIPIENTES, na qual a lógica das categorias clássicas é a dos recipientes. Desse modo, categorias clássicas podem ser entendidas metaforicamente como espaços limitados (recipientes) (LAKOFF, 2012).

Do ponto de vista de sala de aula, é comum o uso de metáforas na comunicação entre os atores envolvidos no processo, seja por gestos, pela comunicação verbal ou pela escrita. Para o

[54] No âmbito educacional, segundo Sfard (2009), as metáforas podem influenciar não somente no ato da comunicação, mas na forma como o/a professor/a encara o ensino. Por exemplo, pode ser visto pelo/a docente sob dois aspectos: como um vaso a ser preenchido, no qual a metáfora que está em jogo coloca o conhecimento sendo algo a ser transferido, ou como uma chama a ser acesa, em que a produção do conhecimento deve ser estimulada e que demanda coautoria dos aprendizes na produção.

entendimento de como ocorre a construção dos conceitos matemáticos e valendo-nos de exemplos de outras áreas a fim de construir uma base para interpretação das ideias matemáticas propostas por estudantes, ressaltamos o papel do diálogo e das representações. Desse modo, a análise das metáforas, que emergem dos discentes na escrita, na fala ou em outros registros, é uma importante fonte para identificar a aprendizagem. Em relação à importância desse último, propomos o seguinte exercício: tente imaginar algo que você nunca tenha vivenciado ou desconheça. Parece difícil, não é mesmo? Então, vamos apresentar a descrição de um objeto que você deverá tentar imaginar ou representar por esboço. Vejamos: objeto construído por três peças cilíndricas, sendo a central com maior altura e utilizada como braço. As demais partes que são encaixadas na primeira possuem a mesma massa. Mesmo desconhecendo o objeto escolhido e apenas com bases nas sentenças que o define você foi capaz de esboçar ou imaginar uma representação para ele, isso porque seu cérebro recupera as imagens (perceptivas, imagéticas, etc.) com base em experiências anteriores para lhe auxiliar no processo imaginativo.

Não apresentamos o contexto, o que dificultou a identificação do objeto, a qual na imagem (Figura 14), representa a ideia que um estudante do 8ºano do Ensino Fundamental teve para o termo “alterno”, em que o objetivo da tarefa estava na identificação do significado atribuído pelo discente para construção de um novo sentido, neste caso, o matemático, «ângulos alternos», como veremos no capítulo 6.

Figura 14 – Haltere

Fonte: Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Haltere. Acesso em: 20 jan. 2021

Dessa forma, tanto você quanto o estudante se valeram de conceitos já conhecidos para representar conceitos desconhecidos.

Reformulamos a pergunta que colocamos no início da seção e acrescentamos novas questões: como podemos entender conceitos matemáticos como «retas paralelas», «ângulos correspondentes», entre outros, usando nosso aparato conceitual cotidiano? E, no âmbito da experiência de ensinar, como podemos direcionar a mudança de significado → sentido para a construção ou o desenvolvimento conceitual, analisando as metáforas produzidas por estudantes? Isso é possível, embora a matemática seja uma ciência que aparentemente lida com definições e demonstrações, sem espaços para imprecisões? Sim, é possível! Vale ressaltar que lidamos com a aprendizagem da Matemática. Para Lakoff e Núñez (2000), a matemática é um produto da mente humana, e não apenas uma construção histórica e social. Ela é fruto das capacidades neurais de aprender a partir da interação com o meio, o que envolve a natureza dos corpos (cognição corporificada) e permeia toda a evolução física (mente e corpo), sócio-histórica e cultural.

Para Radford e André (2009), da perspectiva da teoria da cognição corporificada, o sistema sensório motor não oferece apenas a base para o desenvolvimento conceitual humano, ele configura o conteúdo semântico dos conceitos. Essa reflexão nos leva a pensar em relação a maneira como os conceitos matemáticos são apresentados aos discentes em um modelo tradicional. Se a mente e o corpo são componentes constitutivos do sistema conceptual, nossa hipótese é que uma aula pautada no paradigma do exercício (SKOVSMOSE, 2000), na qual inicialmente são apresentadas definições e propriedades, exercícios modelos e, ainda, são propostas questões similares aos estudantes, pode não ser o suficiente para uma aprendizagem munida de sentidos.

A aprendizagem de conceitos geométricos é influenciada pela coordenação sensorial (RADFORD; ANDRÉ, 2009) e esse pode ser o problema de situações de ensino centradas apenas nas mídias convencionais, papel e lápis, nas quais os sujeitos não são expostos a situações experimentais e dessa forma não conseguem fazer conexões entre os simbolismos matemáticos e o objeto para a construção de sentidos. Fato que justifica uma proposta pautada no estudo de conceitos geométricos por meio das manipulações *touchscreen*, e que reforça o que já discutimos no capítulo 2 em relação à visualização. Não é possível formar a imagem de um conceito e seus elementos sem que sejamos capazes de manipulá-los (HERSHKOWITZ, 1994). Dessa maneira, ao passo que manipular um objeto geométrico – sob a lente da cognição corporificada, na qual a cognição depende das experiências sensório-motoras individuais e essas vivências fazem parte de um contexto biológico, psicológico e cultural mais amplo (VARELA; THOMPSON; ROSCH, 2003) – pode desenvolver a visualização, potencializar a construção e o desenvolvimento conceitual.

Parece haver um consenso, por boa parte das pessoas, de que Matemática diz respeito a números e contas. E, entre especialistas, ela parece vigorar como a rainha das ciências, exigindo um tratamento formal e linguagem sofisticada na abordagem. Descartando o exagero que empregamos aqui, utilizar somente essa lógica em sala de aula pode desvalorizar a linguagem dos estudantes na construção das ideias matemáticas. Interessa-nos a abordagem da Matemática como ciência, mas também em função da prática social, que deve ser democrática. Tais observações direcionam para aproximação em relação as ideias que discutimos neste e no capítulo anterior. Evidenciar as metáforas conceituais produzidas pelos estudantes, tendo como pano de fundo a visão teórica dos conceitos, na qual cada um deles é elemento construtivo de uma teoria a que pertence (OLIVEIRA, M. B., 1999), possibilita-nos investigar de que maneira ocorre o processo de desenvolvimento conceitual a partir do aplicativo GeoGebra.

As ideias discutidas neste capítulo evidenciam as metáforas como elemento constitutivo do pensamento, importantes na elaboração conceitual e na construção das ideias matemáticas. Isso legitima o nosso interesse, visto que para os propósitos que intentamos potencializam ensinos e aprendizagens, sim, no plural! Pois, ao professor permite uma (re)construção constante das tarefas, vislumbrando abordagens originais, aos estudantes, a ressignificação com novos olhares para velhos conceitos e formas distintas de aprendizagem, e ao pesquisador, se configuram como ferramentas de análise.

Dessa forma, colocamo-nos a pensar acerca da abordagem metodológica, do ponto de vista metodológico, a organização do estudo, singularidades dos atores envolvidos e a elaboração das tarefas, itens que serão discutidos a seguir.

CAPÍTULO V – CONFIGURAÇÕES METODOLÓGICAS

Este capítulo volta-se para a discussão de algumas características fundamentais da "pesquisa de desenvolvimento", abordagem teórico-metodológica que adotamos, descrevemos a organização do estudo, apresentamos os atores que participaram dessa intervenção e as singularidades das tarefas. Por fim, tecemos comentários em relação ao *smartphone* e sua dupla função nesta pesquisa: recurso didático e ferramenta na coleta e produção dos dados.

5.1 Metodologia de Investigação

A escolha da abordagem metodológica pode ser um dos momentos mais desafiantes para o processo de confecção de um estudo. Há de se considerar um conjunto de elementos condicionantes, tais como: o tipo de tecnologia que o pesquisador utilizará, a confecção das tarefas, os recursos disponíveis, o ambiente das implementações, os sujeitos etc. e questões como: a proposta parte de um problema de ordem prática? Quais as contribuições da pesquisa à comunidade científica/profissional?

Com base nessas primeiras observações, atribuindo à interação um papel importante para construção e o desenvolvimento de conceitos, e reconhecendo as dificuldades enfrentadas por um pesquisador no que tange à metodologia que abarca e proporciona as ferramentas adequadas tanto para a elaboração dos passos da pesquisa, realização e desenvolvimento, quanto análise do trabalho, utilizamos a "pesquisa de desenvolvimento" [55]como abordagem de pesquisa. Entendemos que, além de trazer um olhar para solução de problemas de ordem prática, se configura com possibilidades de oferecer as ferramentas adequadas para avaliar e recriar os passos da investigação a partir do *feedback* de cada intervenção, visando à construção de um repertório de conhecimentos pedagógicos (COBB, *et al.*, 2003; MATTA; SILVA; BOAVENTURA, 2014)[56].

Doerr e Wood (2006) sublinham que a pesquisa de desenvolvimento traz contribuições à Educação Matemática por considerar a multiplicidade de fatores que compõem as práticas de

---

[55]Na literatura, seja na Educação ou Educação Matemática, há uma variedade de termos utilizados para se referir a essa abordagem metodológica. Cobb *et al*. (2003), por exemplo, se referem a metodologia como *design experiments.* Doerr e Wood (2006), usam o termo "pesquisa projeto" em tradução literal de *design research.* Autores como Matta, Silva e Boaventura (2014) empregam *Design-Based Research* (DBR) ou "pesquisa de desenvolvimento", no sentido de termo que melhor se adéqua à Língua Portuguesa, enquanto Barbosa e Oliveira (2015), apenas utilizam "pesquisa de desenvolvimento". Concordamos com estes últimos quanto ao uso do adjetivo <u>desenvolvimento</u> para a abordagem, referindo-se ao delineamento/desenvolvimento como elaboração e o processo contínuo de refinamento. Dessa forma, utilizaremos "pesquisa de desenvolvimento" independente da referência utilizada.

[56]Não temos a intenção de elencar um conjunto de orientações para o uso da pesquisa de desenvolvimento. Para tal finalidade, o leitor pode consultar autores como Cobb *et al*. (2003), Matta, Silva e Boaventura (2014), Mazzardo *et al.* (2016), entre outros. Nossa proposta consiste em apresentar algumas características da metodologia de investigação e de que maneira nos apropriamos dos seus conceitos principais para a condução deste estudo.

ensino, ao passo que produz um repertório comum de conhecimentos profissionais para o ensino da Matemática. Em sintonia, Cobb *et al.* (2003) alegam que a pesquisa de desenvolvimento se constitui como uma metodologia de investigação capaz de lidar com a gama de elementos, complexos, em práticas de ensino. Para eles, a abordagem envolve uma forma particular de aprendizado e um estudo sistemático, o que pode potencializar o aprendizado dentro de determinados contextos, na qual uma variedade de recursos (artefatos) é utilizada como suporte. A engenharia elaborada está nas revisões e iterações sucessivas, com vários ciclos de implementações, flexíveis, visando ao aprimoramento do ensaio (COBB, *et al.*, 2003).

Essa assertiva vai ao encontro da proposta apresentada por Doerr e Wood (2006), ou seja, a formulação de uma teoria simples, um conjunto de conhecimentos profissionais relacionados com a prática de sala de aula na abordagem de um conteúdo. Em consonância, Barbosa e Oliveira (2015) também reforçam algumas características importantes da pesquisa de desenvolvimento: a geração de produtos educacionais, a realização da intervenção em contextos reais, no nosso caso a sala de aula, e os ciclos de refinamento visando a aprimorar o produto.

Matta, Silva e Boaventura (2014) reafirmam uma característica fundamental da pesquisa de desenvolvimento, na qual o cerne da investigação está na solução de um problema em um contexto real, identificado pelos atores envolvidos, por meio de práticas inovadoras. Os autores também alegam que a pesquisa de desenvolvimento rompe a dicotomia quantitativo-qualitativo, podendo dispor tanto de procedimentos quantitativos quanto qualitativos e que essa abordagem ganha espaço no desenvolvimento de investigações centradas nas tecnologias digitais (MATTA; SILVA; BOAVENTURA, 2014).

Para Mazzardo *et al*. (2016), os ciclos iterativos compõem umas das principais propriedades da pesquisa de desenvolvimento. Eles também apontam que as características da abordagem potencializam sua aplicabilidade no campo educacional com a integração das tecnologias digitais nas práticas pedagógicas, visando à melhoria dos processos de ensino e a aprendizagem (MAZZARDO *et al*., 2016).

As características que apresentamos colocam a pesquisa de desenvolvimento como centro da construção deste estudo por permitir o planejamento, a organização e o delineamento. Outrossim, consideramos essas etapas como mais um ciclo, de vários outros previstos na pesquisa de desenvolvimento, em que outras referências foram Henrique (2017), com reflexões e a construção de um repertório de conhecimentos técnico-didático-pedagógicos relacionados ao estudo de conceitos geométricos em AGD (para *desktop* e *smartphone*), culminado em Henrique e Bairral (2019a) na elaboração de um caderno de atividades a respeito do assunto para professores. Dessa forma, consideramos o desenvolvimento da pesquisa a partir dessa abordagem como uma "espiral em progressão", que permite os ciclos de refinamento em um constante (re)visar das questões, inserindo novos elementos a partir de cada implementação, sem, no entanto, reaplicar a mesma atividade, mas redesenhando as tarefas objetivando o aprimoramento.

Em Henrique (2017), o problema identificado, dificuldade de aprendizagem de conceitos geométricos por estudantes do 8.º e 9.º ano do Ensino Fundamental, traz como proposta de solução oportunizar aos estudantes a construção conceitual mediante a realização de atividades no GeoGebra no laboratório de informática, posteriormente como redesenho da pesquisa, em sala de aula, por meio do GeoGebra aplicativo instalado nos *smartphones* dos próprios discentes.

Nesse novo ciclo, reformulamos o problema e, partindo do conjunto de teorias já construídos, estreitamos o olhar para as manipulações *touchscreen* e a produção metafórica dos sujeitos. Como é de práxis dessa metodologia de investigação, a questão parte de um contexto real, no nosso caso a sala de aula, no qual a proposta inicial de solução passa pela implementação de um conjunto de atividades pensadas e elaboradas para o AGD em DMcTT a fim de potencializar a construção e o desenvolvimento de conceitos geométricos dos sujeitos.

Em consonância com a proposta de Matta, Silva e Boaventura (2014) situamos este estudo a partir das fases da pesquisa de desenvolvimento apresentadas pelos autores, a saber:

1. Análise e identificação do problema – o refinamento se constituiu a partir da vivência do professor-pesquisador, em um novo cenário, visando à mudança nos processos de raciocínio matemático dos estudantes, dando-lhes maior autonomia na exposição das ideias deles e formas variadas de expressão: escrita, toques, diálogo.
2. Elaboração de soluções tendo como base os princípios de *design*– adaptação e elaboração de um conjunto de tarefas para o estudo de conceitos geométricos por meio do aplicativo GeoGebra nos *smartphones* dos próprios sujeitos a partir do refinamento das tarefas propostas em Henrique e Bairral (2019a).
3. Aplicação da intervenção em um processo iterativo com refinamentos – implementação do primeiro conjunto de tarefas (apêndice 1). Tomada de decisões para o redesenho do segundo conjunto (apêndice 2) levando em conta avaliação da realização do primeiro conjunto e reajustes (refinamento e aprimoramentos) a partir da aplicação de cada tarefa do segundo conjunto.
4. Análise dos princípios de *design* visando aprimoramentos na solução proposta – elaboração de um conjunto de conhecimentos técnicos-didáticos-pedagógicos centrado na análise da produção metafórica como metodologia e nas manipulações *touchscreen*. Redesenho final das tarefas, com a atualização da proposta apresentada em Henrique e Bairral (2019a) e a confecção de um GeoGebra *book* (livro digital construído na plataforma GeoGebra) destinado a professores.

Apresentamos algumas características da pesquisa de desenvolvimento com intuito de amparar e servir de alicerce para nossa proposta. Nesse cerne, situamos nossa proposta mostrando o objeto de estudo como a metodologia de investigação orienta a pesquisa e simultaneamente se articula com ciclos anteriores. Contudo, todo o conjunto de procedimentos metodológicos adotados, como a organização do estudo, as tecnologias utilizadas na implementação e na coleta e produção dos dados, os sujeitos, elementos que compõem as tarefas, se articulam como parte essencial de todo o processo e são descritos a seguir.

5.2 Organização do Trabalho de Campo

A investigação objetiva o desenvolvimento e construção de conceitos geométricos por intermédio da proposta de tarefas elaboradas e pensadas para o uso de AGD. Particularmente o GeoGebra na versão aplicativo, com implementações a partir do uso dos *smartphones* dos próprios participantes: estudantes do 8.º ano do Ensino Fundamental.

Trabalhamos os seguintes conteúdos[57]: ângulos formados por retas concorrentes; ângulos formados por paralelas e transversais e propriedades advindas destes dois conteúdos – relação entre os ângulos formados por linhas poligonais entre duas paralelas, popularmente conhecido como teorema dos bicos; soma das medidas dos ângulos (internos e externos) de um triângulo; soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero e relações entre os ângulos internos deste; posições relativas entre retas em figuras espaciais. Revisamos também, por meio de itens que compunham determinadas etapas de algumas tarefas e outros conceitos, como os de «bissetriz».

A organização do estudo foi proposta para quatro momentos:

1. Elaboração das tarefas.
2. Implementações e revisão das tarefas.
3. Coleta das informações e produção dos dados.
4. Análise.

Como parte de um processo que visa a uma reconfiguração constante das tarefas, à medida que as implementações foram realizadas, fruto inclusive da nossa escolha de abordagem metodológica, procuramos identificar a presença de metáforas conceituais a partir de palavras relacionadas ao tema de estudo, por exemplo: «paralelo/a», «concorrente» e «transversal», para que, durante a realização das atividades com GeoGebra, pudéssemos trabalhar a ressignificação do conceito.

[57]A escolha do conteúdo está em consonância com o currículo da SEEDUC/RJ. Originalmente o conteúdo estava disponível em: http://conexaoescola.rj.gov.br/curriculo-basico/rpm , todavia o site foi retirado do ar. O leitor interessado pode visualizar o documento por meio do *link*: http://tiny.cc/tese_henrique_2021.

O processo analítico tem como objetivo identificar o desenvolvimento e a construção de conceitos geométricos, circunscritos ao estudo das relações entre retas (paralelas, concorrentes e transversais) e ângulos, por meio de manipulações *touchscreen*, a partir de uma metodologia de ensino que valoriza os conceitos metafóricos para ressignificação e produção de sentidos, as interações (professor ↔ estudantes, estudantes ↔ tecnologias, estudantes ↔ estudantes) e a argumentação. Baseado nessa proposta, trazemos novamente os objetivos específicos:

1. Elaborar, implementar e analisar tarefas que possibilitem a reflexão a partir da escrita e a interação mediante a construção e análise por meio do aplicativo GeoGebra para *smartphones*.
2. Elucidar metáforas conceituais produzidas pelos discentes.
3. Investigar como ocorre a construção e o desenvolvimento conceitual a partir da metodologia de ensino adotada.
4. Mapear contribuições e desafios de um AGD para DMcTT na abordagem das relações entre retas e ângulos.

Consideremos o Quadro 8 com a organização das implementações.

Quadro 8 – Resumo das implementações (continua)

	Tarefa	**Objetivo(s)**	**Duração**
Metáforas Conceituais	Tarefa Preliminar 1	Identificar metáforas conceituais a partir da reflexão acerca dos termos: «concorrente», «paralelo/a» e «transversal».	Uma aula (50 min.)
	Tarefa Preliminar 2	Identificar metáforas conceituais a partir da reflexão acerca dos termos: «retas concorrentes», «retas paralelas» e «reta transversal».	Uma aula (50 min.)
	Tarefa Preliminar 3	Identificar metáforas conceituais a partir da reflexão acerca dos termos: «ângulo», «oposto» e «vértice».	Uma aula (50 min.)
	Tarefa Preliminar 4	Identificar metáforas conceituais a partir da reflexão acerca dos termos: «alterno(s)», «colateral(is)» e «correspondente(s)».	Uma aula (50 min.)
Manipulações *touchscreen*	Compartilhamento e Ambientação	Instalar os aplicativos nos *smartphones* do sestudantes e propor um aatividade livre para o reconhecimento de alguma ferramentas e das formas de manuseio do GeoGebra.	Uma aula (50 min.)
	Tarefa 1	Explorar a relação existente entre os ângulos formados entre duas retas concorrentes.	Duas aulas (100 min.)
	Tarefa 2	Investigar as propriedades dos possíveis paresde ângulos formados por duas retas paralelas, quando essas sãocortadas por uma reta transversal. Aplicar as propriedades em outros contextos e relacionar definições e propriedades.	Quatro aulas (200 min.)
	Tarefa 3	Explorar as propriedades relacionadas a ângulos (alternos, colaterais e correspondentes) para descoberta de novas relações: ângulos de um paralelogramo e teorema dos bicos.	Duas aulas (100 min.)
	Tarefa 4	Explorar as propriedades relacionadas a ângulos (alternos, colaterais e correspondentes) para descoberta de novas relações: soma dos ângulos internos de um triângulo.	Duas aulas (100 min.)
	Tarefa 5	Explorar as propriedades relacionadas a ângulos (alternos, colaterais e correspondentes) para descoberta de novas relações: soma dos ângulos externos de um triângulo.	Duas aulas (100 min.)

‘Quadro 8. Continuação’

Tarefas Complementares	*QRCode* Presente na Tarefa 2	Analisar a construção de conceitos relacionados às propriedades entre retas paralelas cortadas por uma transversal.	Extra classe[58]
	Questões Escritas	Propor problemas relacionando retas paralelas e retas transversais com a Geometria Espacial.	Duas aulas (100 min.)
	Atividade Avaliativa	Analisar a construção de conceitos relacionados às propriedades entre retas paralelas, cortadas por uma transversal a partir da mescla de metáforas conceituais, escrita e manipulação *touchscreen.*	Duas aulas (100 min.)

Fonte: elaboração própria

As implementações foram realizadas no período de fevereiro a junho de 2018 e computaram 21 horas-aula de 50 minutos cada. Todas as atividades foram realizadas em sala de aula. Para as tarefas com metáforas conceituais (Quadro 8), fizemos uma proposta de trabalho escrito na qual os discentes atuaram individualmente. Já para as manipulações *touchscreen*, as atividades foram realizadas por meio do GeoGebra instalado nos *smartphones* dos próprios alunos (versão Geometria – 5.0.485.0). E, nesse último caso, os estudantes trabalharam em duplas ou – quando houve alguma necessidade devido ao número de dispositivos ou de alunos – em trios.

5.3 Os Atores

As tarefas foram propostas para duas turmas do 8.º ano do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Oliveira Botelho[59], localizado no município de Resende (RJ), durante o ano letivo de 2018, na disciplina de Resolução de Problemas Matemáticos (RPM)[60], da qual o autor era o professor regente. As turmas[61] A e B, ambas do turno vespertino, durante o período das implementações, tinham 31 e 32 alunos, com idades variando entre 12 e 16 anos.

Por que a escolha dessa unidade escolar (UE) e, particularmente, essas turmas? Porque planejamos inicialmente dar continuidade ao desenvolvimento do trabalho iniciado em Henrique (2017) com os mesmos sujeitos: estudantes do Ensino Fundamental do Colégio Estadual Alfredo Pujol, localizado em Rio Claro (RJ). Contudo, a política de permanência em uma unidade escolar da SEEDUC/RJ passa pelo crivo da antiguidade. No final de 2016, com a proposta de fechamento de colégios e redução de turmas, o colégio Alfredo Pujol perdeu todo o turno noturno. À vista disso, por ser um dos professores mais novos na UE, em 2017 o professor-pesquisador foi realocado.

[58]Os estudantes tiveram uma semana para realizar a tarefa.

[59]Com a autorização da diretora geral da UE (Apêndice 4) e com o termo de consentimento para participar em pesquisa assinado pelos responsáveis (ver Apêndice 5).

[60] A SEEDUC/RJ lançou em 2013 o currículo mínimo, incluindo a proposta de uma disciplina com enfoque apenas na resolução de problemas. Inicialmente, a proposta contemplava todo o Ensino Fundamental II e o 2.º ano do Ensino Médio. Em 2019, porém, a disciplina foi retirada do currículo do Ensino Médio.

[61] Algumas vezes falamos acerca de especificidades de cada turma; dessa forma, para não confundir o leitor, vamo-nos referir às turmas como turma A e turma B.

Optamos por uma escola com carência na disciplina de Matemática e/ou RPM em turmas do 8.º ano do Ensino Fundamental. Isto se justifica dado que a temática que abordamos, como mencionado, é trabalhada nesta etapa do Ensino Fundamental, especificamente, o Colégio Estadual Oliveira Botelho.

Apresentamos a proposta à direção do referido colégio e obtivemos a autorização (Apêndice 4). Em seguida, explicamos a proposta e convidamos as três turmas de 8.º ano de 2018 na qual o autor era o professor regente. Apenas duas se disponibilizaram. Os alunos da terceira alegaram dificuldades para instalação de novos aplicativos nos *smartphones* deles, devido os aparelhos estarem com pouco espaço de armazenamento interno.

Sumariamente, vamos destacar os perfis das classes. A turma A, de modo geral, mostrou-se mais participativa e, durante as implementações das atividades, teve comprometimento e engajamento em relação às propostas apresentadas pelo docente, bem como para as explicações, quer fossem de cunho técnico, como manusear o GeoGebra, ou conceitual, quando o diálogo proposto pelo professor possuía um direcionamento que exigia a participação dos discentes. A turma B, em vários momentos, esteve mais dispersa e muitos estudantes, embora entusiasmados com a possibilidade de utilizar o *smartphone* para aprender Geometria demonstravam aversão ao aprendizado da Matemática se colocando em uma posição de incapacidade e com dificuldade. Todavia, muitos alunos relataram o interesse em seguir carreira militar com estudos em áreas afins, como engenharias e computação, por exemplo. É possível que esse fato possua uma relação estreita com a localidade na qual a escola está inserida que, além de ser um grande polo industrial automotivo, possui uma das maiores academias militares do país. É importante salientar que não se trata de nenhum tipo de comparação entre os desempenhos das turmas. A seguir, destacamos algumas características das tarefas propostas.

5.4 As Tarefas

A elaboração das tarefas representou um importante passo para o desenvolvimento deste estudo. Inicialmente, vale ressaltar o sentido que adotamos ao tratar de tarefa, que frequentemente é empregada como sinônima de atividade. Assumimos aqui o mesmo sentido atribuído por Powell e Bairral (2006) para esses termos. Conforme esclarecem os autores, tarefa é uma elaboração docente que exige reflexão a respeito dos objetivos pedagógicos propostos, ao passo que atividade é a realização da tarefa (dinâmica e interativa) condicionada à participação de professores e alunos envolvidos nos processos de ensino e aprendizagem.

Como já mencionamos, pode-se considerar que a coleção de tarefas se divide em dois conjuntos com os seguintes objetivos: (1) possibilitar aos estudantes refletirem a respeito de conceitos relacionados ao tema de estudo para ressignificação e produção de novos sentidos e (2) construir e desenvolver conceitos acerca das relações matemáticas presentes na articulação entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal a partir da manipulação e análise das construções propostas para o aplicativo GeoGebra, Geometria para *smartphones*. Nesse último caso, elas possuem um caráter exploratório e investigativo, no qual algumas questões direcionam para descobertas e outras são de cunho mais livres, o que se aproxima da ideia de investigação proposta por Ponte, Brocado e Oliveira (2006).

Esclarecemos que a escolha pela abordagem de retas paralelas cortadas por uma transversal, além de compor o currículo para as turmas em que as atividades foram realizadas, já sinalizado no capítulo 2, ocorre por representar uma fonte rica para abordagem de outros conceitos, por exemplo propriedades de triângulos, quadriláteros, relações entre ângulos formados por duas retas concorrentes, rompendo a lógica euclidiana.

No entendimento de que as fases e ciclos que compõem a pesquisa de desenvolvimento ocorrem como uma espécie de "espiral em progressão", algumas das tarefas (re)elaboradas foram adaptadas de Henrique e Bairral (2019a) e outras inspiradas nos autores Ponte, Oliveira e Candeias (2009) e trazem na sua essência a combinação de elementos relacionados a dinamicidade do AGD – que possibilitam a construção de uma classe de figuras (ARZARELLO *et al*., 2002) e permite ao usuário visualizar formas variadas de um mesmo objeto matemático, elaborar conjecturas e verificar a existência de propriedades –, a possibilidade de investigação e resolução de problemas e adotam uma perspectiva dialógica para construção dos conceitos matemáticos.

Em relação ao processo de confecção, em Henrique e Bairral (2019a) havíamos, no primeiro conjunto, colocado questões como "a palavra concorrente me lembra ... porque ... um desenho possível seria ..." e em um segundo momento "o que você entende por retas concorrentes? ". Nesse processo de (re)elaboração, mantivemos a ideia, porém inserimos outras questões, por exemplo "a palavra alterno me lembra ... porque ... um desenho possível seria ..." e "o que você entende por alterno(s)?".

No que diz respeito ao segundo conjunto, continuamos com a ideia de inserir alguns ícones do GeoGebra para orientar o processo de construção dos objetos geométricos, conforme mostrado na Figura 15 a seguir.

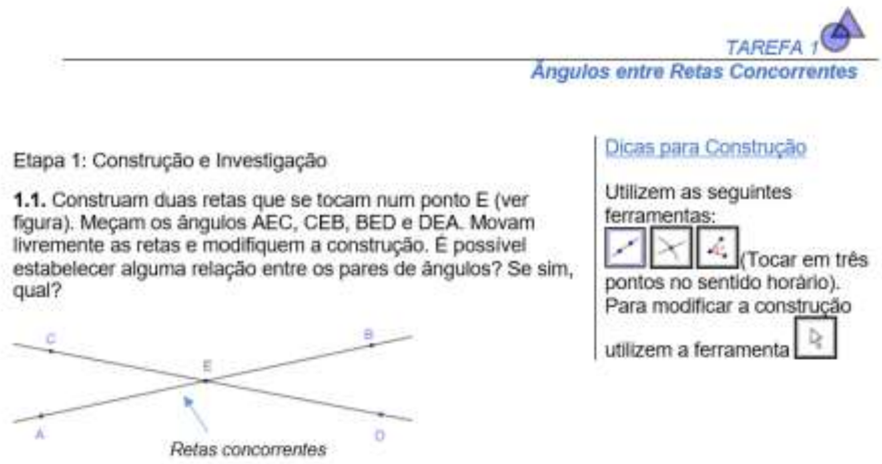


Figura 15 – Ícones do GeoGebra na composição das tarefas
Fonte: material de pesquisa

Além desse recurso, outro elemento que introduzimos em uma tarefa foi o *QR Code*[62], que em nossa proposta utilizamos como tarefa extraclasse complementar. No planejamento inicial, esse recurso comporia outras tarefas, no entanto, retiramos no redesenho, dado que sua implementação na composição de uma atividade com outro aplicativo, em uma dinâmica de sala de aula, com algumas dificuldades de ordem técnica, como pouca memória nos aparelhos dos discentes, inviabilizou o processo.

Valorizamos a produção dos vários registros (os toques, a escrita, o desenho) e o diálogo, seja entre os estudantes, professores e estudantes ou por meio de debates com o coletivo com objetivo de possibilitar que os grupos (ou duplas) dialogassem, anunciando as descobertas. É importante dizer que o diálogo permite ao estudante o envolvimento no processo de construção conceitual, dando-lhe a oportunidade de desenvolver habilidades básicas de raciocínio e investigação por meio da argumentação, o que, por consequência, pode oferecer um aparato que lhe possibilite defender suas ideias à medida que constrói uma rede de raciocínios (SILVA, 1998).

As tarefas que propusemos representam uma atividade matemática, nas mais variadas possibilidades, e concordamos com Stein e Smith (2009) quando afirmam que é o efeito acumulativo, diariamente em sala de aula, de diferentes tipos de tarefas que permite o amadurecimento das ideias matemáticas. Desse modo, cabe ao professor saber identificar as particularidades de cada turma para propor as tarefas de maneira coerente para proporcionar formas diversificadas dos alunos pensarem. Em complemento, para Bairral (2009), a proposta de tarefas,

[62]Esse recurso tem-se potencializado, no campo educacional, como um meio de divulgar materiais e dinamizar as práticas pedagógicas. Ver, por exemplo, Oliveira e Mercado (2016) e Oliveira (2019). Esclarecemos que alguns *smartphones* já possuem, como parte integrante do dispositivo, o leitor de *QR Code*. Nesses casos, o usuário deve abrir a câmera do aparelho e apontá-la para a imagem para realizar a leitura do código. Para os demais casos, é necessário realizar o *download* de um aplicativo. Para criar um *QR Code* existem diversos *sites* e aplicativos gratuitos. Sugerimos, respectivamente, o *site* e aplicativo para Android: QR Code Generator, disponível em: <https://br.qr-code-generator.com/>. Acesso em: 01 mai. 2020. E QR Code Generator & Scanner, disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.appstudio.android.qrcodegenerator&hl=pt_BR>>. Acesso em: 01 mai. 2020.

que desenvolvam representações variadas e distintas representações, deve compor uma aula de matemática a fim de possibilitar o desenvolvimento conceitual.

A partir dessa breve caracterização das tarefas, observamos que o *smartphone* assume um papel relevante no desenvolvimento da pesquisa, tanto como recurso à disposição do trabalho docente e, conforme veremos, quanto ferramenta para o pesquisador na coleta e produção dos dados. Dessa forma, parece-nos válido trazer algumas especificidades do dispositivo.

5.5 O *Smartphone* Como um L*ócus* de Possibilidades

Neste exato momento, há milhares de pessoas utilizando o GPS[63], fazendo compras *on-line*, acessando as redes sociais, interagindo, assistindo a vídeos no *YouTube*, entre tantas outras possibilidades. Conforme o infográfico "o que acontece na internet em um minuto", em análise de 2019, (Figura 16), podemos afirmar que o dispositivo mais utilizado nessas ações foi o *smartphone*.

Figura 16 – Infográfico: Isso é o que acontece na Internet em um minuto[64]
Fonte: Disponível em: https://www.weforum.org/agenda/2019/03/what-happens-in-an-internet-minute-in-2019/. Acesso em: 20 dez. 2020

[63] *Global Positioning System*

[64] Optamos pelo infográfico de 2019, pois devido à pandemia do novo coronavírus, com a necessidade do distanciamento físico, escolas atuando com o ensino remoto e boa parte das pessoas trabalhando de suas casas, ainda que o infográfico de 2020 tenha mostrado uma nova tendência, ele pode ter sido influenciado por esse novo cenário.

Sobretudo, queremos, com essas observações, enfatizar que estamos em um caminho sem volta, o que reforça a nossa defesa pelo uso do aparelho em práticas pedagógicas (HENRIQUE; BAIRRAL, 2019b).

Assumimos, tal qual a concepção do filósofo italiano Giorgio Agamben, que o *smartphone* representa um "dispositivo", quer dizer, qualquer artefato que tem "[...] de algum modo a capacidade de capturar, orientar, determinar, interceptar, modelar, controlar, e assegurar os gestos, as condutas, as opiniões e os discursos" (AGAMBEN, 2009, p. 40). Nesse contexto, atua em duas frentes, ou seja, um recurso para professor e estudantes e uma ferramenta à disposição do pesquisador.

A popularização do *smartphone* e poder utilizá-lo em sala de aula inaugurou uma um novo tempo para os laboratórios de informática na educação. Se antes eles contavam com equipamentos desatualizados (danificados pelo tempo ou mau uso), eram restritos, pois sua utilização demandava agendamento, e com dificuldades técnicas impostas pela inexperiência, em virtude do sistema operacional *Linux*, problema que exigia o suporte de um técnico de informática (TI), agora, em várias escolas, o aparelho está na palma das mãos dos estudantes e, nesse caso, à disposição do trabalho docente e da pesquisa, sem restrição de horário, com o sistema operacional popularizado devido a sua a gratuidade e, em algumas situações, o próprio usuário pode exercer a função do TI.

Essa assertiva coloca em evidência o que autores como Göttsche (2012), Moura (2017) e Henrique e Bairral (2019b), apenas para citar alguns, discutem acerca da possibilidade de implementação de atividades em sala de aula por meio do *smartphone* e suas potencialidades como recurso didático.

Além do apelo motivador e mobilidade (GOMES, 2017; HENRIQUE, 2017; SILVA, 2017), os *smartphones* também ampliam as possibilidades de uso no ensino, favorecem uma aprendizagem individualizada (UNESCO, 2014) e possibilitam realizar tarefas de propósitos variados (MENEZES, 2018).

Henrique e Bairral (2019b) elencaram algumas singularidades e contributos do celular na proposta de uma tarefa:

> - Devido à mobilidade pode ser incorporado mais facilmente às práticas de sala de aula.
> - Pode estimular a curiosidade e a motivação na realização das atividades.
> - É um repositório dos mais variados *softwares* para o ensino de matemática.
> - Pode ser utilizado pelo seu próprio dono, o que dispensao laboratório de informática e não precisa de conexão à Internet. (HENRIQUE; BAIRRAL, 2019b, p. 116).

Em relação à segunda função do *smartphone* neste estudo, o celular incorpora a elaboração de procedimentos de coleta e produção dos dados por meio da gravação de áudio e vídeo e no mapeamento dos toques. Está presente, inclusive, na confecção do diário de campo, o que permitiu articular todas as formas de registros (escrita, áudio e vídeo e toques) com as observações do pesquisador, e se apresenta como suporte na articulação de estratégias de análise, que detalharemos na próxima seção

5.6 Aplicativos, Toques e Escrita: Coleta e Produção dos Dados

A pesquisa de desenvolvimento possibilita o trabalho com uma variedade de registros (escritos, gravação em áudio e vídeo, toques em telas etc.) na composição dos episódios. Dessa forma, para o processo de coleta e produção dos dados, usamos os seguintes recursos:

a) Gravação em vídeo e áudio: procedimento realizado por meio de um *smartphone* acoplado a um suporte com haste flexível, o que permitiu direcionar o aparelho na filmagem de uma dupla de estudantes, conforme se observa a utilização deste recurso no registro fotográfico (Figura 17), e, ainda, a utilização do *smartphone* fixado ao suporte (Figura 18).

Figura 17 – Filmagem de dois estudantes durante a realização de uma atividade

Figura 18 – *Smartphone* acoplado ao suporte com haste flexível

Fonte: material de pesquisa

Esclarecemos que o processo de gravação em áudio e vídeo que utilizamos talvez não seja o mais recomendado para uma situação de pesquisa, uma vez que o mais adequado seria fazê-lo com uma câmera devidamente instalada e uma pessoa, ou uma equipe, para manusear e captar, detalhadamente momento a momento, os sujeitos analisados, conforme se verifica em Powell, Francisco e Maher (2004). Todavia, o procedimento adotado evidencia a função múltipla do professor da Educação Básica, especificamente o pesquisador. Tal percalço, aliado a dupla função do *smartphone,* permite-nos vislumbrar formas mais arrojadas do uso da própria tecnologia como forma de coleta e produção de dados (BAIRRAL, 2015).

Powell e Silva (2015) sublinham que os *smartphones* têm ampliado as possibilidades para a pesquisa em Educação Matemática por permitir o registro combinado de vídeo e sons, momento a momento, de um mesmo fenômeno, o que também pode ser estendido com a captura da tela, como veremos a seguir. Dessa forma, ressaltamos a versatilidade do *smartphone* em nossa pesquisa que, enquanto em algumas situações se apresentou como recurso didático, aqui significou ferramenta para o pesquisador.

b) Captura da tela: ocorreu a partir do uso dos *smartphones* dos discentes com a utilização do aplicativo *AZ Screen Recorder*[65] (gravador de tela). A seguir, destacamos algumas características do aplicativo.

Tabela 2 – Características do *AZ Screen Recorder*

AZ Screen Recorder	**Características Básicas**
	▪ Captura da tela em vídeos e *screenshots*. ▪ Gravação na horizontal, vertical e com a câmera frontal. ▪ Gravação de áudio, com opções para instalação de microfone e redutor de ruídos. ▪ O limite de gravação é determinado pela capacidade de armazenamento permitida pelo dispositivo. ▪ Possui temporizador. ▪ Grava em HD e *Full* HD. ▪ Permite a retomada de um vídeo sem gerar dois arquivos. ▪ Versão 5.0 – gratuita.

Fonte: elaboração própria

O processo de captura da tela nos permitiu a reconstrução do cenário de investigação. Por intermédio da ação realizada foi possível mapear as estratégias utilizadas pelos discentes: os toques, as negociações e conjecturas dos diálogos. Esse processo, em conformidade com Assis, Henrique e Bairral (2020) e Bairral, Henrique e Assis (2021), é denominado <u>telagravação</u>, ou seja, gravação da/na tela.

O neologismo aqui refere-se à gravação em vídeo com áudio a partir da captura das manipulações externas, a câmera filmando os movimentos e os gestos das mãos dos sujeitos ao tocarem a tela, e as manipulações internas, vídeo e áudio gerados com base nos registros realizados na tela do DMcTT envolvido na atividade.

c) Notas do pesquisador: a etapa seguinte aconteceu a partir da utilização do aplicativo *Evernote*[66], no qual é possível criar no *smartphone*, e de maneira fácil, *notas*. *Evernote* é uma plataforma que possui versões para aplicativo e *software* - para *notebooks* e computadores de mesa -. A seguir elencamos algumas características básicas desse sistema operacional.

[65] O aplicativo é gratuito e possui apenas versão para Android. Disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.hecorat.screenrecorder.free&hl=pt_BR .Link testado em: 15 fev. 2021.

[66] Possui versões para *Android*, *Apple* e *Microsoft*. Disponível em: https://evernote.com/intl/pt-br/download .*Link* testado em: 15 fev. 2021.

Tabela 3 – Características do *Evernote*

Evernote	**Características Básicas**
	▪ Permite a criação de notas digitais. ▪ Possibilita a inserção de fotos, documentos, áudios, vídeos e links. ▪ Criação de tarefas e eventos. ▪ Sincroniza automaticamente dois dispositivos (*smartphone* e computador, por exemplo). ▪ Permite o compartilhamento das notas. ▪ Versão 8.11 – gratuita.

Fonte: elaboração própria

Destacamos a seguir (Figura 19) um registro realizado por meio do aplicativo logo após a realização de uma atividade. Vejamos.

Figura 19 – Nota de campo realizada no Evernote após a implementação da Tarefa 3
Fonte: fragmento de pesquisa

As notas realizadas de maneira convencional, ou seja, feitas à mão, podem não permitir a mesma articulação que o *Evernote* possui. Logo, por meio do *smartphone,* realizamos as anotações, anexamos registros fotográficos e vídeos, gerados durante a realização das atividades, e outros elementos, ou seja, documentos que adicionamos a fim de organizar os episódios e direcioná-los para análise a *posteriori*.

d) Registro escrito: guardamos as respostas dos estudantes para cada tarefa; dessa forma, foi possível articular os toques com os diálogos e o registro escrito oriundo das reflexões, durante e após a realização das atividades, tais como na proposta da elaboração de relatórios – pequenos textos produzidos pelos discentes relatando as descobertas deles, formulação de conjecturas e opiniões gerais acerca das atividades.

e) Grupo no *WhatsApp*: com objetivo de armazenar os vídeos produzidos a partir das telagravações e os registros das tarefas complementares, utilizamos esse recurso. Em alguns momentos, aproveitamos a possibilidade de interação para fazer alguns esclarecimentos a respeito de uma determinada tarefa e questionamentos visando ao desenvolvimento conceitual.

Apresentamos uma síntese dos aplicativos e recursos que empregamos a fim de recolher as informações que utilizamos para a produção dos dados.

CAPÍTULO VI – TOQUES, REFLEXÕES E ESCRITAS

Discutimos, neste capítulo, as interações, as negociações, as manipulações e as escritas de alguns discentes, nossos atores que foram mais evidenciados e nos ajudaram a compor e a narrar as histórias apresentadas em episódios de ensino. Para remontar o cenário, descrevemos parte das tarefas propostas que serviram de base para as interações e nossas inferências.

6.1 Um Toque no Roteiro

A análise, de caráter descritivo e interpretativo, propende para a reconstrução dos episódios de ensino, a partir das implementações realizadas, a fim de buscar elementos na escrita, nos toques e nos discursos dos sujeitos, que nos possibilitaram investigar como ocorre o processo de construção e desenvolvimento de conceitos relacionados às relações matemáticas entre retas e ângulos. Pela particularidade da pesquisa, realizações de atividades com o GeoGebra em *smatphones* e sujeitos sem experiência em aulas com esse tipo de AGD, caminhamos no âmbito descritivo de modo a não entrar em julgamento.

Distinguimos as implementações em dois momentos complementares. O primeiro, com a efetuação das tarefas preliminares, que tiveram como objetivo a identificação de metáforas conceituais apresentadas pelos estudantes a partir de uma análise reflexiva de termos relacionados aos conteúdos trabalhados. O segundo objetivou o desenvolvimento e a construção de conceitos geométricos, com o suporte das metáforas apresentadas pelos discentes, potencializados pela construção e análise de objetos geométricos por meio de manipulações em tela com o aplicativo GeoGebra para *smartphones*.

Tais momentos se integram, pois a análise das metáforas conceituais antecedeu as manipulações *touchscreen*. Inicialmente, no estudo de termos relacionados às retas concorrentes e, em seguida, na abordagem de retas paralelas cortadas por uma transversal, de acordo com o esquema apresentado na Figura 20, a seguir.

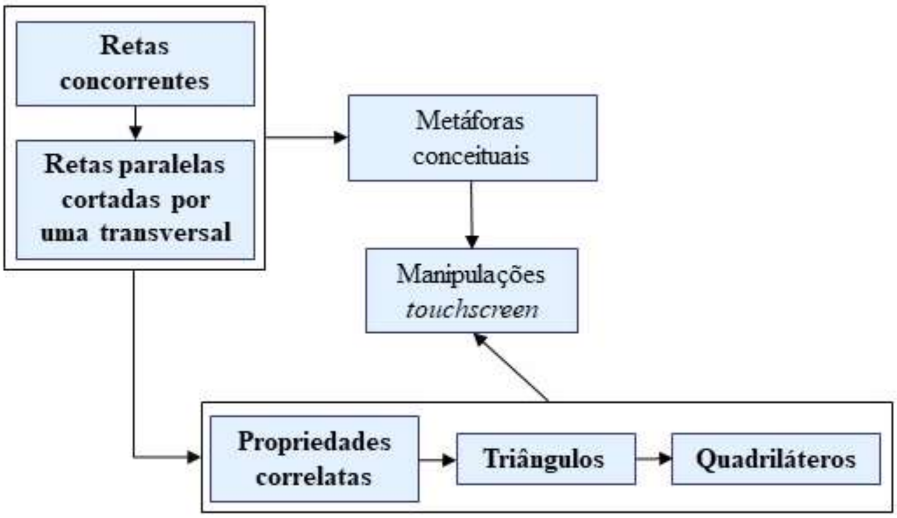


Figura 20 – Estrutura da organização das implementações
Fonte: elaboração própria

Optamos por analisar as metáforas conceituais somente nas relações entre retas e ângulos, objeto deste estudo. A abordagem de propriedades correlatas, ou seja, o teorema dos bicos, triângulos e quadriláteros foi em consequência da investigação anterior e, dessa forma, as atividades ocorreram mais no GeoGebra.

Selecionamos para análise os episódios de seis encontros, que envolveram as implementações de todas as tarefas preliminares e das tarefas 1 e 2 para o aplicativo GeoGebra, conforme organização apresentada no Quadro 9.

Quadro 9 – Tarefas que compõem os episódios selecionados para análise

Encontro	Tarefa	Episódio	Proposta
1º	Preliminar 1	1	Metáforas conceituais
	Preliminar 2		
2º	Preliminar 3	2	Metáforas conceituais
	Compartilhamento e ambientação		Exploração de recursos
3º	1: ângulos entre retas	3	Manipulações *touchscreen*
4º	Preliminar 4	4	Metáforas conceituais
5º	2: retas paralelas cortadas por uma transversal	5	Manipulações *touchscreen*
6º			

Fonte: elaboração própria

A fim de construir todo o aparato necessário para nossas interpretações e inferências, iniciamos, em alguns casos, com uma apresentação detalhada das tarefas que integram os episódios de ensino. Descrevemos de maneira mais geral aspectos inerentes às turmas e reconstruímos algumas cenas em pormenores por meio das interações, presentes nos diálogos e nos toques, nas reflexões e nas escritas dos nossos atores.

6.2 Tarefas Limiares

Três tarefas preliminares e um momento para compartilhar, apresentar e experimentar o aplicativo GeoGebra antecederam a abordagem das relações que envolvem retas concorrentes com o AGD e compuseram os dois primeiros encontros.

Solicitamos que os discentes apresentassem as ideias e fizessem um desenho[67], a partir da reflexão de termos relacionados ao tema de pesquisa.

A primeira tarefa visou à compreensão e reflexão de aspectos emergentes nas respostas escritas e nos registros pictóricos para os seguintes termos: «concorrente», «paralelo/a» e «transversal». Na segunda, propusemos que os discentes refletissem acerca dos conceitos geométricos «retas concorrentes», «retas paralelas» e «retas transversais». Enquanto as duas primeiras tarefas apresentaram questionamentos mais abrangentes, a terceira enfatizou termos relacionados à propriedade que devia ser identificada pelos discentes, o que envolveu os conceitos «ângulo», «oposto» e «vértice». Em síntese, de acordo com o Quadro 10, as tarefas apresentaram os seguintes enunciados:

Quadro 10 – Síntese das tarefas limiares

Tarefa 1
1.1. A palavra concorrente me lembra ... porque ... um desenho possível ...
1.2. A palavra paralelo/a me lembra ... porque ... um desenho possível ...
1.3. A palavra transversal me lembra ... porque ... um desenho possível ...
Tarefa 2
2.1. O que você entende por retas concorrentes? Faça um desenho.
2.2. O que você entende por retas paralelas? Faça um desenho.
2.3. O que você entende por retas transversais? Faça um desenho.
Tarefa 3
3.1. A palavra ângulo me lembra ... porque ... um desenho possível ...
3.2. A palavra oposto me lembra ... porque ... um desenho possível ...
3.3. A palavra vértice me lembra ... porque ... um desenho possível ...

Fonte: elaboraçãoprópria

Embora esse tipo de atividade seja pouco usual em uma aula de matemática, podemos dizer que teve boa receptividade entre os estudantes, que se envolveram e se mantiveram engajados durante toda a realização da atividade.

Os aprendizes apresentaram algumas dúvidas em relação às questões propostas nas tarefas e, em determinados momentos, apresentaram insegurança para responder as questões: “Como assim o que me lembra?” e “mas eu não sei desenhar, o que eu coloco?”, foram alguns dos questionamentos. Outros ainda argumentaram que tinham receio em responder errado. Essas dificuldades iniciais não prejudicaram o desempenho dos estudantes. O docente procurou acalmá-

[67]Nossa proposta com a solicitação da elaboração de um desenho consiste em estimular a imaginação criativa. Ver Vigotski (2014).

los, explicando a ideia da proposta e que não havia resposta errada. Para determinadas questões, adotou uma postura argumentativa, propôs novos questionamentos com a finalidade de favorecer respostas reflexivas.

No primeiro encontro, após o término das duas primeiras atividades, o professor abriu espaço para o debate. Levantou questões como: "o que vocês acharam das atividades?", "alguém gostaria de comentar a sua resposta?" e "a realização da primeira atividade ajudou a pensar sobre as questões da segunda?". Muitos estudantes responderam, interagiram e disseram, inclusive, que era mais simples do que haviam pensado e por isso não parecia uma aula de matemática.

A implementação da terceira tarefa foi realizada na primeira parte do segundo encontro. Boa parte dos discentes conseguiu realizar a atividade com mais facilidade, poucos ainda estavam inseguros em relação à ideia de ter que responder o que sabiam acerca de algo. Novamente, após a entrega, o docente colocou algumas questões, convidando os estudantes para exporem suas impressões e ideias. Na etapa final desse encontro, foram compartilhados os aplicativos utilizados e proposta uma tarefa exploratória a fim de permitir que os participantes conhecessem algumas ferramentas do GeoGebra. Na seção a seguir, expomos os dois encontros, que apresentamos em episódios de ensino.

6.2.1 Episódio 1: metáforas em cena

No primeiro encontro, foram implementadas as tarefas 1 e 2 do Quadro 8, sendo 100 minutos com cada turma. Computando as duas turmas, estavam presentes 40 alunos[68], que trabalharam individualmente.

Do exame de todo o material recolhido (respostas escritas dos estudantes) para etapa 1.1 da primeira tarefa, identificamos a metáfora conceitual CONCORRENTE É UMA DISPUTA. Em nosso entendimento, a metáfora emerge de respostas como as de Y. O.[69]: "*concorrência, disputa, rivalidade ... exemplo barraca na feira* (...)", a de K.C.: "*duas pessoas quando competem a uma corrida ou alguma coisa*" e a de K. P.: "*concorrer a uma vaga de emprego*", todos com 13 anos de idade.

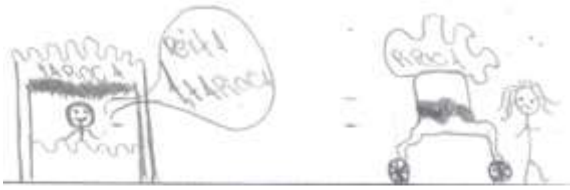
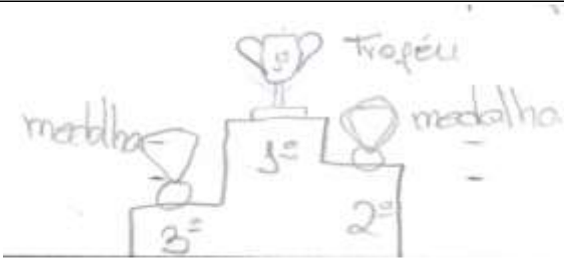
A metáfora de concorrente no sentido de disputa emerge de contextos variados como dos negócios na concorrência pelo cliente, resposta de Y. O., de competições, seja esportiva, ou a uma vaga de emprego conforme alegaram K. C. e K. P. No Quadro 11, apresentamos essas respostas e

[68] Sempre que nos referirmos ao total de alunos presentes nas implementações consideraremos a soma das turmas A e B.

[69] Os participantes da pesquisa foram alcunhados pelas siglas das letras iniciais de seus respectivos nome e sobrenome.

complementamos com dois desenhos produzidos por outros discentes para ratificar a nossa inferência.

Quadro 11 – Expressões metafóricas apresentadas pelos discentes para o conceito concorrente

<table>
<tr><th></th><th>A palavra concorrente me lembra ... porque ...</th><th>Um desenho possível ...</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Expressões Metafóricas</td><td>Y. O.: “concorrência, disputa, rivalidade ... exemplo barraca na feira”.</td><td>
Barraca de tapioca e um carrinho de pipoca (P. B., 15 anos)</td></tr>
<tr><td>K. C.: “duas pessoas quando competem a uma corrida ou alguma coisa”.</td><td rowspan="2">

Pódio de competição esportiva (C. R., 13 anos)</td></tr>
<tr><td>K. P.: “concorrer a uma vaga de emprego”.</td></tr>
<tr><td colspan="3">CONCORRENTE É UMA DISPUTA</td></tr>
</table>

Fonte: material de pesquisa

Na etapa 1.2, em relação ao conceito «paralelo/a», devido à variedade de respostas dos alunos, realizamos um mapeamento. Dos 40 alunos presentes à implementação, 30% relataram não conhecer o significado da palavra «paralelo/a». Outros 42,5% fizeram menção ao conceito geométrico de retas paralelas. Todavia, destes, boa parte se referiu a <u>linhas paralelas</u> para explicar o conceito, outros buscaram referências em objetos do cotidiano, como uma <u>faixa com listas paralelas</u> ou uma <u>grade com barras paralelas</u>.

Seis alunos, ou seja, 15%, atribuíram ao conceito as metáforas de UNIVERSO PARALELO ou UNIVERSO INVERTIDO. Em relação a este fato, é possível que a relação ocorreu em função de ser um tema presente no cotidiano dos estudantes, por intermédio de seriados, como, por exemplo, a série americana *Stranger Things*[70] que retrata, em sua trama, a possibilidade da existência de multiversos ou “universos paralelos”. Embora nem todos os discentes tenham justificado as respostas, nossa intuição tem como base a resposta da estudante R. L. de 14 anos: “*lembra universo paralelo por causa da série stranger things*”. Outras respostas foram: “conversa paralela”, <u>recuperação paralela</u> e PARALELO COMO IGUALDADE (três respostas). Nesse caso, segundo os estudantes, a relação acontece em razão da semelhança entre pessoas com algum grau de parentesco.

[70] Disponível em: https://www.netflix.com/title/80057281 .Acesso em: 24 jul. 2019.

Os alunos que atribuíram um conceito matemático específico relataram ter estudado o conteúdo retas paralelas em séries anteriores. A atribuição da metáfora "universo paralelo" parece repercutir muito mais pela presença da palavra em análise, ou seja, «paralelo/a», do que pelo seu conceito propriamente dito, já que os discentes que usaram essa metáfora não souberam explicar o porquê da escolha. Os estudantes que conceituaram paralelo como semelhança deram a ideia de proximidade. As demais respostas, como "conversa paralela" e <u>recuperação paralela</u> representam ideias circunscritas ao contexto de sala de aula. Segundo eles, "conversa paralela" é uma expressão comum usada pelos professores a fim de chamar a atenção para a discussão relacionada ao tema de estudo da aula, enquanto o termo <u>recuperação paralela</u> é atribuído ao processo avaliativo adotado pela SEEDUC/RJ em que os alunos têm direito à recuperação de cada instrumento avaliativo utilizado pelo professor ao longo do bimestre.

Destacamos aqui a dificuldade em identificar uma metáfora conceitual única, como fizemos para o conceito concorrente. Todavia, se desconsiderarmos os casos em que as respostas sugerem muito mais a presença da palavra do que uma reflexão em relação ao seu significado, como recuperação paralela, encontramos certa congruência das demais respostas com a ideia de paralelo/a.

Em relação ao conceito «transversal», a maioria dos participantes relatou desconhecer o significado da palavra. Todavia, com base em algumas respostas, foi possível identificar a metáfora TRANSVERSAL É ATRAVESSAR presente em respostas como a de E. A. de 15 anos: "*uma coisa que atravessa inteiramente* a *outra*". Alguns estudantes sugeriram "transversal como mudança", conforme podemos observar na resposta de I. A. de 14 anos: "[...] *uma pessoa que mudou seu sexo por outro*", contudo é razoável supor que as respostas tenham sido influenciadas pelo prefixo TRANS presente na palavra, o que remete a "cultura trans", daí não consideramos tais respostas como uma metáfora.

Concorrente como disputa, universo paralelo (ou invertido) ou ainda paralelo no sentido de igualdade e transversal como atravessar são as metáforas básicas que entraram em cena na composição do nosso roteiro, identificadas nesse primeiro mapeamento. Na segunda tarefa elas, moldaram novos significados na construção dos conceitos geométricos.

6.2.2 Episódio 1: um novo sentido[71]

Neste episódio, apresentamos os resultados da implementação da tarefa 2. A partir das respostas escritas dos estudantes, observamos que 42,5% conceituaram corretamente retas concorrentes. Eles responderam que retas concorrentes são retas que se cruzam (ou se encontram). Algumas respostas sugerem que os discentes conceituaram «retas concorrentes» baseados na análise reflexiva da palavra concorrente (etapa 1.1 da tarefa 1). G. N. de 13 anos, por exemplo, entende «retas concorrentes» como "*uma reta que briga pela outra* [...]".

No que se refere a etapa 2.2, "o que você entende por retas paralelas?", 47,5% dos estudantes apresentaram ideias que se aproximam da definição matemática. Fato observado por meio de respostas como a de K. P.: "*são quando 2 retas não se cruzam*" e da I. A.: "*são retas que não se cruzam que ficam uma do lado da outra*". Todos os discentes que conceituaram «concorrentes» como retas que se cruzam, usaram a negação – retas que não se cruzam – para conceituar retas paralelas.

Em relação à terceira etapa da tarefa, o que envolve «retas transversais», a maioria dos estudantes não respondeu ou relatou não saber do que se tratava, como a discente T. G. de 14 anos: "*nunca ouvi falar*". Todavia, 22,5% dos alunos alegaram se tratar de retas que se cruzam. É possível que eles tenham se apropriado da discussão levantada na atividade anterior, que permitiu a identificação da metáfora conceitual TRANSVERSAL É ATRAVESSAR, para apresentar uma definição para retas transversais, algo verificado a partir de respostas como "*linhas que se cruzam, se atravessam*" (I. F., 13 anos).

Sintetizamos no Quadro 12, as metáforas e os conceitos apresentados pelos estudantes nos episódios de ensino referentes às implementações das tarefas 1 e 2.

Quadro 12 – Resumo das ideias apresentadas pelos estudantes nos episódios 1 e 2

Conceito	**Episódio 1**	
Concorrente	DISPUTA • Entre empresas • Atletismo • Concurso	Retas que se cruzam
Paralelo/a	Presença do conceito em situações cotidianas: • Faixas paralelas • Barras paralelas UNIVERSO PARALELO IGUALDADE	Retas que não se cruzam
Transversal	ATRAVESSAR	Retas que se cruzam

[71] É importante esclarecer a diferença entre significado e sentido. Enquanto o primeiro representa uma atribuição social e historicamente construída, sua representação no mundo, o segundo refere-se às novas (e variadas) atribuições que a palavra pode receber. O significado, nas palavras de Vigotski (*apud* Góes e Cruz, 2006, p. 31) "é apenas uma pedra no edifício do sentido".

Conceitos em desenvolvimento

Fonte: elaboração própria

A proposta de uma análise reflexiva de termos e conceitos relacionados ao tema de estudo é parte da nossa metodologia de ensino e a análise das respostas dos alunos compõe um repertório no qual a finalidade foi munir o docente de argumentos e pistas no diálogo com as turmas e quando necessário no refinamento de algumas tarefas.

6.2.3 Episódio 2: outras metáforas

Este episódio, com duração de 50 minutos, faz parte do segundo encontro, no qual estavam presentes 42 alunos.

Fazendo uma retrospectiva das tarefas envolvidas no episódio anterior, podemos dizer que o objetivo era possibilitar a ressignificação por meio da construção de novos sentidos. Dessa forma, tivemos as seguintes relações: «concorrente» → «retas concorrentes», «paralelo/a» → «retas paralelas», «transversal» → «retas transversais» que se valeram da reflexão do primeiro como conectivo para análise do segundo.

Ressaltamos também que a proposta dessas duas atividades foi mais abrangente, visando à análise de objetos geométricos presentes no estudo. Especificamente a tarefa preliminar 3, que compõe a trama deste episódio, o objetivo por ser mais pontual, envolveu a produção de metáforas a partir da análise reflexiva de termos relacionados à relação matemática a ser (re)visada pelos discentes no estudo de ângulos opostos pelo vértice. Vejamos de que maneira sucedeu o desfecho.

Em relação à palavra «ângulo», 50% da turma atribuiu um significado matemático na tentativa de apresentar uma definição ou o fez por meio da exemplificação. Nossa observação deriva de respostas como as de G. N.: "*retas juntas ... o que me lembra ângulo*" e de K. C.: "*um ângulo que mede 90º*". É importante dizer que no currículo mínimo para o Ensino Fundamental da SEEDUC/RJ existe a orientação para o detalhamento no estudo de ângulos e das relações entre ângulos formados a partir de duas retas concorrentes, o que pode ter influenciado as respostas de alguns alunos. Todavia, identificamos três metáforas: 1. ÂNGULO COMO PERSPECTIVA, o que representa 17,5% das respostas. 2. ÂNGULO COMO UM LUGAR, com 25%. 3. ÂNGULO COMO TRAJETÓRIA, com apenas 5% dos participantes.

A primeira metáfora é oriunda de respostas que enfatizam as várias maneiras de se fotografar. A Figura 21 - resposta da estudante C. A -, ratifica nossa conjectura.

Figura 21 – Resposta da estudante C.A.[72] para questão 1 da Tarefa Preliminar 3
Fonte: material de pesquisa

A segunda apresenta como referência lugares nos quais é possível identificar a presença de um ângulo, como no encontro das traves e travessão de uma baliza de futebol, as arestas formadas por duas paredes ou na divisão de uma pizza em fatias, por exemplo, e evidenciadas nas respostas de G. D. de 12 anos (Figura 22).

Figura 22 – Resposta do estudante G.D.[73] para a questão 1 da Tarefa Preliminar 3
Fonte: material de pesquisa

À terceira, os discentes se referiram a trajetória de um objeto sendo lançado, por exemplo, uma bola arremessada em direção à cesta de basquete, conforme sugere a resposta de estudante Y. S. de 13 anos na Figura 23.

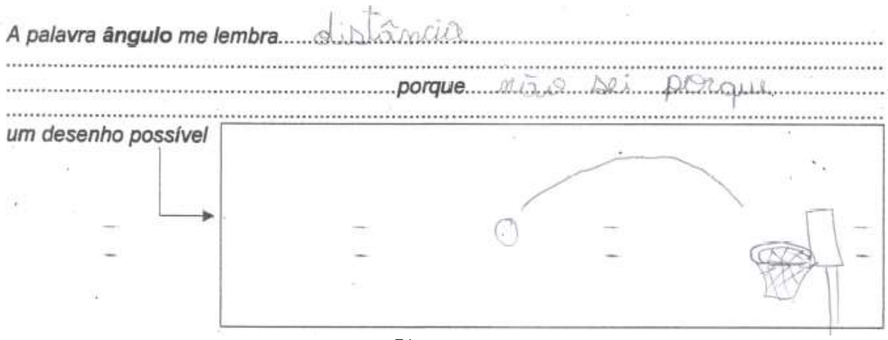


Figura 23 – Resposta do estudante Y.S.[74] para questão a 1 da Tarefa Preliminar 3
Fonte: material de pesquisa

[72]Transcrição: “quando alguém vai tirar uma foto e fala “vê um ângulo bom aí! ” ... sim”.
[73]Transcrição: “lugar entre a trave e o travessão de um gol ... assisto muito futebol”.
[74] Transcrição: “distância ... não sei porque [sic]”.

Para o conceito «oposto», 22,5% dos estudantes usaram a propriedade relacionada a retas concorrentes, ângulos opostos pelo vértice, na tentativa de atribuírem um sentido à palavra. Outrossim, 45% dos discentes atribuíram um sentido a partir da ideia de oposição, como, por exemplo, em: verdadeiro-falso, branco-preto, sol-chuva, sentidos opostos, entre outros. As respostas de M. L. de 13 anos: "*ângulos opostos pelo vértice ... estudamos muito isso*", G. D.: "*dois trens indo para lados contrários ... presto atenção no trânsito*" e R. J. de 14 anos: "*é o contrário de alguma coisa ... oposto de branco é preto*" comprovam nossas observações.

Não identificamos o uso de metáforas nessa etapa. Dos dois blocos de respostas, o primeiro usou a presença da palavra oposto em um conteúdo já conhecido na tentativa de conceituá-la. É possível que o contexto (aula de matemática) tenha influenciado. O segundo bloco, embora com respostas variadas, conceituou oposto como algo que está colocado no sentido contrário ou inverso ou que tem contraste, o que se aproxima da definição da palavra.

Em relação à palavra «vértice», 60% dos sujeitos apresentaram respostas que se aproximam aproximaram da definição matemática ou se referiram a objetos matemáticos, como figuras planas e poliedros, ou a relação entre retas para justificar a presença de um vértice, de acordo com as respostas de B. S. de 15 anos: "*junção de dois lados de um polígono*" e de A. B. de 13 anos: "*o canto das linhas ... quando fazemos o desenho geométrico surge o encontro*".

Outros 10%, assim como em «ângulo», também compararam vértice a um lugar, o que nos permite a identificação da metáfora VÉRTICE COMO UM LUGAR, tendo sido usada tal definição pelos estudantes para justificar as respostas para o encontro entre duas paredes, o cruzamento entre duas ruas, como verificamos nas respostas de G. D.: "*o canto de uma parede ... porque é o ponto onde as paredes se juntam*" e de D. R. de 14 anos: "*canto como uma esquina*".

Até aqui mostramos como certas respostas apresentadas pelos discentes representam metáforas que estruturam os diferentes conceitos. A etapa final do segundo encontro foi reservada para o compartilhamento e apresentação do aplicativo GeoGebra.

6.2.4 Episódio 2: compartilhamento e ambientação

A atividade durou 50 minutos e objetivou o compartilhamento[75] dos aplicativos com os estudantes – o GeoGebra para realização das tarefas e o *AZ Screen Recorder* para coleta dos dados – e a ambientação, uma atividade exploratória, a fim de apresentação do GeoGebra aos estudantes.

[75] Existem aplicativos que permitem o compartilhamento, via *bluetooth*, de outros aplicativos, inclusive dele próprio. Dessa forma, o professor pôde disponibilizar os aplicativos com os alunos sem a necessidade de conexão com a Internet. Para esta atividade utilizamos o *MyAppSharer*.
Disponível em: https://myappsharer.br.uptodown.com/android. Último acesso em: 07 fev. 2021.

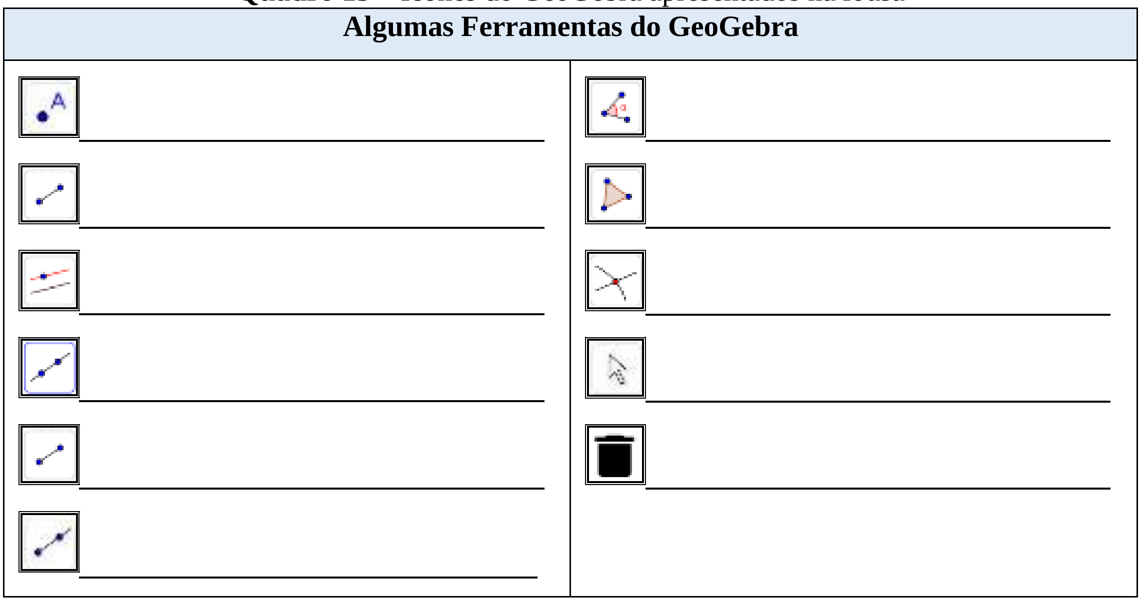
Como os discentes eram incipientes no que diz respeito ao manuseio e uso desses aplicativos, a etapa também visou amenizar possíveis dificuldades de cunho operacional.

A instalação de aplicativos, em um equipamento de uso pessoal do estudante, ocorreu como forma de convite. Em relação ao GeoGebra, todos os alunos que dispunham de um *smartphone* sentiram-se instigados com a proposta e aceitaram o convite. Contudo, apenas poucos alunos quiseram instalar o *AZ Screen Recorder* relatando problemas diversos, ou seja, não queriam ser gravados ou que os dispositivos deles não dispunham de memória suficiente para instalar os dois aplicativos.

Para a etapa de compartilhamento, sugerimos, no primeiro encontro, que os estudantes realizassem o *download* dos aplicativos tencionando facilitar a tarefa em sala de aula, o que fez com que alguns discentes chegassem à aula o GeoGebra instalado nos *smartphones* deles.

Em relação à ambientação, a atividade visou a exploração de certas ferramentas do GeoGebra, como a construção de retas e ângulos, a fim de familiarizar os aprendizes com algumas particularidades do aplicativo. Para essa finalidade, inspirados na <u>folha de ícones</u> de acordo com Assis (2016, 2020), o docente colocou alguns ícones na lousa (conforme Quadro 13) e solicitou que os educandos nomeassem as ferramentas e realizassem, pelo menos, uma construção. Priorizamos a exploração de ícones atreladas à "Tarefa 1: ângulos entre retas concorrentes" (ver Apêndice 2) e aproveitamos para explicar a forma peculiar da utilização da ferramenta "retas paralelas".

Quadro 13 – Ícones do GeoGebra apresentados na lousa



Fonte: elaboração própria

No que se refere à participação dos estudantes, é importante ressaltar que eles mantiveram interesse e empenho durante toda atividade, fazendo construções variadas e identificando elementos que não foram solicitados pelo professor, como, por exemplo, alteração da cor e o formato de pontos, segmentos e retas.

6.3 Episódio 3: Ângulos Entre Retas Concorrentes

Examinamos, neste episódio, as interações de duas duplas de discentes durante a implementação da “tarefa 1: ângulos entre retas”. Para tanto, a atividade durou duas aulas de 50 minutos e objetivou explorar as relações matemáticas entre os pares de ângulos formados a partir de duas retas concorrentes por meio da construção e manipulação no aplicativo GeoGebra.

Em nossas análises, evidenciamos as respostas escritas dos estudantes e a gravação de vídeo e áudio com duração de 40min58s, obtidas a partir das manipulações de I. M. e M. V., ambos com 13 anos (turma A) e dois trechos das capturas da tela dos *smartphones* utilizados pelas estudantes A. B. de 13 anos e I. S. de 15 anos (turma B). Em relação aos vídeos gerados na captura de tela, os dispositivos utilizados pela dupla - cedidos pelo professor -, apresentaram problema na capacidade de armazenamento de dados, fato que resultou em vídeos curtos, com 28min23s e 8min24s. Reiteramos que a escolha das duplas para a participação nas gravações foi arbitrária, afinal, havíamos realizado o convite.

Inicialmente, analisamos aspectos gerais das turmas, nas quais participaram 48 estudantes; na sequência, destacamos a atuação dos nossos atores. Os aprendizes mantiveram o interesse apresentado nas atividades anteriores, porém nesta etapa houve dificuldade no entendimento da tarefa. Vale sinalizar que, embora tenha ocorrido um momento de ambientação, a falta de familiaridade com o aplicativo constituiu-se em um obstáculo durante parte da atividade.

Em busca de estratégias para amenizar as dificuldades apresentadas, o professor realizou a leitura de cada etapa da tarefa com os discentes, salientou alguns pormenores como atenção às dicas, com os ícones para construção, propôs questionamentos relacionados às atividades que envolveram a análise de «concorrente» e «retas concorrentes», evidenciando, inclusive, algumas respostas dos discentes. Por fim, explicou o funcionamento de algumas ferramentas do GeoGebra que exigem um conjunto de procedimentos para o uso adequado, como por exemplo, a construção de um ângulo que pode ser realizado das seguintes maneiras:

1. Tocar nas duas retas (semirretas ou segmentos) que formarão o ângulo.
2. Tocar em três pontos em sentido horário[76].

[76]Após a escrita da descrição deste procedimento observamos que a atualização do GeoGebra - versão Geometria 6.0.600.0 (aplicativo, *desktop* e *on-line*) -, mudou essa lógica, podendo realizar a construção tanto no sentido horário, quanto no anti-horário. Mantivemos a descrição, pois refere-se à versão 5.0.485.0, que utilizamos em nossas implementações, todavia ressaltamos a importância de explicar para qual versão do aplicativo a tarefa foi pensada e elaborada.

Na Figura 24, o ângulo α pode ser obtido tocando nas retas AB e CD ou nos pontos DEB (nesta ordem). Em relação ao procedimento 1, ele só é possível para a construção de um ângulo. Desta forma, caso quiséssemos construir o ângulo oposto pelo vértice seria necessário recorrer ao método 2, ou seja, selecionando os pontos CEA.

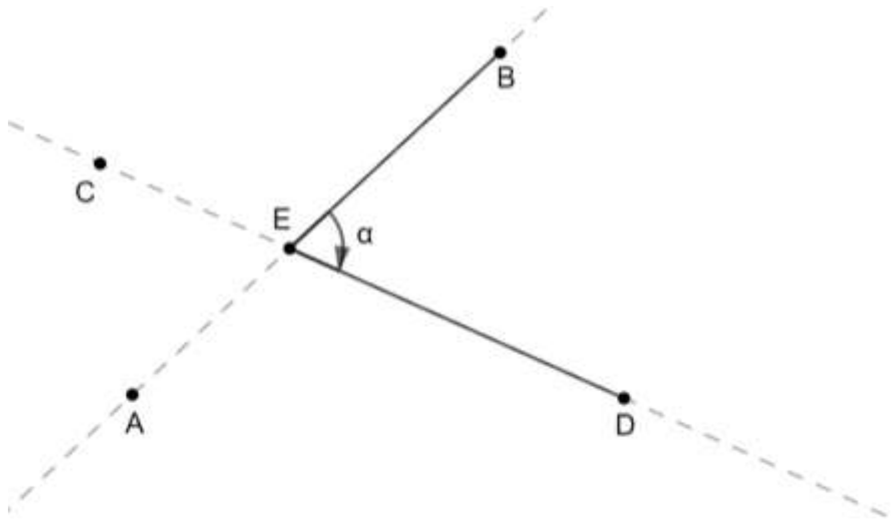
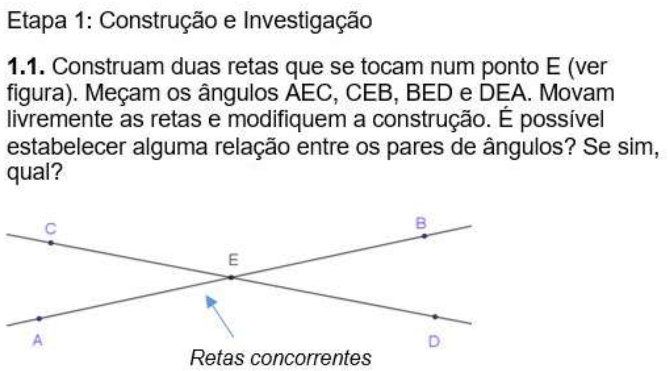


Figura 24 – Construção de ângulo com GeoGebra Geometria – versão 5.0.485.0
Fonte: elaboração dos autores

A primeira etapa da tarefa visou à construção de duas retas concorrentes, ângulos adjacentes e ângulos opostos pelo vértice, como mostra a Figura 25.


Etapa 1: Construção e Investigação

1.1. Construam duas retas que se tocam num ponto E (ver figura). Meçam os ângulos AEC, CEB, BED e DEA. Movam livremente as retas e modifiquem a construção. É possível estabelecer alguma relação entre os pares de ângulos? Se sim, qual?

Figura 25 – Etapa 1.1 da Tarefa 1
Fonte: material de pesquisa

Começamos com a análise do desenvolvimento de I. M. e M. V. durante a realização da atividade. Os estudantes realizaram a tarefa por meio de um *tablet*, disponibilizado por I. M. que já havia instalado o GeoGebra. Vale um comentário aqui. Ainda que nossas lentes estivessem voltadas para o GeoGebra na versão geometria para *smartphones* e embora o estudo tenha sido realizado em sala de aula, tornou-se impartível às questões inerentes às relações que ocorrem naqueles espaços. Dessa forma, trazemos para nossas análises os dados da implementação em que a dupla utilizou esse dispositivo em virtude dos convites democráticos e aceites naturais que envolvem uma pesquisa de desenvolvimento.

Para a etapa 1.1 (Figura 25), os discentes, que optaram por realizar os registros em folhas separadas, apresentaram as seguintes respostas: "*a medida é a mesma*" (I. M.) e "*os ângulos são sempre iguais*" (M. V.). As respostas são objetivas, e ambas trazem a ideia de congruência entre os ângulos opostos pelo vértice, porém incompletas, pois deixam de considerar a relação entre ângulos adjacentes.

Recorremos ao vídeo para mapear o caminho percorrido pelos discentes. Observamos que inicialmente houve uma negociação entre a dupla em relação à seleção das ferramentas para a construção do objeto geométrico, mas o diálogo não avançou em direção à investigação acerca das relações entre os ângulos, além da dependência do professor, aguardando novas orientações, o que consideramos natural dado o caráter inovador do experimento.

Essa dependência foi a postura inicial da turma A e vale uma análise mais global. Ao perceber a dificuldade o docente pediu aos discentes que comentassem acerca das construções, que tinham observado, se haviam identificado alguma relação matemática etc. Outros estudantes, que não foram filmados, falaram a respeito da igualdade entre os ângulos opostos pelo vértice, o que pode ter influenciado as respostas dos nossos atores. Na continuação, a dupla solicitou a presença do professor, com intuito de obter mais informações em relação à questão. Vejamos o diálogo estabelecido:

> Professor: os opostos continuam valendo o quê? São o quê? [00:13:53]
> I. M.: aqui dá oitenta e aqui dá oitenta. [00:13:58]
> Professor: isso ..., cem, cem, oitenta, oitenta. [00:14:00]
> Professor: o somatório desses dois aqui dá quanto? [00:14:03]
> I. M.: somatório? [00:14:04]
> Professor: é! Oitenta com cem. [00:14:06]
> I. M.: cento e oitenta! [00:14:08]

A partir do excerto, inferimos que o docente dá algumas pistas a fim de que os estudantes confirmassem a congruência entre os ângulos opostos e refletissem acerca da relação matemática entre os ângulos adjacentes. Na sequência, há um trecho inaudível, da conversa dos alunos, todavia eles não avançaram. Não exploram a dinamicidade do AGD para um exame da construção, o que poderia ter gerado novas figuras e novos *insights*, inclusive com uma análise visual do objeto geométrico, os ângulos adjacentes, que facilitaria a identificação de um ângulo raso.

Embora a análise não tenha evidenciado resultados em termos de construção e do desenvolvimento conceitual, observamos uma forma peculiar de manipulação, restrita ao domínio construtivo. Durante a construção do objeto geométrico os estudantes se articularam em um movimento síncrono e compartilharam toques em tela, como mostra a Figura 26, o que envolveu negociações, diálogo e reflexão acerca da escolha da ferramenta.

Figura 26 – Construção compartilhada no GeoGebra entre os alunos I. M. e M. V. – Tarefa 1: 13min24s
Fonte: material de pesquisa

A fim de buscar novos indícios, apresentamos a etapa 2.1 da tarefa (Figura 27) que envolve a análise e reflexão em decorrência das manipulações realizadas na etapa anterior.

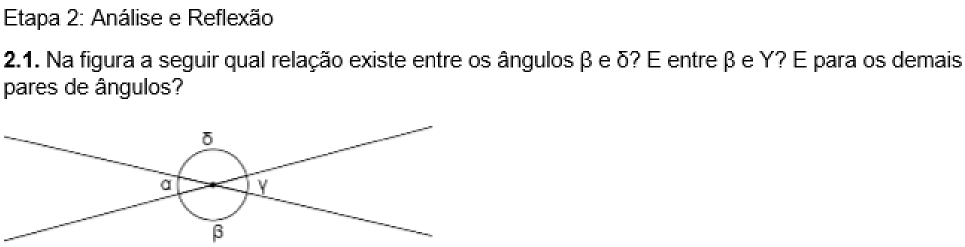


Figura 27 – Etapa 2.1 da Tarefa 1
Fonte: material de pesquisa

Na etapa 2.1 os estudantes apresentaram dificuldade quanto ao entendimento da nomenclatura dos ângulos. O docente explicou que se tratava de uma representação e fez um desenho na lousa utilizando, desta vez, números para representar os ângulos e sublinhou que a análise das relações entre os pares de ângulos era o que estava em jogo.

I.M. e M. V. iniciaram a análise a partir da construção que haviam realizado para a etapa anterior, moveram as retas, gerando novos valores para os ângulos. Nesse momento o professor propõe à dupla uma análise aritmética dos valores que eles estavam observando no construto e M. V. afirma "*vai dá*[sic] *sempre cento e oitenta*!", confirmando que ângulos adjacentes somam dois retos e inicia sua a resposta na folha de atividades. Todavia, os discentes apresentaram insegurança e I. M. perguntou o que deveria ser escrito na folha. O docente responde: "coloca o que você está vendo!", na tentativa de não influenciar a resposta. A dupla apresentou as seguintes proposições:

“*são iguais, a soma dos* α*, δ, Y, β são* [sic] *180*” (I. M.) e “*eles são angulo* [sic] *opostos, a soma do adjacentes* são [sic] 180” (M. V.).

As respostas mostram-se objetivas e incompletas, mas com indícios de que se referem à igualdade entre os ângulos opostos e que os adjacentes são suplementares. Todavia devemos considerar a falta de hábito dos estudantes na realização de tarefas com esse *design* (construção, análise, diálogo, reflexão e escrita) e no trabalho colaborativo, que também foi desenvolvido no decorrer das atividades.

Na etapa seguinte, apresentamos algumas definições e inserimos, de maneira sutil e sem o uso excessivo de terminologias, nomenclaturas de entes matemáticos relacionados ao tema ângulos e retas, como mostra a Figura 28, com o objetivo de enfatizar mais as propriedades. Seguindo, esse raciocínio foi possível nomear tipos de retas e de ângulos.

2.2. Dois ângulos são **suplementares** quando a soma de suas medidas é igual a 180º. Nesse caso, cada ângulo é suplemento do outro. Em relação à classificação um ângulo pode ser: **agudo** (< 90º), **reto** (= 90º), **obtuso** (> 90º e < 180º) e **raso** (= 180º). Com base nessas informações, analisem as sentenças abaixo:

a) Dois ângulos *adjacentes* e suplementares formam um ângulo *raso*.
b) O suplemento de um *ângulo reto* sempre será um ângulo reto.
c) Dois *ângulos agudos* podem ser suplementares.
d) O suplemento de um ângulo raso é um ângulo nulo.
e) Dois *ângulos obtusos* podem ser suplementares

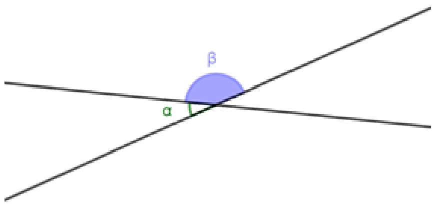
Quais são verdadeiras? Quais são falsas e por quê?

Figura 28 – Etapa 2.2 da Tarefa 1
Fonte: material de pesquisa

A dupla analisada recorreu, em alguns momentos, à construção realizada no GeoGebra para responder as questões, porém mesmo com a apresentação da definição de ângulos suplementares na tarefa, I. M. parece não ter lido o enunciado e pergunta: “*suplemento é tipo o quê mesmo*?” e M. V. responde: “*é ... é* [trecho inaudível] *dois de noventa*”, referindo-se a dois ângulos retos. Algumas respostas dos estudantes divergiram. M. V. justificou cada item enquanto I. M. apenas sinalizou aqueles que julgava correto ou errado.

Na etapa 2.3, conforme Figura 29, propusemos a análise de casos particulares de bissetrizes de ângulos suplementares a fim de conduzir para elaboração de uma conjectura a respeito do caso geral, por intermédio de uma construção no GeoGebra, como sugerido no item **d**.

2.3. Observe a figura abaixo.



a. Quanto mede a soma dos ângulos α e β?
b. Esses dois ângulos, juntos, formam um ângulo: ....
c. Uma **bissetriz** é uma reta que divide um ângulo ao meio. Dessa forma, se a medida do ângulo α é 30º, quanto mede o ângulo formado pelas *bissetrizes* dos ângulos α e β? E se α medisse 40º? Ou 70º?
d. No GeoGebra, façam a construção e estabeleçam uma conjectura.

Dica: Utilizem a ferramenta

Figura 29 – Etapa 2. 3 da Tarefa 1
Fonte: material de pesquisa

A análise desta etapa mostra que os toques ainda estavam no âmbito construtivo, com pouca interação na apreciação do objeto e na formulação de conjecturas. Há uma incompletude entre as ações (construção_análise_diálogo_reflexão_escrita) que observamos nos vários momentos de longas pausas entre as manipulações e os diálogos. Todavia, o exame dos toques e o acompanhamento do desenvolvimento da escrita dos estudantes nos permitiu identificar algumas dificuldades. Por exemplo, embora a dupla tenha sinalizado em vários outros registros o entendimento da relação entre ângulos suplementares, no item **c** da etapa 2.3 (Figura 29), enquanto I. M. não justificou, M. V. apresentou as seguintes respostas: 140º e 40º (para α = 40º) e 70º e 110º (para α = 70º). Isso sugere uma dificuldade de entendimento da questão na qual a relação entre as somas das bissetrizes entre os ângulos α e β parece ter sido confundida com o suplemento do ângulo dado.

A última etapa da tarefa, que não está registrada no vídeo, visou à análise das duas relações estudadas por meio de uma questão (Figura 30).

2.4. Os *segmentos* da figura a seguir destacam ângulos opostos pelo vértice e ângulos suplementares. Identifiquem os ângulos suplementares e em seguida determinem as medidas dos ângulos *β*, φ e δ.

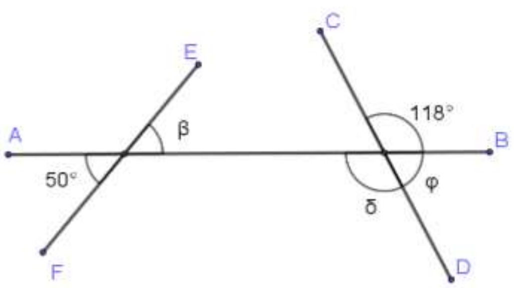


Figura 30 – Etapa 2. 4 da Tarefa 1
Fonte: material de pesquisa

Não sabemos de que maneira houve a interação da dupla nesta etapa. I. M. não fez a questão e M. V. respondeu corretamente $\beta = 50°$, $\varphi = 62°$ e $\delta = 118°$.

Na empreitada de investigar o modo pelo qual ocorre o processo de construção e desenvolvimento conceitual, articulamos à discussão as interações das discentes A. B. e I. S., as quais os registros são capturas de telas e as escritas.

Na etapa 1.1 da tarefa, A.B. e I. S., que optaram por responder em folha única, escreveram "*angulos* [sic] *iguais*", não analisaram as etapas 2.1 e 2.2 e na etapa 2.3 há somente as respostas dos itens **a** "180", referindo-se à soma dos ângulos α e β, e **b** "suplementares". A análise apenas das respostas escritas não nos permite avançar na compreensão dos raciocínios matemáticos das discentes. Dessa forma, revisitamos essas respostas tendo como lente a telagravação.

Não conseguimos mapear as etapas 1.1 e 2.1, haja vista que o vídeo já inicia com as negociações das discentes na realização da etapa 2.2[77] e com a construção de um objeto geométrico que envolve retas concorrentes e ângulos opostos pelo vértice, conforme a Figura 31 do *printscreen* extraídos aos 3min27s do vídeo.

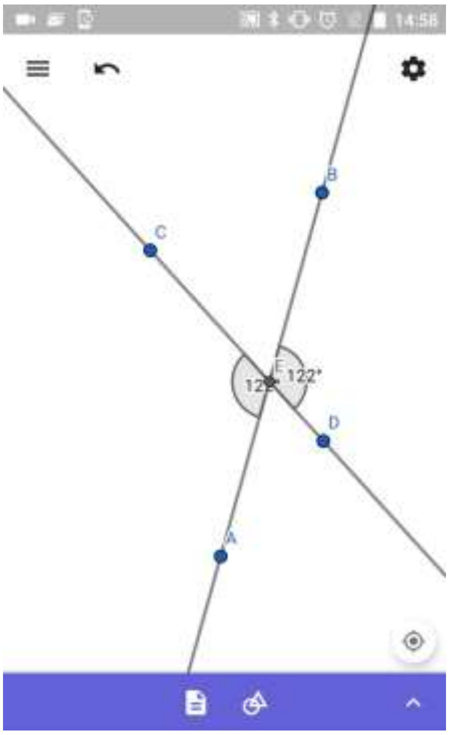


Figura 31 – Printscreen do vídeo gerado a partir da construção realizada por A. B. e I. S. para etapa 2.2 da Tarefa 1
Fonte: material de pesquisa

Aqui também as manipulações da dupla ficam circunscritas ao domínio construtivo. As alunas apresentaram dificuldades em relação ao manuseio do aplicativo, mas não solicitaram a presença do professor. Tentaram realizar uma nova construção, mas a falta de acompanhamento

[77]O aparelho ou o aplicativo podem ter apresentado algum problema ou ainda as discentes não iniciaram a gravação no começo da atividade.

parece ter desmotivado as discentes na continuidade das demais etapas. No entanto, é possível que o manuseio do construto tenha influenciado a resposta para o item 1.1 “*angulos* [sic] *iguais*”, como sugere a construção.

As estudantes realizaram uma construção para análise completa, como mostra a Figura 32 do *printscreen* extraído 4min13s do vídeo.

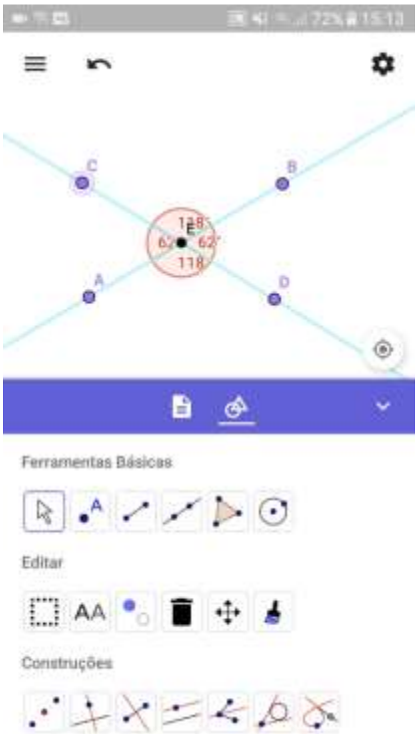


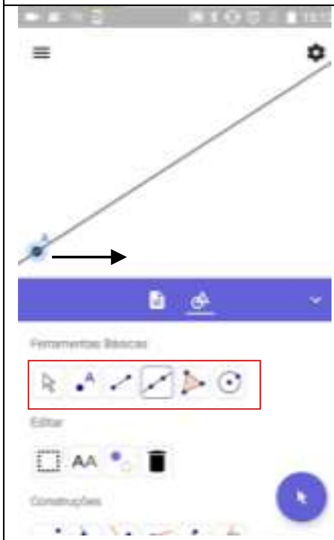
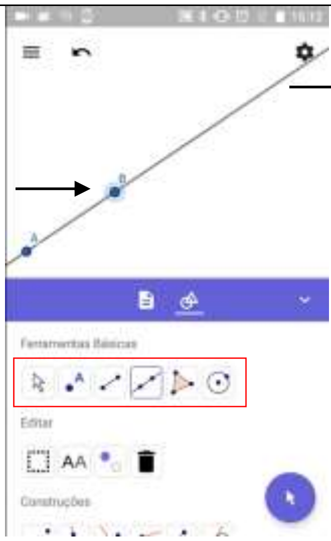
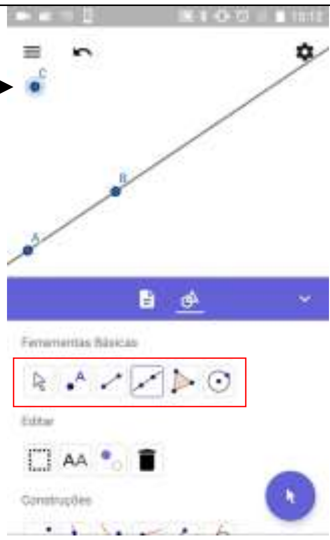
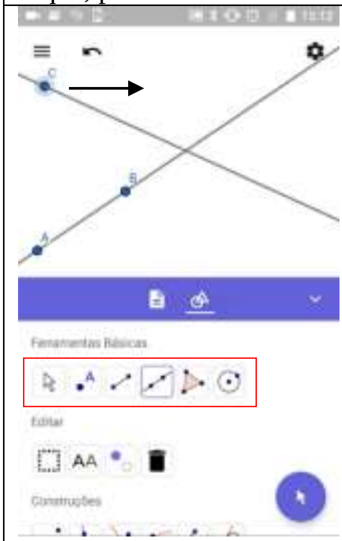
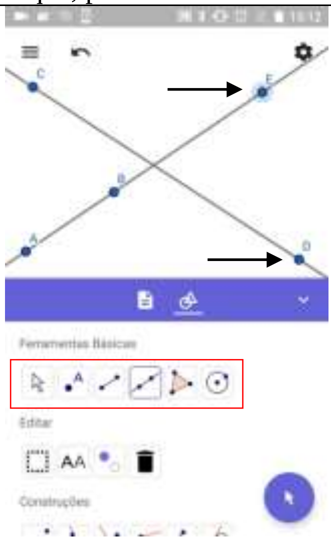
Figura 32 – *Printscreen* do vídeo gerado a partir das interações de A. B. e I. S. durante a realização da etapa 2.2 da Tarefa 1
Fonte: material de pesquisa

O conjunto (captura da tela e tarefa escrita) não permitiu uma análise em pormenores de toda a realização da tarefa, devido ao problema relatado na geração dos vídeos. Todavia, de maneira geral, foi possível constatar que a dificuldade enfrentada pelas discentes, no que tange à realização das construções, repercutiu parcialmente na tarefa escrita, pois as educandas responderam apenas os itens **a.** e **b.** da etapa 2.3. Por conseguinte, dá indícios de que houve momentos de interações a partir da análise dos construtos, pois as respostas mostraram-se corretas.

Nossas análises ainda não nos deram evidências suficientes para compreender como ocorre a construção e o desenvolvimento conceitual por meio de um AGD em DMcTT e carece de novas investigações. No entanto, o mapeamento dos toques das discentes reforça a necessidade de um momento de ambientação, segundo indicam os estudos de Bairral, Assis e Silva (2015), Assis (2016) e Henrique (2017), por exemplo.

A maneira pela qual as discentes realizaram as construções, ratifica nossa hipótese de que essa ação, assim como o movimento dos olhos em interfaces digitais, segue o sentido da leitura, no nosso caso, da esquerda para direita, conforme Quadro 14.

Quadro 14 – Registros das estudantes A.B. e I.M. com a ordem dos toques na tela no processo de construção

Sentido dos toques, instante e descrição		
		
17:23 – Ferramenta **reta** selecionada. Primeiro toque, ponto A.	17:26 – Ferramenta **reta** selecionada. Segundo toque, ponto B.	17:27 – Ferramenta **reta** selecionada. Terceiro toque, ponto C.
		
17:29 – Ferramenta **reta** selecionada. Encaminhamento para o quarto toque.	17:30 – Ferramenta **reta** selecionada. Quarto e quinto toques, ponto D e E, respectivamente.	

Fonte: elaboração própria

O protocolo de construção do GeoGebra mostra a ordem dos objetos, mas não o sentido (orientação). Ainda não sabemos o efeito dessa ação em relação à percepção visual dos sujeitos, entretanto, essa constatação reforça a importância de se pensar na configuração da tarefa considerando o aplicativo e o tipo de dispositivo. Além do mais, acreditamos que a singularidade de manuseio, atrelada à forma peculiar de algumas ferramentas do GeoGebra, comprova que o aplicativo, principalmente as versões para DMcTT, não é intuitivo e, portanto, se faz necessário um momento de ambientação, com atividades direcionadas para o conhecimento das ferramentas que serão utilizadas.

Direcionando nossa atenção a um contexto macro, visando à implementação como um todo, enquanto algumas duplas tiveram mais dificuldades em relação ao manuseio do aplicativo, como sinalizamos nos nossos atores, outras duplas conseguiram realizar as etapas sem tantos entraves e nesses casos, à medida que o professor observou o desenvolvimento da atividade, deu mais autonomia para os estudantes, incentivando-os e instigando-os com novos questionamentos.

Ao final, o professor propôs um debate para que os estudantes pudessem relatar as descobertas e relacionar as metáforas utilizadas por eles nas tarefas preliminares com o conceito matemático. Nesse sentido, e para sintetizar os conceitos produzidos, o docente solicitou que cada aluno apresentasse um pequeno relatório[78]. Essa tarefa foi uma proposta complementar e apenas parte das turmas realizou a atividade. Apresentamos os relatórios de I. M. (Figura 33) e M. V. (Figura 34), vejamos:

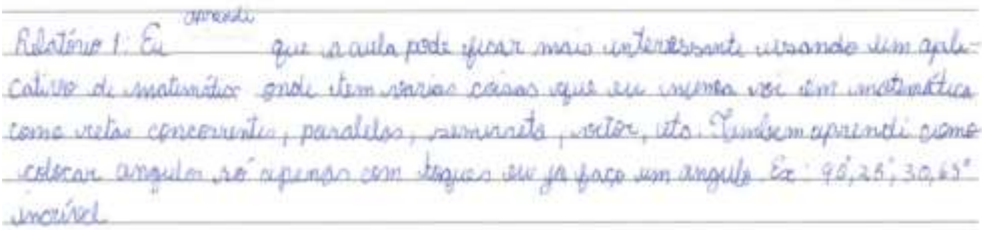

Relatório 1: Eu aprendi que a aula pode ficar mais interessante usando um aplicativo de matemática onde tem varias coisas que eu nunca vi em matemática como retas concorrentes, paralelas, semirreta, vetor, etc. Também aprendi como colocar angulos só apenas com toques eu ja faço um angulo Ex: 90, 25, 30, 65° incrível

Figura 33 – Texto[79] produzido pelo estudante I. M.
Fonte: material de pesquisa

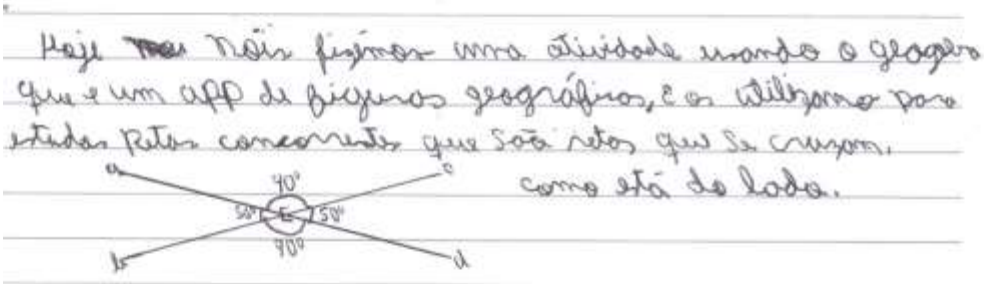

Hoje nóis fizemos uma atividade usando o geogebra que e um app de figuras geográficos, e os utilizamo para estudar Retas concorrentes que são retas que se cruzam. como está do lado.

Figura 34 – Texto[80] produzido pelo estudante M. V.
Fonte: material de pesquisa

[78] O relatório consiste na elaboração de um pequeno texto dissertativo, no qual o objetivo é uma ação reflexiva, por parte dos discentes, apresentando os resultados e conclusões acerca das atividades, além de servir como um instrumento avaliativo para o professor. Para maiores detalhes, ver Ponte, Brocardo e Oliveira (2006).

[79]Transcrição: “Relatório 1: Eu aprendi que a aula pode ficar mais interessante usando um aplicativo de matemática onde tem varias [sic] coisas que eu nunca vi em matemática como retas concorrentes, paralela, semirreta, vetor, etc. Também aprendi como colocar angulos [sic] só apenas com toques eu já faço um angulo. Ex: 90º, 25º, 30, 65º incrível”.

[80]Transcrição: “Hoje nois [sic] fizemos uma atividade usando o geogebra que e app de figuras geográficos, e o utilizamo [sic] para estudar Retas concorrentes que são retas que se cruzam, como está do lado.”.

Os relatórios indicam observações distintas. I. M. enfatizou a nova possibilidade de aprendizado matemático e descobertas relacionadas ao aplicativo, destacou conceitos atrelados às ferramentas do aplicativo, como semirreta e vetor, e o procedimento de construção de ângulos. O relatório de M. V. aponta o estudo de retas concorrentes, "*são retas que se cruzam*", e sugere a identificação da congruência em ângulos opostos pelo vértice, como registrado no desenho apresentado pelo discente. A análise do relatório do estudante evidencia um problema conceitual no desenho, por apresentar ângulos opostos pelo vértice e a relação de congruência, mas não atenta para os ângulos adjacentes (50º e 90º) no qual a soma não resulta em dois ângulos retos.

Dado o que já destacamos em relação à compreensão do discente para o desenvolvimento da relação entre ângulos adjacentes, esse fato pode ter sido um descuido em querer dar maior ênfase para a relação entre os ângulos opostos pelo vértice, o que, por outro lado, é um indicativo da compreensão de M.V. a respeito dessa relação.

De modo geral, todos os relatórios seguiram as linhas: a motivação promovida pela possibilidade de uso do AGD em DMcTT na abordagem de conceitos matemáticos e descobertas de cunho técnico, relacionadas à atividade e ao aplicativo.

6.4 Episódio 4: Metáforas Como Epílogo

Neste episódio, analisamos as respostas escritas dos estudantes das turmas A e B na realização da quarta tarefa preliminar, que objetivou a análise dos termos «alterno(s)», «colateral(is)» e «correspondente(s)», referentes à posição de ângulos no estudo de retas paralelas cortadas por uma transversal.

A proposta, que contou com a participação de 48 alunos, e teve a duração de uma aula de 50 minutos, está descrita no Quadro 15 a seguir.

Quadro 15 – Tarefa preliminar 4

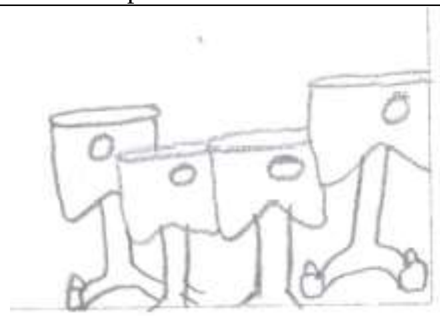
4.1. O que você entende por alterno(s)? Faça um desenho.
4.2. O que você entende por colateral(is)? Faça um desenho.
4.3. O que você entende por correspondente(s)? Faça um desenho.

Fonte: elaboração própria

Esclarecemos que a escolha por apresentar os termos com a possibilidade de evidenciar tanto o singular quanto o plural consistiu em ampliar o máximo possível as ideias que pudessem emergir a partir dos questionamentos. Entretanto, na apresentação das metáforas que identificamos, utilizamos o termo no singular, o que não afeta o trabalho de inferência.

De modo geral, sintetizamos as metáforas com maior incidência. Em relação ao primeiro conceito «alterno(s)», a metáfora com maior frequência foi ALTERNO COMO MUDANÇA, presente em 31,25% das respostas. Identificamos ainda que 37,5% das respostas sugerem alterno como alternativa e os demais alunos, o que representa 31,25%, não responderam ou apresentaram respostas variadas nas quais não conseguimos identificar a presença de uma expressão metafórica. No Quadro 16 a seguir, apresentamos algumas respostas e desenhos dos estudantes.

Quadro 16 – Expressões metafóricas apresentadas pelos discentes para o conceito alterno

<table>
<tr><th></th><th>O que você entende por alterno (s)?</th><th>Faça um desenho.</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Expressões Metafóricas</td><td>“Alterno são coisas que fazemos com duas partes do corpo, tipo musculação” (K. B., 15 anos).</td><td>
Uma pessoa com dois halteres</td></tr>
<tr><td>“Eu entendo que alternos [sic]é tipo alternar [sic], como os pistões de um motor” (E. A., 14 anos).</td><td>
Pi
stões de motor</td></tr>
<tr><td colspan="3">ALTERNO COMO MUDANÇA</td></tr>
</table>

Fonte: elaboração própria

A metáfora ALTERNO COMO MUDANÇA, consiste de respostas relacionadas a objetos que alternam, provocando algum tipo de mudança, por exemplo, em uma atividade física na qual o uso do aparelho haltere (demonstrado no desenho elaborado pelo estudante K. B.) que, entre outras possibilidades, pode ser utilizado de maneira alternada ou os pistões de um motor, que além de alternar provoca mudança. No caso de “alterno como alternativa” fruto da resposta de M. M. de 14 anos: “*algo alternativo*: *várias perguntas ‘alternativas’*” em que a ideia é apresentada como alternativa (opções), do mesmo modo que em uma prova de múltipla escolha. É provável que os estudantes tenham escolhido tal resposta em função da palavra alternativas que consiste em um sinônimo de alterno.

No que se refere ao conceito «colateral(is)», boa parte dos estudantes (64,58%) nos permite inferir a metáfora COLATERAL COMO CONSEQUÊNCIA. Esse percentual de alunos apresentou respostas que relacionavam expressões do tipo: “efeitos colaterais” provocados como consequência da ingestão de um alimento ou reação causada por uso de um medicamento, ou “danos colaterais” para casos decorrentes de um acidente de trânsito ou consequência de uma ação, conforme explicado por C. A.: “*eu lembro de efeito colateral. Quando você faz algo e tem algo que acontece como consequência*”.

Uma pequena parcela dos alunos (10,42%) apresentou respostas indicando colateral como algo do mesmo lado, segundo A. L. de 13 anos: “*algo na lateral*” o que, com certo grau de abstração, nos permite a metáfora COLATERAL COMO ALINHAMENTO e 25% dos discentes propuseram respostas variadas ou não fizeram o solicitado. Provavelmente a elaboração dessas metáforas tenha sido influenciada pela presença do termo.

Para o conceito de «correspondente(s)», 58,33% dos alunos atrelaram-o à ideia de relação mútua, opinião sugerida por vários alunos, a ideia de “amor correspondido” ou “completude entre coisas”, tal qual peças que se encaixam perfeitamente, como relatam M. V. “[...] *coisas que se entendem o* [sic] *encaixam*” e C. A. “*quando alguém corresponde algo. Amor correspondido*” o que nos permite inferir a metáfora CORRESPONDENTE COMO UMA RELAÇÃO BIUNÍVOCA.

Outros 14,58%, associaram ao conceito a Empresa de Correios e Telégrafos, relacionando correspondente à palavra correspondência, como descrito por J. C. de 13 anos: “*é correspondência de pessoas ... correios*” o que sugere CORRESPONDENTE COMO MENSAGEM e, por fim, 27,08% não apresentaram respostas possíveis de identificar a presença de uma expressão metafórica ou não responderam.

No Quadro 17, sintetizamos as metáforas apresentadas pelos estudantes para os conceitos envolvidos na atividade.

Quadro 17 – Metáforas conceituais apresentadas pelos estudantes no episódio 4

Conceito	Metáforas conceituais
Alterno	• Alterno como mudança.
Colateral	• Colateral como consequência. • Colateral como alinhamento.
Correspondente	• Correspondente como uma relação biunívoca. • Correspondente como mensagem.

Fonte: elaboração própria

A seguir, apresentamos uma descrição da atividade em que trabalhamos as propriedades entre ângulos e retas a partir de duas paralelas e uma transversal.

6.5 Retas Paralelas Cortadas por Uma Transversal

Por representar o tema central deste estudo, apresentamos com maior riqueza de detalhes a tarefa que elaboramos para abordagem de retas paralelas cortadas por uma transversal mediante o aplicativo GeoGebra.

Nos mesmos moldes que foram realizados o estudo de retas concorrentes e as relações entre os ângulos, a tarefa[81] visou dois momentos que também definimos como: (a) construção e investigação e (b) análise e reflexão. O primeiro, de cunho mais exploratório e investigativo, teve objetivou realizar a construção de duas retas paralelas cortadas por uma transversal e os possíveis ângulos que podem ser formados. Propusemos alguns questionamentos a fim de direcionar os estudantes à identificação das relações entre ângulos alternos, colaterais e os correspondentes, sem, incialmente, mencionar as nomenclaturas, além de deixarmos a possibilidade de identificação de outras relações. Colocamos na tarefa a imagem do construto com o objetivo de orientar o processo de construção e a identificação das retas paralelas e a reta transversal e mantivemos a ideia de apresentar os ícones das ferramentas do GeoGebra como dica para realização da construção, conforme a Figura 35.

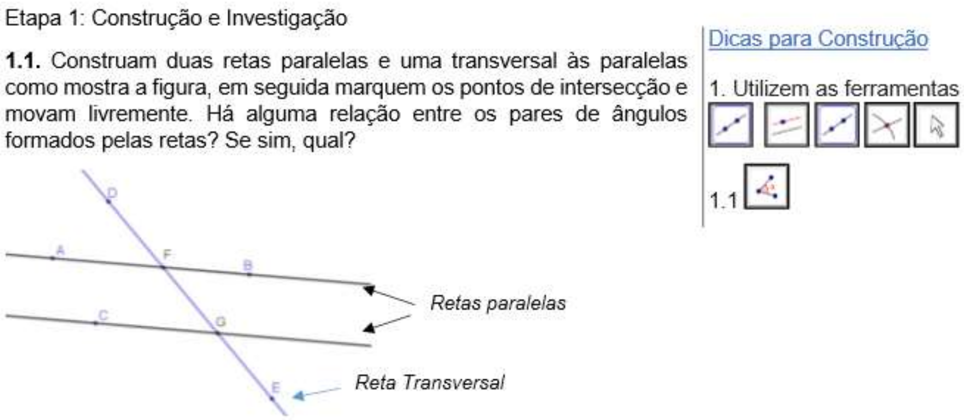


Figura 35 – Etapa 1.1 da Tarefa 2
Fonte: material de pesquisa

Para não direcionar a construção baseadas nas nomenclaturas (por exemplo, ângulos correspondentes, ângulos colaterais internos etc.), algo geralmente supervalorizado na abordagem desse conteúdo como discutimos no capítulo 2, e a partir delas orientar à identificação da relação entre os ângulos, solicitamos a construção de ângulos que estão do mesmo lado da transversal, tais como ∠FGC e ∠DFA ou ∠FGC e ∠AFG. Esse fato se deu por um motivo simples: durante a realização da atividade, o docente usou as respostas apresentadas pelos estudantes nas tarefas preliminares com intuito de direcionar o significado já conhecido pelos discentes a um novo sentido, no caso, o conceito matemático atribuído a ângulos correspondentes ou ângulos colaterais internos.

A abordagem, que envolve a reflexão acerca de termos relacionados ao tema de estudo → identificação das metáforas → construção, investigação e análise com o aplicativo GeoGebra →

[81] Ver Apêndice 2.

inserção das metáforas para análise durante as manipulações *touchscreen* representa a nossa metodologia de ensino.

Na segunda parte da tarefa, análise e reflexão, apresentamos as nomenclaturas e, a partir delas, propusemos atividades nas quais os estudantes deveriam:1. Identificar os pares de ângulos. 2. Descrever as propriedades. 3. Relacionar definições aos conceitos matemáticos envolvidos na tarefa e, 4. Resolver dois problemas[82]. Esta etapa foi proposta como tarefa complementar, para realização em caráter extraclasse, e fundamentada em um *QR Code*. 5. Identificar elementos (como posição entre retas) e relações. 6. Relacionar retas com ruas a partir do mapa extraído da localidade em que a escola se encontra. 7. Resolver questões para análise das relações entre retas e ângulos em contextos variados.

6.5.1 Episódio 5: toques exploratórios e algumas descobertas

Discorremos neste episódio as interações de E. A., G. D. e M. V., todos da turma A, na realização da “tarefa 2: retas paralelas cortadas por uma transversal”. Os dados foram obtidos por meio da gravação de áudio e vídeo, captura de tela e áudio e folha de respostas dos estudantes. Conforme dito anteriormente a filmagem e a captura da tela foram realizadas por convite, o que, naturalmente, seleciona os atores que mais se destacaram em nossas análises.

A análise da atividade, que teve a duração de quatro aulas de 50 minutos cada e foi realizada em dois encontros, conta com excertos de cada momento, sendo:

- Encontro 5: vídeo 1 – filmagem das interações de E. A. e M. V., com duração de 31min34s e vídeo 2 – captura de tela das manipulações de E. A. e M. V., com duração de 27min53s.
- Encontro 6: vídeo 3 – captura de tela das manipulações de G. D. e M. V. com duração de 17min46s.

Começamos apresentando comentários mais gerais em relação às turmas e, na sequência, evidenciamos a atuação dos atores escolhidos em pormenores em algumas etapas da tarefa.

No início da atividade, o docente propôs às turmas uma leitura minuciosa de cada etapa da tarefa e procurou dar mais autonomia aos estudantes, orientando, em casos pontuais, os processos de construção do objeto geométrico em questão. À medida que os discentes solicitavam a presença do professor, ele atendia, orientava e fazia questionamentos tais como: “o que vocês observam em relação aos pares de ângulos? Analisem os pares que estão em um mesmo lado em relação à

[82] A noção de problema que adotamos aqui tem como base a definição de Polya (2006) para problema de determinação – que pode ser teórico ou concreto e sua finalidade está em encontrar a incógnita que pode envolver procedimentos variados (calcular, escrever, desenhar etc.) – e a caracterização de Abrantes (1989) para situações problemáticas, sendo esta uma situação de exploração, em que o problema não apresenta uma solução única, além de não exigir a exploração do contexto.

transversal, depois as outras possibilidades. É possível generalizar? Escrevam suas observações! ”. A finalidade era direcionar os estudantes para elaboração das conjecturas, enfatizando a proposta da tarefa, porém sem interferir no processo de investigação dos alunos. O docente também explorou os momentos de conversa com o coletivo, levantando indagações que relacionavam as respostas apresentadas pelos estudantes na “Tarefa Preliminar 4”, discutida no Episódio 4, visando inserir, da maneira mais natural possível, as nomenclaturas (ângulos alternos, ângulos colaterais, ângulos correspondentes), utilizando, inclusive, algumas respostas apresentadas por alguns alunos, como por exemplo, aquelas que relacionavam correspondente com amor correspondido, alternos com halteres, entre outras.

Concernente às turmas, destacamos que os discentes apresentaram maior desenvoltura no manuseio do GeoGebra, o que facilitou o trabalho docente. Vejamos de que maneira nossos atores interagiram e dialogaram durante a realização da tarefa.

A etapa 1.1 da tarefa visou à construção do objeto geométrico e a apresentação de uma questão mais aberta, com a proposta: “Construam duas retas paralelas e uma transversal às paralelas (...), em seguida marquem os pontos de intersecção e movam livremente. Há alguma relação entre os pares de ângulos formados pelas retas? Se sim, qual? ”.

Para reconstruir os caminhos traçados por E. A. e M. V. e compreender as estratégias adotadas pelos discentes na realização da primeira etapa da tarefa utilizamos a telagravação (*screenrecorder*) na articulação dos vídeos 1 e 2.

No início da atividade, M. V. mostrou maior familiaridade com o aplicativo e orientou E. A. em relação às ferramentas que devem ser utilizadas para realizar as construções. Após a construção das retas paralelas e a reta transversal a dupla solicitou a presença do professor para esclarecer uma dúvida em relação à etapa 1.1. O docente explicou que se tratava de um questionamento aberto e que os estudantes podiam relatar o que identificaram a partir da construção das retas paralelas cortadas pela transversal. Nesse momento, E. A. sinaliza a existência de ângulos opostos pelo vértice: “ *... é o negócio dos ângulos opostos, fessô* [sic]” [vídeo 1 - 00:02:23]. O docente aconselhou a dupla a registrar o que constatavam. Com interesse em confirmar as observações os estudantes realizaram a construção dos ângulos α e β, de acordo com o registro a seguir (Figura 36).

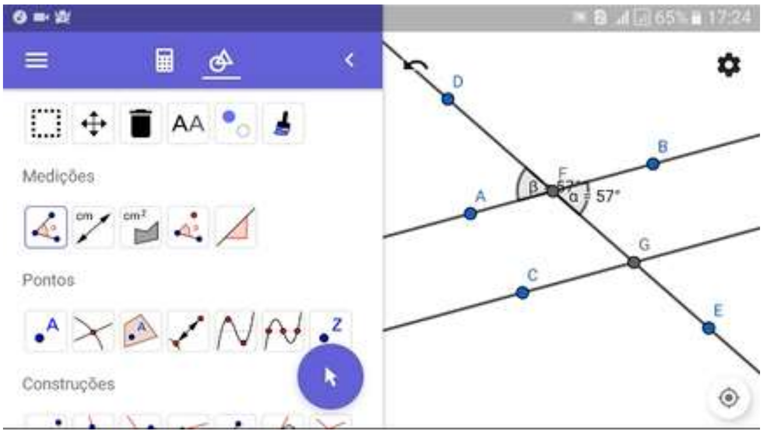


Figura 36 – *Printscreen* da construção de ângulos opostos pelo vértice realizada por E. A. e M. V. – vídeo 2: Instante: 00:04:19
Fonte: material de pesquisa

Logo após, E. A. e M. V. escrevem na folha de atividade: "*os ângulos opostos sempre terão a mesma medida, a reta transversal toca as retas paralelas*". Nesse ponto cabe uma observação. A análise inicial envolve a relação entre ângulos opostos pelo vértice, já estudada na Tarefa 1, como discutido no Episódio 3. Na sequência os discentes voltaram a atenção para as demais etapas da primeira parte da tarefa (Figura 37) e iniciaram a construção de um novo objeto geométrico na tentativa de estabelecer outras relações entre os ângulos.

1.2. Meçam os ângulos que estão do mesmo lado da transversal (por exemplo, ∠DFA e ∠CGE). Façam esse procedimento para todos as combinações possíveis (ângulos que estão do lado de fora das paralelas, os que estão entre as retas paralelas etc.). Existem relações entre os ângulos? Se sim, quais?

1.3. Meçam um ângulo de cada lado da reta transversal (por exemplo, ∠BFD e ∠CGE). Da mesma forma como no item anterior, investiguem outras possibilidades. É possível estabelecer alguma relação entre os pares de ângulos? Expliquem.

1.4. Investiguem outras relações entre os pares de ângulos que podem ser formados e registrem suas observações. Caso necessário façam desenhos para esclarecer melhor as ideias.

Figura 37 – Etapas 1.2, 1.3 e 1.4 da Tarefa 2
Fonte: material de pesquisa

Nessa nova empreitada, os alunos construíram ângulos replementares, conforme mostra a Figura 38 com o *printscreen* dessa ação, mas não prosseguiram a análise.

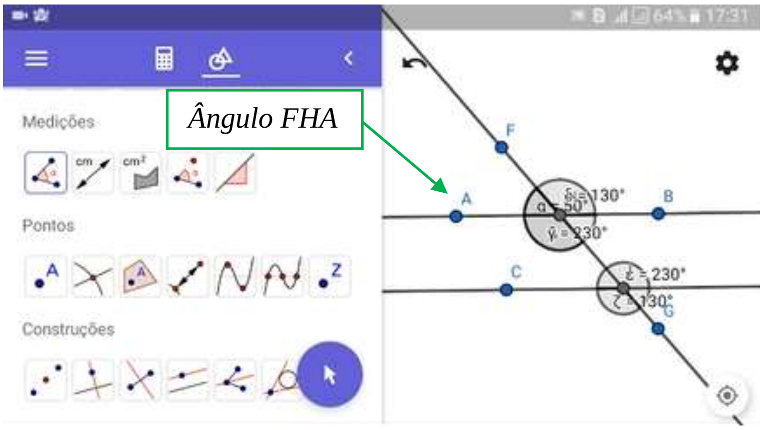
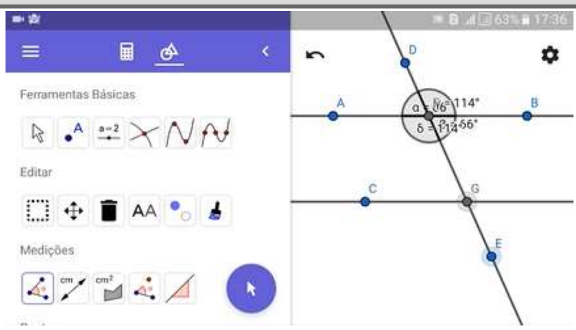
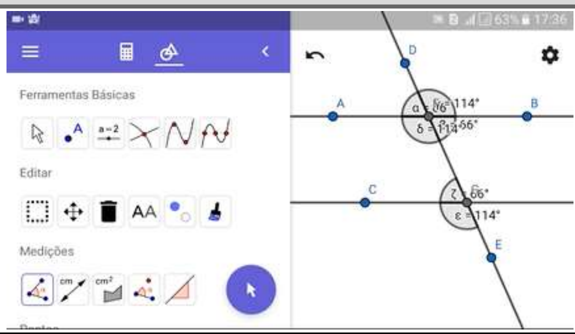


Figura 38 – *Printscreen* da construção de ângulos replementares realizada por E.A. e M. V. – vídeo 2: Instante: 00: 11:27
Fonte: material de pesquisa

Os discentes moveram as retas na tentativa de estabelecer conexões entre os ângulos, porém, não conseguiram visualizar outras relações além da que envolve ângulos opostos pelo vértice. Possivelmente a construção de ângulos replementares tenha dificultado a visualização, sobretudo pela maneira como o aplicativo apresenta os elementos (símbolos e valores dos ângulos), além de que previamente os discentes haviam medido FHA (ângulo α), o que acrescentou mais um objeto à construção. Nesse sentido, observamos que a análise do caso geral possa se voltar para análise do particular, envolvendo outras mídias. Cientes da dificuldade do AGD na inserção dos símbolos e de trabalhar esses elementos na tela do *smartphone*, o exame detalhado de um caso particular, como este, envolvendo papel e lápis, e outras testagens no aplicativo poderiam ter facilitado na identificação da relação entre ângulos correspondentes, por exemplo.

Após esse evento, a dupla iniciou uma nova construção. Inseriram os ângulos DFA, GFB, BFD e AFG e na continuação os ângulos CGE e FGC, como revela os registros do Quadro 18.

Quadro 18 – Construções realizadas por E.A. e M.V. para análise das relações entre os pares de ângulos

Printscreen	
	
Instante 00:15:58	Instante 00:16:21
Descrição	
Os estudantes construíram ângulos opostos pelo vértice a partir das retas AB e DE e na sequência ângulo adjacentes a partir da paralela à AB e da transversal DE.	

Fonte: material de pesquisa

M. V. chamou a atenção de E. A. para o fato de que seria necessário um novo ponto na reta paralela à AB, para que fosse possível obter os demais ângulos. A fim de verificar se já havia algum ponto os estudantes aproximaram os pontos, sobrepondo as retas paralelas (Figura 39) e estabeleceram o diálogo apresentado na sequência.

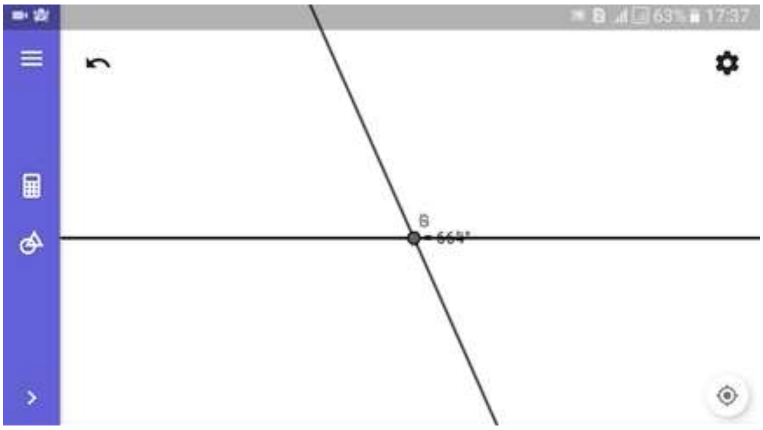


Figura 39 – *Printscreen* da ação dos estudantes E.A. e M. V. – vídeo 2: Instante: 00:16:59
Fonte: material de pesquisa

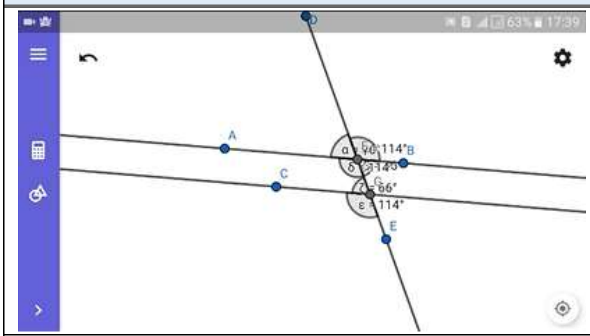
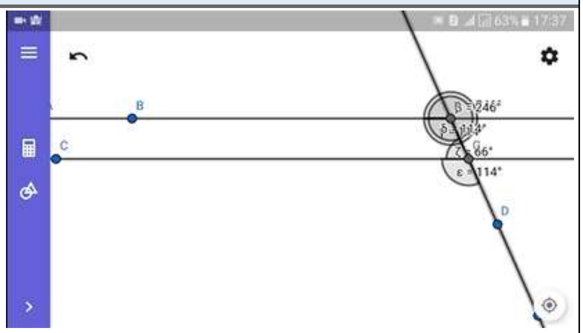
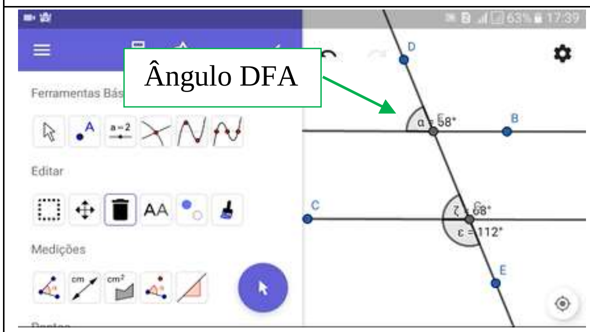
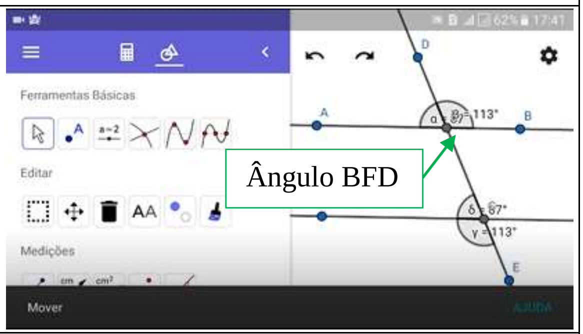
> E. A.: tem nada aí não. Todas as letras estão aqui. [Vídeo 2 - 00:16:57]
> M. V.: é ... e a setinha é infinita também, mesmo se tivesse não ia achar. [00:17:02]
> M. V.: é infinita, E. A. Não tem fim. [00:17:05]

Da conversa acima, destacamos que há um tipo de raciocínio que envolve visualização e intuição. No entanto os alunos optaram por analisar a construção sem realizar novas manipulações. Modificaram o objeto, o que não permitiu, de imediato, a identificação de outras relações. A dificuldade inicial corrobora com o mencionado em relação ao modo como o aplicativo GeoGebra, na versão para *smartphone*, nomeia os pontos e apresenta os valores dos ângulos. Os elementos ficam sobrepostos e como não é possível arrastá-los a visualização fica prejudicada. Em função disso, M. V. orienta E. A. a respeito do que e onde olhar com intuito de deslindar a situação, vejamos a transcrição:

> M. V.: tá difícil E.A.? [Vídeo 2 - 00:17:16] ... chega mais perto [00:17:23] (Sinalizando que E. A. deve arrastar e ampliar a construção).
> E. A.: aqui tá dando pá [sic] vê que os ângulos são ... [00:17:50]
> M. V.: Mas aí que tá E. A, na verdade é que tá certo pô, são ângulos opostos, ângulos opostos sempre serão iguais. [00:17:53]
> E. A.: eu sei pô. [00:18:01]

Após essa ocorrência, os discentes continuam a análise. Em um primeiro momento (Instante 00:18:58), coforme o Quadro 19, o conjunto de elementos parece não dar pistas acerca do que que está em jogo. Avançaram, movimentando o ponto D (Instante 00:17:27) a fim de ver com maior clareza os ângulos e valores, o que parece confundir mais a dupla. Com o propósito de aclarar a situação, eles utilizam uma singularidade do AGD, a retroação, e desfazem a ação. Posteriromente, resolvem a dificuldade de sobreposição de elementos excluíndo alguns ângulos, mantendo primeiro o ângulo DFA, o correspondente e o colateral externo a ele (Instante 00:19:34). Em seguida incluíram o ângulo BFD (Instante 00:21:32) e analisaram a relação com os demais ângulos.

Quadro 19 – *Printscreen* do vídeo 2 das interações dos estudantes E.A. e M.V. durante a implementação da Tarefa 2: ângulos correspondentes, alternos e colaterais

Printscreen	
	
Instante 00:18:58	Instante 00:17:27
	
Instante 00:19:34	Instante 00:21:32
Descrição	
E. A. e M. V. movendo/modificando a construção com objetivo de identificar a relação entre ângulos correspondentes, alternos e colaterais.	

Fonte: elaboração própria

Para reconstrução e análise desse episódio, adotamos como base as telagravações (ASSIS; HENRIQUE; BAIRRAL, 2020; BAIRRAL; HENRIQUE; ASSIS, 2021). Com a finalidade de compreender melhor as estratégias e investigar os processos de construção e desenvolvimento conceitual da dupla, examinamos as respostas escritas dos estudantes E. A. e M. V. para as etapas 1.3 e 1.4 da tarefa:

1.3: “*Eles são ângulos congruentes*”.

1.4: “*Outros pares como AFD e DFB são ângulos suplementares, cuja soma da* [sic] *180º*”.

Não há detalhamento nas respostas, mas nossa suposição é que a exlicação para o item 1.3 tenha relação com manipulações tal qual a do instante 00:19:34 do Quadro 19 e a resposta do 1.4 está nos toques conforme os do Instante 00:21:32, o que torna as respostas coerentes.

Desse fragmento do episódio, além do sentido de como os toques são iniciados (direção esquerda→direita) ratifica nossa hipótese acerca de orientação, destacamos que mesmo sem terem trabalhado juntos antes, E. A. e M. V. apresentaram harmonia durante as manipulações, e ações compartilhadas e, do mesmo modo que ocorreu no Episódio 3, toques sincrônicos, como mostra o Quadro 20 em que os *printscreen* foram extraídos do vídeo 1.

Quadro 20 – Construção compartilhada dos estudantes E.A. e M.V. no aplicativo GeoGebra durante a realização da Tarefa 2

Printscreen	
	
Vídeo 1 – Instante: 00:07:11	Vídeo 1 – Instante: 00:20:34

Fonte: material de pesquisa

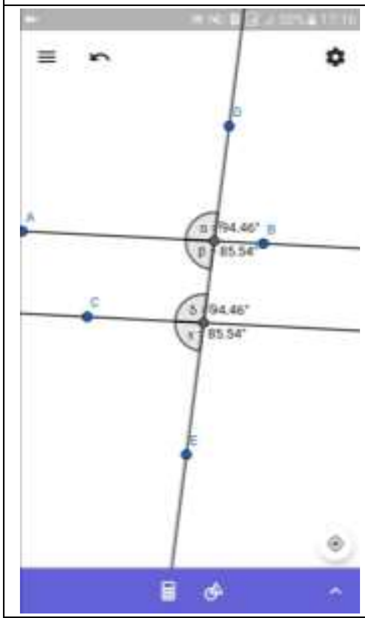
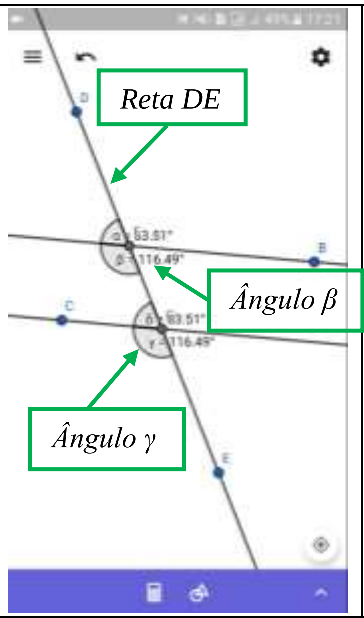
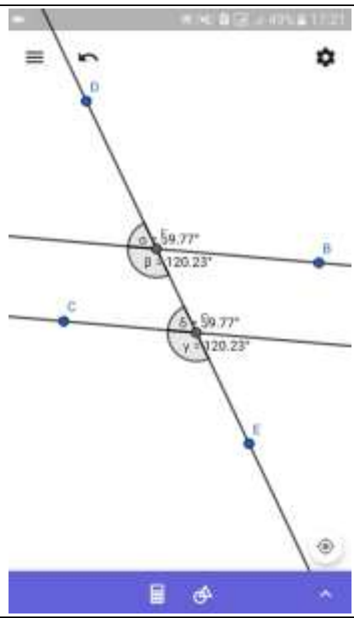
A pesquisa de Henrique (2017) apontou que um dos desafios da realização de atividades para o estudo das relações entre retas e ângulos na tela do *smartphone* estava na construção e visualização no aplicativo GeoGebra para os casos em que a tela do *smartphone* é pequena (inferior ou igual a 3 polegadas). Entretanto, embora o dispositivo utilizado pela dupla não se enquadre nesse parâmetro, mas por representar um objeto matemático com vários elementos (retas, pontos, ângulos), os estudantes conseguiram interagir verbal e corporalmente, ou seja, neste último, mantiveram a sincronia durante os momentos de construção compartilhada.

No sexto encontro, após examinarmos as respostas escritas da primeira etapa da tarefa, solicitamos que os discentes analisassem novamente o item 1.4 antes de dar prosseguimento na realização da atividade. Desse modo, eles puderam (re)visitar parte do que haviam discutido no encontro anterior.

Para análise dessa etapa, contamos com a captura de tela das interações entre G. D. e M. V. (Vídeo 3). Em relação à formação dessa nova dupla, vale um comentário: na primeira etapa da atividade,analisamos os vídeos dos toques e diálogos entre E. A. e M. V., contudo um novo ator entrou em cena. Ainda que para a atividade de pesquisa essa reformulação pudesse trazer alguma dificuldade, optamos por um trabalho democrático no qual os alunos pudessem se sentir à vontade para a escolha dos pares. Dessa forma, no primeiro encontro E. A. e M. V. trabalharam juntos, enquanto G. D. formou dupla com C. O. de 14 anos. No segundo encontro, os discentes trocaram os pares, ou seja, G. D. e M. V., C. O. e E. A..

Iniciamos com a apresentação do Quadro 21 que apresenta a transcrição do áudio e os objetos de análises de um excerto do vídeo 3 em que os estudantes discutem a respeito da relação entre ângulos que estão do mesmo lado da transversal (correspondentes e colaterais) e as propriedades envolvidas (congruentes ou suplementares). Vejamos os registros obtidos dessa ação.

Quadro 21 – Ações dos estudantes G.D. e M.V. no estudo de ângulos correspondentes

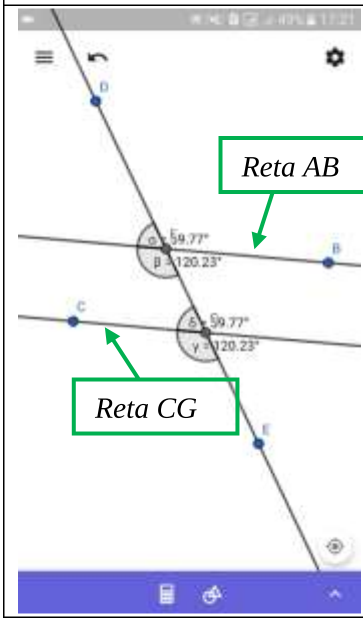
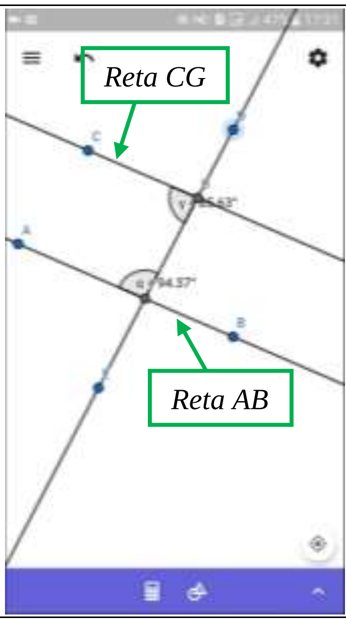
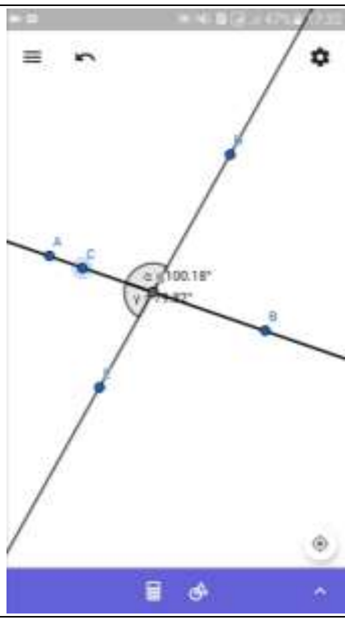
<table>
<tr><th colspan="3">Descrição</th></tr>
<tr><td colspan="3">G. D. e M. V. manipulando e dialogando acerca da posição dos ângulos.</td></tr>
<tr><th colspan="3">Printscreen</th></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>Instante 00:14:53</td><td>Instante: 00:16:25</td><td>Instante: 00:16:53</td></tr>
<tr><th colspan="3">Transcrição</th></tr>
<tr><td colspan="3"><u>00:14:53</u> – M. V.: o que esses aqui tem igual, pô?
G. D.: esse aqui?
M. V.: é!
M. V.: que eles estão do lado de fora, pô! Acho que é isso.
G. D.: eles são da mesma reta.
M. V.: é, pô ... isso é uma relação entre eles, cara. Eles estão na mesma reta. (Há um breve momento de silêncio).
G. D.: então eles estão na mesma reta e ... (trecho inaudível) na reta transversal. (Há um momento de silêncio, na sequência a dupla move a construção).
G. D.: congruente é tipo assim: quando você mexe é a mesma coisa?
<u>00:16:25</u> – M. V.: é mesma coisa. Tipo... (o discente move a reta DE) ó tá ligado no D e E (pontos D e E, que representam, segundo o discente, o ângulo β).
M. V.: Aqui... é desse lado, essa parte esquerda. Ó ... aqui é cento e dezeseis ponto quarenta e nove e aqui é cento e dezeseis ponto quarenta e nove, não muda ó (Mostrando sua relação com o ângulo correspondente γ. Na sequência, o estudante modifica a construção a fim de enfatizar sua observação).
M. V.: São iguais, não mudam: cento e onze e cento e onze.
G. D.: ah, sim!
M. V.: não muda.
G. D.: mas essa aqui é a transversal, né?
M. V.: oi?
G. D.: é a transversal que está movendo, né? (Destacando a manipularção realizada por Marcus Vinícius).
G. D.: então a gente pode colocar assim, ó: ... (se referindo ao que deveria ser escrito na tarefa).
<u>00:16:53</u> – M. V.: eles são ângulos congruentes, só isso. (referindo-se aos correspondentes)</td></tr>
</table>

Fonte: material de pesquisa

Por meio da telagravação, observamos que os aprendizes estabeleceram a relação entre ângulos correspondentes a partir da congruência, fato contemplado pelas negociações e pelos toques (Instante 00:16:25, por exemplo, ângulo β = 116.49° e ângulo γ = 116.49°). Identificamos que os toques se articulam nos domínios construtivo e relacional, pois os discentes formularam uma conjectura a partir do manuseio do objeto no AGD.

Após esses diálogos e as interações que apresentamos, há uma pausa na geração do vídeo de aproximadamente dez minutos e ,dessa forma, não pudemos observar se nesse ínterim os estudantes estabeleceram outras inferências.Nessa nova empreitada, eles analisaram ângulos colaterais internos, como mostra os registros a seguir no Quadro 22.

Quadro 22 – Ações dos estudantes G.D. e M.V. no estudo de ângulos colaterais internos

Printscreen		
Instante: 00:16:53	Instante: 00:17:15	Instante: 00:17:29
		

Fonte: material de pesquisa

O exame do trecho nos possibilitou verificar que a dupla usou o toque de arrasto com uma dupla função: construtivo e relacional. A primeira função teve como objetivo facilitar a análise, para isso eles permutaram as retas CG e AB (Instante: 00:16:53 → Instante: 00:17:15), o que fez com que ficasse na tela apenas as retas e os ângulos colaterais internos (Instante 00:17:15, ângulos α e γ) e deslocaram a reta CG em direção à reta AB, aproximando os ângulos α e γ. No movimento de arrastar a ação gerou uma nova construção na qual estavam apenas os objetos de análise. Dessa maneira, na segunda função atribuída ao movimento de arrastar, os estudantes formularam uma conjectura acerca da relação entre os ângulos α e γ (ângulos suplementares, Instante 00:17:29).

Os discentes poderiam ter estabelecido uma conjectura por meio de uma análise aritmética, adicionando os ângulos α e γ no próprio campo "Entrada" do aplicativo GeoGebra, o que não sabemos é se esse processo conduziria os estudantes à formulação de uma conjectura, pois como já destacamos, nesse tipo de operação, dada uma particularidade do aplicativo, número restrito de casas decimais, a soma se aproxima de 180º. Todavia, observamos que os alunos se apropriaram de uma particularidade de um DMcTT, no qual a ação de arrastar traz imbricadas finalidades distintas, tais como formular e validar conjecturas, para estabelecer uma relação entre os ângulos α e γ, transladando a reta CG, sobrepondo-a sobre AB, fazendo-os ficar suplementares, ou seja, eles instituíram uma conjectura visual para ajustar ao seu propósito, que é um tipo de raciocínio no âmbito relacional.

O trabalho com retas e ângulos em manipulações *touchscreen* para formulação de conjecturas permitiu a identificação do surgimento de um novo conceito nesse tipo de estudo: o conceito de referência, no qual em uma variedade e simultaneidade de movimentos a análise para construção de uma conjectura ocorre tendo como referência o objeto que será considerado, reta ou ângulo.

O excerto do episódio que selecionamos permitiu-nos a identificação das estratégias elaboradas pelos estudantes, as manipulações se articulando entre os domínios constitutivo e relacional (ARZARELLO; BAIRRAL; DANÉ, 2014). A ação dos estudantes de transladar uma das retas no objeto de análise, com intuito de confirmar que a soma dos ângulos α e γ resulta em dois ângulos retos, sugere a presença da intuição como um elemento do raciocínio matemático e que a visualização foi potencializada pelos toques na tela do *smartphone,* intensificando o desenvolvimento do conceito de ângulos colaterais internos.

Não foi possível acompanhar o restante do desenvolvimento, pois o vídeo não dura até o término da aula. Provavelmente o aparelho ficou sem espaço para continuar a gravação. Com intuito de entender o processo de construção conceitual dos nossos atores, buscamos os resgistros escritos produzidos por eles durante a realização da atividade.

Na primeira parte da tarefa 2, propusemos que os estudantes investigassem as relações entre ângulos que estão em um mesmo lado em relação à reta trasnversal (correspondentes e colaterais) e em lados diferentes (alternos). Nossa intenção foi possibilitar que, por meio da manipulação no AGD, os discentes identificassem as relações e, à medida que esse trabalho fosse desenvolvido introduzir as nomenclaturas por meio do diálogo com o coletivo, apresentando algumas metáforas relatadas no Episódio 4. Dessa forma, foi possível ressignificar os conceitos de correspondente, colateral e alterno, relacionando-os às relações matemáticas. O que representa um caminho inverso do que geralmente é apresentado no livro ditático: parte-se das nomenclaturas para as definições das propriedades (ângulos coorespondentes e alternos são congruentes e ângulos colaterais são suplementares).

Na segunda parte da atividade (análise e reflexão), formalizamos as relações entre os ângulos apresentando-as, como mostra a Figura 40, com parte desta etapa, e propusemos questões gráficas e/ou analíticas, que envolveram elementos e relações, a identificação de retas paralelas em um mapa e a articulação entre as definições e as propriedades matemáticas envolvidas no estudo das relações entre retas paralelas cortadas por uma transversal.

Etapa 2: Análise e Reflexão

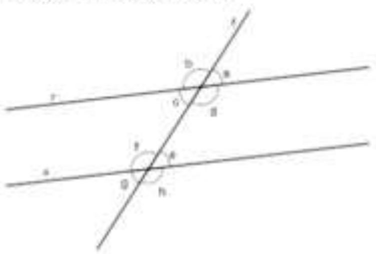
2.1. Alguns dos pares de ângulos que podem ser formados a partir da intersecção de duas retas pararelas com uma transversal já são nossos conhecidos, como os opostos pelo vértice e os suplementares. No entanto, existem outros pares que também recebem nomes especiais de acordo com sua posição. São eles:

- Ângulos **alternos** (que podem ser internos ou externos).
- Ângulos **colaterais** (que podem ser internos ou externos).
- Ângulos **correspondentes**.

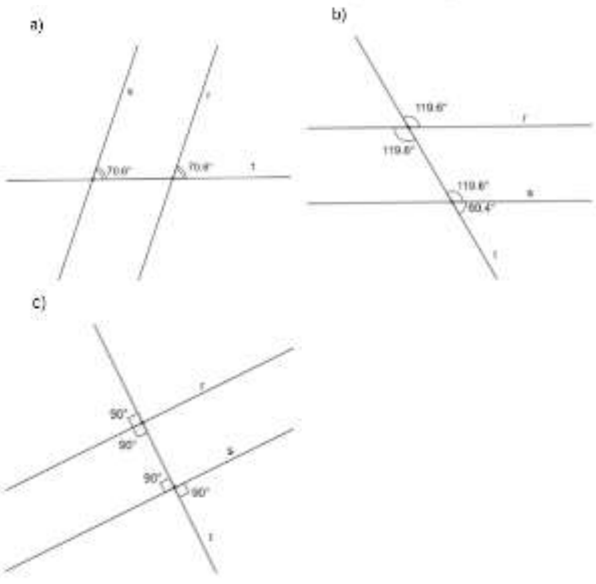
Figura 40 – Fragmento da etapa 2.1 da Tarefa 2
Fonte: material de pesquisa

No Quadro nº 23, apresentamos as respostas das duplas de estudantes E.A.e C.O. e G.D. e M.V. na realização dessas etapas.

Quadro 23 – Respostas das duplas E.A. e C.O. e G.D. e M.V. para a segunda parte da Tarefa 2 (continua)

<table>
<tr><th>Etapa da Tarefa</th><th>Estudantes</th><th>Respostas</th></tr>
<tr><td rowspan="2">2.2. Com base nessas informações, analisem a figura a seguir destacando todos pares de ângulos de acordo com sua nomenclatura.

a) opostos pelo vértice b) suplementares c) correspondentes d) alternos internos
e) alternos externos f) colaterais internos g) colaterais externos</td><td>E.A. e C.O.</td><td>a. ângulos {a,c}, {b,d}, {f,h}, {g,e}.
b. ângulos {a,d}, {f,g}, {b,c}, {g,h}.
c. ângulos {d,h}.
d. ângulos {c, e}.
e. ângulos {a,g}.
f. ângulos {d,e}.
g. ângulos {a,g}.</td></tr>
<tr><td>G.D. e M.V.</td><td>a. ângulos {a,c}, {b,d}, {f,h}, {g,e}.
b. ângulos {g,h}, {f,e}, {c,d}, {b,a}.
c. ângulos {b,f}, {c,g}, {a,e}, {d,h}.
d. ângulos {f,d}, {e,c}.
e. ângulos {g,a}, {h,b}
f. ângulos {c,f}, {e,d}.
g. ângulos {h,a},{g,b}.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.3 Escrevam as propriedades relacionadas a cada um dos intens anteriores.</td><td>E.A. e C.O.</td><td>Ângulos alternos que podem ser internos ou externos. Ângulos colaterais que podem internos ou externos. Ângulos correspondentes.</td></tr>
<tr><td>G.D. e M.V.</td><td>Eles são ângulos suplementares.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.4 Tarefa Complementar
1. Duas retas paralelas cortadas por uma transversal determinam dois ângulos colaterais externos em que a medida de um deles é o triplo da medida do outro. Faça um desenho dessa situação e determine as medidas dos oito ângulos formados entre as paralelas e a transversal.
2. Analise as sentenças a seguir:
I. Os ângulos correspondentes são suplementares.
II. Os ângulos alternos internos são congruentes.
III. Os ângulos alternos externos são complementares.
IV. Os ângulos colaterais internos são congruentes.
V. Os ângulos colaterais externos são suplementares.
Quais são verdadeiras? Quais são falsas? Explique.</td><td>E.A. e C.O.</td><td rowspan="2">Os alunos não devolveram a atividade.</td></tr>
<tr><td>G.D. e M.V.</td></tr>
</table>

‘Quadro 23. Continuação’

<table>
<tr><td rowspan="2">2.5. Cada ilustração a seguir apresenta, pelo menos, um(a) dos(as) seguintes elementos/relações: retas concorrentes, retas paralelas, reta perpendicular, reta transversal, ângulos alternos, ângulos correspondentes, ângulos internos, ângulos opostos pelo vértice e ângulos suplementares. Identifique-os.
</td><td>E.A. e C.O.</td><td>a. Retas concorrentes, retas transversais e angulos [sic] laterais.
b. angulos [sic] opostos, angulos [sic] colaterais, retas transversais.
c. Reta peroendicular opostas [sic], reta concorrente, reta perpendicular colaterais.</td></tr>
<tr><td>G.D. e M.V.</td><td>a. a ilustração a seguir apresenta: paralelas, transversal, os suplementares.
b. a ilustração a seguir apresenta: retas paralelas, tranversais, angulos [sic] alternos, angulos [sic] correspondentes, angulo [sic] opostos, angulos [sic] suplementares.
c. a ilustração a seguir apresenta: angulos [sic] suplementares, opostos pelo vértice, correspondentes, internos e retas paralelas, perpendiculares e retas transversais.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.6. A figura a seguir representa o mapa da região onde está localizado o Colégio Estadual Oliveira Botelho. Identifique, pelo menos, duas ruas paralelas cortadas por uma transversal.
</td><td>G.D. e M.V.</td><td>Ruas paralelas: Custódio Luís Miranda e Expedicionário Manoel Francisco Gomes e Narcisa Amália como transversal.</td></tr>
<tr><td>E.A. e C. O.</td><td>Não identificaram.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2.7 A seguir são apresentadas definições e propriedades relacionadas às retas paralelas cortadas por uma transversal. No item a relacione as definições e no item b complete as propriedades com as palavras congruentes ou suplementares.
a. <u>Definições</u>
( ) são retas no mesmo plano e não se cruzam.
( ) são as retas que têm um único ponto comum.
( ) é uma reta que tem interseção com as outras retas em pontos diferentes.
1. retas concorrentes 2. reta transversal 3. retas paralelas
b. <u>Propriedades</u>
Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são ....
Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternados internos são ....
Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternados externos são ....
Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos colaterais internos são ....
Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos colaterais externos são ....</td><td>G.D. e M.V.</td><td>a. 3, 1 e 2 (nesta ordem).
b. suplementares, suplementares, correspondentes, opostos e congruente (nesta ordem).</td></tr>
<tr><td>E.A. e C.O.</td><td>a. 3, 1 e 2 (nesta ordem).
b. congruentes, suplementares, suplementares, congruentes e congruentes (nesta ordem).</td></tr>
</table>

Fonte: material de pesquisa

Interessados em investigar o desenvolvimento dos discentes, comentaremos o objetivo de cada etapa e as respectivas respostas. A etapa 2.2 visou à análise das posições entre ângulos e das relações matemáticas a partir de um caso geral. As duplas responderam corretamente todos os itens, embora para alguns casos, como ângulos correspondentes ou ângulos alternos internos, não tenham explorado todas as possibilidades.

A questão subsequente objetivou proporcionar uma reflexão mediada pela narrativa dos estudantes, na qual foi solicitado que eles relatassem as propriedades da etapa anterior. Os registros mostram que os alunos foram sucintos, com respostas breves e incompletas. Dessa maneira, ressaltamos que a proposta de uma tarefa que valoriza a produção da escrita busca incitar no educando a reflexão crítica em relação às experiências matemáticas dele (POWELL; BAIRRAL, 2006). Todavia, ainda que essa análise tenha sido um momento de pesquisa ela é fruto de uma situação de sala de aula, em que não tencionávamos destacar somente o desenvolvimento e a construção conceitual, mas, também, o desdobramento de ferramentas para essa finalidade, designadamente a produção da escrita. Com isso, não podemos afirmar que as anotações dos estudantes contradizem outros dados por serem simplistas, uma vez tal processo também estava em evolução

A etapa 2.4, composta por dois itens, teve a finalidade de: 1. Estimular a elaboração de estratégias (aritmética, algébrica, visual etc.) na resolução de uma questão que envolvia a relação entre ângulos colaterais e 2. Analisar as relações a partir de sentenças. Contudo, não temos os registros dos discentes. Vale lembrar que a atividade foi uma proposta complementar na qual eles deveriam realizar o *download* da tarefa por meio do *QR Code* e fazê-la em casa.

Em 2.5, o escopo foi proporcionar o estudo das relações a partir da análise dos objetos geométricos. Os estudantes destacaram as relações e também as posições entre retas, inclusive o item c que envolveu retas perpendiculares.

Referente à etapa 2.6, na análise do episódio 1, observamos que os discentes não apresentaram respostas para os conceitos «paralelo/a» e «transversal» que envolviam orientação e localização, como ruas paralelas e transversais. Desse modo, para o redesenho dessa tarefa, inserimos a etapa de maneira que fosse possível trabalhar a ideia a partir do mapa[83] da região onde o colégio em que realizamos a implementação está inserido. A dupla G.D. e M.V. identificou como ruas paralelas a Custódio Luís Miranda e Expedicionário Manoel Francisco Gomes e rua transversal a Narcisa Amália. E.A. e C. O. não fizeram a referida atividade.

Os propósitos para a etapa 2.7 foram: (a) relacionar as definições de retas concorrentes, paralelas e transversal aos termos correspondentes e (b) completar as relações matemáticas para ângulos correspondentes, alternos e colaterais. A análise das respostas evidencia que as duplas

[83]Apêndice 2.

relacionaram as definições corretamente, porém tiveram dificuldades no item (b), que envolveu a análise de propriedades que os discentes já haviam feito em etapas anteriores.

A experiência dos toques na tela, dos diálogos e das escritas deram indícios de que durante tal percurso os discentes ressignificaram certos conceitos, desenvolveram e construíram outros. Fazer generalizações, a partir de um número reduzido de participantes em ambiente que está em movimento e reconstrução, é sempre um risco. Todavia, a partir das nossas análises, distinguimos singularidades, contribuições e desafios de um AGD em DMcTT para o desenvolvimento conceitual das relações matemáticas que pesquisamos e integra a seção pós-créditos.

PÓS-CRÉDITOS

> "*A construção ou a produção do conhecimento do objeto implica o exercício da curiosidade, sua capacidade crítica de 'tomar distância' do objeto, de observá-lo, de delimitá-lo, de cindi-lo, de 'cercar' o objeto ou fazer sua aproximação metódica, sua capacidade de comparar, de perguntar*". (FREIRE, 2009, p. 85)

Em 2009, li Paulo Freire pela primeira vez. Estava concluindo a graduação. Dez anos mais tarde, em janeiro de 2019, quando iniciei a escrita deste texto, reli o mesmo livrinho: *Pedagogia da Autonomia*. Nesse ínterim, ressignifiquei alguns dos conceitos presentes na obra, construí outros e muitos ainda estão em desenvolvimento. Boa parte desse processo se deve a experimentação, minha prática como professor, a curiosidade, a observação, ao distanciamento, situações necessárias à construção do conhecimento.

Esta pesquisa também passou por um processo de maturação. Foi preciso remodelar algumas perguntas, delimitar o objeto de estudo, fazer aproximações metódicas, comparar, afastar-se, ouvir outras vozes, fazer conexões, reorganizar o roteiro ..., tudo para construir um repertório de produção de conhecimentos que envolveu toques, conceitos, metáforas e aprendizagens discentes.

Em um filme, a tela pós-créditos costuma ser aquela que apresenta uma lista longa de nomes, mas em algumas situações ela pode indicar algo que está por vir ou uma cena que complementa o próprio filme, um elemento adicional. Esses foram os objetivos aqui: trazer reflexões que complementam o que discutimos, principalmente no capítulo anterior, apresentar a relevância do estudo para a área e avançar na sugestão de novas ideias.

7.1 Selecionando o *Script*

A construção da trama que envolveu esta investigação teve a seguinte questão norteadora: *que contribuições e desafios uma ambiência de aula com o GeoGebra pode oferecer para o desenvolvimento conceitual no estudo de relações matemáticas entre retas paralelas cortadas por uma transversal por meio de tarefas que valorizam a produção de metáforas e as manipulações touchscreen de estudantes do 8.° ano do Ensino Fundamental?*

Como parte de um *script* que visou delinear o estudo e responder a pergunta, analisamos a construção e o desenvolvimento, pelos discentes, de conceitos relativos às retas concorrentes e às retas paralelas cortadas por uma transversal, pautada em uma metodologia de ensino que valorizou a construção de sentidos e os toques em telas. Especificamente: (a) elaboramos, implementamos e analisamos tarefas com intuito de possibilitar a reflexão a partir da escrita e a interação mediante a construção e análise por meio do aplicativo GeoGebra para *smartphones*, (b) elucidamos metáforas conceituais produzidas pelos discentes, (c) investigamos como ocorre a construção e o desenvolvimento conceitual com base na metodologia de ensino adotada. Além desses objetivos específicos, ao longo deste capítulo apresentamos também: (d) mapeamos contribuições e desafios de um AGD para DMcTT na abordagem das relações entre retas e ângulos.

As ações que sustentam este estudo objetivaram responder o questionamento, apresentar novas teorias que emergiram dos dados, apresentar perspectivas para desdobramentos e pesquisas futuras e retomar a nossa hipótese inicial, ou seja, *mediante o ensino de retas paralelas cortadas por transversal será possível abordar boa parte dos conteúdos da geometria plana previstos para os anos finais do Ensino Fundamental. Todavia, essa abordagem deve assumir os DMcTT como uma extensão física do nosso corpo em uma dinâmica de aula que preconize interação e formas diversas de linguagem (escrita, pictórica, imagética, metafórica, ...*).

O ponto de partida para elucidar tais motes encontra-se nos episódios de ensino apresentados no capítulo antecedente.

7.2 (Re)visitando as Metáforas

Por se tratar de uma pesquisa que envolve metáforas e toques em telas para potencializar aprendizagens discentes, é possível que você tenha se perguntado de que maneira seriam articuladas as metáforas conceituais e as manipulações realizadas em AGD em DMcTT. Esperamos que tenha ficado claro que a análise de expressões metafóricas compõe a metodologia de ensino adotada para construção de novos sentidos e o redesenho das tarefas. A construção desse processo ocorreu por meio da implementação de atividades nas quais o objetivo foi possibilitar a análise reflexiva de termos relacionados ao tema de estudo.

O episódio 1 evidenciou metáforas conceituais presentes em expressões metafóricas no formato de respostas escritas. A metáfora conceitual está presente na comunicação ordinária de uma maneira muito sutil, pouco perceptível, como apresentado por Lakoff e Johnson (1986), o que torna necessário o processo de mapeamento das expressões, realizando inferências com objetivo de construir as interpretações. Na análise de «concorrente», por exemplo, as respostas de K. C. “*duas pessoas quando competem a uma corrida ou alguma coisa*” e de Y. O. “*concorrência, disputa, rivalidade exemplo barraca na feira* [...]” permitiram a identificação da metáfora conceitual CONCORRENTE É UMA DISPUTA.

A metáfora como um elemento do pensamento é uma operação cognitiva entre dois domínios: fonte-alvo. O primeiro é proveniente de nossas experiências no/com o mundo enquanto o segundo busca a compreensão de um conceito mais abstrato (LAKOFF; JOHNSON, 1986; BOLITE FRANT, 2011; FERRARI, 2011), por exemplo, a ideia de disputa, rivalidade e competição para o entendimento de concorrente. Nessa perspectiva, a metáfora é vista como um mecanismo neural que permite a dedução de um conceito raciocinado em termos de outro conceito (FELTES; PELOSI; LIMA, 2014).

O uso das metáforas não envolve apenas a escolha de palavras. Elas estruturam o pensamento e o raciocínio, possibilitando a organização do conhecimento, em que conceitos abstratos (ou não) são reconfigurados (FARIAS, 2007). Nossa hipótese é que esse processo também seja fruto da rede de teorias na qual os sujeitos criam associações entre conceitos por meio das interações, experiências e observações do cotidiano. Exemplo: TRANSVERSAL COMO ATRAVESSAR. Nesse caso, dois conceitos distintos se relacionam por meio de uma teoria, que representa uma experiência cotidiana, e só faz sentido quando essa conexão é contextualizada. Especificamente, um conceito estrutura-se em termos de uma atividade, o que representa uma metáfora básica, que em sua pluralidade ocorrem de maneira automática, são inconscientes e utilizadas cotidianamente e por isso devem ser consideradas nos processos de ensino e aprendizagem (LAKOFF; JOHNSON, 1986; BOLITE FRANT, 2007).

Ainda no episódio 1, trabalhamos a ressignificação na construção de sentidos matemáticos. Dessa forma, buscamos, a partir da análise de «paralelo/a», por exemplo, chegar a construção do conceito «retas paralelas». O processo de ressignificação teve como subsídio a visão teórica dos conceitos. Nessa concepção, os estudantes constroem um conceito por meio de suas redes de teorias, que é singular e depende do conjunto de explicações (ou teorias) acerca de uma entidade ou categoria que os sujeitos formam a partir das interações com o objeto (OLIVEIRA M.B, 1999a; OLIVEIRA M.K, 1999). Em relação aos conceitos matemáticos, as metáforas desempenham um papel importante na conceituação. Como mostraram Lakoff e Núñez (2000), a metáfora conceitual está presente na definição dos conceitos matemáticos, além de considerá-la responsável pela estrutura matemática conforme a ajuizamos.

Os episódios 2 e 4, objetivaram evidenciar as metáforas produzidas pelos discentes em uma análise mais direcionada, nos quais o mote eram os termos concatenados às relações matemáticas e que serviram de base para as manipulações *touchscreen* (episódios 3 e 5).

Igualmente importante, a realização do mapeamento das metáforas presentes nas escritas ou nas falas dos discentes, é saber usá-las como parte da metodologia de ensino e, neste estudo, também como instrumento de pesquisa. O exame das respostas apresentadas pelos estudantes possibilitou ao docente o direcionamento nos diálogos e nos debates e ao pesquisador o redesenho de algumas tarefas propostas para o GeoGebra em *smartphones*.

O uso de uma metáfora ontológica no episódio 4 ilustra a dualidade da metáfora. Embora o contexto fosse uma aula de matemática, na qual a intenção era introduzir o conceito de ângulos alternos, os alunos se valeram das experiências deles com um objeto físico para representar o conceito de alterno. O fato se confirma na resposta de K. B. "*Alterno são coisas que fazemos com duas partes do corpo, tipo musculação*" e ratificado como o desenho apresentado pelo discente (Quadro 16). Essa e outras respostas ajudaram o professor a direcionar os diálogos e debates, além de possibilitar a inserção de novos elementos nas tarefas. O exemplo acima permitiu o redesenho de uma das tarefas complementares (Apêndice 3), em consonância com a abordagem teórico metodológica adotada para o estudo, com revisões nos vários ciclos de implementação, objetivando o aprimoramento (desenvolvimento) do experimento (COBB, *et al.*, 2003).

Ao rever parte desses episódios de ensino, mostramos o papel do mapeamento de respostas escritas dos discentes para identificação de metáforas. Todavia, é possível acrescentar mais um elemento para compor o papel e as contribuições das metáforas em pesquisas que envolvem a inserção das tecnologias digitais móveis. Os DMcTT reconfiguram nossas interações e pensamentos que se manifestam na linguagem e consequentemente, moldam e possibilitam a construção de novas metáforas.

As metáforas são construções sociais, demandadas pelo contexto e tempo (KÖVECSES, 2009). Exemplificando: A expressão "*faz um Ctrl C, Ctrl V*", relacionada a um conjunto de teclas que devem ser pressionadas conjuntamente para ação de "copiar e colar" no contexto da informática, já foi durante certo período muito mais utilizada em situações cotidianas. Hoje, com os dispositivos móveis em voga, expressões como "*dar um zoom*" ou "*dar um google*" estão muito mais presentes, e se sobrepõem àquela, embora também possam ser utilizadas no contexto informático. Desse modo, acreditamos que as tecnologias moldam as metáforas, que representam um papel fundamental na criação de um novo vocabulário.

Nesse sentido, indagamos: qual o papel das metáforas e das tecnologias digitais móveis na construção e no desenvolvimento conceitual? Podemos dizer que tal questionamento tem uma relação intrínseca à concepção de conceito que assumimos, ou seja, trata-se de uma particularidade fundamental do pensamento. A mente é essencialmente um fluxo de imagens conceituais (DAMÁSIO, 2011). Todo tipo de interação forma representações, que podem se transformar em definições, ações e relações (DAMÁSIO, 2000). Assim, entendemos que um conceito ocorre pela composição das relações entre conceitos, que, uma vez pertinentes, formam teorias estabelecidas a partir do sentido sugerido pelo contexto. Valendo-nos dessa ideia, ressaltamos que a inserção das tecnologias digitais móveis em sala de aula demanda a proposta de tarefas que permitam emergir novos elementos (papel das metáforas) para potencializar a construção e o desenvolvimento conceitual.

7.3 Toques Construtivos e Reflexivos

A metodologia de ensino que adotamos teve como pressuposto a reflexão acerca de termos relacionados ao tema de estudo → identificação das metáforas → construção, investigação e análise com o aplicativo GeoGebra → inserção das metáforas para análise durante as manipulações *touchscreen*. Para realização de atividades que possibilitassem a interação mediante a construção e apreciações por meio do aplicativo GeoGebra para *smartphones*, reservamos parte do segundo episódio de ensino para o compartilhamento do aplicativo e um momento para ambientar, familiarizar os discentes com ferramentas básicas do programa.

Durante as intervenções, boa parte dos discentes utilizou o próprio *smartphone*, com isso, o compartilhamento, por ser um processo dinâmico, foi considerado no planejamento, pois é recorrente ao término de uma aula os alunos desinstalarem o aplicativo devido à necessidade de maior capacidade de armazenamento de dados nos dispositivos. Já o escopo da ambientação foi atenuar dificuldades de manuseio, com uma atividade mais livre, referente à construção do objeto geométrico, porém direcionada em relação às ferramentas utilizadas. Mais adiante, voltaremos a essa questão.

Conforme mencionado anteriormente, os episódios de ensino 1, 2 e 4 trataram da análise de tarefas escritas que tiveram como objetivo a construção de novos sentidos e o suporte para os episódios 3 e 5. Nesses dois últimos, discutimos aspectos gerais das turmas e o engajamento de alguns estudantes em tarefas que envolveram toques, reflexões e escritas.

A análise por meio da telagravação (BAIRRAL; HENRIQUE; ASSIS, 2021) evidenciou uma singularidade da manipulação de um AGD em DMcTT no domínio construtivo: a sincronicidade em toques compartilhados. Mesmo em um aplicativo no qual não é possível realizar multitoques, especificamente o GeoGebra nas versões para *tablets* e *smartphones*, I. M. e M. V. (episódio 3) e E. A. e M. V. (episódio 5) apresentaram harmonia na realização de toques síncronos na construção de objetos geométricos, o que envolveu diálogos, negociações e reflexões.

Outro elemento revelado foi a incompletude entre as ações de construção – análise – diálogo – reflexão – escrita, perceptível nos vários momentos de pausas das manipulações e diálogos de A. B. e I. S.; E. A e M. V. (episódio 3). Todavia, mesmo realizando um momento de ambientação para o conhecimento de ferramentas básicas, observamos que os alunos, ao realizarem os toques na tela, desenvolveram um processo de amadurecimento que compõem a tríade ambientação-domínio construtivo-domínio relacional (ARZARELLO; BAIRRAL; DANÉ, 2014), de acordo com as reflexões entre G. D. e M. V. no episódio 5.

Uma de nossas hipóteses se fundamenta no fato de a percepção visual dos sujeitos pode sofrer influência em relação à posição da tela, opostamente de quando analisamos construções realizadas em AGD para *desktop* e AGD para DMcTT.

Outra questão que averiguamos está relacionada ao processo de construção de um objeto geométrico em um AGD. A partir dos dados obtidos das manipulações de A. B. e I. S. conforme relatado no episódio 3, e de E. A. e M. V. no episódio 5, o sentido da construção realizada pelos discentes no GeoGebra possui uma relação com a direção do olhar em uma tela computadorizada, imbricado a uma questão cultural na qual temos como referência o sentido da leitura (da esquerda para direita na cultura ocidental).

Os DMcTT representam uma extensão dos nossos corpos (BAIRRAL, 2018) e, em certa medida, a ação de tocar na tela influencia as imagens conceituais que elaboramos, pois há singularidades em termos sensorial e motor, nas quais a ação referida influencia a percepção visual. O rastreamento dos movimentos dos olhos em conjunto com a análise pormenorizada das manipulações, complementadas pela análise da linguagem corporal, pode fornecer indícios dessa constatação do ponto de vista da cognição corporificada para a compreensão dos raciocínios matemáticos dos sujeitos. Vale lembrar que, a matemática é o resultado das capacidades neurais de aprender, e a interação com o meio abrange corpo e mente, na evolução física e sócio-histórica e cultural.

No episódio 5, expusemos como G. D e M. V apresentaram um tipo de raciocínio presente no âmbito relacional. Chamamos de conjectura visual na qual as manipulações estavam providas de intuição e a finalidade era a elaboração conjectural. Desse evento, tiramos conclusões acerca da visualização potencializada pelos toques correlacionados na construção e desenvolvimento conceitual. Neste caso, a manipulação da imagem mental envolveu a representação do conceito (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991). Vale complementar que a composição de toques e escrita abarca o pensamento visual e representações gráficas, elementos que caracterizam modos de raciocínios matemáticos.

No capítulo 2, discutimos que a as investigações em um AGD, primeiro em computadores e mais recentemente em DMcTT, representam a criação de uma nova Geometria, com a ressignificação de velhos conceitos e a criação de outros. Conforme exposto no episódio 3, foi possível abordar outros conceitos, como o de bissetriz e tipos de ângulos, por exemplo. A abordagem de conceitos matemáticos mediante os toques rompe a hierarquia estabelecida na Geometria euclidiana (axioma/definição/propriedades) e evidencia a relevância da aprendizagem geométrica mediada por um AGD.

Nesse cenário, o enfoque das relações matemáticas, entre retas e ângulos por meio de manipulações em telas na investigação e elaboração de conjecturas, possibilitou o surgimento do conceito de referência exemplificado nos dados a partir das manipulações de G. D e M. V (episódio 5), nos quais, em uma multiplicidade de movimentos síncronos, o exame da construção de uma conjectura acontece ao ter como referência o ente matemático a ser considerado, que pode ser reta ou ângulo.

7.3.1 Um toque nos desafios

A pesquisa com AGD em DMcTT apresenta desafios organizacionais e de efetivação e de manipulações em telas. O primeiro tem relação com elementos que devem ser considerados no planejamento e na confecção das tarefas, diz respeito ao compartilhamento dos aplicativos e organização das turmas. E o segundo, aos toques propriamente ditos. Tais Componentes do AGD ou peculiar ao *smartphone* são desafios que merecem destaque.

Se por um lado o uso de dispositivos móveis em sala de aula rompe toda a estrutura necessária para implementação de atividades em um laboratório de informática, ou seja, agendamento, deslocamento, às vezes muitos alunos trabalhando em um único computador, manutenção de equipamentos etc., por outro lado, não exime o professor da tarefa de resolver problemas técnicos, acompanhamento das dificuldades de manuseio, além, é claro, sustentação da curiosidade dos estudantes durante a atividade, fatores que devem ser considerados na elaboração do planejamento.

O episódio 3, por exemplo, mostrou como as dificuldades de manuseio do aplicativo das discentes A. B. e I. S. retardou o desenvolvimento da atividade. Nesse sentido, ressaltamos que em todas as atividades para as quais foi necessário o uso do GeoGebra, o docente precisou compartilhar o aplicativo com alguns discentes. A alegação constante, dos alunos, era a necessidade de ampliar a capacidade de armazenamento de dados, o que acarretava ao término da aula na desinstalação do aplicativo.

Além dos elementos que compõem o planejamento, deve-se considerar, ainda, a elaboração e o tipo de tarefa (BAIRRAL; ASSIS; SILVA, 2015). Em particular, com o olhar para pesquisa, (re)elaboramos as tarefas exploratórias e investigativas, já discutido no capítulo 5, como parte dos ciclos de refinamentos da abordagem metodológica que adotamos (MATTA; SILVA; BOAVENTURA, 2014). Com enfoque no trabalho docente, uma tarefa pode ser por: (a) referência ou (b) confecção. A primeira diz respeito aos casos em que o docente segue um livro texto que apresenta a proposta do uso de um aplicativo, enquanto a segunda demanda a elaboração visando ao estudo de um corpo de conhecimentos ou adaptação, na hipótese de reutilização de uma tarefa já disponível no próprio livro texto ou na rede.

No que se refere ao desafio de efetivação, é preciso considerar a disposição das mesas e cadeiras, quantidade de alunos e de equipamentos, o que influencia nos grupos de trabalhos e, consequentemente, no trabalho colaborativo. Dois estudantes trabalhando em um *smartphone* mostra-se o ideal, haja vista, eles poderem compartilhar toques, dialogar e analisar e refletir. Nesse cenário, o docente precisará lidar com a inquietude dos discentes, motivados pelo do uso do dispositivo em sala de aula também, assim como, deverá solucionar a dependência dos estudantes acostumados com atividades centradas na resolução de listas de exercícios e sem oportunidade da exposição das ideias matemáticas.

Observamos tal comportamento nos vários momentos do episódio 3, em que os discentes, sem exercer autonomia, aguardavam as instruções do professor para a realização das etapas das tarefas. Contudo, o convite ao diálogo e à reflexão permitiu o desenvolvimento do trabalho colaborativo.

Do ponto de vista das manipulações, as dificuldades estiveram mais atreladas à maneira como o GeoGebra, especificamente a versão geometria para *smartphone,* nomeia os entes matemáticos. Há uma sobreposição de elementos que em determinados momentos dificultou a visualização, de acordo como observado, por exemplo, quando E. A. e M. V. no episódio 5 não conseguiram desenvolver a análise de ângulos replementares devido a um conjunto de pontos e nomenclaturas todos sobrepostos.

Uma solução para o desafio apresentado é uma análise que parte do caso geral para o específico. Tendo o conhecimento dessa característica do AGD na inserção dos símbolos, pode-se propor a apreciação de um problema intermediário envolvendo outras mídias em que há uma pausa na análise geral para um exame de um caso particular com a proposta de novas testagens.

7.4 Toques Conceituais e Um Posfácio

Repensar a ideia de conceitos na contemporaneidade exige um olhar que procura identificar não somente possibilidades, mas frestas nas concepções existentes. Destacamos a importância de apreciar as metáforas e a visão teórica dos conceitos como duas fontes ricas para identificar elementos que possam surgir nos processos de construção e desenvolvimento de conceitos matemáticos.

Inicialmente, conjecturamos que a análise de um objeto geométrico com um AGD em DMcTT revela o surgimento das relações matemáticas, intensificando a visualização em um ambiente de troca, no qual os sujeitos constroem, modificam, dialogam, (re)criam, argumentam, conjecturam, compartilham toques e ideias, o que potencializa a construção e o desenvolvimento conceitual.

Ainda que os conceitos matemáticos sejam assumidos como precisos, nos quais a definição estabelece um limite claro (HERSHKOWITZ, 1994), lidamos com a aprendizagem da Matemática e, nesse cerne, para as lentes teóricas adotadas, a construção e o desenvolvimento conceitual passam pela experimentação e ocorrem em um processo de continuidade que envolve as teorias as quais os sujeitos possuem (MEDIN, 1989), ou seja, mente, corpo e objeto (RADFORD; ANDRÉ, 2009). Na presente pesquisa proporcionamos essa criação por artifício de tarefas que envolviam a reflexão e as manipulações na tela, por conseguinte, foram geradas as metáforas - elemento constitutivo -, e os toques como a completude desses processos. Com isso, afirmamos que as metáforas e os toques potencializam aprendizagens discentes.

Retomando nossa proposição, conclui-se que é possível ensinar boa parte dos conteúdos geométricos previstos para os anos finais do Ensino Fundamental a partir da abordagem de retas paralelas cortadas por uma transversal utilizando um AGD com toques, valorizando as mais variadas linguagens em uma dinâmica de aula. É possível, mediante análise das expressões metafóricas, ressignificar os conceitos e na articulação com as manipulações *touchscreen* romper a sequência apresentada na lógica euclidiana na construção de outros conceitos.

A ideia de ponto, reta e plano, por exemplo, pode figurar a partir da construção de retas concorrentes, paralelas e transversais também. O conceito ângulo pode ser articulado à análise das relações matemáticas. Como mostramos, pode-se trabalhar triângulos, quadriláteros e a análise de posição de retas em figuras espaciais, o que conduz a uma gama de outros conteúdos tal qual o teorema de Tales, semelhança triângulos, relações entre arcos e ângulos em uma circunferência, polígonos regulares, estudo dos sólidos etc..

Finalmente, ao molde de uma obra nascida no "chão da escola pública", almejamos como desdobramentos e contribuições à escola e à pesquisa, gerar um GeoGebra *book* e um caderno de tarefas com as orientações para intervenção que compõem as práticas de ensino e um repertório de conhecimentos profissionais, e disponibilizar, ambos, aos professores e à Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. Um (bom) problema (não) é (só).... Educação e Matemática: **Revista da Associação de Professores de Matemática**. n. 8, p. 7-10, 35, Lisboa, 1989.

AGAMBEN, G. **O que é o contemporâneo?** e outros ensaios. Chapecó: Argos, 2009.

ALDUNATE, N.; CORNEJO, C.; LÓPEZ V. y NÚÑEZ, R. La influencia de los gestos en la comprensión metafórica. Ciencia Cognitiva: **Revista Electrónica de Divulgación**, v. 3, número 2, p. 55-57, 2009.

ALEXANDER, D. C.; KOEBERLEIN, G. M. **Geometría**, 5a. Ed. Tradução Mtro. Javier León Cárdenas. Facultad de Ingeniería Universidad La Salle. México: Cengage Learning Editores, 2013.

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, número temático, p. 379-406, 2010.

ALMEIDA, T.; LOMÔNACO, J.F.B. **O conceito de amor**: um estudo exploratório com participantes brasileiros. São Carlos: Pedro & João editores, 2018.

ARAÚJO, M. A. S. Porque ensinar geometria nas séries iniciais do 1° grau. **Educação Matemática em Revista,** Blumenau, v. 2, n. 3, p.12-16, 1994.

ARZARELLO, F. *et al*. A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. In **ZDM**. N. 3, v. 34, p. 66-72, Springer, 2002.

ARZARELLO, F.; BAIRRAL, M.; DANÉ, C. Moving from dragging to touchscreen: geometrical learning with geometric dynamic software. **Teaching Mathematics and its Applications**, **An International Journal of the IMA**, v. 33(1), p. 39-51, Oxford, 2014.

ASSIS, A. R. **Alunos do Ensino Médio realizando toques em telas aplicando isometrias com GeoGebra**. Tese (Doutorado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares). Instituto de Educação / Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica / Nova Iguaçu, RJ, 2020.

ASSIS, A. R. **Alunos do Ensino Médio trabalhando no GeoGebra e no Construtor Geométrico**: Mãos e rotAções em *touchscreen*. Dissertação (Mestrado em Educação). Instituto de Educação / Instituto Multidisciplinar, PPGEduc, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica/Nova Iguaçu, RJ. 2016.

ASSIS, A.; HENRIQUE, M.; BAIRRAL, M. Gravações de telas: captura de toques realizados por alunos em dispositivos móveis. **Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas em Educação Matemática**, v. 2, n. 1, p. 19 - 32, Chapecó, SC, 2020.

ATIYAH, M. What is geometry? **The Mathematical Gazette**, v. 66 (437), p.179-184, Cambridge, 1982.

BAIRRAL, M. A. As manipulações em tela compondo a dimensão corporificada da cognição matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática** (**JIEEM**), v. 10, n. 2, p. 104 - 111, Londrina, PR, 2017.

BAIRRAL, M. A. Dimensões a considerar na pesquisa com dispositivos móveis. **Estudos Avançados**, São Paulo, v. 32, número 94, p. 81-95, 2018.
BAIRRAL, M. A. Pesquisas em educação matemática com tecnologias digitais: algumas faces da interação. **Perspectivas da Educação Matemática**. n. 18, v. 8, p. 485-505, 2015.

BAIRRAL, M. A. **Tecnologias da informação e comunicação na formação e educação matemática**, Seropédica: EDUR, 2009.

BAIRRAL, M. A., ARZARELLO, F., ASSIS, A. High School students rotating shapes in GeoGebra with touchscreen. **Quaderni di Ricerca in Didattica: Matematica 25 (suplemento 2) Proceedings CIEAEM 67**, p.103-108, Palermo, 2015.

BAIRRAL, M. A.; ARZARELLO, F.; ASSIS, A. R. Learning with touchscreen devices: High School students rotating shapes in GeoGebra with touchscreen. **Quaderni di Ricerca in Didattica**, v. 25, p. 103-108, Palermo, 2015.

BAIRRAL, M., ARZARELLO, F., ASSIS, A. Domains of manipulation in touchscreen devices and some didactic, cognitive and epistemological implications for improving geometric thinking. In G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini, & U. Gellert (Eds.), **Mathematics and technology**: a CIEAEM source book, p. 113-142. Springer, 2017.

BAIRRAL, M.; ASSIS, A. R.; SILVA, B. C. da. **Mãos em ação em dispositivos touchscreen na educação matemática**. Seropédica: Edur, 2015a.

BAIRRAL, M.; ASSIS, A. R.; SILVA, B. C. da. Uma matemática na ponta dos dedos com dispositivos touchscreen. **RBECT**, v. 8, n. 4, p. 39-74, 2015b.

BAIRRAL, M.; HENRIQUE, M. P.; ASSIS, A. Moving Parallel And Transversal Lines With Touches On Smartphones: A Look through Screenrecording. **The Mathematics Enthusiast**. Vol. 18, n. 4, 2021 (prelo).

BARBOSA, J. C.; OLIVEIRA, A. M. P. Por que a pesquisa de desenvolvimento na Educação Matemática? **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, p. 526-546, 2015.

BARCELONA, A. El poder de la metonimia. En Cifuentcs, J. L. (ed.), **Estudios de lingüística cognitiva**. Alicante, Universidad, p. 365-380, 1998.

BENTO, A. Como fazer uma revisão da literatura: Considerações teóricas e práticas. **Revista JA (Associação Académica da Universidade da Madeira)**, nº 65, ano VII, 2012. (pp. 42-44). ISSN: 1647-8975.

BOLITE FRANT, J. Linguagem, tecnologia e corporeidade: produção de significados para o tempo em gráficos cartesianos. **Educar em Revista**, Curitiba, 1 (Número Especial), p. 211-226, 2011.

BOLITE FRANT, J. O uso de metáforas nos processos de ensino e aprendizagem da representação gráfica de funções: O discurso do professor. **30ª Reunião Anual da ANPED**, Caxambu, 2007.

BORBA, F. S. **Dicionário UNESP do português contemporâneo**. São Paulo: Unesp, 2005.

BORBA, M. C.; ALMEIDA, H. R. F. L.; GRACIAS, T. A. S. **Pesquisa em ensino e sala de aula**: diferentes vozes em uma investigação. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

BORBA, M. C.; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. 2ª ed. São Paulo: Editora Blucher, 1996.

CASTRO-FILHO, J. A.; FREIRE, R. S.; CASTRO, J. B. Tecnologia e Aprendizagem de Conceitos Matemáticos. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 10, n. 2, p. 93-98, 2017.

CAZEIRO, A. P. M. **Um estudo sobre o domínio de conceitos básicos por crianças com paralisia cerebral e por crianças pré-escolares em função da forma de avaliação**. 2013. 291 f. Tese (Doutorado em Psicologia) – Setor de Psicologia Escolar e do Desenvolvimento, Universidade de São Paulo, 2013.

CAZEIRO, A. P. M.; LOMÔNACO, J. F. Vygotsky e sua interface com as teorias de conceitos: aproximações e distanciamentos. **Psicologia Escolar e Educacional**, Maringá, v. 20, n. 2, p. 367-375, 2016.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática nos dias de hoje** – na medida certa, 8º ano. 1 ed, São Paulo. Leya: 2015.

CHUEKE, J. **Contribuições da Semiótica na concepção da página inicial de portais de informação**: uma pesquisa focada no público brasileiro. 2005. Dissertação (Mestrado em Design) – Departamento de Artes e Design, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

CIAPUSCIO, G. E. Metáfora e ciência. **Ciencia Hoy**, Buenos Aires, v. 13(29), n. 76, p. 60-66, 2003.
COBB, P. et al. Design experiment in educational research. **Educational Researcher**, Washington, v. 32, n. 1, p. 9-13, Jan./Feb. 2003.

COSTA, A. B. & ZOLTOWSKI, A. P. C. Como escrever um artigo de revisão sistemática. *In*. S. H. KOLLER, M. C. P. de PAULA COUTO & J. V. HOHENDORFF (Orgs.), **Manual de Produção Científica** (pp. 55-70), Porto Alegre: Penso, 2014.

COSTA, C. Visualização, veículo para educação em Geometria. In: **IX Encontro de Investigação em Educação Matemática.** Portugal, 2000.

CUENCA, M. J.; HILFERTY, J. Metáfora y Metonimia**.** In: **Introducción a la Linguística Cognitiva**. Barcelona: Ariel, 1999.

DAHLBERG, I. Teoria do conceito. **Ciência da Informação**, Rio de Janeiro, v. 7, número 2, p. 101-107, 1978.

DAMÁSIO, A. Concepts in the brain. **Mind and Language**. v. 4. p. 24-28, 1989.

DAMÁSIO, A. **E o cérebro criou o homem**. Tradução de L. T. Motta. São Paulo: Companhia das Letras, 2011.

DAMÁSIO, A. **O livro da consciência**: a construção do cérebro consciente. Tradução de L. O. Santos. Porto: Temas e Debates, 2010.

DAMÁSIO, A. **O mistério da consciência**: do corpo e das emoções do conhecimento de si. Tradução de L. T. Motta. São Paulo: Companhia das Letras, 2000.

DAMÁSIO, A.; DAMÁSIO, H. Cerebro y Lenguaje. Revista. **Investigación y Ciencia**, n. 194, p. 59-66, 1992.

DELEUZE, G.; GUATTARI, F. **O que é filosofia?** 2. ed. Tradução: Bento Prado Jr. E Alberto Alonso Muñoz, 2005.

DE VILLIERS, M. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 62, p. 31-36, Março/Abril. 2001.

DJAVAN. **Oceano**. Cidade: Columbia Records, 1989. Faixa 2.

DOERR, H. M.; WOOD, T. Pesquisa-Projeto (design research): aprendendo a ensinar Matemática. In: BORBA, M. C. (Org.) **Tendências internacionais em formação de professores de matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006, p. 113-128.

DUARTE, R. C. B. C. **Utilização do GeoGebra, de smartphone e de reflexões escritas na construção de conceitos relacionados a retas paralelas cortadas por uma transversal**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2018.

FARIAS, E. M. P. Cognição, metáfora e ensino. In: PELOSI, A. C.; FELTES, H. P. M.; FARIAS, E. M. P. **Cognição e linguística**: explorando territórios, mapeamentos e percursos. Caxias do Sul, RS: Educs, 2014. p. 146 – 157.

FARIAS, E. M. P. Metáfora e metonímia na geração do sentido. **Organon**, Porto Alegre, n.21, p. 85-95, 2007.

FEISCHBEIN, I. The theory of figural concepts. **EducationaI Studies in Mathematics**, 24, p. 139-162. 1993.

FELTES, H. P. M.; PELOSI, A. C.; LIMA, P.L.C. Cognição e Metáfora: a teoria da metáfora conceitual. In: PELOSI, A. C.; FELTES, H. P. M.; FARIAS, E. M. P. **Cognição e linguística**: explorando territórios, mapeamentos e percursos. Caxias do Sul, RS: Educs, 2014. p. 88-113.

FERRARI, L. V. Metáforas e Metonímias. In: **Introdução à linguística cognitiva**. São Paulo: Contexto, 2011. p. 91-108.

FERREIRA, M. L. A. C. **Formação e desenvolvimentos de conceitos**. Belo Horizonte: Instituto de Educação/Pabaee, 1963.

FREIRE, P. **Pedagogia da autonomia**: saberes necessários à prática educativa. 39ª ed. São Paulo: Paz e Terra, 2009.

GARDNER, H. Um mundo Categorizado. In: **A nova ciência da mente**: uma história da revolução cognitiva. São Paulo: Edusp, 1995.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI, J. R. Jr. **A conquista da Matemática**, 7ª série, 1 ed. São Paulo: FTD, 2002.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI, J. R. Jr. **A conquista da Matemática 9**, 4 ed. São Paulo: FTD, 2019.

GOBBI, J. A; LEIVAS, J. C. P. Engenharia Didática e GeoGebra Aliados na Construção de Conceitos Geométricos. **Educação Matemática em Revista**, p. 40-48, 2014.

GOES, M. C. R.; CRUZ, M. N. Sentido, significado e conceito: notas sobre as contribuições de Lev Vigotski. **Pro-Posições**, Campinas, v. 17, n. 2 (50), Maio/Ago., 2006.

GOMES, T. A. **Ladrilhamento no Plano com o uso do software GeoGebra**. Dissertação (Mestrado Profissional no Ensino das Ciências na Educação Básica). UNIGRANRIO, Duque de Caxias, RJ: 2017.

GÖTTSCHE, K. Tecnologias móveis: uma mais valia em contextos educacionais? **Revista Linhas**. Florianópolis, v. 13, n. 2, p. 62-73, 2012.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. [Tese -Doutorado em Informática na Educação]. Curso de Pós-Graduação em Informática na Educação – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

GURGEL, M.C.; VEREZA, S.C. O Dragão da Inflação contra o Santo Guerreiro: Um Estudo da Metáfora Conceitual. **Intercâmbio**, 5, p. 165-178, 1996.

GUTIERREZ, A. Procesos y habilidades en visualización espacial. **Memorias del Tercer Congreso Internacional sobre investigación en educación Matemática**. Valencia, 1991.

HENRIQUE, M. P. **GeoGebra no Clique e na Palma das Mãos**: Contribuições de uma Dinâmica de Aula para Construção de Conceitos Geométricos com Alunos do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2017.

HENRIQUE, M. P.; BAIRRAL, M. A. **Caderno de Atividades sobre Conceitos Geométricos em Ambientes de Geometria Dinâmica**. Seropédica: Edur, 2019a.

HENRIQUE, M. P.; BAIRRAL, M. A. O smartphone na e com a pesquisa em educação matemática. In: BAIRRAL, M. A.; CARVALHO, M. **Dispositivos móveis no ensino de matemática**: tablets & smartphones. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019b, p. 113-130.

HENRIQUE, M. P.; BAIRRAL, M. Retas que se cortam e dedos que se movem com dispositivos de geometria dinâmica. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 1, p. 197-216, 2019.

HERSHKOWITZ, H. Ensino e Aprendizagem da Geometria. **Boletim Gepem**, n. 32, 1994.

JOHNSON, M. **El cuerpo en la mente**: Fundamentos corporales del significado, la imaginación y la razón. Tradução de Horacio Gonzáles Trejo. Madrid: Debate, 1991.

KALEFF, A. M. M. R. Tomando o Ensino da Geometria em Nossas Mãos. **Educação Matemática em Revista**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Blumenau-SC, v. 2, p. 19-25, 1994.

KENSKI, V. M. **Tecnologias e ensino presencial e a distância**. Campinas: Editora Papirus, 2009.

KINDEL et. al. Tangram. **Educação Matemática: um olhar sobre materiais manipuláveis**. Rio de Janeiro: FAPERJ, 2019.

KOLLER, S. H; COUTO, M. C. P.; HOHENDORFF, J. V. **Manual de Produção Científica**. Porto Alegre: Penso, 2014.

KÖVECSES, Z. Universalidade versus não-universalidade metafórica. Tradução Maitê Gil. In: SIQUEIRA, M. (Org.). **Cadernos de Tradução** – Instituto de Letras, UFRGS, Porto Alegre, número 25, p. 257-277, 2009.

LABORDE, C. Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría, in PUIG, L. (ed.), **investigar y enseñar. Variedades de la Educación matemática**, Bogotá: una empresa docente, 1998.

LABORDE, C.; CAPPONI, B. Aprender a ver e a manipular o objeto geométrico além do traçado no Cabri-Géomètre. **Em Aberto**, Brasília, ano 14, n.62, p.51-62, 1994.

LAKOFF, G. A metáfora, as teorias populares e as possibilidades do diálogo. **Cadernos de Estudos Linguísticos**, n. 9, p. 49-68, 1985.

LAKOFF, G. The invariance hipothesis: Is abstract reason based on image schemas? Cognitive Linguistics, v. 1, n. 1, p. 39-74, 1990. A hipótese da invariância: o pensamento abstrato está baseado em esquemas de imagem? Tradução de: Larissa Brangel e Dalby Dienstbach Hubert. **Cadernos de Tradução**, n. 31, p. 7 – 47, Instituto de Letras, UFRGS, 2012.

LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. **Where mathematics comes from**: How the embodied mind brings mathematics into being. New York: Basic Books, 2000.

LAKOFF, G; JOHNSON, M. **Metáforas da vida cotidiana**. Campinas: Mercado das Letras, 2002.

LAKOFF, G; JOHNSON, M. Metaphors we live by. Chicago: Chicago University Press, 1980. Traduzido do castelhano: **Metáforas de la vida cotidiana**. Madrid: Cátedra, 1986.

LEIVAS, J. C. P. **Imaginação, intuição e visualização**: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 294 f. 2009. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

LIMA, D. R. S.; SANTOS, J. A. F. L. O desenvolvimento de conceitos geométricos por meio do aplicativo geogebra. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 1, p. 3742-3756, 2020.

LIMA, P. C. L.; GIBBS, J. R. W.; FRANÇOSO, E. Emergência e natureza da metáfora primária - desejar é ter fome. **Cadernos de Estudos Linguísticos**, v.40, p. 107-140, jan. /jun., 2001.

LOMÔNACO, J. F. B. **A natureza dos conceitos**: visões psicológicas. Tese (Livre-docência) – Instituto de Psicologia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

LOMÔNACO, J. F. B. et al. Desenvolvimento de conceitos: o paradigma das descobertas. **Psicologia Escolar e Educacional**, Campinas, v. 4, n 2, p. 31-39, 2000.

LORENZATO, S. A. **Porque não ensinar Geometria?** In: A Educação Matemática em Revista, Ano III, n° 4, 1° semestre, p. 3-13, Blumenau: SBEM, 1995.

MACEDO, A. C. P. Categorização semântica: uma retrospectiva de teorias e pesquisa. In: **Revista do Gelne**, v. 04, número 1, 2002.

MACEDO, A. C. P. S.; FARIAS, E. M. P.; LIMA, P. L. C. Metáfora, cognição e cultura. **Gragoatá**, Niterói, v. 14, n. 26, 2009.

MARTINS, R. B; MANDARINO, M. C. F. Argumentação, prova e demonstração em geometria: análise de coleções de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental. **Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, n. 62, p. 101-115, jan./jun. 2014.

MATTA, A. E. R.; SILVA, F. F. P. S.; BOAVENTURA, E. M. Design-based research ou pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. **Revista da FAEEBA – Educação e Contemporaneidade**, Salvador, v. 23, número. 42, p. 23-36, 2014.

MAZZARDO, M. D. et al. Design-based research: desafios nos contextos escolares. **Atas CIAIQ 2016 Investigação Qualitativa**, v. 1, p. 956-965, 2016.

MEDIN, D. Concepts and conceptual structure. **American psychologist**, Washington, v. 44, número. 12, p. 1469-1481, 1989.

MEDIN, D. L.; SHOBEN, E. J. Context and structure in conceptual combination. **Cognitive Psychology**, número. 20, p. 158-190, 1988.

MEIER, M. **O uso de dispositivos móveis e tecnologia touchscreen em atividades de geometria**. Tese (Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação) UFRG. Porto Alegre, 2017.

MEIER, M.; GRAVINA, M. A. Modelagem no GeoGebra e o desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental. In: **Anais...** 1ª Conferência Latino Americana de GeoGebra, p. 250-264, 2012.

MENEZES, B. Utilização do Geogebra com smartphone: Geometria Dinâmica por meio de um cenário para investigação. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 4, n. 1, p. 68-77, 4 ago. 2018.

MORAES, A. **Publicidade on-line, ergonomia e usabilidade**: o efeito de seis tipos de banner no processo humano de visualização do formato do anúncio na tela do computador e de lembrança da sua mensagem. Dissertação. (Programa de Pós-Graduação em Design) – Departamento de Artes & Design. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

MOURA, A. M. C. **Apropriação do telemóvel como ferramenta de mediação em mobile learning: estudos de caso em contexto educativo**. (Tese de Doutoramento em Ciências da Educação, na Especialidade de Tecnologia Educativa Braga). Universidade do Minho. Instituto de Educação, Braga, 2011.

MOURA, A. M. C. Tecnologias Móveis: aprendizagem baseada em projetos. In: MIGUÉNS, M. **Aprendizagem, TIC e Redes Digitais**. Seminários e Colóquios: CNE – Conselho Nacional de Educação, pp. 78-98, 2017.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. **A geometria nas séries iniciais: Uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores**. São Carlos: EdUFSCar, 2003.

NÚÑEZ, R. Praxis matemática: reflexiones sobre la cognición que la hace posible. **Theoria**. V. 33, número. 2, p. 271-283, 2018.

OECD. **Estudiantes de bajo rendimiento Por qué se quedan atrás y cómo ayudarles a tener éxito**. Disponível em: <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/PISA-2012-Estudiantes-de-bajo-rendimiento.pdf.>. Acesso em: 04 set. 2016.

OLIVEIRA, C. A.. Dispositivos móveis na Licenciatura em Pedagogia: criar, inventar e manipular com *Angry Birds* Rio, QR CODE e Aurasma. In: BAIRRAL, M. A.; CARVALHO, M. **Dispositivos móveis no ensino de matemática**: tablets & smartphones. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019, p.59-74.

OLIVEIRA, C. A.; MERCADO, L. P. L. Ensino de matemática utilizando o aplicativo Qr code no contexto das tecnologias móveis. In: COUTO, E.; PORTO, C.; SANTOS, E. ***APP-Learning:*** experiência de pesquisa e formação. Salvador: EDUFBA, 2016. p. 211-226.

OLIVEIRA, M. B. A tradição roschiana. In: OLIVEIRA, M. B.; OLIVEIRA, M. K. **Investigações cognitivas -** conceitos, linguagem e cultura. Porto Alegre: Artmed, 1999a. p. 17-33.

OLIVEIRA, M. B. Wittgenstein, jogos e semelhanças de família. In: **Da ciência cognitiva à dialética**. São Paulo, Discurso Editorial, 1999b. p. 151-162.

OLIVEIRA, M. K. Três questões sobre desenvolvimento conceitual. In: OLIVEIRA, M. B.; OLIVEIRA, M. K. **Investigações cognitivas -** conceitos, linguagem e cultura. Porto Alegre: Artmed, 1999. p. 54-64.

PADILHA, T. A. F; DULLIUS, M. M.; QUARTIERI, M. T. Construção de fractais usando o *software* GeoGebra. **Gepem**, 62, p. 155-162, 2013.

PAVANELLO, R. M. Por que Ensinar/aprender Geometria? In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática. 2004. **Anais...** Disponível em: <http://miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais_VII_EPEM/mesas_redondas/.> Acesso em: 16 de out. 2020.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas:** Um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, João Pedro; OLIVEIRA, Paulo; CANDEIAS, Nuno. **Triângulos e quadriláteros. Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3º ciclo – 7º ano**. Lisboa: ME-DGIDC, 2009. Disponível em: <http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/temas%20matematicos/Triangulos_quadrilateros.pdf> Acesso em: 01 dez. 2020.

PORTAL G1. **Surpresas incansáveis com a inflação**. Publicado em: 27/04/2017. Disponível em: <http://g1.globo.com/economia/blog/thais-heredia/post/surpresas-incansaveis-com-inflacao.html>. Acesso em: 25 mar. 2019.

POWELL, A. B.; BAIRRAL, M.A. **A escrita e o pensamento matemático**: Interações e Potencialidades. Campinas: Papirus, 2006.

POWELL, A. B.; FRANCISCO, J. M.; MAHER, C. A. Uma abordagem à análise de dados de vídeo para investigar o desenvolvimento das ideias matemáticas e do raciocínio de estudantes. **BOLEMA**, 21, p. 81-140, 2004.

POWELL, A. B.; SILVA, W. Q. O vídeo na pesquisa qualitativa em educação matemática: Investigando pensamentos matemáticos de alunos. In: POWELL A. B. **Métodos de pesquisa em educação matemática -** Usando escrita, vídeo e internet. Campinas, São Paulo: Mercado de Letras, 2015. p. 15-60.

POZO J.I. **Teorias Cognitivas da Aprendizagem**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

PRESMEG, N. C. Visualization in high school mathematics. **For the Learning of Mathematics**, 6(3), p. 42-46, 1986.

RADFORD, R.; ANDRÉ, M. Cerebro, cognición y matemáticas. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.** 12 (2), p. 215-250, 2009.

ROSCH, E. Natural Categories. **Cognitive Psychology**, v4, p. 328-350, 1973.

ROSCH, E. Principles of categorization. In: ROSCH, E., LLOYD, B. (eds.) **Categorization and cognition**. N.J.: Hillsdale, p. 27- 47, 1978.

ROSCH, E. Recuperando os conceitos. Tradução de Dalby Dienstbach Hubert. **Cadernos de Tradução** – Instituto de Letras, UFRGS, Porto Alegre, número. 31, p. 81-106, 2012.

ROSCH, E.; MERVIS, C. B. Family resemblances: Studies in the internal structure of categories. **Cognitive Psychology**, v 7, número 4, p. 573-605, 1975.

ROTHER, E. T. Revisão sistemática x revisão narrativa. **Acta Paulista de Enfermagem**, vol. 20, n. 2, p. 5-6. 2007.

SACKS, S. **Da metáfora**. Trad. Leila Cristina M. Darin et. al. São Paulo: EDUC/Pontes, 1992.

SAYEG, M. E. M. Lexicografia e cognição. In: OLIVEIRA, M. B.; OLIVEIRA, M. K. **Investigações cognitivas**: conceitos, linguagem e cultura. Porto Alegre: Artmed, 1999. p. 65-79.

SCAGLIA, S.; MORIENA, S. Prototipos y estereotipos en geometría. **Educación Matemática**, 17 (3), 105-120, 2005.

SETTIMY, T. F. O. **Visualização em sala de aula utilizando recursos didáticos variados**. Dissertação (Mestrado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares). Instituto de Educação/ Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2018.

SFARD, A. Metaphors in education. In: DANIELS, H.; LAUDER, H.; PORTER, J. (Eds.). **Educational theories, cultures and learning**: a critical perspective. New York: Routledge, 2009. p. 39-50.

SILVA, B. C. C. da. **Justificativas e argumentações no aprendizado de quadriláteros: uma intervenção com papel, lápis e dispositivos móveis**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2017.

SILVA, G. H. G. da. Ambientes de Geometria Dinâmica: Potencialidades e Imprevistos. **Revista brasileira de ensino de ciência e tecnologia**, v. 5, número 1, 2012.

SILVA, M. S. O papel da argumentação no ensino de Geometria: um estudo de caso. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 34, p. 65-81, 1998.

SILVA, R. S. O uso da geometria dinâmica em modelagens geométricas: possibilidade de construir conceitos no ensino fundamental. **Revemat***:* Revista Eletrônica de Educação Matemática, v.10, número 2, p. 107-123, 2015.

SINCLAIR, N. et al. Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. **ZDM**, v. 48, n.5, p. 1-30, 2016.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**, Rio Claro, n. 14, p. 66-91, 2000.

STEIN, M. H.; SMITH, M. S. Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. **Revista Educação e Matemática**, Lisboa, n. 105, p. 22-28, nov./dez. 2009.

STERNBERG, R. J. Representação e organização do conhecimento na memória: conceitos, categorias, redes e esquemas. In: STERNBERG, R. J. **Psicologia cognitiva.** Porto Alegre: ArtMed, 2008. p. 262-293.

VARELA, F. J.; THOMPSON, E.; ROSCH, E. **A Mente Incorporada: Ciências Cognitivas e Experiência Humana**. Porto Alegre, RS: Artmed, 2003.

VEER, R.; VAN DER, V. **Vygotsky - Uma síntese**. São Paulo: Loyola, 1996.

VERGNAUD, G. (1993). Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed.) **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. p. 1-26.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, [1934]2010.

VIGOTSKI, L. S. **Imaginação e criatividade na infância**. São Paulo: Martins Fontes, 2014.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. Tradução: José Carlos Bruni. São Paulo: Editora Nova Cultural, 1999 (Coleção Os Pensadores: Wittgenstein).

ZAZKIZ, R.; LEIKIN, R. Exemplifying definitions: a case of a square. **Educational studies in mathematics**, 69(2), 131-148. 2008.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. Introduction: What is Mathematical Visualization? In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.). **Visualization in Teaching and Learning Mathematics** (p 1-7). Washington: MAA, 1991.

APÊNDICE 1 – TAREFAS PRELIMINARES

TAREFA PRELIMINAR 1

O que eu já conheço?

A palavra ***concorrente*** *me lembra*...
....
....*porque*..
....

um desenho possível

A palavra ***paralelo(a)*** *me lembra*...
....
....*porque*..
....

um desenho possível

A palavra ***transversal*** *me lembra*...
....
....*porque*..
....

um desenho possível

1. *O que você entende por* ***retas concorrentes****? Faça um desenho.*

Desenhe aqui.

2. *O que você entende por* ***retas paralelas****? Faça um desenho.*

Desenhe aqui.

3. *O que são* ***retas transversais****? Faça um desenho.*

Desenhe aqui.

A palavra ***ângulo*** *me lembra*..
....
....*porque*..
....
um desenho possível

A palavra ***oposto*** *me lembra*..
....
....*porque*..
....
um desenho possível

A palavra ***vértice*** *me lembra*..
....
....*porque*..
....
um desenho possível

1. *O que você entende por* ***alterno(s)****? Faça um desenho.*

Desenhe aqui.

2. *O que você entende por* ***colateral(is)****? Faça um desenho.*

Desenhe aqui.

3. *O que você entende por* ***correspondente(s)****? Faça um desenho.*

Desenhe aqui.

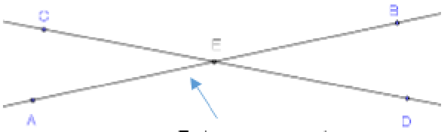
APÊNDICE 2 – TAREFAS PARA O APLICATIVO GEOGEBRA

TAREFA 1

Ângulos entre Retas Concorrentes

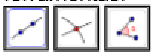
Etapa 1: Construção e Investigação

1.1. Construam duas retas que se tocam num ponto E (ver figura). Meçam os ângulos AEC, CEB, BED e DEA. Movam livremente as retas e modifiquem a construção. É possível estabelecer alguma relação entre os pares de ângulos? Se sim, qual?



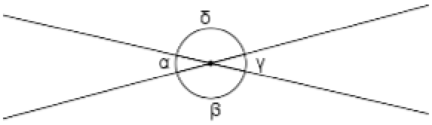
Retas concorrentes

Dicas para Construção

Utilizem as seguintes ferramentas:
 (Tocar em três pontos no sentido horário).
Para modificar a construção utilizem a ferramenta 

Etapa 2: Análise e Reflexão

2.1. Na figura a seguir qual relação existe entre os ângulos β e δ? E entre β e Y? E para os demais pares de ângulos?

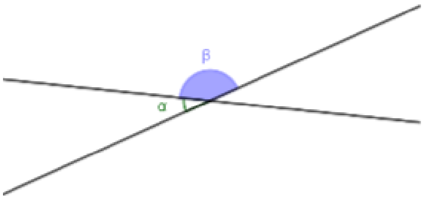


2.2. Dois ângulos são **suplementares** quando a soma de suas medidas é igual a 180º. Nesse caso, cada ângulo é suplemento do outro. Em relação à classificação um ângulo pode ser: **agudo** (< 90º), **reto** (= 90º), **obtuso** (> 90º e < 180º) e **raso** (= 180º). Com base nessas informações, analisem as sentenças abaixo:

a) Dois ângulos *adjacentes* e suplementares formam um ângulo *raso*.
b) O suplemento de um *ângulo reto* sempre será um ângulo reto.
c) Dois *ângulos agudos* podem ser suplementares.
d) O suplemento de um ângulo raso é um ângulo nulo.
e) Dois *ângulos obtusos* podem ser suplementares.

Quais são verdadeiras? Quais são falsas e por quê?

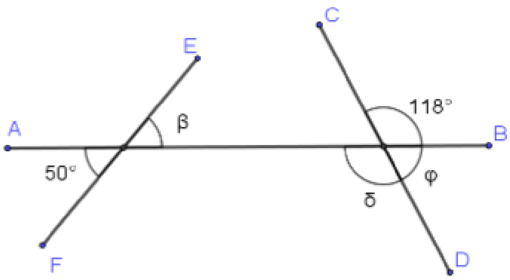
2.3. Observem a figura abaixo.



a. Quanto mede a soma dos ângulos α e β?
b. Esses dois ângulos, juntos, formam um ângulo: ....
c. Uma **bissetriz** é uma reta que divide um ângulo ao meio. Dessa forma, se a medida do ângulo α é 30º, quanto mede o ângulo formado pelas *bissetrizes* dos ângulos α e β? E se α medisse 40º? Ou 70º?
d. No GeoGebra, façam a construção e estabeleçam uma conjectura.

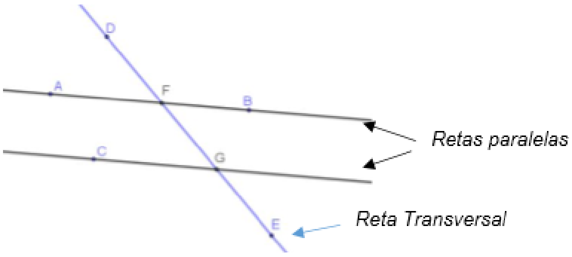
Dica: Utilizem a ferramenta

2.4. Os *segmentos* da figura a seguir destacam ângulos opostos pelo vértice e ângulos suplementares. Identifiquem os ângulos suplementares e em seguida determinem as medidas dos ângulos β, φ e δ.



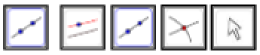
Etapa 1: Construção e Investigação

1.1. Construam duas retas paralelas e uma transversal às paralelas como mostra a figura, em seguida marquem os pontos de intersecção e movam livremente. Há alguma relação entre os pares de ângulos formados pelas retas? Se sim, qual?



Dicas para Construção

1. Utilizem as ferramentas



1.1 

1.2. Meçam os ângulos que estão do mesmo lado da transversal (por exemplo, ∠DFA e ∠CGE). Façam esse procedimento para todos as combinações possíveis (ângulos que estão do lado de fora das paralelas, os que estão entre as retas paralelas etc.). Existem relações entre os ângulos? Se sim, quais?

1.3. Meçam um ângulo de cada lado da reta transversal (por exemplo, ∠BFD e ∠CGE). Da mesma forma como no item anterior, investiguem outras possibilidades. É possível estabelecer alguma relação entre os pares de ângulos? Expliquem.

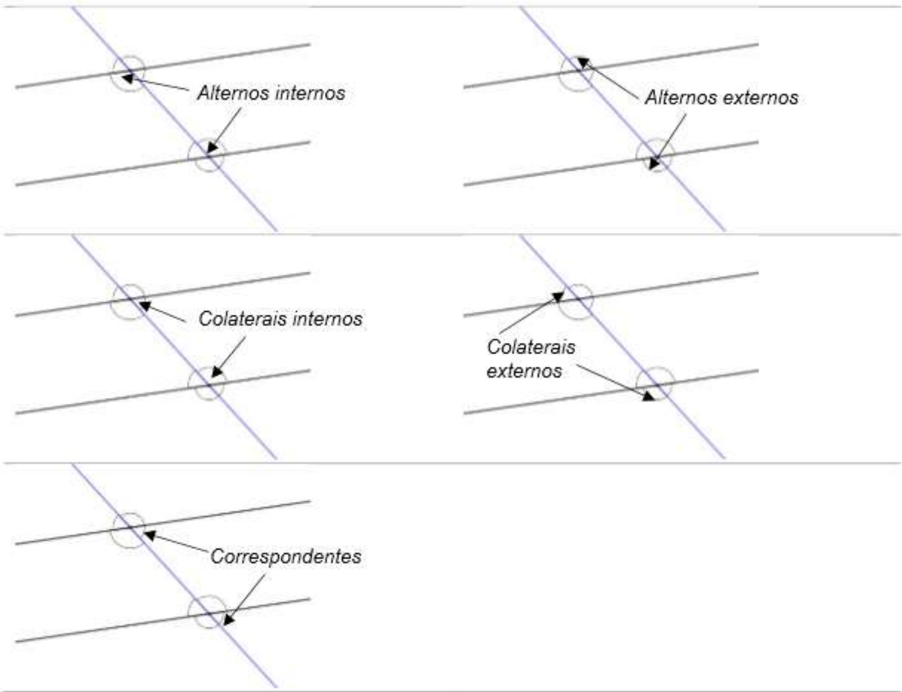
1.4. Investiguem outras relações entre os pares de ângulos que podem ser formados e registrem suas observações. Caso necessário façam desenhos para esclarecer melhor as ideias.

Etapa 2: Análise e Reflexão

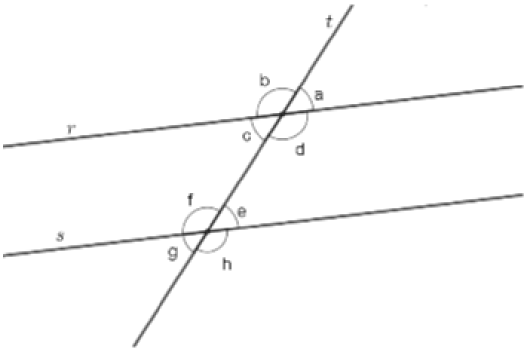
2.1. Alguns dos pares de ângulos que podem ser formados a partir da intersecção de duas retas pararelas com uma transversal já são nossos conhecidos, como os opostos pelo vértice e os suplementares. No entanto, existem outros pares que também recebem nomes especiais de acordo com sua posição. São eles:

- Ângulos **alternos** (que podem ser internos ou externos).
- Ângulos **colaterais** (que podem ser internos ou externos).
- Ângulos **correspondentes**.

Na figura a seguir identificamos alguns desses ângulos. Vejamos:



2.2. Com base nessas informações, analisem a figura a seguir destacando todos pares de ângulos de acordo com sua nomenclatura.



a) opostos pelo vértice b) suplementares c) correspondentes d) alternos internos

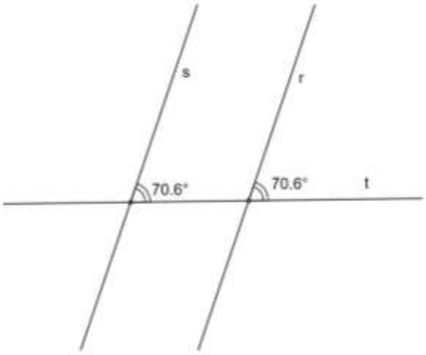
e) alternos externos f) colaterais internos g) colaterais externos

2.3. Descrevam as propriedades relacionadas a cada um dos itens anteriores.

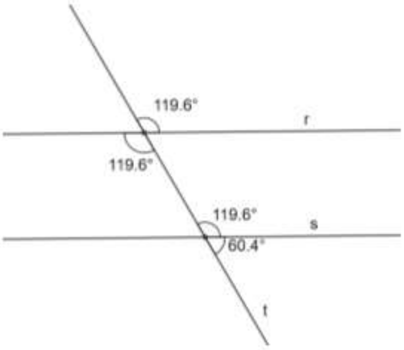
2.4. Tarefa complementar

2.5. Cada ilustração a seguir apresenta, pelo menos, um(a) dos(as) seguintes elementos/relações: retas concorrentes, retas paralelas, reta perpendicular, reta transversal, ângulos alternos, ângulos correspondentes, ângulos internos, ângulos opostos pelo vértice e ângulos suplementares. Identifique-os.

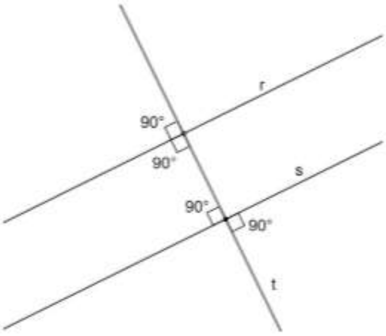
a)



b)



c)



2.6. A figura a seguir representa o mapa da região onde está localizado o Colégio Estadual Oliveira Botelho. Identifique, pelo menos, duas ruas paralelas cortadas por uma transversal.

2.7 A seguir são apresentadas *definições* e *propriedades* relacionadas às retas paralelas cortadas por uma transversal. No item **a** relacione as definições e no item **b** complete as propriedades com as palavras *congruentes* ou *suplementares*.

a. Definições

(   ) são retas no mesmo plano e não se cruzam.

(   ) são as retas que têm um único ponto comum.

(   ) é uma reta que tem interseção com as outras retas em pontos diferentes.

1. retas concorrentes 2. reta transversal 3. retas paralelas

b. Propriedades

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são ....

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternados internos são ....

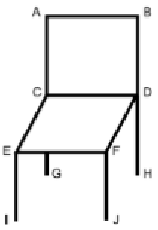
Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos alternados externos são ....

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos colaterais internos são ....

Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos colaterais externos são ....

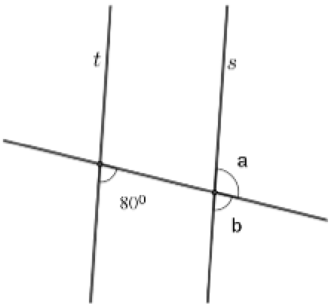
Problemas

1. (CEFET – MG) A figura a seguir representa uma cadeira onde o assento é um paralelogramo perpendicular ao encosto.

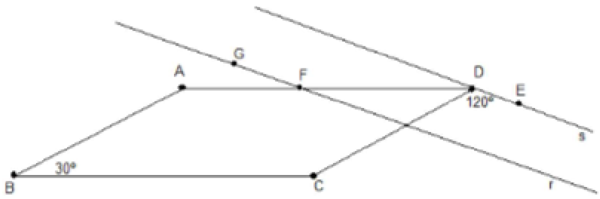


A partir dos pontos dados, é correto afirmar que os segmentos de retas
a) CD e EF são paralelos.
b) BD e FJ são concorrentes.
c) AC e CD são coincidentes.
d) AB e EI são perpendiculares.

2. Sabendo que *r* ∥ *s,* determine as medidas dos ângulos *a* e *b*. Expliquem os procedimentos utilizados.

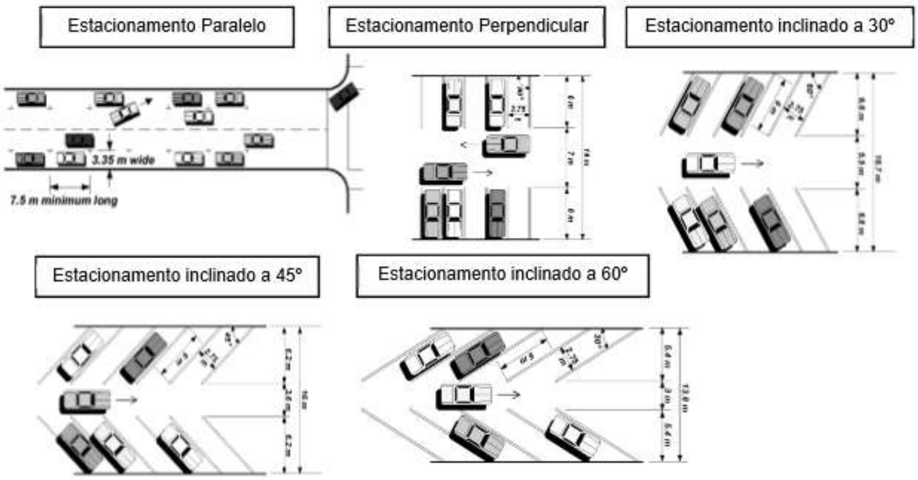


3. (CEFET – RJ) Na figura abaixo, ABCD e um paralelogramo, as retas r e s são, paralelas; D e E são pontos de s, F e G são pontos de r, F e um ponto de AD, ∠*ABC* = 30° e ∠*CDE* = 120°. Quanto mede, em graus, o angulo ∠*DFG?*



a) 120º
b) 130º
c) 140º
d) 150º

4. Áreas reservadas nas ruas e avenidas para estacionamento de veículos são projetadas de acordo com algumas das configurações a seguir:



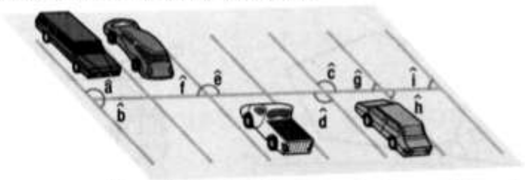
As faixas do estacionamento a 45º, representado a seguir, são paralelas. De acordo com os ângulos assinalados nessa figura, marque a alternativa CORRETA.

a) $c + g = 180°$

b) $i \neq h$

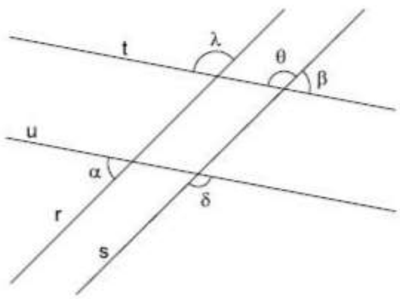
c) $c > d$

e) $a + f = 90°$



Disponível em: http://aneste.org/colgio-maria-imaculada-v2.html

5. (Vunesp) A figura representa duas retas paralelas r e s cortadas por duas retas paralelas t e u.

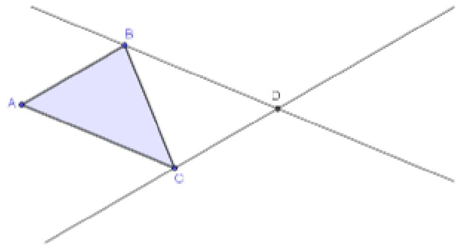


Com base na figura, é correto afirmar que:

a) ( ) α e θ são suplementares e λ e δ são congruentes.
b) ( ) α e β são suplementares e λ e θ são congruentes.
c) ( ) δ e θ são suplementares e α e λ são congruentes.
d) ( ) α e β são congruentes e λ e θ são suplementares.
e) ( ) δ e α são congruentes e θ e λ são suplementares.

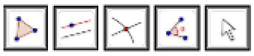
1. O Paralelogramo

1.1. Construam um triângulo ABC e as retas CD e BD paralelas aos lados AB e AC respectivamente, conforme figura a seguir. Marquem a interseção entre as retas (ponto D) e em seguida meçam os ângulos ABD, BDC, DCA, CAB. Modifiquem a construção. Que relações existem entre os ângulos? Expliquem.



Dicas para Construção

1. Utilizem as ferramentas

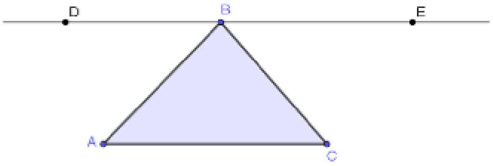


Etapa 1: Construção e Investigação

1.1. Construam um triângulo ABC. Meçam os ângulos internos do triângulo e adicionem as medidas obtidas.

1.2. Modifiquem o triângulo arrastando os vértices e verifiquem a soma dos ângulos internos. Formulem uma conjectura a respeito da soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer.

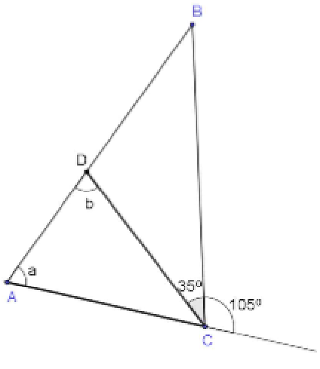
1.3. Construam um triângulo ABC e uma reta paralela ao lado AC (ver figura), em seguida marquem os pontos D e E.



a. Qual é a relação entre os ângulos ABD e BAC? Por quê?
b. Qual é a relação entre os ângulos CBE e ACB? Por quê?
c. Qual é o valor da soma dos ângulos ABD, CBE e ABC? Por quê?
d. Qual é o valor da soma dos ângulos internos do triângulo ABC? Por quê?
e. Essa constatação pode ser aplicada em outros triângulos? Expliquem (descrevam as estratégias utilizadas).

Etapa 2: Análise e Reflexão

Observem a figura abaixo.



a. Determinem as medidas dos ângulos a e b?

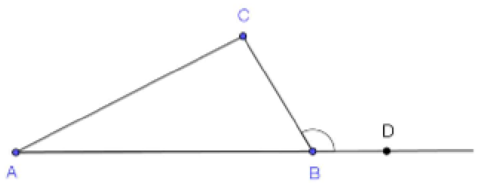
b. Especifiquem os procedimentos utilizados.

Etapa 1: Construção e Investigação

1.1. Construam uma semirreta AB e um ponto C externo à semirreta. Em seguida construam o triângulo ABC e um ponto D (ver figura). O ângulo CBD é chamado **ângulo externo** do triângulo ABC.

Dicas para Construção

Utilizem as ferramentas



1.2. Meçam as medidas dos ângulos BAC e ACB e adicionem os valores obtidos. Depois meçam o ângulo CBD. O que vocês observam?

1.3. Movam livremente um ou mais pontos a fim de modificar a construção. Adicionem novamente os valores dos ângulos BAC e ACB e comparem com o ângulo CBD. Isso sempre vai acontecer? Por quê?

Etapa 2: Análise e Reflexão

A soma dos ângulos externos de um triângulo é igual a 360º. Vocês concordam? Expliquem.

APÊNDICE 3 – TAREFAS COMPLEMENTARES

TAREFA COMPLEMENTAR
Problemas

1. Duas retas paralelas cortadas por uma transversal determinam dois ângulos colaterais externos em que a medida de um deles é o triplo da medida do outro. Faça um desenho dessa situação e determine as medidas dos oito ângulos formados entre as paralelas e a transversal.

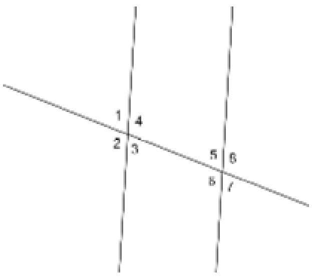
2. Analise as sentenças a seguir:
I. Os ângulos correspondentes são suplementares.
II. Os ângulos alternos internos são congruentes.
III. Os ângulos alternos externos são complementares.
IV. Os ângulos colaterais internos são congruentes.
V. Os ângulos colaterais externos são suplementares.
Quais são verdadeiras? Quais são falsas? Explique.

COLÉGIO ESTADUAL OLIVEIRA BOTELHO
Disciplina: RPM
Atividade Pontuada – Valor: 1,0 ponto
Professor: Marcos P. Henrique

Nomes: ____Turma: ______.

1. Estudantes do 8.º ano do Ensino Fundamental, quando questionados sobre o que entendiam por *alterno*, *colateral* e *correspondente,* apresentaram os seguintes conceitos:
Alterno: "*um instrumento de musculação que malha bíceps. Ele alterna braço e perna.* "
Colateral: "*algo na lateral.* "
Correspondente: "*quando alguém corresponde a algo, amor correspondido.* "

Será que essas respostas nos ajudam a pensar sobre as palavras *alterno*, *colateral* e *correspondente* no contexto da Geometria? Observem a figura a seguir e identifiquem todos os pares de ângulos de acordo com sua nomenclatura. Observação: Cada ângulo está representado por um número.



a. ângulos correspondentes: ________________.

b. ângulos colaterais internos: ________________.

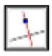
c. ângulos colaterais externos: ________________.

d. ângulos alternos internos: ________________.

e. ângulos alternos externos: ________________.

As respostas dos alunos ajudam na tarefa de dar a nomenclatura de cada par de ângulo? Expliquem.

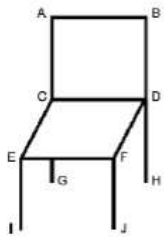
2. Vocês se lembram o que são *retas concorrentes*? Um caso especial de retas concorrestes é o de *retas perpendiculares* (símbolo: ⊥). No GeoGebra, construam duas retas perpendiculares. Dica:



Meçam os ângulos. Movam livremente as retas. O que vocês observam em relação aos ângulos?

Problemas: Explorando retas e ângulos em outros contextos

1. (CEFET – MG) A figura a seguir representa uma cadeira onde o assento é um paralelogramo perpendicular ao encosto.



Em relação aos segmentos de retas, analisem cada uma das afirmações.

a. CD e EF são paralelos.

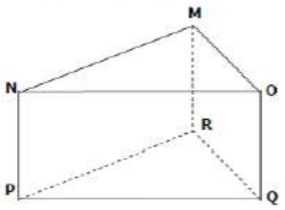
b. BD e FJ são concorrentes.

c. AC e CD são coincidentes.

d. AB e EI são perpendiculares.

As questões a seguir (adaptadas pelos autores) estão disponíveis em: http://serafinomath.weebly.com/.

2. Observe a figura abaixo.



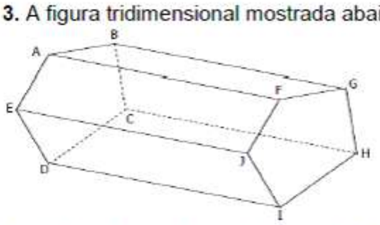
a. Identifiquem, pelo menos, dois pares de segmentos paralelos.

b. Identifiquem dois segmentos concorrentes com NM

c. Identifiquem duas transversais para as retas paralelas NO e PQ

d. Qual segmento é paralelo ao plano MRQ?

3. A figura tridimensional mostrada abaixo é o prisma pentagonal.



a. Quais segmentos parecem paralelos a BG?

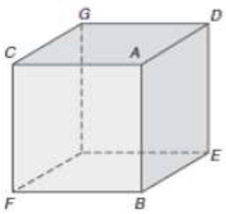
b. Quais segmentos parecem paralelos a AF?

c. Identifiquem todos os planos que parecem paralelos ao plano FGH.

d. Identifiquem quatro segmentos concorrentes com CD.

e. Identifiquem quatro segmentos concorrentes com DI.

4. Na figura tridimensional, CA ⊥ AB e BE ⊥ AB. É possível afirmar que CA e BE são paralelas? Expliquem.



APÊNDICE 4 – AUTORIZAÇÃO DA UNIDADE ESCOLAR

GOVERNO DO Rio de Janeiro
Secretaria de Estado de Educação

Governo do Estado do Rio de Janeiro
Secretaria de Estado de Educação - SEEDUC
Coordenadoria Regional Médio Paraíba
Colégio Estadual Oliveira Botelho
Censo: 33031509 U.E. 180269

CARTA DE COMPROMISSO

Venho, por meio deste, informar à Universidade Federal Rural do Rio de janeiro (UFRRJ) e à CAPES na qualidade de diretora geral do Colégio Estadual Oliveira Botelho que me comprometo a apoiar a execução das atividades do projeto de pesquisa "**Construindo e analisando práticas educativas em educação matemática com dispositivos *touchscreen***", coordenado pelo professor Marcelo Almeida Bairral (UFRRJ), em nosso estabelecimento de ensino no período de fevereiro a julho de 2018.

Resende, 05 de fevereiro de 2018.

FSMattos

Francineti da Silva Mattos ID.33093970

Francineti da Silva Mattos
Diretor
Matr.: 1.208.906-6 ID: 33093970
C. E. OLIVEIRA BOTELHO

APÊNDICE 5 – TERMO DE CONSENTIMENTO PARA PARTICIPAR EM PESQUISA

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR/INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE TEORIA E PLANEJAMENTO DE ENSINO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, CONTEXTOS CONTEMPORÂNEOS E DEMANDAS POPULARES

TERMO DE CONSENTIMENTO PARA PARTICIPAR EM PESQUISA

Sr. Coordenador, Prof. Marcelo Almeida Bairral

Eu, [redacted], abaixo assinado, autorizo o menor [redacted] participar do projeto de pesquisa **Construindo e analisando práticas educativas em educação matemática com dispositivos *touchscreen***, no Colégio Estadual Oliveira Botelho, bem como a vinculação de suas imagens, falas, respostas a atividades em apresentação de slides, encontros científicos, canais de televisão e outros meios de comunicação, caso necessário.

Declaro que fui devidamente informado e **esclarecido** pelo pesquisador sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da mesma. Foi-me garantido que posso retirar meu **consentimento** a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade.

Pesquisador: Marcos Paulo Henrique, telefones (24) 33812162/ 999036533
E-mail: marcospaulohenrique@hotmail.com

Local e data Resende, 08 de Fevereiro de 2018.

Nome: ______________________________.
Cargo na instituição pesquisada: ______________________________.
E-mail: ______________________________ Telefone ______________________________

Assinatura: [redacted].

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR/INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE TEORIA E PLANEJAMENTO DE ENSINO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, CONTEXTOS CONTEMPORÂNEOS E DEMANDAS POPULARES

TERMO DE CONSENTIMENTO PARA PARTICIPAR EM PESQUISA

Sr. Coordenador, Prof. Marcelo Almeida Bairral

Eu, [redacted],
abaixo assinado, autorizo o menor [redacted]
participar do projeto de pesquisa **Construindo e analisando práticas educativas em educação matemática com dispositivos *touchscreen***, no Colégio Estadual Oliveira Botelho, bem como a vinculação de suas imagens, falas, respostas a atividades em apresentação de slides, encontros científicos, canais de televisão e outros meios de comunicação, caso necessário.

Declaro que fui devidamente informado e **esclarecido** pelo pesquisador sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da mesma. Foi-me garantido que posso retirar meu **consentimento** a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade.

Pesquisador: Marcos Paulo Henrique, telefones (24) 33812162/ 999036533
E-mail: marcospaulohenrique@hotmail.com

Local e data Resende, 08 de fevereiro de 2018.

Nome: ______.
Cargo na instituição pesquisada: ______.
E-mail: ______ Telefone ______

Assinatura: [redacted]

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR/INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE TEORIA E PLANEJAMENTO DE ENSINO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, CONTEXTOS CONTEMPORÂNEOS E DEMANDAS POPULARES

TERMO DE CONSENTIMENTO PARA PARTICIPAR EM PESQUISA

Sr. Coordenador, Prof. Marcelo Almeida Bairral

Eu, [redacted],
abaixo assinado, autorizo o menor [redacted]
participar do projeto de pesquisa **Construindo e analisando práticas educativas em educação matemática com dispositivos *touchscreen***, no Colégio Estadual Oliveira Botelho, bem como a vinculação de suas imagens, falas, respostas a atividades em apresentação de slides, encontros científicos, canais de televisão e outros meios de comunicação, caso necessário.

Declaro que fui devidamente informado e **esclarecido** pelo pesquisador sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da mesma. Foi-me garantido que posso retirar meu **consentimento** a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade.

Pesquisador: Marcos Paulo Henrique, telefones (24) 33812162/ 999036533
E-mail: marcospaulohenrique@hotmail.com

Local e data Resende, 08 de Fevereiro de 2018.

Nome: ______________________________.
Cargo na instituição pesquisada: ______________________________.
E-mail: ______________________________ Telefone ______________________________

Assinatura: [redacted].