UFRRJ

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO

COMPARAÇÃO DE SEQUÊNCIAS: UMA PROPOSTA PARA CONCEITUAR LOGARITMOS E DESCOBRIR SUAS PROPRIEDADES

DANIELA MENDES VIEIRA DA SILVA

2017

UFRRJ

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

COMPARAÇÃO DE SEQUÊNCIAS: UMA PROPOSTA PARA CONCEITUAR LOGARITMOS E DESCOBRIR SUAS PROPRIEDADES

DANIELA MENDES VIEIRA DA SILVA

Sob a orientação da professora

Dora Soraia Kindel

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação em Ciências e Matemática**, no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática - Área de Concentração: Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática

SEROPÉDICA - RJ
2017

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

MENDES VIEIRA DA SILVA, DANIELA, 1975-
586c COMPARAÇÃO DE SEQUÊNCIAS: UMA PROPOSTA PARA CONCEITUAR LOGARITMOS E DESCOBRIR SUAS PROPRIEDADES / DANIELA MENDES VIEIRA DA SILVA. - 2017.
121 f.: il.

Orientadora: DORA SORAIA KINDEL.
Tese(Doutorado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, PPGEDUCIMAT, 2017.

1. Logaritmo. 2. Investigação matemática. 3. Teoria dos Registros de Representação Semiótica. I. KINDEL, DORA SORAIA, 1958-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. PPGEDUCIMAT III. Título.

DANIELA MENDES VIEIRA DA SILVA

COMPARAÇÃO DE SEQUÊNCIAS: UMA PROPOSTA PARA CONCEITUAR LOGARITMOS E DESCOBRIR SUAS PROPRIEDADES

Aprovada em 27 de janeiro de 2017

Prof. Dr. Marcelo Bairral-UFRRJ

Prof(a). Dra. Rosana Oliveira – UERJ

Profª. Dra. Dora Soraia Kindel-UFRRJ
Orientadora

SEROPÉDICA-RJ
2017

Dedico este trabalho ao meu marido Nazareno e a meus filhos, e em especial à minha mãe que sempre acreditou em mim por maiores que fossem as adversidades e para meu pai que ensinou-me desde os meus primeiros anos a amar profundamente a Matemática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha orientadora Dora Soraia Kindel que acreditou no potencial desta pesquisa e pela orientação e apoio constantes, também à minha banca formada por ela e pelos professores doutores Marcelo Bairral e Rosana Oliveira pelas preciosas contribuições a esta pesquisa. Agradeço também à minha família, em especial a meu marido Nazareno, meu companheiro de todas as horas, a meus filhos Laís, Tiago, Monique e Mariana e à minha mãe Eneida pelo carinho e compreensão principalmente em relação às ausências impostas pela pesquisa. Não posso deixar de agradecer também aos muitos amigos que me ajudaram nesta caminhada: a Anderson Dias Cesar, Rosangela Lannes e a Rodrigo Rosa pelas conversas amigáveis no café que tanto me auxiliaram em meus primeiros passos na pesquisa, à Ion Moutinho e Marco Aurélio Kistemann Jr., pelas constantes trocas de ideias e a Darling Domingos, Karina Costa, Isabela Alcantara, Vanessa Balbina, Rosi Quintanilha e Fábio Menezes pelas valiosas discussões do grupo colaborativo Laboratório Sustentável de Matemática. Finalmente, agradeço a meus estudantes queridos que se dispuseram a contribuir para a concretização desta pesquisa e também à minha querida diretora Luiza Helena Fraga Gouveia que abriu as portas da instituição da qual é gestora para o presente trabalho. A todos, o meu mais sincero agradecimento.

RESUMO

COMPARAÇÃO DE SEQUÊNCIAS: UMA PROPOSTA PARA CONCEITUAR LOGARITMOS E DESCOBRIR SUAS PROPRIEDADES

Esta pesquisa discute produções escritas de estudantes do Ensino Médio acerca de propriedades de logaritmos em um ambiente investigativo. Para o desenvolvimento deste trabalho apoiamo-nos no Experimento de design. Dentro deste aporte teórico fazemos a fundamentação Teórico Metodológica desta pesquisa e estabelecemos o quadro de ensino aprendizagem de logaritmos a partir da análise de um livro de referência no tema para a formação de professores, duas coleções de livros didáticos adotadas pela escola que sedia esta pesquisa e dissertações sobre o ensino do tema e um estudo conceitual do objeto matemático logaritmo. Em um segundo momento, utilizamos os cenários para investigação aliados à investigação em sala de aula para elaborar um conjunto de tarefas que facilitasse a introdução do tema logaritmos. Conjunto esse que testamos e reelaboramos em um ciclo de aplicações e aplicamos como instrumento de coleta das produções textuais dos participantes da pesquisa em um segundo ciclo. Os dados analisados com o apoio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica -TRRS indicam o alcance de diversas propriedades dos logaritmos a partir das tarefas propostas aos participantes assim como a adesão dos mesmos à investigação proposta. O produto resultante desta dissertação é um guia didático para professores contendo reflexões sobre o aporte teórico desta pesquisa em conjunto com um conjunto de tarefas para o aprendizado de logaritmos elaborado a partir da análise dos dados do presente trabalho.

Palavras-Chave: Logaritmo; Investigação matemática; Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

SEQUENCE COMPARISON: A PROPOSAL TO CONCEPT LOGARITHMS AND DISCOVER THEIR PROPERTIES

This research discusses written productions of high school students about logarithmic properties in an investigative environment. For the development of this work, we rely on the Design Experiment. Within this theoretical contribution: we make the Theoretical Methodological basis of this research and establish the teaching framework learning logarithms from the analysis of a reference book on the theme for teacher training, two collections of textbooks adopted by the school that hosts this research And dissertations on the teaching of the subject and a conceptual study of the logarithm mathematical object. Second, we used the research scenarios associated with classroom research to elaborate a set of tasks that facilitated the introduction of the logarithms theme. This set we tested and reworked in a cycle of applications and applied as a tool for collecting the textual productions of the research participants in a second cycle. The data analyzed with the support of Theory of Registers of Semiotic Representation - TRRS indicate the scope of several properties of the logarithms from the tasks proposed to the participants as well as their adherence to the proposed research. The resulting product of this dissertation is a didactic guide for teachers containing reflections on the theoretical contribution of this research together with a set of tasks for the learning of logarithms elaborated from the data analysis of the present work

Keywords: logarithm; Mathematics research; Theory of Semiotics Representation Registers.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS

CEDERJ – Centro de Educação à Distância do Estado do Rio de Janeiro
CEFETRJ - Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca
DBR- Experimento de *design*
ETV- Ensino Tradicional Vigente
IFES - Instituto Federal do Espírito Santo
LM – Laboratório de Matemática
Log – Logaritmo
P.A. – Progressão Aritmética
P.G. – Progressão Geométrica
pH- Potencial Hidrogênico
PUC MG- Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUCRS – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul
TRRS -Teoria dos Registros de Representação Semiótica
TV – Televisão
UEA - Universidade do Estado do Amazonas
UEL - Universidade Estadual de Londrina
UFAL -Universidade Federal de Alagoas
UFG - Universidade Federal de Goiás
UFPE - Universidade Federal de Pernambuco
UFPEL - Universidade Federal de Pelotas
UFU -Universidade Federal de Uberlândia
ULBRA - Universidade Luterana do Brasil
UNESP - Universidade do Estado de São Paulo

1. INTRODUÇÃO

> "Mas, como na escola quem deve resolver os problemas são os estudantes, por que não ouvir a sua voz?"
>
> Bruno D'Amore

Esta dissertação apresenta reflexões sobre as produções escritas de estudantes em grupo frente a um percurso formativo sobre a introdução aos logaritmos a partir da comparação entre sequências numéricas. Buscamos, em particular, elaborar e implementar tarefas de caráter investigativo analisando as interações dos estudantes. A dinâmica de trabalho se constitui de encontros presenciais em diferentes contextos.

Este trabalho se insere na linha de pesquisa Processos em Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática do Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

O tema em foco surge a partir das necessidades curriculares da instituição que abriga esta pesquisa e na qual atuo como professora desde 2014, ano de sua fundação. Trata-se de uma escola técnica em telecomunicações em que há uma demanda do corpo técnico da instituição por um trabalho bem fundamentado na formação do conceito de logaritmo, uma vez que todas as unidades de medidas utilizadas em telecomunicações são derivadas destes nas bases binária, neperiana e decimal. As áreas de análise e projetos de sistemas e medidas em telecomunicações requerem o uso intensivo do decibel[1]. Algumas das equações, tais como o teorema de Shanon, que limita a taxa máxima de um canal, e atenuação em espaço livre são calculadas por logaritmos: binário e decimal, respectivamente. A própria teoria da informação, base das telecomunicações é definida por um logaritmo na base binária. O logaritmo está permeado em todas as disciplinas do curso técnico em telecomunicações[2]e, principalmente, nas disciplinas sistemas de telecomunicações, redes de fibra ótica, sistemas de satélite, infra-estrutura. (NAVAS, 2015).

Diversas pesquisas se ocupam da aprendizagem de Matemática (D'AMORE, 2007; DUVAL, 2009), elas indicam que os esforços para a construção deste conhecimento devem centrar-se sobre a aprendizagem. Buscamos para este trabalho, portanto, o distanciamento do Ensino Tradicional Vigente - ETV que tem a primazia da memorização de conteúdos estanques como característica principal e que está associado ao ensino. A respeito deste sabemos que:

> [...] no ensino tradicional vigente, aqui denominado ETV, o aluno se mantém numa situação de "fazer de conta" que está entendendo, para que o professor possa chegar mais rapidamente, sem digressões ou interrupções, à solução "oficial". O aluno, ao invés de procurar descobrir se estaria em condições de oferecer uma solução possível, concentra-se em "adivinhar" a que solução o professor pretende chegar ou qual resposta quer ouvir. Não há lugar para o significado, mas apenas para uma negociação mútua a respeito do que se supõe que deva ser entendido (SILVA, 1998, p.1).

[1] Definido a partir do logaritmo na base 10.
[2] Oferecido pela escola que abriga esta pesquisa.

Quando estudei os logaritmos pela primeira vez, eu mesma os decorei dentro do ETV. Lembro que estava no primeiro ano do Ensino Médio[3] quando o professor rapidamente colocou a fórmula no quadro seguida de um exemplo e passou uma série de exercícios repetitivos para que fixássemos o conteúdo. Reencontrei-me com este conceito no pré-vestibular[4] no qual novamente o professor seguiu a mesma metodologia do anterior.

Mais tarde, na licenciatura em Matemática[5], novamente deparei-me com os logaritmos e novamente encontrei-me com a sua tradicional abordagem. Portanto, o meu percurso de formação não só deste conceito, mas também de outros conceitos matemáticos se deu dentro do dessa perspectiva. Por este motivo, para mim, foi muito natural repetir este mesmo processo com meus estudantes quando passei a atuar como professora de Matemática em 2009: inicialmente em escolas da rede particular e, a partir de 2010, como professora da Rede Estadual do Rio de Janeiro, onde leciono atualmente.

Em minha concepção eu conhecia os logaritmos, pois havia decorado a fórmula e feito uma quantidade infindável de exercícios de fixação. Essa afirmação nada tem de exagerada, pois exercícios numerosos e repetitivos fizeram parte de minha formação enquanto estudante. Mas, como professora, sentia uma inquietação sempre presente, uma vez que observava que, não obstante meus esforços, eu não obtinha o retorno esperado dos meus estudantes no aprendizado deste tema.

Meu desconforto em relação a este assunto persistiu até que um dia, ao ler a reportagem sobre logaritmos: "A coisa sem sentido faz sentido há séculos" publicada na Revista Cálculo[6] por Simões & Sônego (2013), tive um despertamento. Estes autores, na matéria supracitada discutem diversas propriedades dos logaritmos a fim de construir a sua estreita relação com a potenciação. Tal abordagem me interessou sobremaneira, de forma que investigar o processo de ensino aprendizagem de logaritmos a partir de suas propriedades passou a se constituir no foco de meus interesses tanto como professora quanto como pesquisadora. Neste trabalho, portanto, a aprendizagem deste tema está no centro de nossas discussões. Na sequência, discutimos o problema e os objetivos da presente pesquisa.

PROBLEMA E OBJETIVOS

Levantamos a questão problema: quais são as produções escritas de estudantes do ensino médio frente a uma introdução investigativa ao conceito de logaritmos? Como eles representam, convertem e tratam as propriedades do conceito em jogo e o que isto nos indica?

Para responder a esta questão procuramos elaborar um conjunto de tarefas para a introdução do conceito de logaritmos como operações entre expoentes que estimulasse os estudantes a empreender e a escrever sua busca em grupo por regularidades visando à construção de propriedades do logaritmo em uma perspectiva investigativa.

Em particular buscamos: 1) Estabelecer o quadro de ensino aprendizagem de logaritmos identificando: de que forma estes são apresentados em um livro de grande influência para a formação de professores, duas coleções de livros didáticos adotados pela

[3] Escola Técnica Pandiá Calógeras, primeiro ano básico, Volta Redonda-RJ.

[4] Pré Vestibular Social do CEDERJ/Polo E.E. Barão de Mauá-Volta Redonda/RJ (O CEDERJ é um consórcio formado por seis universidades públicas do Estado do Rio de Janeiro (UERJ; UENF; UNIRIO; UFRJ; UFF; UFRRJ) e um centro universitário (CEFET-RJ) em parceria com a Secretaria de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação do Rio de Janeiro).

[5] Licenciatura em Matemática oferecida pela Universidade Federal Fluminense em parceria com o consórcio CEDERJ, polo Volta Redonda-RJ.

[6] A Revista Cálculo foi uma publicação da Editora Segmento dedicada a explorar a Matemática de forma diferenciada, sua publicação foi encerrada no ano de 2015.

escola em que a pesquisa é desenvolvida e em dissertações de mestrado a respeito do tema; 2) Elaborar uma abordagem que parta de situações particulares envolvendo as relações entre seqüência numéricas e a busca da generalização destas relações para a introdução do conceito de logaritmos; 3) Identificar os fenômenos de representação, conversão e tratamento na produção escrita dos estudantes.

ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

No presente capítulo desta dissertação temos a apresentação, justificativa, problema, objetivos e estrutura da pesquisa.

O segundo capítulo desta dissertação traz a fundamentação teórico-metodológica que é constituída da fundamentação teórica que orienta este trabalho e também de seus procedimentos metodológicos.

Nossa opção para a elaboração da pesquisa parte do pressuposto de que numa sala de aula as tomadas de decisão acontecem a todo o momento, baseadas na interação entre todos os participantes, professor e estudantes, assim como as reações diante das tarefas propostas de modo a que todas as mudanças possam ser incorporadas no processo. Este tipo de pesquisa já vem acontecendo desde a década de 70 e é denominada *Design Experiment.* Mais tarde denominado Experimento de *design*. Ela pode ser caracterizada, segundo Cobb *et al* (2003), como sendo: intervencionista, pragmática e teórica, de caráter iterativo, o que surge a partir de duas outras características, a de ser prospectiva e reflexiva.

Também optamos, para a elaboração de tarefas, pela investigação Matemática subsidiada pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica - TRRS. Para tanto, buscamos os aportes teóricos de Skovsmose (2000) e Ponte (2003): o primeiro em uma perspectiva teórica na qual cenários para investigação são discutidos e o segundo em uma perspectiva prática uma vez que este autor tem longa bibliografia de pesquisa e aplicação em sala de aula de atividades investigativas. Para ambos investigar e ensinar Matemática relacionam-se intimamente em uma perspectiva de resolução de problemas abertos. Para um aporte cognitivo aos dois referenciais supracitados escolhemos utilizar a TRRS, pois ela se reúne a estes devido ao seu suporte à compreensão de produções feitas a partir da resolução de problemas. Também a TRRS é utilizada por nós na análise dos dados coletados a partir da vivência das tarefas elaboradas. O referido capítulo é encerrado com os procedimentos metodológicos de coleta e análise de dados desta pesquisa.

O terceiro capítulo desta dissertação traz um panorama geral do quadro de ensino aprendizagem de logaritmos, nele buscamos apresentá-los como operações com expoentes utilizando como pano de fundo a coordenação de registros congruentes de acordo com a TRRS, o que segundo este referencial se constitui em um caminho cognitivamente econômico facilitando, portanto, o entendimento do exposto[7].

Analisamos também a apresentação do logaritmo no livro Logaritmos de Elon Lages Lima. Além deste livro, fazemos observações sobre duas coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio adotadas e utilizadas pela escola que sediou esta pesquisa. São estas as coleções: Matemática Paiva e Matemática e aplicações de Iezzi e colaboradores.

Também fazemos uma análise das contribuições das pesquisas em Educação Matemática sobre o processo de ensino aprendizagem de logaritmos buscando compreender e destacar quais são os objetivos, referenciais teóricos, temáticas e resultados trazidos e quais

[7] Para Duval (2009, 2013), a coordenação de registros é necessária para a formação de um conceito matemático, as pesquisas deste teórico relacionam a congruência na conversão decorrente da coordenação de registros como associada ao sucesso escolar.

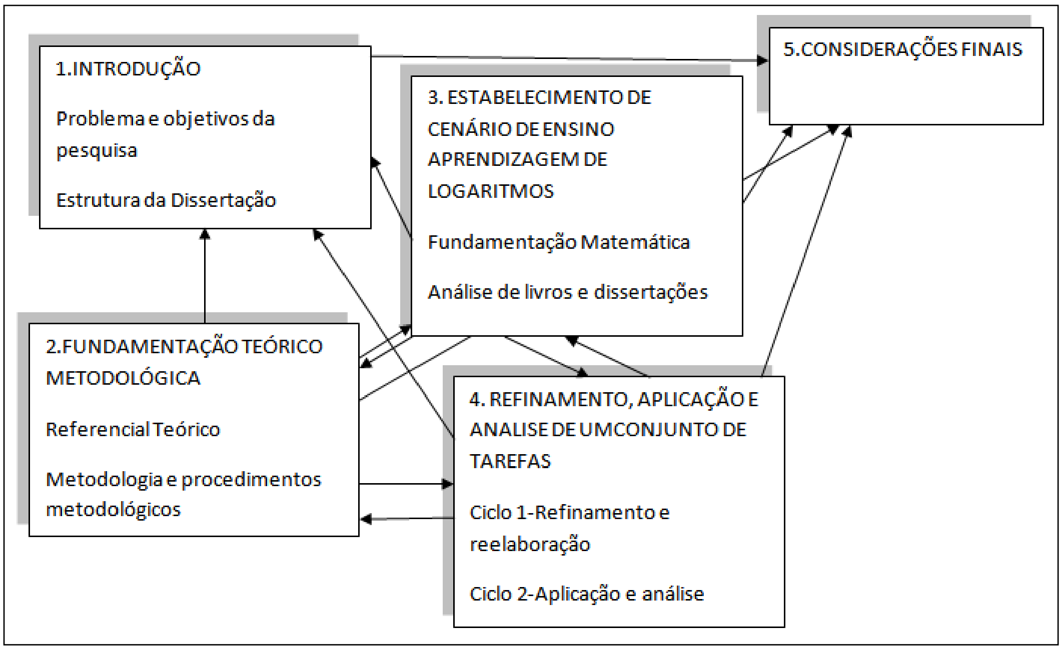
são os pontos de convergência entre elas.

Ao transitar de uma reflexão sobre o conceito matemático em foco, passando por sua apresentação em um livro de formação de professores assim como em livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio e fechando com a análise de pesquisas que tem trazido reflexões sobre o tema em questão; buscamos compor um quadro para estabelecer diferentes perspectivas do processo de ensino aprendizagem deste tema. Assim, nosso olhar se volta para especificidades do nosso lócus de pesquisa com o objetivo de melhor compor o conjunto de tarefas que subsidia nossa coleta de dados, percurso de construção, coleta e análise do qual falamos adiante.

O quarto capítulo desta dissertação traz os dois ciclos iterativos de aplicação do conjunto de tarefas: o primeiro consistindo na aplicação e refinamento deste que, como já citado, busca introduzir o conceito de logaritmos, no qual nossos olhares estão sobre as tarefas e sua possibilidade de motivar o aluno a escrever e a descrever a sua busca por regularidades e o segundo no qual o nosso olhar está sobre as produções escritas dos participantes feitas a partir da vivência do referido conjunto refinado no primeiro ciclo.

No quinto capítulo desta dissertação fechamos o trabalho com as considerações finais.

Quadro 1: Mapa Esquemático da dissertação



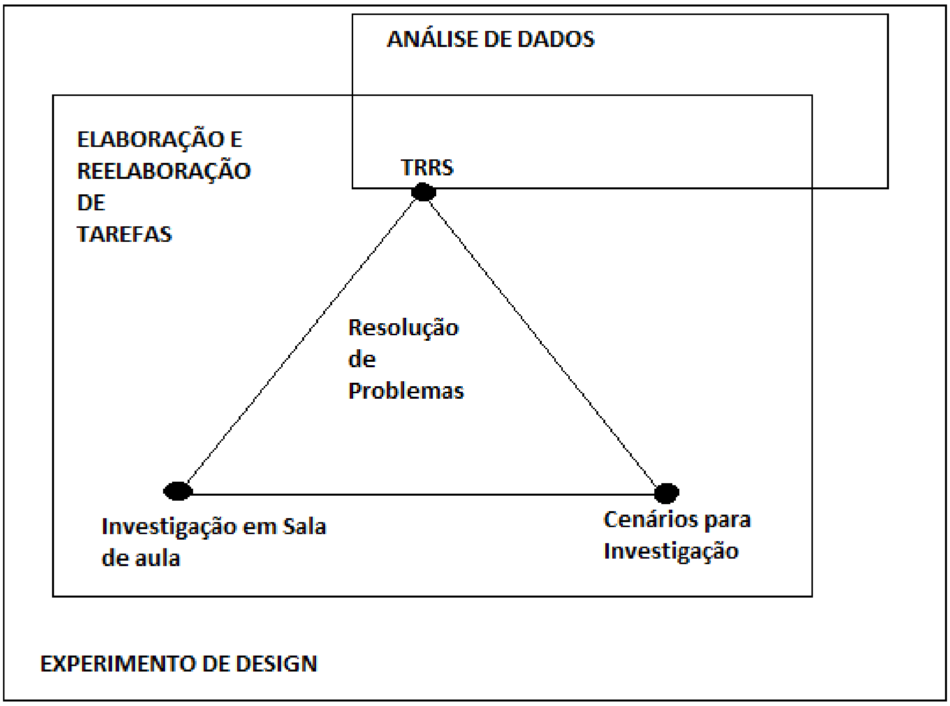
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO METODOLÓGICA

Descrevemos a seguir aspectos das teorias que nos auxiliam no presente estudo. Primeiro apresentamos o experimento de design (COBB, 2003) que consiste em nossa metodologia de pesquisa uma vez que ele propõe uma intervenção teoricamente orientada em um contexto.

Posteriormente, para fundamentar a elaboração e reelaboração do conjunto de tarefas que nos propomos aqui a criar e a refinar, trazemos a investigação em sala de aula de Ponte (2005) em conjunto com os cenários para investigação de Skovsmose (2000) aliadas à TRRS de Duval (2009, 2013). Estes três últimos referenciais têm em comum a relação com a resolução de problemas.

Portanto, a reunião destes nos permite não só uma abordagem prática da investigação articulada à teoria dos cenários para investigação, mas também um olhar sobre como tal união pode se processar cognitivamente. A TRRS também norteia a nossa busca do objeto matemático em foco e embasa as análises do presente trabalho. O quadro adiante explicita as relações entre as teorias elencadas para embasar nossa pesquisa (quadro 2).

Quadro 2: Conexão entre as teorias que embasam esta dissertação



2.1. EXPERIMENTO DE DESIGN

O Experimento de design é uma metodologia de pesquisa que reúne as vantagens das pesquisas qualitativas e quantitativas. Seu foco repousa no desenvolvimento de aplicações que possam, de fato, ser incorporadas ao dia a dia escolar. Esta metodologia reconhece e considera a diversidade e as especificidades destes espaços, mas também procura o que possa ser generalizado, buscando assim disseminar aprendizados locais (MATTA *et al*, 2014).

Segundo Kindel “[...] o experimento de design supõe ser uma cama de testes para inovações educativas, ocorrendo em ciclos de experimentação, no qual a cada ciclo é possível modificar o experimento, a partir da análise empírica” (KINDEL, 2012, p. 48). Ele proporciona testes e revisões que tem como resultante um desempenho sistemático nos experimentos. Trata-se de método científico de investigação cuja análise do pesquisador se constitui em seu foco principal. Tal metodologia objetiva analisar processos de aprendizagem, o que nos interessa no presente estudo (COOB, *et. al*., 2003).

O Experimento de *design* tem cinco características que buscamos atender no presente trabalho: 1) É teoricamente orientado: ele se inicia e termina tendo teorias como base. Uma das coisas mais importantes no Experimento de *design* é a utilização de uma base teórica na qual, a partir das reflexões nascidas na pesquisa, contribuições são acrescentadas a ela visando aprimorá-la; 2) Intervencionista: utiliza a teoria para intervir no contexto pesquisado buscando melhorar os processos a que ela busca dar suporte de pesquisa; 3) Colaborativo: se funda na necessidade da existência de diversos graus de cooperação entre todos os envolvidos, não sendo possível desenvolvê-la de forma solitária; 4) Fundamentalmente Responsivo: toda a metodologia se dá em uma perspectiva dialógica; 5) Iterativo: não é feito para terminar, sempre está e estará em andamento.

Adiante apresentamos de que forma a união das investigações em sala de aula aliadas aos cenários para investigação nos auxiliam na criação de um conjunto de tarefas para a introdução do conceito de logaritmos que incentive a produção intelectual dos estudantes.

2.2. INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: QUADRO TEÓRICO E PRÁTICAS

Dado que com o presente trabalho tencionamos ver o que estudantes do Ensino Médio dizem a partir de um conjunto de tarefas que busca introduzir o conceito de logaritmos em uma perspectiva investigativa, entendemos que o aceite destes ao convite feito por nós para a investigação é essencial.

Para nós este aceite pode ser facilitado pela construção do cenário para investigação proposto por Skovsmose (2000) aliado à abordagem proposta por Ponte (2005) para o trabalho em sala de aula. Ambos pressupõem uma adesão do estudante ao convite para investigar, adesão essa a partir do qual ele se mostra motivado para a escrita de suas inferências.

Adiante discutimos de que forma estes referenciais contribuem para o alcance dos nossos objetivos de pesquisa.

AMBIENTES DE APRENDIZAGEM: PARADIGMA DO EXERCÍCIO X CENÁRIOS PARA INVESTIGAÇÃO

Segundo Skovsmose (2000) as ações tomadas em sala de aula, entendida aqui como ambiente de aprendizagem, para produção de significado podem ser referidas conforme as seguintes classificações adiante: a) Referências a Matemática Pura; b) Referências a Semi realidade; c) Referências ao Mundo Real.

Cabe aqui salientar que cada uma dessas três referências pode estar focada em dois paradigmas possíveis para práticas das salas de aula, sendo o primeiro o paradigma do exercício, ou seja, algo que tem uma única resposta já conhecida e o segundo seria o cenário para investigação, em que as perguntas são abertas e para as quais não existe uma única resposta ou pode nem haver resposta conhecida.

Segue adiante um quadro ilustrativo indicando os seis ambientes possíveis elencados por Skovsmose (2000) dentro dos dois paradigmas supracitados (tabela1):

Tabela 1: Ambientes de Aprendizagem
Fonte: (SKOVSMOSE, 2000, p.8)

	Paradigma do exercício	**Cenário para Investigação**
Referência à Matemática pura	(1)	(2)
Referência à Semi realidade	(3)	(4)
Referência ao Mundo real	(5)	(6)

Discutimos abaixo cada um dos seis ambientes elencados na tabela 1 e os ilustramos com exemplos retirados dos livros didáticos analisados por nós na presente pesquisa e também com o conjunto de tarefas elaborado por nós no presente trabalho.

Os ambientes (1) e (2) pertencem à Matemática Pura: No primeiro ambiente as atividades são do tipo “resolva”, “determine”, “ligue a coluna da esquerda à da direita”. Já no segundo ambiente temos uma pergunta aberta que permite uma gama de respostas e inferências possíveis. Isto significa que embora os ambientes (1) e (2) estejam ligados à Matemática pura, é a forma com que se aborda e a maneira como se trabalha cada um que os diferencia.

Adiante trazemos exemplos dos cenários 1 e 2 (tabela 2):

Tabela 2: Ambientes de aprendizagem (1) e (2)

Os ambientes (1) e (2) tratam da Matemática Pura.	
Ambiente (1)	**Ambiente (2)**
Qual é o número real x em $log_x 4 = -2$?(IEZZI, 2010, p. 152).	Nosso conjunto de tarefas se insere neste cenário

Entendemos que o ambiente de aprendizagem (2) traz uma abordagem que se distancia do ETV em relação à Matemática pura, propiciando ao aluno investigar sobre o assunto abordado. Isto pode ser uma abordagem adequada uma vez que estamos trabalhando com a reunião de propriedades do conceito em atividades que buscam trabalhar as propriedades dos logaritmos sem enunciá-las.

Apontamos aqui que o fato da tarefa acontecer dentro da Matemática pura distanciando-se do cotidiano não significa que se trate de uma tarefa descontextualizada, uma vez que um contexto é muito mais do que uma associação ao cotidiano. Pode-se dizer que uma tarefa que faça sentido dentro de um conjunto pode ser dita contextualizada (KINDEL, 2013).

Neste ambiente (2) não existe resposta única, às vezes é possível que não exista resposta, a importância está no percurso e não no destino. Optamos, portanto, por trabalhar dentro deste cenário para investigação na presente pesquisa.

Os ambientes (3) e (4) pertencem ao que Skovsmose (2000) denomina Semi Realidade, ou seja, uma situação falsamente contextualizada (tabela 3):

Tabela 3: Ambientes de aprendizagem (3) e (4)

Os ambientes (3) e (4) tratam da semi-realidade que é uma realidade construída, uma situação artificial.	
Ambiente (3)	**Ambiente (4)**
O número de elementos de uma determinada espécie animal diminuiu à taxa de *10%* ao ano. Em quantos anos esse número ficará reduzido à metade de seu valor atual? Indique o número inteiro mais próximo; use as aproximações *log 2= 0,301* e *log 3 = 0,4771(*IEZZI, 2010, p. 181).	Uma opção para o ambiente 4 deve forçosamente ser constituída de questões calcadas na semi-realidade e que sejam abertas. Não encontramos questões deste tipo nos livros analisados nesta pesquisa.

Os Ambientes de aprendizagem (5) e (6) fazem referência à vida real, o que, ao contrário do que possa parecer, não é bom ou ruim a priori, pois este autor nos mostra que a forma importa mais do que a aparência uma vez que mesmo dentro de uma referência ao mundo real, é possível que estejamos em uma perspectiva mecânica. Ou seja, no que este autor denomina paradigma do exercício, uma vez que esta referência ao mundo real pode apenas mascarar uma tarefa com uma única resposta conhecida (Ambiente 5) conforme podemos observar na tabela 4:

Tabela 4: Ambientes de aprendizagem (5) e (6)

Os Ambientes de aprendizagem (5) e (6) tratam da realidade.	
Ambiente (5)	**Ambiente (6)**
Um grupo de estudantes resolveu repetir a medição de altura do Pico da Neblina feita na década de 1960. Para isso, escalaram essa montanha e levaram um barômetro. Chegando ao cume da montanha, efetuaram várias medições da pressão atmosférica do local e obtiveram o valor médio de *530 mmHg*. A pressão atmosférica p(h) a uma dada altura h (em metros, em relação ao nível do mar) é fornecida pela função $p\ (h) = p_0 \cdot ^{e\ \alpha}$, h sendo e a base do sistema de logaritmos neperianos, *p0= 760 mmHg* a pressão atmosférica no nível do mar, e α um número que depende principalmente da temperatura média no local de medição. Sabendo-se que, nas condições deste experimento, *α=-0,00012* e que os estudantes usaram os valores aproximados *ln (760)=6,63* e*ln(530) = 6, 27*, qual é a altura que encontraram para o Pico da Neblina?(IEZZI, 2010, p.180).	Uma opção para o ambiente 6 deve forçosamente ser constituída de questões calcadas na realidade e que sejam abertas. Não encontramos questões deste tipo nos livros analisados nesta pesquisa.

INVESTIGAÇÃO EM SALA DE AULA

Uma vez que os cenários para investigação estão apresentados, podemos abordar a investigação Matemática para posteriormente uní-la a estes. A investigação Matemática pode facilitar a construção do raciocínio matemático dos estudantes uma vez que se constitui em momentos variados que os estimulam a levantar questões, formular, testar e justificar inferências e a avaliar seu raciocínio. Segundo Ponte:

> A realização de atividades de investigação na aula de Matemática são importantes porque elas: (a) constituem uma parte essencial da experiência Matemática e, por isso, permitem uma visão mais completa desta ciência; (b)

> estimulam o envolvimento dos estudantes, necessário a uma aprendizagem significativa; (c) podem ser trabalhadas por estudantes de ciclos diferentes, a níveis de desenvolvimento também diferentes; e (d) potenciam um modo de pensamento holístico (ao relacionarem muitos tópicos), essencial ao raciocínio matemático (CUNHA & PONTE, 1995, p. 161).

A tabela adiante busca relacionar cada um destes momentos.

Tabela 5: Momentos da realização de uma investigação
(PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2005, p. 21)

Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problemática Explorar a situação problemática Formular questões
Inferências	Organizar dados Formular inferências (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	Realizar testes Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

A investigação Matemática também se ocupa da resolução de problemas uma vez que, segundo Ponte (2016)[8], ambas pertencem à mesma categoria de prática de ensino.

> Na minha perspectiva, as tarefas mais vocacionadas para servir de base a investigações Matemáticas podem ser consideradas como "problemas". Existem passagens de vários livros de Polya, por exemplo, em "*Mathematical Discovery*", em que são apresentadas e discutidas tarefas de investigação. Por isso, penso que se pode considerar a investigação na sala de aula como uma forma de trabalho que se enquadra na resolução de problemas (PONTE, 2016, manuscrito).

O problema se diferencia do exercício uma vez que esse propicia o surgimento de reflexões na construção de conceitos matemáticos, postura esta desejada por nós neste trabalho. Ou seja, pretendemos especificamente que o aluno desenvolva recursos técnicos e procedimentos os mais variados que julgar necessários para que chegue, por seus próprios meios, à construção de propriedades do objeto matemático logaritmo. Utilizando, portanto, sua própria bagagem cognitiva sem nenhum compromisso com fórmulas e/ou rotinas mecanizadas. Por problema entendemos com D'Amore (2007) que:

> Tem-se, por outro lado, um problema quando uma, ou mais, das regras ou um, ou mais dos procedimentos necessários ainda não estão na bagagem cognitiva do responsável por resolvê-lo; na ocasião, algumas dessas regras ou algum desses procedimentos poderiam inclusive estar em via de explicitação; às vezes, é a própria sucessão de operações necessárias para resolver o problema que demandará um ato criativo por parte de quem precisa resolvê-lo (D'AMORE, 2007, p. 286).

[8] Manuscrito.

Quanto aos exercícios, sabemos que estes possuem respostas únicas e, portanto, podem não levar os estudantes a reflexões aprofundadas. O esquema adiante (tabela 6) busca explicitar a diferença entre problema e exercício para fundamentar a nossa opção pelo primeiro nesta pesquisa:

Tabela 6: Diferenças entre problemas e exercícios
(DAMORE e ZAN *apud* D'AMORE, 2007, p. 300)

	Problema	**Exercício**
No ensino	Instrumento de aquisição de conhecimento	Instrumento para consolidar conhecimentos e habilidades
	Objeto de ensino	Instrumento para verificar conhecimentos e habilidades
Privilegia	Processos	Produtos
O professor	Escolhe os problemas	Escolhe os exercícios
	Segue os processos	Corrige e avalia os produtos
O sujeito tem um papel	Produtivo	Executivo

Portanto, neste trabalho, reunimos a Matemática pura do segundo cenário de Skovsmose com a investigação de Ponte visando despertar os estudantes a escrever suas inferências explicitando seus raciocínios através da escrita.

No próximo item abordamos a TRRS que nos auxilia a construir a nossa apresentação dos logaritmos e também na análise dos materiais que compõe o cenário de ensino aprendizagem deste objeto para professores e estudantes secundaristas e dos registros escritos dos estudantes participantes.

2.3. TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA-TRRS

A TRRS dá suporte a diversos estudos que visam compreender a forma como as pessoas constroem o conhecimento matemático. Esta teoria tem relação com a representação, tratamento e conversão de conceitos matemáticos.

Dentro da TRRS, o foco deve estar no aprendiz, o que subordina o objeto a ser ensinado à cognição deste, cognição esta que se liga às questões de representação. Salientamos aqui que a TRRS tem a resolução de problemas em comum com os Cenários para Investigação e com a Investigação em sala de aula, uma vez que segundo este autor (2009, 2013) "A distinção dos dois tipos de transformações, que são as conversões e os tratamentos, constitui uma ferramenta precisa e necessária para analisar a atividade de resolução de problemas em matemáticas" (DUVAL, 2009, p.11).

COMPREENDENDO OS FENÔMENOS DE REPRESENTAÇÃO

Para Duval (2009), uma das questões centrais relativas ao aprendizado de Matemática é a confusão que normalmente se estabelece acerca de objeto e representação, o que não ocorre, pelo menos em estágios iniciais, em outras ciências. Ele afirma que este se constitui em um paradoxo cognitivo do pensamento matemático; uma vez que se mostra particularmente difícil não confundir um objeto e sua representação, uma vez que não temos acesso a esse objeto a não ser por meio desta. Dessa forma, esta representação não pode ser literal uma vez que um objeto matemático por mais elementar que seja, ao contrário de objetos concretos, não pode ser acessado a não ser por meio de representações que se façam dele.

Uma representação tem atrelada a si três atividades cognitivas que segundo Duval (2009) são:

> Primeiramente, constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como uma representação de alguma coisa em um sistema determinado. Em seguida, transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação às representações iniciais. Enfim, converter as representações produzidas em um sistema de representações produzidas em um sistema em representações de outro sistema, de tal maneira que esta últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado. (DUVAL, 2009, p. 37).

Portanto para nos acercarmos de objetos matemáticos devemos forçosamente recorrer a um sistema semiótico. “Para Duval, a noção de registro semiótico de um objeto matemático pode se referir a uma das seguintes modalidades de representação: símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos ou desenhos” (MOUTINHO & PAIS, 2016, p.3).

Dentre os sistemas semióticos supracitados destacamos a língua natural, pois os significados dentro dela estão culturalmente estabelecidos. A palavra mesa ilustra esta idéia; pois ela representa o que estabelecemos em um meio cultural como objetos que podem ser caracterizados como um móvel que tenha um tampão e pernas, para citar um exemplo de como este objeto pode ser apresentado. Entretanto, a palavra mesa não se parece com o móvel mesa, embora esta palavra a represente. Neste caso podemos dizer que a palavra mesa simboliza os objetos concretos que se encaixam nesta categoria. A palavra mesa, portanto, é uma representação simbólica do objeto mesa. Para objetos matemáticos a idéia é a mesma com a diferença de que não existe um objeto ou conjunto de objetos concretos a que possamos nos referir como citado anteriormente. Portanto, como apreender este objeto ao qual não temos acesso por meio dos sentidos no mundo real?

Para Duval (2009) a apreensão conceitual de um objeto matemático depende da produção e coordenação de diferentes representações semióticas, uma vez que esta coordenação facilita a diferenciação entre o objeto matemático e sua representação e a reunião de propriedades do objeto permitem um melhor conhecimento acerca do mesmo.

À produção de uma representação semiótica Duval (2009) denomina *semiósis* e à apreensão conceitual de um objeto através da coordenação de diferentes representações semióticas este mesmo autor denomina *noesis*, ou seja, não há *noésis* sem *semiosis*.

Na análise do desenvolvimento cognitivo e sua relação com a construção do conhecimento matemático existem três fenômenos interligados a saber: 1) A existência de diversos Registros de Representação Semiótica; 2) A diferenciação entre objeto representado e seus Registros de Representação Semiótica; 3) Coordenação entre diferentes Registros de Representação Semiótica. Adiante buscamos aprofundar o entendimento de cada um destes fenômenos:

Em relação à existência de diversos Registros de Representação Semiótica salientamos que um objeto matemático pode ser representado de diferentes maneiras, sendo que cada uma destas formas irá destacar um determinado conjunto de suas propriedades. Um exemplo é o número dois: objeto matemático que pode ser representado por um conjunto de dois elementos, pelo símbolo dois, pela palavra dois. A este respeito Moutinho e Pais (2016) destacam que:

> Podemos utilizar diferentes formas de representar os objetos matemáticos, mas é importante perceber que um determinado tipo de representação de um conhecimento matemático não contém todas as informações deste conhecimento. Um tipo de representação às vezes demonstra uma idéia que outro tipo de representação não é capaz de fazer. Assim, o conhecimento de vários tipos de representação de um mesmo objeto pode nos ajudar a compreender melhor um conceito matemático (MOUTINHO &PAIS, 2016, p.3).

Em relação à diferenciação entre objeto representado e seus Registros de Representação Semiótica reiteramos que nenhuma representação se constitui no objeto matemático em si. Esta confusão é um obstáculo à formação do conceito do objeto.

TRANSFORMAÇÕES DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Existem dois tipos de transformações possíveis para os registros de representação semiótica, são estes o tratamento e a conversão:

O tratamento consiste em transformações dentro de um mesmo registro semiótico. Um exemplo é a simplificação da fração 2/4 a partir da qual se obtém o resultado 1/2. Aqui vemos que o sistema semiótico utilizado não se altera uma vez que toda a transformação acontece dentro da escritura numérica.

A conversão que transita entre dois registros, por exemplo: registro de partida= 1/2 e registro de chegada metade é um tipo de conversão, neste caso da escritura numérica para a língua natural. Salientamos que "[...] as conversões são as mudanças de registros mais eficazes para a aquisição de um conceito." (IGLIORI e MARANHÃO, 2013, p.60).

Igliori e Maranhão (2013) observam em sua pesquisa que, nos ensinos fundamental e médio, as conversões são menos utilizadas que os tratamentos, e em caso de utilização de conversões, apenas um sentido é priorizado (Exemplo: Lei de formação de uma função/Tabela/Gráfico, sendo que o sentido inverso é muito menos utilizado). Salientamos que a dificuldade não é a mesma nos dois sentidos da conversão, tal diferença de dificuldade nos sentidos está associada aos fenômenos de congruência e de não congruência. Neste trabalho não abordamos a questão do sentido da conversão, pois foge ao escopo desta pesquisa. Deixamos, portanto, esta questão para futuros pesquisadores.

FENÔMENOS DE CONGRUÊNCIA

A congruência acontece quando três critérios entre elementos significantes[9] dos registros de partida e chegada são atendidos simultaneamente, estes critérios estão descritos na tabela 7.

Tabela 7: Condições necessárias para a existência de congruência na conversão
Fonte: (DUVAL, 2009, pp.68-69)

Critério 1	**Critério 2**	**Critério 3**
Possibilidade de uma correspondência "semântica" dos elementos significantes: A cada unidade significante simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar.	Univocidade semântica terminal: A cada unidade significante elementar no registro da representação de chegada tem um único entendimento possível.	Organização dos elementos significantes: As organizações respectivas dos elementos significantes de duas representações comparadas conduzem a apreender nelas as unidades em correspondência semântica segundo a mesma ordem de duas representações

[9]Elementos significantes são as menores unidades com significado nas quais podemos decompor um registro.

Pode não haver congruência para nenhum destes critérios, para dois ou para somente um. Ou seja, a não congruência entre duas representações admite uma gradação isto implica em maior ou menor dificuldade na conversão de uma representação dependendo do grau de não congruência entre a representação de partida e a representação de chegada. E, no caso de as conversões requeridas não serem congruentes as dificuldades ou bloqueios dos estudantes com relação à formação do conceito são mais fortes (DUVAL; 2009, 2013).

Ao exemplificar e identificar dificuldades inerentes à coordenação entre registros evidencia-se que a TRRS de Duval (1999, 2006, 2009, 2013) enfoca as especificidades do sujeito que aprende, e, portanto: "[...] fornece um referencial do funcionamento cognitivo de um aluno diante de uma situação de ensino envolvendo um objeto matemático [...]" (IGLIORI e MARANHÃO, 2013, p.69).

Para compreender o papel da congruência nas conversões utilizamos um dos doze problemas de Vergnaud e Durand[10] (VERGNAUD&DURAND *apud* MACHADO, 2013, P. 50) aplicados a estudantes em faixas etárias de 6-7 anos a 10-11 anos. Neles, diferentes crianças ganham e perdem bolinhas em problemas, que vão do totalmente congruente ao totalmente incongruente passando por gradações intermediárias de congruência entre estes dois polos .

Para apresentar a congruência total discutimos o primeiro problema retirado da lista supracitada: "Pedro tem 6 bolinhas de gude. Joga uma partida e perde 4 bolinhas. Quantas bolinhas tem depois da partida?" Este problema, escrito em língua natural, pode ser desmembrado nos seguintes elementos significantes[11] para este registro de partida: i) tem 6 bolinhas, ii) perde, iii) 4 bolinhas, iv) quantas bolinhas tem?

Como registro de chegada, escolhemos utilizar a escritura numérica, temos assim, 6-4=. O registro de chegada pode ser reduzido aos seguintes elementos significantes: i) 6, ii) -, iii) 4, iv)=2.

Com o objetivo de organizar estas informações e facilitar a análise de congruência para os elementos significantes nos registros de partida e chegada elaboramos a tabela 8:

Tabela 8: Elementos significantes nos registros de partida e chegada

Registro de partida	**Registro de chegada**
Pedro tem 6 bolinhas de gude. Joga uma partida e perde 4 bolinhas. Quantas bolinhas têm depois da partida?	6-4=
Divisão em elementos significantes	
Registro de partida - Elementos Significantes	**Registro de chegada - Elementos Significantes**
i) Tem 6 bolinhas	i) 6
ii) perde	ii) -
iii) 4 bolinhas	iii) 4
iv) Quantas bolinhas têm?	iv) =

A partir da tabela 8 na qual os elementos significantes estão demarcados, iniciamos a análise pelo primeiro critério de congruência que elenca a correspondência entre elementos significantes de partida e de chegada, isto quer dizer que a cada elemento significante de partida temos um, e somente um, elemento significante de chegada.

Na tabela 9 colocamos os elementos significantes de partida e de chegada e

[10] Ver a lista dos problemas no Anexo I.
[11] Elemento significante é a menor unidade com valor semântico dentro de um registro.

acrescentamos uma terceira coluna para a análise da correspondência entre os elementos significantes de partida e de chegada do problema, classificando com sim, se atende ao critério, não em caso contrário e neutro em caso de não existência de conversão.

Tabela 9: Análise da correspondência entre elementos significantes de partida e de chegada

Registro de partida- Elementos Significantes	Registro de chegada- Elementos Significantes	Os elementos significantes de partida e chegada apresentam correspondência entre os eles?
i) Tem 6 bolinhas	i) 6	Sim
ii) perde	ii) -	Sim
iii) 4 bolinhas	iii) 4	Sim
iv) Quantas bolinhas têm?	iv) =	Sim

A partir da observação da tabela 9 vimos que os elementos significantes de partida e chegada apresentam correspondência total, pois a terceira coluna é totalmente constituída por respostas positivas. Desta maneira, podemos afirmar que o problema analisado contempla a primeira condição de congruência que é a correspondência termo a termo de elementos significantes de partida e chegada.

Seguindo nossa análise podemos buscar compreender se o problema em foco contempla o segundo critério de congruência que é a univocidade do registro de chegada, ou seja, se o registro de chegada tem um único entendimento possível fizemos um recorte da coluna dos elementos significantes de chegada apresentados na tabela 10 e acrescentamos ao seu lado uma segunda coluna para a análise do segundo critério de congruência (tabela 10).

Tabela 10: Análise da univocidade do registro de chegada

Registro de chegada- Elementos Siginificantes	O registro de chegada tem uma única interpretação possível?
i) 6	Sim
ii) -	Sim
iii) 4	Sim
iv) =	Sim

Observando a tabela 10 podemos ver que os elementos significantes do registro de chegada apresentam uma única interpretação possível (segunda condição de congruência), isto indica que a conversão analisada contempla também esta segunda condição.

Para observarmos se a terceira condição de congruência é atendida, ou seja, se os elementos de partida e chegada se apresentam na mesma ordem; utilizamos a tabela 10 e a ela acrescentamos uma terceira coluna conforme segue adiante (tabela 11).

Tabela 11: Análise da ordem dos elementos significantes de partida e chegada correspondentes

Registro de partida- Elementos significantes	Registro de chegada- Elementos significantes	Os elementos significantes correspondentesde partida e de chegada se apresentam na mesma ordem?
i) Tem 6 bolinhas	i) 6	Sim
ii) perde	ii) -	Sim
iii) 4 bolinhas	iii) 4	Sim
iv) Quantas bolinhas têm?	iv) =	Sim

Como a terceira coluna é toda formada por respostas positivas podemos afirmar que o terceiro critério de congruência, que é a correspondência entre elementos significantes na mesma ordem, é atendido.

Com a conversão do problema em língua natural de: “Pedro tem 6 bolinhas de gude. Joga uma partida e perde 4 bolinhas. Quantas bolinhas tem depois da partida? ”, para: 6-4= em escritura algébrica atende integralmente aos três critérios de congruência supracitados podemos afirmar que tal conversão é totalmente congruente.

Destacamos que “a dificuldade da conversão de uma representação depende do grau de não congruência entre a representação de partida e a representação de chegada” (DUVAL, 2009, p 69). Por este motivo podemos inferir que a conversão acima analisada apresenta o menor grau de dificuldade possível, uma vez que atende aos três critérios de congruência elencados por este autor simultaneamente. Esta condição pode ser entendida como cognitivamente econômica.

Estudos diversos também elencados por este autor associam esta condição ao sucesso escolar em Matemática, portanto, não podemos deixar de salientar que a crença de que a simples coordenação e conseqüente conversão de registros por si só facilita o entendimento do conteúdo é uma postura ingênua, uma vez que tal não ocorre automaticamente.

Ainda segundo Duval (2009) é o fenômeno, não considerado pelos manuais em geral, de não congruência nas conversões que se constitui em um fator muito forte de fracasso na aprendizagem quando se trata de uma mudança de sistema semiótico de representação (DUVAL; 2009, 2013).

Na sequência apresentamos os procedimentos metodológicos de coleta e análise da presente pesquisa.

2.4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Apresentamos a seguir o público, o local e os instrumentos de coleta e análise de dados utilizados na presente pesquisa.

A tabela adiante se constitui em um resumo das ações realizadas em cada fase da pesquisa em curso dentro do quadro metodológico definido pelo Experimento de *design* (tabela 12).

Tabela 12: Fases da pesquisa

FASES DO EXPERIMENTO DE DESIGN	TÓPICOS	POSIÇÃO DA PROPOSTA
Análise do problema por investigadores, usuários e/ou demais participantes envolvidos em colaboração.	Definição do problema, questões de pesquisa,	Introdução
	Contextualização e revisão de literatura	Fundamentação teórico-metodológica
Estabelecimento de um quadro de aprendizagem de logaritmos. - Desenvolvimento de proposta de solução responsiva aos princípios de design, as técnicas de inovação e colaboração de todos os envolvidos.	Estabelecimento do quadro de ensino-aprendizagem de logaritmos	Metodologia: Estabelecimento de um quadro teórico de ensino aprendizagem de logaritmos; Desenvolvimento de propostas
	Desenvolvimento de projeto de princípios para orientação do plano de intervenção	
	Descrição da proposta de intervenção: conjunto de tarefas que busca introduzir o conceito de logaritmos.	

Ciclos iterativos de aplicação e refinamento em práxis da solução	Ciclo 1- Refinamento do conjunto de tarefas que busca introduzir o conceito de logaritmos. Ciclo 2- Coleta de dados para análise das produções escritas dos participantes	Metodologia: Refinamento e aplicação do conjunto de tarefas que busca introduzir o conceito de logaritmos.
Reflexão para produzir "princípios de *design* e melhorar a implementação da solução	Reflexão a partir do conjunto da pesquisa e destaque de melhorias necessárias ao conjunto de tarefas como proposta final desta dissertação.	Considerações finais

COLETA DE DADOS

Na Coleta de dados apresentamos o perfil dos estudantes, o diário de campo da professora, o trabalho em grupo, o percurso de elaboração e refinamento do conjunto de tarefas, os procedimentos de coleta da escrita dos estudantes.

PERFIL DOS ESTUDANTES

Os participantes da pesquisa são 21 estudantes[12], com idades de 15 a 17 anos; não apresentando distorção idade série, portanto. Matriculados no segundo ano[13] do Ensino Médio em uma escola de regime integral da rede estadual de ensino do estado do Rio de janeiro que oferece o curso técnico em telecomunicações para a totalidade de seus estudantes e na qual ingressaram via processo seletivo[14]. Os estudantes, que já conhecem a professora-pesquisadora por esta ser regente da disciplina de Matemática em sua turma, vivenciaram um conjunto de tarefas que busca introduzir o conceito de logaritmos. Conjunto este integrante das atividades do ano letivo em curso no ano da coleta de dados desta pesquisa[15], cujos detalhes são explicitados ao longo deste capítulo.

TRABALHO EM GRUPO

Segundo Vigotski: o processo de formação de conceitos passa pela interação consigo, com o outro e com o mundo mediada por sistemas simbólicos. Destacamos que a interação entre os estudantes também provoca intervenções no desenvolvimento dos aprendizes.

> [...] quando um membro de um grupo realiza sua atividade de trabalho ele o faz para satisfazer uma de suas necessidades. Um batedor, por exemplo, que toma parte de uma caçada coletiva primitiva, é estimulado pela necessidade de alimento, ou talvez, pela necessidade de vestimenta, que a pele do animal morto satisfaria para ele. Mas a que sua atividade estava diretamente orientada? Poderia estar orientada, por exemplo, para afugentar um bando de animais e encaminhá-los na direção de outros caçadores tocaiados. Isso, na verdade, é o resultado da atividade desse homem. E a atividade desse membro individual da caçada termina aí. O restante é completado pelos

[12] Na turma na qual foi aplicado o conjunto de tarefas 21 estudantes foram autorizados pelos pais a participar desta pesquisa. Vide modelo de autorização no Apêndice I (Processo do Comitê de Ética da UFRRJ- nº 23083.008916/2016-14).

[13] O tema logaritmos está alocado no plano de curso deste ano de escolaridade no colégio que sedia esta pesquisa.

[14] Prova objetiva multidisciplinar.

[15] 2016.

> outros membros. Por si só, esse resultado – a fuga da caça etc. – não leva, e não pode levar, à satisfação da necessidade de comida ou de vestimenta. Conseqüentemente, os processos da atividade do batedor estavam direcionados a algo que não coincidia com o que os estimulou, isto é, não coincidia com o motivo de sua atividade; os dois estavam separados nesse exemplo. Aos processos cujo objeto e motivo não coincidem chamamos ações. Podemos dizer, por exemplo, que a atividade do batedor é a caçada, mas afugentar o animal, sua ação. [...] (Oliveira, 1997, p.46)

Os grupos de estudantes são sempre heterogêneos quanto ao conhecimento já adquirido nas diversas áreas e um jovem mais avançado num determinado assunto pode contribuir para o desenvolvimento dos outros. Um aprendiz também pode funcionar como mediador entre outro aprendiz e as ações e significados estabelecidos como relevantes no interior da cultura e isso não pode ser perdido de vista como o professor. Observamos então que o processo de ensino aprendizagem se constitui de seus diversos atores de forma heterogênea no qual não há primazia de papéis não obstante o papel do professor se destaque no processo.

DIÁRIO DE CAMPO DA PROFESSORA

O diário de campo se apresenta como um dispositivo de registro do cotidiano da pesquisa. Ele potencializa a compreensão do percurso vivenciado durante a pesquisa. Para Demo (2012): [...]. "O analista qualitativo observa tudo, o que é ou não dito: os gestos, o olhar, o balanço, o meneio do corpo, o vaivém das mãos, a cara de quem fala ou deixe de falar, porque tudo pode estar imbuído de sentido e expressar mais do que a própria fala, pois a comunicação humana é feita de sutilezas, não de grosserias" (DEMO, 2012, p. 33). Elencamos, portanto, este recurso para ser o local do registro do que ouvimos e vivemos durante esta investigação.

LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA COMO LOCAL DA VIVÊNCIA PROPOSTA

Aqui fazemos uma reflexão acerca da fundamentação teórica e do funcionamento de um Laboratório de Ensino de Matemática e seu papel no distanciamento do ETV visando fundamentar a escolha por este local para a aplicação do conjunto de tarefas elaborado aos participantes da pesquisa.

O laboratório de Ensino de Matemática (LEM) viabiliza uma gama de abordagens diferenciadas a fim de facilitar o processo de ensino aprendizagem desta disciplina. Tal amplitude de abordagens se apresenta, uma vez que os objetos matemáticos somente são acessíveis aos sentidos mediante registros de representações semióticas.

Segundo Raymond Duval (2009, 2013) embora estes objetos representem de diversas formas um objeto matemático, tais não podem ser confundidos com o mesmo como discutido anteriormente neste trabalho. Este mesmo autor salienta que existem registros de representação semiótica que melhor representam determinadas propriedades de um objeto matemático (DUVAL, 1999).

O acervo de um LEM pode se constituir em um aliado para o aprendizado desta disciplina, uma vez que este oferece uma ampla gama de registros de representação permitindo ao professor que o utiliza, ir muito além do tradicional trinômio: definição-exemplo-exercícios característico do ensino transmissivo associado ao ETV ampliando, portanto, seu raio de ação pedagógica.

Cabe salientar, de acordo com Lorenzato (2010) que, não obstante o LEM ofereça tal amplitude de registros o mesmo não se constitui em uma solução mágica para o ensino de Matemática, nem tampouco é utilizado em todos os momentos da prática pedagógica do docente, e sim, que ele se constitui em um espaço no qual diversos materiais de apoio se encontram sempre a mão, no qual o arranjo da mobília é feito para facilitar o trabalho investigativo e a troca de idéias. A respeito da prontidão e usabilidade deste local cabe destacar que:

> [...] a existência de um laboratório que, além de se constituir num espaço físico que se destina a guardar materiais didáticos, é, principalmente, um ambiente agradável, no qual os presentes se sintam à vontade e dispostos a pensar, criar, construir e descobrir estratégias de educação Matemática que visem à melhoria do ensino aprendizagem de Matemática" (PEREZ E TURRIONI, 2010, p.62 *apud* PEREZ 1993).

O LEM, além de ser um local fixo para o armazenamento dos materiais de suporte às aulas desta disciplina na unidade escolar, também se constitui em um local privilegiado para o desenvolvimento de atividades relacionadas a este campo de saber. Pode-se afirmar que as atividades realizadas neste espaço:

> [...] estão voltadas para o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos e a formação geral do aluno, auxiliando-o a: i) ampliar sua linguagem e promover a comunicação de idéias Matemáticas; ii) adquirir estratégias de resolução de problemas e de planejamento de ações; iii) desenvolver sua capacidade de fazer estimativas e cálculos mentais; iv) iniciar-se nos métodos de iniciação científica e na notação Matemática; v) estimular sua concentração, perseverança, raciocínio e criatividade; promover a troca de idéias por meio de atividades em grupo; vii) estimular sua compreensão de regras, sua percepção espacial, discriminação visual e a formação de conceitos. (REGO & REGO, 2010, p 44).

Segundo Lorenzato (2010) um LEM, mais do que ser um local de armazenamento do acervo dos materiais de apoio às aulas de Matemática e de um lugar de referência para as práticas desta disciplina, se constitui em um local de pesquisa e desenvolvimento de materiais, experimentos, jogos e práticas mediadoras do aprendizado da Matemática.

O LEM é um local privilegiado para a reunião de pessoas em um ambiente no qual elas tem facilitado o acesso a subsídios importantes para a vivência de atividades diversificadas. Neste ambiente, a troca de idéias se torna facilitada e nessa interação podem ser vivenciadas inúmeras atividades não restritas às experiências de um único docente que detém a palavra, mas sim, baseadas na troca de experiências em uma interação todos-todos e todos com o acervo. É desejável que um laboratório de Matemática, seja um local planejado para facilitar o trabalho em grupos e que seja organizado de modo facilitar o acesso ao seu acervo (LORENZATO, 2010).

Salientamos aqui que o laboratório a ser utilizado para a coleta das produções escritas dos participantes desta pesquisa preenche os requisitos aqui elencados.

CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DE TAREFAS

Como proposta inicial de conjunto de tarefas: elaboramos três momentos de trabalho, o primeiro dedicado a construir a motivação dos participantes em empreender uma investigação matemática, o segundo dedicado à investigação Matemática em si e o terceiro dedicado à avaliação das tarefas. As tarefas 1, 2 e 3 descritas abaixo pertencem, respectivamente, a cada um destes momentos.

A primeira tarefa é constituída pela discussão, pelos participantes, do vídeo: Matemática é para sempre[16].

Tarefa: Assistir ao Vídeo Matemática é para sempre que apresenta a Matemática como linguagem da ciência estabelecendo a diferença entre inferências e teoremas, explicando como os contra exemplos existem para os primeiros, mas não para os segundos que se constituem em verdades eternas e espinha dorsal de todas as outras ciências. Após assistir ao vídeo fazer uma discussão no grupão a respeito do mesmo.

O vídeo em questão apresenta, de maneira bem-humorada, a forma como a Matemática é construída pelos matemáticos, o que se alinha com o fazer matemático esperado por nós para os participantes do conjunto de tarefas proposto neste estudo. Isto é, a investigação Matemática em sala de aula se propõe a busca por regularidades, análise de contra exemplos, generalização e formalização das inferências matemáticas dos estudantes; posturas presentes na construção da disciplina enquanto campo de saber (PONTE *et al*, 2005).

Figura 1: Cena do vídeo Matemática é para sempre
Fonte: (TED, 2016, sem página)

A segunda tarefa do conjunto é dedicada à investigação. Nesta tarefa denominada Análise das sequências; os estudantes, separados em grupos, recebem uma tabela impressa em uma folha (igual para todos os grupos) contendo duas progressões: uma aritmética e outra geométrica. Nesta folha os participantes devem anotar suas buscas por regularidades. O objetivo desta tarefa é o de encorajar os participantes a coordenar diferentes registros de representação, uma vez que segundo Duval (2009, 2013) a coordenação de registros é imprescindível para não só para evitar a confusão entre objeto matemático e representação quanto para a formação de um conceito matemático.

[16] Disponível na internet, no endereço eletrônico:<https://www.ted.com/talks/eduardo_saenz_de_cabezon_math_is_forever?language=pt-br>.

Tarefa: Analise a tabela abaixo e escreva o que observa:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Nesta segunda tarefa a professora deve auxiliar cada um dos grupos a buscar e a discutir regularidades percebidas na tabela recebida (uma das principais propriedades presentes aqui é a de que os logaritmos são expoentes de uma base qualquer e essa base é constituída pela relação entre uma P.A. e uma P.G.), seja com perguntas instigadoras, seja promovendo o intercâmbio de idéias nos grupos no momento adequado. Esperamos que os estudantes explorem a tabela dada e busquem regularidades anotando suas inferências a respeito da tabela dada, primeiro discutindo inicialmente em seus grupos e depois como os demais grupos em uma plenária no qual todos devem externar e discutir seus progressos na investigação proposta.

A terceira tarefa se constitui da avaliação individual das tarefas 1 e 2 por todos os presentes. Objetivamos aqui utilizar este material como subsídio à reelaboração do conjunto a cada aplicação.

Tarefa:

1. Avalie as vivências

	Ótimo	Bom	Regular	Ruim	Péssimo
Conteúdo:					
Clareza na apresentação					
Materiais disponibilizados					
Duração					
Ambiente					

2. Deixe aqui suas sugestões e Críticas

REFINAMENTO DE TAREFAS

O primeiro ciclo de aplicações aconteceu em dois momentos diferentes. No primeiro aplicamos a um grupo de participantes o conjunto de tarefas elaborado na segunda fase desta pesquisa, constituído de um vídeo, investigação e uma avaliação observando a atitude destes participantes em relação às tarefas de análise e investigação propostas. Buscamos em especial observar a reação destes à linguagem, texto, adequação das tarefas. A partir desta observação refinamos o referido conjunto aplicando-o remodelado a um segundo grupo de participantes, fazendo observações e aprimorando-o para aplicação no ciclo seguinte.

PROCEDIMENTO DE COLETA DOS REGISTROS ESCRITOS DOS ESTUDANTES

Após o ciclo de refinamento chegamos a um conjunto de tarefas que foram aplicadas a estudantes do segundo ano do ensino médio. Tal conjunto remodelado se constituiu de: 1)

Investigação das caixas misteriosas, 2) Exploração de regularidades em uma tabela em uma perspectiva livre, 3) Investigação de regularidades em diversos pares de seqüências numéricas em uma perspectiva orientada e 4) Avaliação das tarefas anteriores.

A dinâmica de aplicação do conjunto aplicado se constituiu de apresentação, aplicação da tarefa e plenária para discussão da mesma.

Na primeira tarefa os participantes foram divididos em quatro grupos devido ao número limitado de tempo para investigação, tais grupos foram denominados como G1, G2, G3 e G4.

Na segunda tarefa os participantes foram divididos em seis grupos, ou seja, com um número menor de integrantes por grupo uma vez que esta tarefa necessita de maior concentração. Segundo Kindel (2012) tal concentração se torna facilitada para grupos pequenos. Referimo-nos a eles como GA, GB, GC, GD, GE e GF, essa divisão foi mantida para a terceira tarefa.

Em relação ao nome dos estudantes, optamos por utilizar suas iniciais para preservar suas identidades, e em caso de mais de um aluno com a mesma inicial, acrescentamos numerais distintos a estas no intuito de diferenciar os participantes.

Ao final do registro das inferências das equipes estabelecemos uma plenária na qual os grupos apresentaram suas observações uns aos outros as discutindo em uma com o apoio de perguntas instigadoras da professora pesquisadora. Esta plenária foi pensada a partir do trabalho de Ponte (2005) para tarefas investigativas em sala de aula.

Na quarta tarefa o preenchimento do questionário de avaliação foi feito de forma individual pelos participantes.

ANÁLISE DE DADOS

A análise de dados subsidia o estabelecimento do quadro de ensino aprendizagem de logaritmos através do estudo de sua apresentação em um livro elaborado para a formação de professores de Matemática, em livros didáticos do ensino médio e em dissertações sobre este tema e o percurso de elaboração de tarefas para este fim.

Também as produções escritas dos estudantes, em conjunto com as anotações em diário de campo da professora, foram objeto de estudo da presente pesquisa. A TRRS é o aporte teórico escolhido para subsidiar as análises presentes nesta dissertação.

ANÁLISE DE DISSERTAÇÕES

Nossa busca e análise de dissertações, relativas ou de apoio ao processo de ensino aprendizagem de logaritmos surge da necessidade da observação da existência de algum consenso sobre o assunto, e em caso positivo, qual é este. Ou seja, o que vem indicando os resultados desses trabalhos ao longo dos últimos anos?

Inicialmente fazemos uma busca em programas de mestrado que guardassem semelhanças com o nosso próprio programa[17], ou seja, que se situem na área de Ensino/Educação em Ciências e Matemática.

Entretanto, não obstante tenhamos encontrado muitos programas correlatos ao nosso, não encontramos em seus bancos de dissertações nenhum trabalho relativo ao processo de ensino aprendizagem de logaritmos, seja como sugestão de abordagem, seja como material de apoio: esta busca está descrita na tabela 13.

[17] Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática – PPGEduCIMAT, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

Tabela 13: Busca por dissertações sobre ensino de logaritmos

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA	**Universidade**	**Trabalhos defendidos desde**	**Dissertações sobre logaritmos encontradas**
	PUCRS	2004	Não
	UFG	2009	Não
	IFES	2009	Não
	UEA	2006	Não
	UFPE	Não há banco de dissertações	Não
	UFU	2014	Não
	UEL	2003	Não
	CEFETRJ	2007	Não
	UFPEL	2013	Não
	ULBRA	Não há banco de dissertações aberto à população em geral	Não
	PUC MG	2008	Não
	CRUZEIRO DO SUL	Não há banco de dissertações aberto à população em geral	Não
	UFAL	2012	Não

Uma vez que não encontramos as dissertações que procurávamos, mudamos nossos parâmetros e fizemos então a opção pela busca de dissertações para a nossa análise no banco de publicações da Universidade do Estado de São Paulo-UNESP, universidade reconhecida pela excelência em pesquisa em Educação Matemática. Neste banco encontramos e fizemos a análise das dissertações intituladas: Logaritmos e aplicações, Logaritmos uma proposta de ensino, Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst: uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais e Diferentes maneiras de definir a função logarítmica natural[18].

ANÁLISE DE LIVROS

Entendemos ser necessária uma visão geral para que possamos compreender melhor a concepção do autor de cada obra ao tratar cada tópico em particular.

Por este motivo, na primeira fase da análise, fazemos uma leitura longitudinal de cada livro em foco na qual procuramos identificar que aspectos são abordados e que aplicações e relações são estabelecidas entre as diferentes representações e como cada autor relaciona os “pré-requisitos” a estas representações.

Em específico, na análise global das coleções de livros didáticos, temos cuidados adicionais uma vez que não fazemos a análise global das coleções analisadas, mas apenas dos tópicos relevantes para esta pesquisa, portanto nos limitamos exclusivamente aos logaritmos e às séries em que os logaritmos são apresentados.

Num segundo momento, fazemos uma análise transversal, para verificar onde e como o tema é apresentado nas diferentes obras. Nosso interesse é o de verificar se existe alguma

[18] Todas as dissertações fazem parte do acervo da UNESP.

preocupação em trabalhar os logaritmos considerando diferentes abordagens. Buscamos, para tanto, identificar a definição; utilização da história dos logaritmos, coordenação de registros congruentes e não congruentes. Observamos especialmente a congruência das conversões apresentadas por sua associação a altos índices de êxito na aprendizagem de conceitos matemáticos segundo Duval (2009).

Para as nossas análises de livros utilizamos o quadro adiante em que destacamos: o registro de partida, o registro de chegada, subdividindo-os em elementos significantes (menores unidades portadoras de significado) para a observação do atendimento às três condições de congruência: 1. Elementos significantes de partida e chegada apresentam correspondência entre si, 2. O registro de chegada tem uma única interpretação possível, 3. Os elementos significantes correspondentes de partida e de chegada se apresentam na mesma ordem. A localização de cada um destes está destacada na tabela 14.

Tabela 14: Quadro base para as análises de congruência

Registro de Partida			**Registro de Chegada**	
Neste campo o registro de partida é escrito na íntegra			Neste campo o registro de chegada é escrito na íntegra	
Registro de partida em unidades significantes:	**Registro de chegada em unidades significantes:**	*⇨*	!	1-2-3 ⇨1-2-3
1ª unidadesignificante de partida	1ª unidadesignificante de chegada	Resposta: Sim /não/neutro	Resposta: Sim /não/neutro)	Resposta: Sim /não/neutro
2ª unidade significante de partida	2ª unidade significante de chegada	Resposta: Sim /não/neutro	Resposta: Sim /não/neutro	Resposta: Sim /não/neutro
nª unidade significante de partida	nª unidade significante de partida	Resposta: Sim /não/neutro	Resposta: Sim /não/neutro	Resposta: Sim /não/neutro

Legenda:

⇨ **Primeiro critério de congruência: Os elementos significantes de partida e chegada apresentam correspondência entre os eles?**

! **Segundo critério de congruência: O registro de chegada tem uma única interpretação possível?**

1-2-3 ⇨1-2-3 **Terceiro critério de congruência: Os elementos significantes correspondentesde partida e de chegada se apresentam na mesma ordem?**

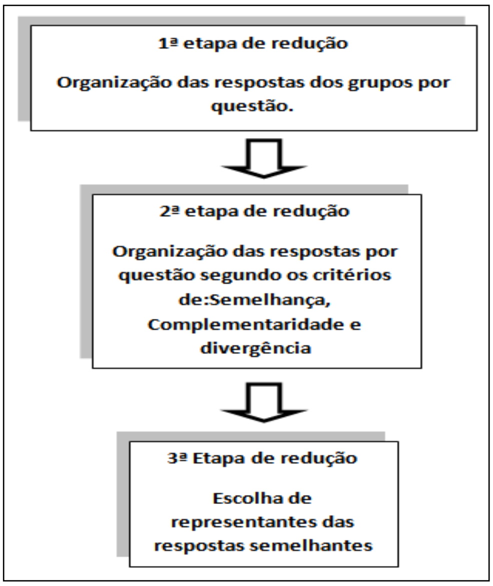
Resposta: Sim /não /neutro: Sim para a contemplação do critério do critério/não para a não contemplação do critério e neutro para a inexistência de registro de partida ou chegada

Na análise das ocorrências de congruência a partir do quadro acima podemos definir o nível de congruência das conversões analisadas, nível este que vai do totalmente congruente para o caso de sim para todos os critérios de congruência ao totalmente não congruente para o caso de não para todos os critérios de congruência. A flutuação entre estes polos passando pelas diversas gradações também faz parte de nossas observações.

ANÁLISE DA PRODUÇÃO ESCRITA DOS ESTUDANTES

Os dados brutos resultantes da coleta de dados da vivência, pelos participantes no segundo ciclo, dos três momentos supracitados consistem em anotações em diário de campo da professora pesquisadora e produções escritas dos estudantes que foram reduzidos por: semelhança semântica, por complementaridade ou antagonismo de idéias. O quadro 3 ilustra as etapas de redução dos dados coletados:

Quadro 3: Etapas de redução de dados



Estas produções são analisadas com o uso da TRRS que é uma forma de entender o lugar cognitivo do sujeito que se analisa a partir de suas produções escritas. As anotações em diário de campo da professora pesquisadora se constituem em material de apoio para a compreensão do lugar cognitivo dos participantes em questão.

Em específico nas tarefas 2 e 3, que são dedicadas à investigação Matemática em si, buscamos discutir como os estudantes representam, convertem e tratam os conceitos em foco nas tarefas propostas uma vez que não só a coordenação de registros é importante, mas também como estes registros são coordenados (DUVAL; 2009, 2013); também propomos a tabela 15 para subsidiar nossas inferências sobre este momento crucial do fazer matemático.

Tabela 15: Análise de congruência em conversões das tarefas 2 e 3

Grupo	**Registro de partida Escritura numérica (Origem do registro)**	**Registro de chegada Língua natural (Origem do registro)**	* ⇨ *	!	1-2-3 ⇨ 1-2-3
Nome do grupo	Registro a partir do qual os estudantes partem	Registro escolhido pelos estudantes [19]como suporte para a conversão feita	**Resposta: sim/não/neutro**	**Resposta: sim/não/neutro**	**Resposta: sim/não/neutro**
Legenda: * ⇨ * **Primeiro critério de congruência: Os elementos significantes de partida e chegada apresentam correspondência entre eles?**					
! **Segundo critério de congruência: O registro de chegada tem uma única interpretação possível?**					
1-2-3 ⇨ 1-2-3 **Terceiro critério de congruência: Os elementos significantes correspondentes de partida e de chegada se apresentam na mesma ordem?**					
Resposta: sim /não /neutro - sim para a contemplação do critério do critério/não para a não contemplação do critério e neutro para a inexistência de registro de partida ou chegada					

Reunimos as inferências dos estudantes por perfil de respostas e dentro destes por complementaridade, semelhança ou disparidade, como apresentado nos critérios de redução. Em cada perfil de respostas nosso olhar está voltado para a escolha do sistema semiótico de representação, assim como para sua conversão ou tratamento, ou conversão para posterior tratamento com o objetivo para melhor compreender as produções escritas dos estudantes acerca do tema logaritmo.

Para registro da avaliação dos participantes das tarefas de motivação e investigação Matemática utilizamos a tabela abaixo:

Tabela 16: Análise das avaliações dos estudantes

Estudante	**Produção/Produções escrita(s) do(a) estudante(s)**
Inicial do nome do(a) estudante	*"Produção escrita do estudante em letra arial 11, itálico, espaçamento simples, entre aspas".*

No próximo capítulo desenhamos o quadro de ensino aprendizagem de logaritmos a partir de uma apresentação deste objeto matemático e da análise de livros e dissertações que abordam a aprendizagem deste tema.

3. QUADRO DO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE LOGARITMOS

Aqui buscamos estabelecer o quadro do ensino-aprendizagem de logaritmos. Para tanto, optamos por conceituar os logaritmos como operações com expoentes dentro da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, buscando sempre coordenar os registros de forma congruente visando facilitar a formação do conceito deste objeto matemático.

Fazemos também uma análise à luz da TRRS do livro Logaritmos de Elon Lages que tem sido utilizado e exercido grande influência na formação de professores desde 1973 e também das duas coleções de livros didáticos adotadas na escola que abriga esta pesquisa.

Também nos preocupamos em buscar dissertações que tratem do processo de ensino-aprendizagem deste objeto, visamos aqui observar o que tem sido feito em termos de pesquisas neste campo e o que elas tem nos trazido.

Ao caminhar do conceito do objeto, passando pela análise de livros de formação de professores e estudantes secundaristas e fechando com as contribuições que a pesquisa tem acrescentado a respeito do processo de ensino aprendizagem deste conceito delineamos o quadro em que nossa pesquisa se insere.

3.1. O QUE SÃO OS LOGARITMOS?

Logaritmos são intimamente ligados à potenciação. A equação exponencial que é utilizada para a resolução de um logaritmo pode ser entendida como a generalização de uma potência, por exemplo.

Encontramos em uma crônica de Carlos Heitor Cony[19] uma tradução para o inconsciente coletivo, que explicita a pouca familiaridade em abordar os logaritmos, quando ele diz que,

> Minhas relações com as Matemáticas nunca foram boas – e exagero ao falar em Matemáticas, no plural e na maiúscula. Nem mesmo a elementar aritmética privou de muita intimidade com meu impenetrável cérebro. Por todos os chamados bancos escolares que lustrei em minhas andanças, sempre deixei a merecida fama de refratário aos números, às operações, às frações e às regras de três. Não cito os logaritmos porque seria um escárnio de minha parte mencionar tais entidades [...] (CONY, 2005, p 13-14).

e que exemplifica algumas reações de nossos estudantes ao tema.

Briggs e Napier, no início do século XVII, observaram que era possível operar com os expoentes de potências. Ou seja, transformar multiplicações e divisões de potências em adições e subtrações de expoentes para encontrar o resultado da potência. Esta observação se constituiu em uma revolução tecnológica uma vez que esta descoberta permitiu que os cálculos dos grandes números com os quais os astrônomos lidam fossem facilitados permitindo, portanto, avanços inquestionáveis para a ciência[20]

LOGARITMOS, EXPOENTES E PROGRESSÕES ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA

---

[19] Carlos Heitor Cony é um cronista e escritor brasileiro, ocupa a cadeira de número 3 da Academia Brasileira de Letras.

[20] Mais informações em (IEZZI, 2010; LIMA, 1980; PAIVA, 2009).

Iniciamos nossa caminhada, dentro do conjunto dos números Reais, analisando uma tabela que relaciona uma Progressão Aritmética a uma Progressão Geométrica (tabela 17).

Tabela 17: P.A. e P.G. relacionadas

Coluna	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
Termo da PA.	...	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	...
Termo da P.G.	...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

Observamos que, quando multiplicamos os termos da P.G. das colunas 6 e 7, por exemplo, obtemos como resultado o valor que fica na mesma coluna da soma dos termos da P.A. das referidas colunas e o mesmo vale para divisões entre termos da P.G. e subtrações dos respectivos termos da P.A.

Então qual é a relação? Isto é possível pois existe uma base de uma potência que elevada ao termo da P.A. é igual ao termo da P.G.da mesma coluna.

A partir da análise do quadro acima fazemos a seguinte generalização: A base 2 elevada ao termo da P.A. é igual ao termo da P.G.. Escrevendo tal afirmação em escritura algébrica, temos: se nomearmos o termo da P.G. de "*a*" e o termo da P.A. de "*x*" temos $2^x=a$.. E se testarmos outras tabelas[21] podemos ampliar essa generalização, substituindo o 2 para uma base qualquer que chamamos de *b*, encontrando a seguinte equação exponencial: $b^x=a$.

Mas, e como surge o logaritmo neste contexto? Logaritmo[22]é o nome que John Napier deu aos expoentes de uma potência, ou seja, logaritmo é um expoente (PAIVA, 2009). Vendo desta maneira alcançamos uma generalização do próprio logaritmo, ou seja, é possível reescrever a equação exponencial $\boldsymbol{b^x=a}$ de forma que o logaritmo se apresente (IEZZI, 2010).

Reescrevendo $b^x=a$ em língua natural, temos: Uma base *b*, elevada a um logaritmo é igual a um número *a*.

Podemos escrever $b^x=a$ como $\log_b a = x$ que significa a mesma coisa, ou seja, que o expoente (logaritmo) de um número *a* em uma base *b* é igual a *x*

Assim: em $\log_b a$ o expoente leva o nome de logaritmo, o número *a* recebe o nome de logaritmando e o número *b* recebe o nome de base.

Por definição, $\log_b a$ tem algumas restrições que consistem na base b ser maior que zero e diferente de um e que o logaritmando seja maior que zero.

Apresentamos adiante alguns cenários visando explorar estas limitações:

Cenário 1: Base igual a um: Não existe vantagem em estabelecermos uma base igual a 1 pois, seja qual for o expoente, o logaritmando é sempre igual a 1. Desta forma chegamos ao caso único $\log_1 1$ que não nos leva a lugar algum. Sendo este o motivo pelo qual existe a restrição para a base unitária.

Cenário 2: Base igual a zero. Para compreender esta base propomos a tabela 18:

---

[21] Desde que na mesma coluna coincidam os valores 0 para a P.A. e 1 para a P.G., isto tem um objetivo claro uma vez que qualquer número diferente de zero elevado a zero é igual a 1.

[22] O vocábulo *logarithmus* foi criado por Napier a partir das palavras gregas: logos, que significa "razão" ou "cálculo", e *"arithmós"*, que significa número, para maiores esclarecimentos vide Paiva (2009).

Tabela 18: Base zero

P.G.	0^{-4}	0^{-3}	0^{-2}	0^{-1}	0^{0}	0^{1}	0^{2}	0^{3}	0^{4}
P.A.	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Observando as duas linhas da tabela acima vemos que para zero elevado a expoentes negativos, encontramos uma indefinição uma vez que a divisão por zero não existe. E $0^{-n} = (1/0)^n$.

Para o termo zero elevado a zero, temos uma indeterminação. Isto significa que não há resposta para esta operação.

Em expoentes negativos também identificamos um problema, pois estes nos levam à divisão por zero; divisão esta que é indefinida, ou seja, não existe. Assim sendo, a base de um logaritmo não pode ser igual a zero.

Cenário 3: Base negativa: não existe resposta para $\log_{-a}$ pois não obstante existam expoentes que transformem essa base $-a$ em um logaritmando a em alguns casos, como por exemplo:$\log_{-2} 4 = x$. Ou seja, se x for igual a 2 a relação é válida pois $(-2)^2 = 4$ (o expoente par garante o sinal positivo do logaritmando). Entretanto, como em Matemática basta um contraexemplo para invalidar uma relação, vemos aqui que o mesmo não acontece para $\log_{-2} 8 = x$, pois $(-2)^3 = -8$ (expoentes ímpares conservam o sinal da base). Este contraexemplo $\log_{-2} 8 = x$ inviabiliza a possibilidade da existência de uma base menor que zero, portanto.

Cenário 4: Logaritmando igual a zero: observe que não é possível resolver $\log_a 0$, uma vez que não existe número real que elevado a outro número real qualquer resulte em zero. A única possibilidade seria a própria base ser igual a zero mas isso nos levaria a 0^0 que é uma indeterminação[23]. Isto inviabiliza a possibilidade da existência de um logaritmando nulo e também a própria base igual a zero. Um exemplo numérico para este cenário é $\log_0 2 = x$, daqui é possível observar que não existe resposta possível para esta situação uma vez que não existe nenhum expoente que transforme zero em 2.

Cenário 5: logaritmando negativo: observe que não existe resposta para $\log_a -a$ pois não existe um expoente que transforme essa base a no logaritmando $-a$, inviabilizando a possibilidade da existência deste. Um exemplo numérico seria $\log_2 -8 = x$. Observe que não há nenhum expoente que transforme 2 em -8, nem mesmo o expoente -3 que o transformaria e 1/8, que de modo algum corresponde a -8. Os 5 cenários apresentados aqui ilustram as restrições para $\log_b$ a.

LOGARITMO E POTENCIAÇÃO

Observamos que o logaritmo apresenta identidade com a potenciação. Cabe aqui um parêntesis no qual formalizamos a potenciação e suas propriedades. Seja a um número real positivo. Dado um inteiro n maior que zero, a potência n elevado a a (n^a) é definida como o produto de n fatores iguais ao número a. Ou seja: $n^a = a.a.a.... a$ *(n fatores)*. Vale então a propriedade fundamental: a elevado a m vezes a elevado a m é igual a a elevado a m mais n ($a^m.a^n = a^{m+n}$ para m,n inteiros positivos).

Para definir a elevado a zero (a^0) de forma que a propriedade acima permaneça válida, convencionamos que $a^0=1$, no qual a elevado a menos n é igual a um sobre a elevado a n($a^{-n} = \frac{1}{a^n}$). Desta forma, a única maneira possível de definir a potência a elevado a n (a^{-n}, com

[23] Algo que não tem resposta em Matemática.

n>0 inteiro) de tal forma que a relação $a^m.a^n=a^{m+n}$ continue verdadeira, mesmo quando *m* e *n* são inteiros positivos, consiste em definir que *a* elevado a menos *n* igual a um sobre a elevado a *n* ($a^{-n}=\frac{1}{a^n}$).

A relação fundamental vale para o produto de várias potências. Por exemplo, *a* elevado a *m* vezes *a* elevado a *n* vezes a elevado a *p* vezes *a* elevado a *q* igual a *a* elevado a *m* mais *n* mais *p* mais *q* ($a^m.a^n.a^p.a^q=a^{m+n+p+q}$). Em particular, tomando um produto de p fatores iguais a *a* elevado a *m* (a^m), obtemos $a^m.a^m. \ldots . a^m = a^{mp}$, *ou seja*, $(a^m)^p=a^{mp}$.

Estendamos a noção de potência de um número real $a>0$, de modo a incluir expoentes fracionários, de forma que*r* seja igual a *p* sobre *q*($r=\frac{p}{q}$), onde *p*, *q* são inteiros e *q* maior que zero ($q>0$). Essa definição é dada de modo a não destruir as propriedades válidas anteriormente. Desta forma, seja como for que façamos a definição de *a* elevado a *p* sobre *q* ($a^{p/q}$), devemos ter $(a^{p/q})^q=a^{(p/q).q}=a^p$. Dessa forma, $a^{p/q}$ é o número cuja *q-ésima* potência é igual a a^p. Por definição de raiz, isto significa que $a^{p/q}=\sqrt[q]{a^p}$, ou seja, que *a* elevado a *p* sobre *q* é igual a raiz *q-ésima* de *a*. Em particular, *a* elevado a um sobre *q* é igual à raiz *q-ésima* de *a* ($a^{1/q}=\sqrt[q]{a}$). Então, dado um número real a maior que zero ($a>0$), podemos definir a potência a^r, quer *r* seja inteiro positivo nulo, negativo, ou fracionário. Resumindo, a^r está definido para todo número racional *r*. Vejamos que mesmo para *r* igual a *p* sobre *q* e *s* igual a *u* sobre *v*, $r=\frac{p}{q}$ e $s=\frac{u}{v}$ fracionários ($q>0$ *e* $v>0$), continua válida a propriedade $a^r.a^s=a^{r+s}$.

De fato, temos conhecimento de que $(a^r)^q=a^p$ e $(a^s)^v=a^u$. Desta forma: $(a^r.a^s)^{qv}=(a^r)q^v=a^p$ *e* $(a^s)^v=a^u$. Logo: $(a^r.a^s)^{qv}=(a^r)^{qv}.(a^s)^{qv}=a^{rqv}.a^{sqv}=a^{pv}.a^{uq}=a^{pv}+a^{uq}$. Observamos que $a^r.a^s$ é o número cuja *qv-ésima* potência vale a^{pv+uq}. Isto significa: $a^r.a^s=a^{pv+uq/qv}$. Como $\frac{p\ v+u\ q}{q\ v}=\frac{p}{q}+\frac{q}{v}=r+s$, temos $a^r.a^s=a^{r+s}$(LIMA, 1980).

3.2. OS LOGARITMOS NOS LIVROS

A análise de livros tem por objetivo verificar a forma como são apresentados os conteúdos[24], sobre logaritmos em um livro valorizado não só em cursos de formação de professores, mas também, como já visto nesse trabalho, como referencial teórico para pesquisas sobre logaritmos, como também nos livros didáticos do Ensino Médio de duas coleções de livros didáticos utilizadas na escola que sedia esta pesquisa. Nosso objetivo aqui é traçar um paralelo entre os subsídios para formação e os subsídios para a prática do professor, uma vez que tal recurso se mostra fundamental na prática docente como nos alerta Kindel (2012):

> O uso dos livros didáticos em sala de aula pode variar de professor para professor. Entretanto, vários autores afirmam que o livro didático é, para a maioria dos professores, a base principal, praticamente a única fonte de pesquisa para as aulas (KINDEL, 2012, p.78).

O livro Logaritmos de Elon Lages Lima, publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática em 1980[25] e cuja primeira edição data de 1973, é escolhido para a nossa análise,

[24] A análise dos exercícios propostos nos livros não faz parte do nosso estudo uma vez que a apresentação do tema é o nosso foco, portanto, deixamos este ponto para outros pesquisadores ou para pesquisa futura.

[25] Trata-se de uma republicação desta obra, publicada inicialmente em 1973.

pois o mesmo tem sido adotado como material de referência para licenciandos em Matemática e professores atuantes nesta disciplina na Educação Básica.

Destacamos o uso deste livro na Universidade Federal da Paraíba, como texto do curso de Pré-Cálculo ministrado a estudantes recém ingressos nesta universidade nos cursos de licenciatura em Matemática, entre outros cursos com ênfase em ciências exatas (LIMA, 1980); assim como também o seu uso como material didático há mais de 10 anos no Programa de aperfeiçoamento dos Professores de Ensino Médio (PAPMEM) oferecido, em nível nacional, pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada a professores atuantes nos anos finais da Educação Básica.

Já as coleções Matemática Paiva de autoria de Manoel Paiva e Matemática e aplicações de autoria de Gelson Iezzi e colaboradores pertencem ao programa do livro didático (PNLD) do ano de 2012. Tabelas resumo com os conteúdos abordados por estas coleções organizadas por capítulos são disponibilizadas nos anexos II e III respectivamente.

LOGARITMOS EM UM LIVRO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

O livro Logaritmos de Elon Lages Lima, pertence à Coleção Fundamentos da Matemática Elementar é constituído de 14 capítulos nos quais o tema logaritmos é apresentado e seguido por exercícios. São estes capítulos: 1.) Introdução histórica; 2.) Introdução Matemática; 3.) Área de uma faixa de hipérbole; 4.) Aproximação por meio de trapézios; 5.) Propriedade fundamental; 6.) Logaritmos naturais; 7.) Gráfico da função logaritmo; 8.) O número “e”; 9.) A função exponencial; 10.) Logaritmos e exponenciais em diversas bases; 11.) Cálculo com logaritmos decimais; 12.) O número “e” como limite; 13.) Crescimento logarítmico e crescimento exponencial; 14.) Algumas aplicações da função exponencial e do logaritmo natural.

Na seqüência dos capítulos são apresentados três apêndices, constituídos de tabelas para consulta, a saber: 1. Logaritmos naturais dos números 1.00 até 10.09; 2. Mantissas[26] dos logaritmos decimais dos números 1.000 até 9.999; 3. A função exponencial e^x e sua recíproca e^{-x} para valores de x desde 0 até 6.

No prefácio, o autor apresenta esta obra[27], salientando sua importância no cenário da formação de professores de Matemática.

No primeiro capítulo Elon Lages (1980) apresenta uma introdução histórica em que narra, com detalhes, o surgimento dos logaritmos a partir da necessidade de simplificação de cálculos e também apresenta a sua utilidade e relevância para a humanidade até a atualidade. Este capítulo pode despertar o interesse do leitor para o assunto se constituindo em um dos pontos fortes da obra analisada.

O 2º e o 14º[28] capítulos são muito parecidos estruturalmente, em ambos o tema logaritmo é apresentado em uma linguagem que transita entre a língua natural e a escritura algébrica. A respeito deste tipo de abordagem, Ana Kallef (2007) alerta que:

---

[26] A parte decimal de um logaritmo.

[27] Este livro ainda hoje é editado e segue disponível para aquisição no site do Instituto Matemática Pura e Aplicada-IMPA.

[28] O 14º capítulo apresenta uma especificidade em relação aos demais, constituída pelo acréscimo logo após o título, de uma pequena introdução tentando “contextualizar” o tema e um exemplo ao final da demonstração são acrescentadas. Tal acréscimo não modifica a exposição do tema em sua essência e, portanto, para esta abordagem a mesma análise feita para o modelo de exposição constante nos capítulos citados não se altera e permanece válida.

> [...] a necessidade de se dar maior atenção à linguagem habitualmente utilizada nos livros-texto matemáticos. Neles, é utilizada uma linguagem mista composta, tanto de termos da língua natural quanto de expressões próprias das linguagens simbólicas adotadas na Matemática. A experiência advinda de estudos semelhantes, principalmente realizados por Duval (1995, p. 144-148), aponta para a necessidade de se desenvolver ações específicas para a transposição de tais obstáculos, pois somente a exposição dos enunciados na forma tradicional, não se mostra suficiente para a compreensão das expressões apresentadas. Cabe enfatizar que os prováveis obstáculos cognitivos constatados e relacionados a expressões e aos quantificadores lógicos se apresentam tanto em situações envolvendo somente um registro semiótico, quanto naquelas que demandam conversões de registros (KALEFF, 2007, p 92).

Examinando o segundo capítulo denominado Introdução Matemática, observamos que o autor constrói o conceito de logaritmo utilizando o binômio: língua natural associada à escritura algébrica. Um exemplo para este tipo de abordagem permeia tanto o segundo quanto o décimo quarto capítulos pode ser quando escreve Elon Lages Lima (1980): “Seja a um número real positivo. Dado um inteiro $n>0$, a potência a^n é definida como o produto de n fatores iguais ao número a. Ou seja: $a^n=a.a... a$ *(n fatores)*” (LIMA, 1980, p. 6).

Fazemos adiante (tabela 19) a análise de um trecho da conversão em foco embasada nos critérios de congruência elencados por Duval (2007, 2009, 2013) [29].

Tabela 19: Análise de congruência I

Registro de Partida		**Registro de Chegada**		
Seja a um número real positivo. Dado um inteiro $n>0$, a potência a^n é definida como o produto de n fatores iguais ao número a		$a^n=a.a \ldots a$ *(n fatores)*		
Registro de partida em elementos significantes: (*matematiquês*)[30]	**Registro de chegada em elementos significantes: (Escritura algébrica)**	* ⇨ *	!	1-2-3 ⇨ 1-2-3
Seja a um número real positivo	*A*	Sim	Sim	Sim
dado um inteiro $n>0$		neutro[31]	Neutro	Neutro
a potência *na*	*Na*	Não há conversão e sim tratamento, uma vez que o registro de partida e de chegada possuem a escritura algébrica como registro comum.	Não há conversão e sim tratamento, uma vez que o registro de partida e de chegada possuem a escritura algébrica como registro comum.	Não há conversão e sim tratamento, uma vez que o registro de partida e de chegada possuem a escritura algébrica como registro comum.
É definida	=	Sim	Sim	Sim
como o produto de n fatores iguais ao número a	$a.a \ldots a^n$	Sim	Sim	Sim

[29]Todos os quadros de análise de congruência tem como referencial os critérios de congruência de Duval (2007) assim como ocorre neste primeiro quadro.

Da tabela acima observamos que mesmo reduzindo o registro de partida aos seus elementos significantes, ou seja, retirando do enunciado tudo o que é acessório preservando apenas as informações essenciais, o que facilita a análise da conversão entre registros. Não conseguimos colocar o referido registro em um único sistema de representação ficando o segundo elemento significante do registro de partida (dado um inteiro $n>0$) e o terceiro (a potência a^n) com um misto de língua natural e escritura algébrica, ou seja, *matematiquês*.

A respeito deste D'amore afirma que: "[...] quando se faz Matemática, a comunicação não ocorre certamente na linguagem Matemática dos matemáticos, mas também não ocorre na língua comum, assume-se uma sintaxe específica (às vezes complicada), uma semântica considerada oportuna e nasce uma língua estranha." (DAMORE, 2007, p. 251).

Na tabela 19 observamos conversões congruentes acontecendo para o primeiro, quarto e quinto elementos significantes de partida e chegada (linhas 4, 7 e 8), o que não acontece para o segundo elemento significante de partida (dado um inteiro $n>0$), pois ele não tem correspondente de chegada. Tal falta de correspondente, faz com que a conversão seja neutra (linha 5, tabela 19). O terceiro elemento significante de partida (a potência a^n) apresenta a mistura de língua natural e escritura algébrica citada anteriormente e como o terceiro elemento significante de chegada (a^n) correspondente apresenta a escritura algébrica. Neste caso não podemos afirmar que houve conversão, uma vez que tanto no registro de partida quanto no registro de chegada compartilham um mesmo sistema semiótico, ou seja, a escritura algébrica (linha 6, tabela 19). A existência deste tratamento em meio às conversões analisadas compromete a coordenação de registros, a respeito desta Duval (2009) afirma que:

> A coordenação dos diferentes registros de representação ligados à objetivação ou ao tratamento dos conhecimentos não se opera espontaneamente, mesmo no decorrer de um ensino que mobiliza esta diversidade de registros. Isso pode ser verificado em diferentes níveis de ensino das Matemáticas. Quando a aquisição de conhecimentos é ligada à formação e a tratamentos de representação efetuados em um só registro ou privilegiou um registro particular (a escritura "algébrica", os gráficos, as figuras geométricas, as tabelas, o discurso de língua natural), então essa aquisição fica limitada a um só registro. E mesmo quando vários registros foram mobilizados, simultaneamente ou sucessivamente, isso não provoca sua coordenação. As aprendizagens permanecem quase sempre mono-registro. É verdade que isso não exclui o desenvolvimento de certa forma de compreensão dos estudantes, a qual pode ser avaliada e dar satisfação a muito curto prazo. Mas essa compreensão mono-registro apresenta uma deficiência maior. Desde que se sai do contexto em que se fez a aprendizagem, a maior parte se revela incapaz de mobilizar os conhecimentos adquiridos e que, no entanto, "eles sabem" (DUVAL, 2009, p. 98).

Os capítulos 3 a 13 apresentam predominantemente a conversão entre escritura algébrica e representação gráfica, sendo o primeiro o registro de entrada e o segundo de saída, respectivamente. Fazemos, portanto, a análise de um trecho presente na apresentação do tema área da faixa de hipérbole, relativo à conversão dos registros citados, pois o mesmo se constitui em um exemplo de tais conversões presentes ao longo dos capítulos citados e está presente na página 14 do livro ora analisado. Transcrevemos aqui o exemplo em foco já registrando seu registro de partida: "$H= \{(x, y);\ x>0,\ y= 1/x\}$ " (LIMA, 1980, p.14) e o seu registro de chegada que é o gráfico da figura 2.

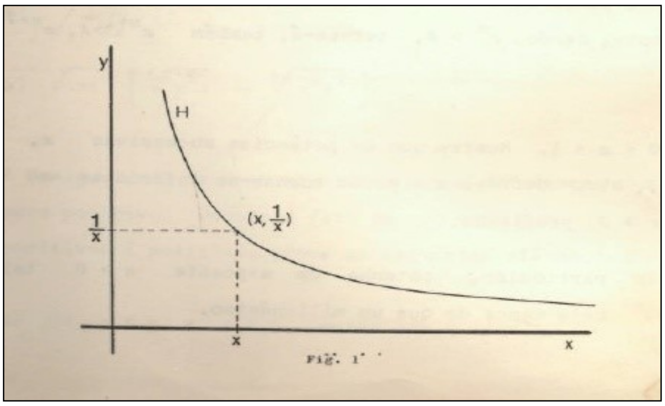


Figura 2: Faixa da hipérbole
Fonte (LIMA, 1980, p.14)

De acordo com os critérios de congruência, analisando os elementos significantes de partida e chegada do exemplo analisado temos que (tabela 20):

Tabela 20: Análise de congruência II

Registro de partida		**Registro de chegada**		
H={(x,y); x>0, y= 1/x}		Figura 3: Faixa da hipérbole		
Registro de partida em elementos significantes: **Escritura algébrica**	**Registro de chegada em elementos significantes:** **Gráfico Cartesiano**	* ⇨ *	!	1-2-3 ⇨ 1-2-3
H	Curva H	Sim	Sim	Sim
=	O gráfico como um todo	Sim	Sim	Sim
{(x,y);	Ponto *(x, y)* sobre a curva.	Sim	Sim	Sim
x>0,	Curva pertencente ao primeiro quadrante que é diretamente associado a valores positivos de x	Sim	Sim	Sim
y= 1/x}	Conforme os valores de *x* aumentam os valores correspondentesde*y* diminuem sobre a curva	Sim	Sim	Sim

A análise do quadro supracitado permite observar que a conversão em foco é totalmente congruente e, portanto, cognitivamente econômica (DUVAL, 2009). Tal abordagem está presente na maior parte do livro, uma vez que ele se propõe a um enfoque geométrico dos logaritmos e a ele se dedica em doze dos catorze capítulos do livro.

Observamos também que a abordagem dos logaritmos no livro como um todo envolve explicações diretivas e expositivas não deixando espaço para investigações e explorações por parte do leitor se alinhando, portanto, ao ETV. Ainda que no primeiro capítulo o autor apresente a história do tema em foco e também no décimo quarto capítulo apresente aplicações reais para os logaritmos, tais se dão em uma perspectiva declaratória. No geral, as apresentações do tema no livro se alternam entre abordagens que empregam conversões não congruentes e congruentes com predomínio das segundas, o que se mostra uma vantagem em termos de economia cognitiva que entendemos ser necessária na apresentação do tema por sua associação ao êxito na construção de conceitos em Matemática, como dito anteriormente.

LOGARITMOS NAS DUAS COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA UTILIZADAS NA ESCOLA QUE ABRIGA ESSA PESQUISA

COLEÇÃO A: MATEMÁTICA CIÊNCIA E APLICAÇÕES

De acordo com o PNLD 2012, a coleção ora analisada, que abrange os três anos do Ensino Médio, tem altos e baixos. Os avaliadores do Ministério da Educação (MEC). Apresentam-na tecendo elogios ao projeto gráfico e ao índice remissivo[30] da obra, que segundo este se configura, segundo os avaliadores, em um ótimo recurso para a busca dos temas abordados pela mesma. Em relação à abordagem dos conteúdos: os avaliadores observaram a utilização da exposição e sistematização dos conteúdos da Matemática escolar com auxílio de exemplos e atividades propostas destacando a influência desta metodologia no cerceamento da autonomia discente, o que nos remete a uma abordagem nos moldes do ETV para a disciplina. Dentro deste modelo supracitado também está a organização dos livros em capítulos, que além do decantado trinômio citado anteriormente, também se utiliza de exercícios resolvidos e sugere exercícios complementares, também nos capítulos são apresentadas aplicações da Matemática e em alguns capítulos a história da Matemática é utilizada como suporte ao conteúdo abordado.

Em relação à distribuição dos tópicos abordados constatou-se maior espaço para alguns temas como trigonometria, números complexos e equações polinomiais e um espaço adequado para sequências. Observamos aqui que os logaritmos não foram citados pelos avaliadores. Buscando esta informação, vimos que, na coleção analisada, os logaritmos estão restritos ao volume 1- 1º ano na abertura do 8º capítulo que é dedicado à função logarítmica.

Neste livro a abordagem do nosso tema de estudo se divide nas seções: Logaritmos: que apresenta um exemplo cotidiano para o conceito, Definição: que apresenta a definição do logaritmo; Convenção importante: que apresenta a escritura do logaritmo decimal; Consequências, Um pouco de história: que traz a história dos logaritmos, Sistemas de logaritmos: que sistematiza os logaritmos como "O conjunto formado por todos os logaritmos dos números reais positivos em uma base a $(0<a\neq 1)$ é chamado sistema de logaritmos de base *a*" (IEZZI *et al*, 2010, p.156), Propriedades operatórias na qual são apresentados: o logaritmo do produto, o logaritmo do quociente e da potência, Aplicações e Mudança de Base que apresenta a necessidade de igualdade de bases para a aplicação das propriedades operatórias supracitadas. Adiante discutimos estas seções.

A seção Logaritmos abre o item analisado com um exemplo "cotidiano" que apresentamos em partes "Um caminhão custa hoje R$ 100.000,00 e sofre uma desvalorização de 10% por ano de uso. Depois de quanto tempo de uso o valor do veículo é igual a R$ 20.000,00?" (IEZZI *et al*, 2010, p. 151): Este é o registro de partida, que como podemos ver,

[30] A diferença do índice remissivo para um índice convencional é que este indica a localização de uma palavra importante ou autor citado, e não um tópico ou subtítulo.

se dá em língua natural[31].

Vemos aqui que o autor permanece neste sistema uma vez que faz algumas manipulações dentro deste registro. Duval (2009) dá a estas manipulações que acontecem dentro de um mesmo sistema semiótico o nome de tratamento como já dito anteriormente, chegando à seguinte situação que se configura em nosso registro de partida para a conversão:

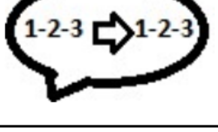
"A cada ano que passa o valor do caminhão fica sendo 90% do que era um ano atrás. Então seu valor evolui da seguinte forma: após 1 ano de uso: 90% de R$ 100.000,00, ou seja, R$ 90000,00; após 2 anos de uso: 90% de R$ 90.000, ou seja, R$ 81 000,00; após três anos de uso 90% de R$ 81.000,00, ou seja, R$ 72.900,00 e assim por diante" (IEZZI, *et al*, 2010, p. 151).

Na seqüência, na página 151, o autor e seus colaboradores propõem uma conversão para o *matematiquês* [32]quando escrevem em um misto de língua natural e escritura algébrica o registro de chegada: "[...] O Valor do veículo em reais evolui, ano a ano de acordo com a sequência: 100.000; (0.9) . 100.000; $(0,9)^2$. 100.000; $(0,9)^3$. 100.000;...; $(0,9)^x$. 100.000 em que x indica o número de anos em uso. Para responder à pergunta feita, segundo o exemplo, devemos resolver a equação $(0,9)^x$. 100000 = 20000" (IEZZI et al, 2010).

Após a conversão os autores fazem o tratamento dentro do sistema semiótico de chegada, ou seja, reescrevem $(0,9)^x$. 100000 = 20000 e, como $(0,9)^x$=0,2, que é uma equação exponencial[33] encerrando o exemplo apresentado.

Fazemos adiante a análise da conversão entre os registros de partida e chegada acima descritos: o primeiro em língua natural e o segundo em *matematiquês*, que como já vimos anteriormente apresenta a ambiguidade como característica, o que dificulta a análise da conversão. Portanto, antes de fazemos a referida análise, reduzimos os registros de chegada a seus elementos significantes uma vez que a análise da conversão se torna facilitada quando fazemos a redução, também observamos, neste caso, a oportunidade de com esta redução retirar a ambigüidade trazida pelo *matematiquês* do registro de chegada. Pois, quando trabalhamos em um único sistema semiótico para cada um dos registros a análise da conversão se torna facilitada e mais precisa conforme observamos adiante (tabela 21):

Tabela 21: Análise de congruência III

<table>
<tr><th colspan="3">Registro de partida: Língua Natural</th><th colspan="2">Registro de chegada: Escritura Algébrica e Língua Natural (matematiquês)</th></tr>
<tr><td colspan="3">A cada ano que passa o valor do caminhão fica sendo 90% do que era um ano atrás. Então seu valor evolui da seguinte forma: após 1 ano de uso: 90% de R$ 100000,00, ou seja, R$ 90000,00; após 2 anos de uso: 90% de R$ 90000, ou seja, R$ 81 000,00 após três anos de uso 90% de R$ 81000,00, ou seja, R$ 72900,00 e assim por diante.</td><td colspan="2">O Valor do veículo em reais evolui, ano a ano de acordo com a sequência: 100000; (0.9) .100.000; $(0,9)^2$. 100.000; $(0,9)^3$. 100.000;...; $(0,9)^x$ .100.000 em que x indica o número de anos em uso. Para responderà pergunta feita, devemos resolver a equação $(0,9)^x$. 100000 = 20000</td></tr>
<tr><td>Registro de partida em elementos significantes Língua Natural</td><td>Registro de chegada em elementos significantes Escritura Algébrica</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

---

[31] Escolhemos considerar os símbolos referentes à porcentagem e cifrão pertencentes à língua natural pelo seu uso corrente no dia a dia.

[32] Para maiores esclarecimentos sobre o *matematiquês* vide D'Amore (2007)

[33] Tema tratado no capítulo 7: Função exponencial, capítulo esse anterior ao capítulo que contém o item ora analisado: capítulo 8: Função logarítmica. Uma equação exponencial é aquela em que a incógnita se encontra no expoente de pelo menos uma potência.

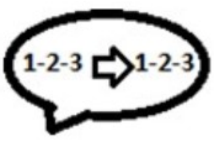
o valor do caminhão	100000	**Sim**	**Sim**	**Sim**
fica sendo 90% do que era um ano atrás. Então seu valor evolui da seguinte forma: após 1 ano de uso: 90% de R$ 100000,00 R$ 90000,00;	(0.9) .100.000	Não	Sim	Sim
após 2 anos de uso: 90% de R$ 90000, ou seja, R$ 81 000,00.	$(0,9)^2$. 100.000	Não	Sim	Sim
após 2 anos de uso: 90% de R$ 81000,00, ou seja, R$. 72900,00	$(0,9)^3$. 100.000;...;	Não	Sim	Sim
e assim por diante	$(0,9)^x 100000 = 20000$,	Não	Não	Não

Na conversão analisada encontramos um nível intermediário de congruência, uma vez que o número de congruências e não congruências se mostra equilibrado. Entendemos, portanto, que tal exemplo não se trata de abordagem cognitivamente econômica, o que aponta para o fato de que uma revisão do exemplo para a busca de um modelo cognitivamente econômico visando facilitar a compreensão do exemplo apresentado seria uma alternativa a ser considerada.

A seção Definição apresenta a definição do conceito de logaritmo como sendo: "" *a*" e "*b*" números reais e positivos, *onde* $a > 0$, sendo que $a \neq 1$ e $b > 0$, chama-se logaritmo de "*b*" na base "*a*" o expoente "*x*" ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a "*b*"o que corresponde a $\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$"(IEZZI *et al*, 2010, p. 151).

Elaboramos uma tabela (tabela 22) na qual reduzimos os registros de partida e chegada em seus elementos significantes o que nos permite uma análise mais acurada da conversão proposta por este enunciado, na qual observamos:

Tabela 22: Análise de congruência IV

<table>
<tr><th colspan="2">Registro de partida</th><th colspan="3">Registro de chegada</th></tr>
<tr><td colspan="2">Chama-se logaritmo de "b" na base "a" o expoente "x" ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a "b" (Língua natural e escritura algébrica-matematiquês)</td><td colspan="3">$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$(Escritura Algébrica)</td></tr>
<tr><td>Registro de partida em elementos significantes: (Língua natural e escritura algébrica-matematiquês)</td><td>Registro de chegada em elementos significantes: (Escritura algébrica)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

logaritmode "*b*" na base "*a*"	$log_a b$	Sim	Sim	Não
O expoente "*x*" ao qual se deve elevar a base *a*		Neutro	Neutro	Neutro
A potência a^x seja igual a "*b*"	$a^x=b$	Não há conversão e sim tratamento, uma vez que o registro de partida e de chegada possuem a escritura algébrica como registro comum	Não há conversão e sim tratamento, uma vez que o registro de partida e de chegada possuem a escritura algébrica como registro comum	Não há conversão e sim tratamento, uma vez que o registro de partida e de chegada possuem a escritura algébrica como registro comum

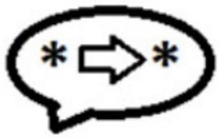
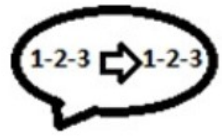
Temos aqui um caso ambíguo que transita entre conversão e tratamento, pois os primeiros elementos significantes de partida (logaritmo de "*b*" na base "*a*") e de chegada ($log_a b$) (linha 4 , tabela 22) se constituem em uma conversão da língua natural para a escritura algébrica, já o segundo elemento significante de partida (o expoente "*x*" ao qual se deve elevar a base a) não tem correspondente constituindo-se em um caso neutro (linha 5, tabela 22), finalmente, os terceiros elementos significantes de partida (a potência a^x seja igual a *"b"*) e de chegada de chegada ($a^x=b$) compartilham a escritura algébrica como sistema semiótico de representação, podendo ser entendido como um tratamento (linha 6, tabela 22) portanto.

Este obstáculo pode ocorrer em diversas salas de aula uma vez que a prática levanta questionamentos em relação à existência de uma confusão dos estudantes na compreensão deste conceito quando apresentado desta forma. Também as seções: Consequências; Sistemas de logaritmos, Propriedades operatórias e Mudança de base apresentam características e análises semelhantes.

Na seção Convenção Importante: o autor e seus colaboradores apresentam os logaritmos decimais informando que os logaritmos com a base omitida foram convencionados como sendo de base dez. "Convencionou-se que, ao escrevermos o logaritmo de um número com a base omitida, estamos nos referindo ao logaritmo deste número em base 10, isto é: $logx= log_{10}\,x$" (IEZZI *et al*, 2010, p.152).

Visando analisar a congruência da conversão entre os registros de partida e de chegada elaboramos a tabela 23, que discutimos adiante:

Tabela 23: Análise de congruência V

Registro de partida		**Registro de Chegada**		
[...] o logaritmo de um número com a base omitida estamos nos referindo ao logaritmo deste número em base 10.		$\log x= \log_{10} a$		
Registro de partida em elementos significantes: (Língua natural)	**Registro de chegada em elementos significantes: (Escritura algébrica)**			

O logaritmo	Log	Sim	Sim	Sim
de um número	*X*	Sim	Sim	Sim
com a base omitida	vazio no local em que estaria grafada a base	Sim	Sim	Não
estamos nos referindo	=	Sim	Sim	Sim
ao logaritmo	*log*	Sim	Sim	Sim
deste número	*X*	Sim	Sim	Não
em base 10	número 10 no local reservado à base do logaritmo	Sim	Sim	Não

A análise detalhada da conversão dos registros aqui mobilizados nos mostra uma tendência à forte congruência na conversão dos registros analisados, o que é desejável visando à economia cognitiva esperada para a apresentação de um tema matemático (DUVAL; 2009, 2013).

A congruência não existe apenas para o terceiro elemento significante de partida (com a base omitida) e chegada (vazio no local em que estaria grafada a base) (linha 6, tabela 23), pois ambos não se apresentam na mesma ordem, como é requerido pelo terceiro critério de congruência; também não há congruência pelo mesmo motivo para os sexto e sétimos elementos de partida e chegada, sendo o sexto elemento de partida (deste número) e de chegada (x) e o sétimo elemento de partida (em base 10) e de chegada (número 10 no local reservado à base do logaritmo) (linhas 9 e 10, tabela 23). Entretanto, tais incongruências não chegam a comprometer o conjunto.

Na seção "Um pouco de história", a abordagem dos logaritmos neste livro se encerra com a história da descoberta destes e com a sua apresentação em linguagem algébrica. "Basicamente a idéia de Napier é associar os termos da sequência (b; b^2, b^3; b^4; b^5;...;b^n) aos termos de outra seqüência (1,2,3,4,5,...,n), de forma que o produto de dois termos quaisquer da primeira sequência ($b^x \,.\, b^y = b^{\,x+y}$) esteja associado à soma $x+y$ dos termos da segunda seqüência." (IEZZI *et al*, 2010, p. 155).

Apresentamos na seqüência, como exemplo, uma tabela idêntica àquela com a qual John Napier, de acordo com historiadores, construiu o conceito de logaritmo. Tabela essa com a qual trabalhamos em nossa investigação com os estudantes, em que temos uma sobre a outra: uma P.A.[34] de razão 1 com primeiro termo igual a um e uma (P.G.) [35]de razão 2, conforme pode ser visto adiante (Tabela 24):

Tabela 24: Seqüências Associadas-Adaptada
(IEZZI et al, 2010, p. 155)

1	1	2	3	4	5	**6**	7	8	**9**	10	11	12	13	14	**15**
2	2	4	8	16	32	**64**	128	256	**512**	1024	2048	4096	8192	16394	**32788**

[34] Uma progressão aritmética é uma sequência numérica na qual há a adição de uma mesma razão a todos os termos que a compõe.

[35] Uma progressão geométrica é uma sequência numérica na qual há a multiplicação de uma mesma razão a todos os termos que a compõe.

Logo após a tabela há uma explicação detalhada da relação entre as duas sequências, em que se observa que o somatório de dois termos na primeira linha é igual à multiplicação dos termos de suas respectivas colunas na segunda linha. Tal relação pode ser observada nas colunas negritadas em destaque acima. Fazendo a análise de congruência para os elementos significantes da conversão entre os registros de partida[36]e chegada temos (tabela 25):

Tabela 25: Análise de congruência VI

<table>
<tr><td colspan="3">Registro de partida</td><td colspan="2">Registro de chegada</td></tr>
<tr><td colspan="3">Basicamente a ideia de Napier é associar os termos da sequência (b; b^2, b^3; b^4; b^5;...;b^n) aos termos de outra sequência (1,2,3,4,5,...,n), de forma que o produto de dois termos quaisquer da primeira sequência (b^x . b^y = b^{x+y}) estivesse associado à somax+y dos termos da segunda sequência.</td><td colspan="2">Quadro 23</td></tr>
<tr><td>Registro de partida em elementos significantes: (Escritura algébrica)</td><td>Registro de chegada em elementos significantes: (Tabela)</td><td>* ⇨ *</td><td>!</td><td>1-2-3 ⇨ 1-2-3</td></tr>
<tr><td>b; b^2, b^3; b^4; b^5;...;b^n</td><td>2,4,8,16,32,..., 32788</td><td>Sim</td><td>Sim</td><td>Não</td></tr>
<tr><td>1,2,3,4,5,...,n</td><td>1,2,3,4,5,...,15</td><td>Sim</td><td>Sim</td><td>Não</td></tr>
<tr><td>b^x . b^y = b^{x+y}</td><td>64 . 512 = 32788</td><td>Sim</td><td>Sim</td><td>Não</td></tr>
</table>

A partir da tabela acima observamos que os registros de partida e chegada são levemente não congruentes, uma vez que apenas a terceira condição não é contemplada para todos os elementos significantes de partida e chegada (Terceiro critério de congruência: Os elementos significantes correspondentes de partida e de chegada se apresentam na mesma ordem?). Tal se dá porque a primeira seqüência anunciada no registro de partida encontra-se na segunda linha Do registro de chegada e a segunda seqüência do registro de partida encontra-se na primeira linha Do registro de chegada, embaralhando as informações, o que pode se constituir em um obstáculo à formação do conceito.

O autor e seus colaboradores finalizam a abordagem histórica do tema apresentando a mudança da P.G. de razão dois para a de razão 10, destacando que os logaritmos durante muito tempo se prestaram a facilitar cálculos envolvendo números muito grandes e finalizando com uma chamada para a função logarítmica e a sua inversa a função exponencial que podem representar diversos fenômenos físicos, químicos e biológicos.

Entretanto, não é abordada com clareza a relação entre a seqüência e a base do logaritmo, nem entre o fato dos termos da P.A. serem os expoentes desta base de forma a que a base do logaritmo elevada ao termo da P.A. seja igual ao termo da P.G. de sua coluna. Observe que na tabela acima (tabela 25) a base é 2, pois é este número que, que elevado ao termo 1 da primeira coluna, primeira linha é igual a 2 que está localizado na primeira coluna segunda linha, isto vale para todas as colunas infinitamente (SIMÕES & SÔNEGO, 2013).

[36] Observamos que quando reduzimos um registro a seus elementos significantes o *matematiquês* tende a desaparecer conforme aconteceu não só no exemplo em foco, mas em outros exemplos apresentados neste mesmo trabalho.

Enfim, a forma como termina a abordagem dos logaritmos, em nosso entender, poderia ser um elemento disparador desta discussão se fosse utilizada na abertura do debate do tema, pois traz subsídios para que o professor possa iniciar uma discussão significativa.

Na seção “Aplicações” (anexo III) é abordada a relação dos logaritmos e a escala de acidez, apresentando logo de início a fórmula da acidez “$pH=-log[H^+]$ sendo $[H^+]$ a concentração de íons hidrogênio em mol/L. Quando $0 \leq pH < 7$, a solução é ácida. Quando $pH=7$ a solução é neutra. Quando $7 < ph \leq 14$, a solução é básica. ” (IEZZI ET AL, 2010, p.160). Na seqüência são apresentados o pH do suco de limão e o pH do vinagre como exemplo. Também é apresentada a acidez do estômago humano em função do ácido clorídrico presente em seu interior e o leitor é convidado a aplicar a fórmula. Aqui observamos grande preocupação com a utilização de dados reais, o que é positivo, entretanto o objetivo da seção se mostra um pouco confuso, pois ela foca excessivamente na aplicação da fórmula em detrimento do problema real.

De uma maneira geral a apresentação do tema logaritmo oscila entre os polos forte congruência e forte incongruência nas apresentações deste objeto matemático tendendo ao segundo polo. Também a apresentação supracitada se situa majoritariamente dentro do ETV, uma vez que à exceção das sessões: “Um pouco de história” e “Aplicações”,que trazem elementos para uma discussão ampliada do tema, as demais seções se encaixam em um padrão descritivo e compatível com a tríade Definição-Exemplo-Exercícios clássica deste modelo.

COLEÇÃO B: MATEMÁTICA PAIVA

O PNLD apresenta esta coleção como tendo, segundo os avaliadores do PNLD, uma boa distribuição dos conteúdos desenvolvidos pela mesma, dando destaque à cuidadosa sistematização dos conceitos matemáticos abordados, observamos também que aqui há pouca abertura à investigação por parte dos estudantes o que indica um obstáculo à autonomia discente. Destaca-se positivamente na coleção a seção Matemática sem fronteiras que suscita uma conexão com outras áreas do conhecimento, destacando-se a educação para a cidadania, que podem enriquecer a prática do professor se bem exploradas e sobre as quais tecemos comentários mais apurados na seqüência deste texto. Ao longo da coleção as explicações, segundo os avaliadores do PNLD, partem de situações, em sua maioria, contextualizadas e sugestivas; as quais analisamos adiante.

Os Livros são compostos por capítulos temáticos subdivididos em itens: cada capítulo apresenta em sua abertura uma situação contextualizada sobre o tema abordado, tal abertura ora é constituída de um fato histórico, ora por uma aplicação do conteúdo em foco; a esta abertura se segue o conteúdo matemático. Também integram os capítulos as seções: “roteiro de trabalho”, pensada para fomentar o trabalho em grupo e, fecha alguns capítulos a seção “Matemática sem fronteiras”: que é constituída de aplicações práticas dos assuntos desenvolvidos e cuja, a nosso ver, equivocada localização no capítulo discutimos com mais detalhes no decorrer deste texto. Também achamos relevante a citação, no final de cada livro de uma lista de leituras complementares, siglas de instituições educacionais e também a bibliografia consultada.

O livro de Manoel Paiva aborda a função logarítmica no livro do primeiro ano do Ensino Médio no capítulo 10 que dedica um item aos logaritmos, discutindo-os nos seguintes subtópicos que são apresentados na seguinte ordem: “Além da teoria”: que apresenta os logaritmos dentro de um tema cotidiano; “Os fundamentos da teoria dos logaritmos”: que traz um pouco da história deste objeto matemático; “O conceito de logaritmo”: no qual a definição e propriedades deste conceito são apresentados e no final do capítulo dedicado à função logarítmica e na seção “Matemática sem fronteiras”, o tema em foco é retomado em um exemplo cotidiano conectado ao assunto de abertura do capítulo que contém os logaritmos para fechar a discussão.

Na seção "Além da Teoria", Paiva (2009) apresenta uma questão sobre a desertificação de uma região e apresenta três perguntas que abrem a discussão a respeito de logaritmos em uma perspectiva contextualizada, há uma informação no pé da página que descreve a situação da Região de Gilbués[37], que tem um dos maiores índices de desertificação do Brasil desencadeado pela degradação do solo provocado, principalmente, pela mineração.

> Estudos sobre desertificação de uma região mostraram que esse processo avança a uma taxa de 2,4% ao ano. Atualmente, estima-se que 6100km^2 desse local já estejam certificados. Qual a área desertificada daqui a um ano? E daqui a cinco anos? Em quantos anos essa área é de 6710 km2(Considere 1,0244=1,1). Após quanto tempo essa área dobrará? (Se necessário utilize uma calculadora científica). Com os conteúdos deste capítulo, você poderá resolver este e outros problemas que envolvem o conceito de logaritmo. (PAIVA, 2009, p.188)

Esta situação é deixada como elemento disparador para o leitor, uma vez que o autor não propõe uma solução para a mesma. Esta opção pode não só despertar a curiosidade do leitor, mas também do professor que utiliza este livro como material de apoio, incentivando-o a iniciar o seu trabalho com o tema com o uso de uma ferramenta instigadora.

Na seção: "Os fundamentos da teoria dos logaritmos": o autor levanta o questionamento do que teria acontecido com a astronomia se o astrônomo alemão Johanes Kepler (1571-1630) tivesse calculadoras científicas à sua disposição. Essa é uma pergunta pertinente ao assunto, uma vez que no século XVII os cálculos envolvendo grandes números, tais como os existentes no trabalho diário de astrônomos como Kepler tomavam um grande tempo destes e, portanto, a discussão que se abre é: e se os astrônomos não tivessem que "perder tempo" com contas intermináveis, investindo-o em pesquisa, onde nossos conhecimentos não estariam? O que se mostra como uma pergunta instigadora que tanto pode despertar o interesse dos estudantes quanto fornecer subsídios ao professor para levantar discussões em sala de aula.

Nesta seção Paiva, assim como Iezzi e Lima nos livros supracitados apresentam John Napier[38] como alguém que se preocupava em simplificar tais cálculos, destacando a publicação do seu trabalho sobre logaritmos em 1614. Conhecemos o resultado desta preocupação com o logaritmo. Sua maior qualidade, na opinião deste autor, se constitui em transformar uma multiplicação em soma e divisão em subtração. Para ele, a idéia de Napier se constitui em "representar números positivos como potências de um mesmo número" (PAIVA, 2009, p. 189). Tal relação aparece explicitada na tabela em que cada coluna apresenta um número e sua respectiva potência de base 10, que reproduzimos adiante (tabela 26):

Tabela 26: Número e potência de base 10-Adaptado (PAIVA, 2009, p. 189)

Número (Registro Numérico)	1,78090	1,82881	3,25694	5,80029
Potência de base 10 (Registro Numérico)	$10^{0,25064}$	$10^{0,26217}$	$10^{0,51281}$	$10^{0,76345}$

[37] Município localizado na região do Piauí.

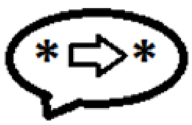
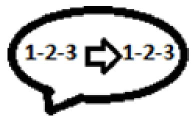
[38] Também chamado de Neper (PAIVA, 2009, p189).

Com o auxílio da tabela acima o autor propõe a multiplicação 3,25694 . 1,78090 = $10^{0,51281} .10^{0,25064}$, a partir daí utilizando as propriedades das potências tem-se $10^{0,51281 +0,25064}$, logo, utilizando a tabela, teremos $10^{0,76345}$=5,80029.

Buscando fazer a análise de congruência para o exemplo em foco observamos que este não se utiliza a coordenação de registros uma vez que o registro de entrada e de saída é numérico, o que explicita a existência de tratamento apenas. Tal, como já dito anteriormente, não é interessante em relação à formação de um conceito (*noesis*), pois tal necessita da coordenação de diferentes registros semióticos (*semiosis*) para acontecer como já discutido anteriormente neste trabalho.

Na seção O conceito de logaritmo, Paiva inicia com a desmistificação da palavra logaritmo quando informa ao leitor que Napier a utilizou para substituir a palavra expoente; também ele apresenta a seguinte conversão, que ora analisamos na tabela 27 adiante: "3^4=81. Ao expoente dessa potência damos o nome de logaritmo. Dizemos que 4 é o logaritmo de 81 na base 3" (PAIVA, 2009, p.189).

Tabela 27 – Análise de congruência VII

Registro de partida em elementos significantes: Escritura Numérica	**Registro de chegada em elementos significantes: Língua Natural**			
3^4=81	Ao expoente dessa potência damos o nome de logaritmo. Dizemos que 4 é o logaritmo de 81 na base 3	Sim	Sim	Não

Observamos aqui moderada incongruência de registros, uma vez que os elementos significantes não tem a mesma ordem possível de apreensão (3ª condição de congruência). O mesmo padrão é mantido nos vários exemplos constituintes desta seção com a diferença de que nestes o registro de partida é numérico e o registro de chegada é feito em escritura algébrica.

O autor fecha a seção em foco com o logaritmo decimal dentro de um exemplo real que é a medição da intensidade de terremotos por meio da Escala Richter, representada por sua fórmula que utiliza os logaritmos na base 10 para medir a intensidade destes fenômenos da natureza. Entretanto tal ocorre em um contexto puramente descritivo e focado na aplicação de uma fórmula, postura essa compatível com o ETV.

Ainda dentro da seção dedicada ao conceito de logaritmo são abordadas as propriedades deste objeto matemático, Manoel Paiva (2009) faz uma menção das propriedades estudadas no capítulo anterior do livro ora analisado (Função exponencial[39]) utilizando-se para tanto como registro de partida o *matematiquês* que como já visto é uma linguagem ambígua e como registro de chegada ele utiliza a escritura algébrica. Como já discutido anteriormente, a conversão do *matematiquês* à escritura algébrica se situa de forma ambígua entre tratamento e conversão o que pode se constituir em um obstáculo cognitivo dado o conflito entre conversão/tratamento que emerge desta situação.

A seção "Matemática sem fronteiras" (anexo IV) traz um problema real do desmatamento da floresta amazônica, abordando algumas de suas causas como a extração

[39] Salientamos que a estrutura do capítulo sobre função exponencial apresenta grande semelhança com a do item dedicado aos logaritmos que ora analisamos.

ilegal de mogno e também da expansão da criação extensiva de bois, causas estas apresentadas com riqueza de dados e imagens, chamando o aluno a uma discussão crítica do logaritmo como suporte para entender a realidade em que estamos inseridos. Tal seção pode se configurar em um recurso de motivação do leitor, seja ele o aluno chamado à discussão, seja ele o professor chamado a abrir um debate com seus estudantes.

De forma geral, a obra analisada apresenta níveis intermediários de congruência além de também oferecer subsídios para o despertamento do interesse do leitor seja ele aluno seja ele professor para o tema. Entretanto, assim como as demais coleções analisadas ela mantém a organização clássica do trinômio: Definição-Exemplo-Exercícios característica do ETV na maioria de suas páginas o que indica uma característica predominantemente transmissiva à obra ora analisada.

QUADRO APRESENTADO PELOS LIVROS CONSULTADOS

Nas obras em foco os conceitos são abordados de forma linear e estanque, cada capítulo pode ser interpretado como um móvel contendo várias gavetas em que em cada uma delas se colocam um dos conteúdos, entretanto não se trata de um móvel tipo cômoda de roupas, e sim de um arquivo morto, ou seja, uma vez o conteúdo colocado naquela gaveta e fechada é retirado de lá quando requisitado sendo prontamente devolvido quando a abordagem do tema acabar, ao contrário de um móvel do tipo cômoda que é constantemente acessado (KINDEL, 2016).[40]

Organizamos os itens sobre os quais nosso olhar é direcionado em um quadro comparativo para subsidiar nossas discussões (tabela 28):

Tabela 28: Tabelamento de temas de interesse

Livro	Definição	Matematiquês	História da Matemática	Coordenação de registros não congruentes	Coordenação de registros congruentes	Exemplo cotidiano real	Exemplo de Matemática pura
Ellon	1	1	1	1	1	0	1
Iezzi	1	1	1	1	1	1	1
Paiva	1	1	1	1	1	1	1

Nos livros analisados, de maneira geral, observamos a presença do *matematiquês* na apresentação do tema em questão. Em especial, nos deparamos com a definição escrita de forma quase igual para os três livros analisados a qual apresentamos a seguir: “a” e “b” números reais e positivos com $a\neq$ de 1 chama-se logaritmo e “*b*” na base “*a*” o expoente “x” ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a “*b*”. $log_a b=x\leftrightarrow a^x=b$ (IEZZI *et al*, 2010; LIMA, 1980; PAIVA, 2009).

Também notamos que todas as obras analisadas apresentam os logaritmos em uma perspectiva meramente declaratória, não dedicando espaço à construção por tema por parte dos estudantes envolvidos. Também encontramos a utilização da história dos logaritmos, e de exemplos retirados da realidade[41], além dos sempre presentes exemplos da Matemática pura

[40] Notas de orientação.
[41] Apenas nos livros didáticos Iezzi e Paiva.

associados ao ETV. Observamos, portanto, que estruturalmente as coleções são muito parecidas.

3.3. ENSINO APRENDIZAGEM E ABORDAGEM DE LOGARITMOS EM DISSERTAÇÕES

As dissertações analisadas no presente item estão elencadas adiante (tabela 29):

Tabela 29: Dissertações em foco

Dissertação	**Questões que vem sendo postas em trabalhos de Educação Matemática sobre o tema**
I Logaritmos e aplicações	Busca de uma proposta diferente e acessível para o ensino delogaritmos
II Logaritmos uma proposta de ensino	Proposta para o ensino de logaritmos a partir de seu contexto histórico
III Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst: uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais	Sugestão de introdução do conceito de função logarítmica com o uso de um software que permite a manipulação dos modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst
IV Diferentes maneiras de definir a função logarítmica natural	Busca de uma melhor compreensão das funções logarítmicas naturais

Adiante detalhamos os conteúdos dos trabalhos em discussão:

I) Logaritmos e aplicações, cujos capítulos são: História dos logaritmos, Logaritmos no Ensino Médio-Potências; propriedades de potências e Logaritmos; Funções Logarítmicas: propriedades, bijeção e mudança de base, base e mudança de base; Logaritmos e Hipérbole: Área da faixa de uma hipérbole, Logaritmos naturais ou neperianos, Tábuas logarítmicas, O número e, outras bases, Logaritmos decimais, Logaritmos via integral de Riemann, Definição da função logarítmica, Propriedades, Gráfico da função logarítmica; Aplicações: potencial hidrogênico pH, Desintegração radioativa, carbono 14 e Resfriamento de um corpo.

II) Logaritmos uma proposta de ensino, composto dos seguintes capítulos: Contexto histórico: Prostaférese[42], Logaritmos de Napier, Interpretação Geométrica dos Logaritmos de Napier, Logaritmos Comuns; A quadratura da hipérbole: Fermat e a Parábola Generalizada, A quadratura da hipérbole e uma propriedade fundamental; Os Logaritmos como Função: Função Exponencial de Base a, Função exponencial, Função Logarítmica, A inversa da função exponencial, mudança de base; Logaritmo natural: Calculando áreas, propriedades, mudança de base.

III) Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst: uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais, que é constituída dos seguintes capítulos: Equações de Diferenças e Equações Diferenciais: Equações de diferenças, Ponto de Equilíbrio e Estabilidade, Cobweb[43], Algumas aplicações de equações de diferenças, Equações

---

[42]Fórmulas de transformação de soma em produto utilizando razões trigonométricas (LIMA, 1980).

43*Cobweb* é um importante método gráfico para análise de estabilidade de um ponto de equilíbrio para determinada equação, para maiores informações remetemos à dissertação de mestrado Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst - uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais.

Diferenciais Ordinárias, Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª Ordem, Equações diferenciais de 1ª ordem lineares, Equações separáveis, Algumas Aplicações de equações diferenciais; Funções exponenciais e logarítmicas: A função exponencial nos livros didáticos, A função logarítmica nos livros didáticos, Exercícios de Vestibulares; Proposta de Ensino: O software, Crescimento populacional - Modelo de Malthus, Crescimento Populacional - Modelo de Verhulst, Proposta de Atividade Extra.

IV) Diferentes maneiras de definir a função logarítmica natural, composta de: Sequência de Números Reais: Números reais, Seqüência de números reais, Limites de seqüência de números reais; Função Logarítmica Natural, Função exponencial, Função logarítmica, Propriedade geométrica dos logaritmos naturais, Função Logarítmica como Limite de Seqüência de Números Reais, Propriedades da função $\phi = \lim n \to \infty\ n\ \sqrt{n}\ a - 1$, Gráfico da função ϕ, O número e, Relação entre a função ϕ e a função ln; Logaritmos na Educação Básica: Considerações Iniciais, O estudo dos logaritmos segundo o currículo do Estado de SãoPaulo.

De forma geral, observamos que os trabalhos analisados abordam a função logarítmica em algum momento, também observamos que a história dos logaritmos, assim como sua relação com a hipérbole[44] são abordadas nos trabalhos I e II, os logaritmos na educação básica aparecem nos trabalhos I e IV, a relação entre logaritmos, os logaritmos naturais são abordados nos trabalhos II e IV e a função exponencial é abordada nos trabalhos II, III e IV. Os quatro trabalhos analisados apresentam como metodologia a pesquisa bibliográfica. Já em relação ao referencial teórico predominante temos o livro Logaritmos de Elon Lages Lima que fundamenta todos os trabalhos em questão.

A pouca quantidade de trabalhos que abordem o processo de ensino aprendizagem de logaritmos e também a análise dos trabalhos acima nos permitiram verificar a necessidade da pesquisa que aqui desenvolvemos por seu ineditismo, uma vez que não encontramos trabalhos que se ocupassem do que dizem os estudantes acerca da introdução do conceito de logaritmo.

Adiante detalhamos: os objetivos, temática, fundamentação teórico metodológica e resultados dos trabalhos analisados com o objetivo de melhor apresentá-los facilitando a observação de suas similaridades assim como dos quadros para os quais seus resultados apontam.

As dissertações ora analisadas apresentam os seguintes objetivos: I) Apresentar aos docentes uma forma diferente e mais acessível de ensinar logaritmos aos seus estudantes; II) Esclarecer o professor do Ensino Médio que, embora os logaritmos, hoje em dia, não sejam usados como instrumento simplificador de cálculos, a compreensão desse conceito se mostra crucial por suas propriedades descobertas posteriormente à sua invenção; III) Apresentar uma sugestão de como introduzir os conceitos de funções exponenciais e logarítmicas, utilizando como motivação um software; IV) Apresentar diferentes formas de definir a função logarítmica natural a partir da função exponencial.

Em relação à temática os trabalhos I, II e III se ocupam do processo de ensino aprendizagem de logaritmos, já o trabalho IV se ocupa da apresentação de diferentes formas de definir a função logarítmica natural.

Observando a Fundamentação Teórico Metodológica das dissertações em foco notamos que: todos os quatro trabalhos analisados tem como referencial teórico o livro Logaritmos de Elon Lages Lima (2010); já o trabalho I além de apresentar este referencial teórico também se utiliza do livro História da Matemática de Boyer (1996) para embasar sua

[44] Hipérbole é um tipo de seção cônica definida como a interseção entre uma superfície cônica circular regular e um plano que passa pro meio das duas metades do cone, sem que este plano seja paralelo à linha oposta ao corte (LIMA, 1980).

pesquisa, e o trabalho IV apresenta como especificidade teórica o estudo do currículo do estado de São Paulo. Salientamos que, todos os trabalhos analisados apresentam forte identidade com a Matemática Pura, não obstante os trabalhos I, II e III se apresentarem tanto como sua temática quanto em seus objetivos como trabalhos de cunho pedagógico, cunho este que não observamos em seu desenvolvimento.

Observando os resultados inferimos que: o trabalho III apresenta um caminho para a construção do conceito de funções exponenciais e logarítmicas mediado por um software, se constituindo em um material de apoio ao professor para o trabalho com estes conceitos, o trabalho IV inferiu que a proposta de estudo dos logaritmos e das funções logarítmicas no currículo do Estado de São Paulo contemplam uma variedade enriquecida de situações de aprendizagem que constroem os conceitos ligados a estes conteúdos, os trabalhos I e II não apresentam resultados.

O próximo capítulo apresenta o percurso de elaboração, refinamento, aplicação e análise do conjunto de tarefas que busca introduzir o conceito de logaritmos. Nele: conceituamos os participantes, o ambiente sede desta pesquisa, o caminho para a elaboração do conjunto de tarefas em questão, assim como sua aplicação e refinamento em dois ciclos com objetivos distintos (o primeiro dedicado à reelaboração e melhoria das próprias tarefas no qual buscamos especialmente observar e fazer modificações que estimulassem a produção escrita dos participantes, o segundo ciclo dedicado à coleta de dados para analise as produções dos estudantes acerca do conjunto de tarefas aplicado).

4. A PESQUISA DE CAMPO

Dividimos nossa pesquisa de campo em dois ciclos:

O primeiro dedicado ao refinamento e melhoria do próprio conjunto de tarefas que inicialmente elaboramos. Neste ciclo o nosso foco repousou sobre as tarefas em duas aplicações distintas: A primeira direcionada a participantes que nunca tinham tido contato com logaritmos e a segunda para participantes que já tinham tido este contato em sua vida acadêmica.

O segundo dedicado à coleta de dados por meio das tarefas elencadas neste conjunto. Neste o nosso foco repousou sobre as produções escritas pelos sujeitos.

Registramos as respostas dos participantes em diário de campo e em fichas de investigação distribuídas aos grupos de estudantes participantes.

4.1 PRIMEIRO CICLO: UM OLHAR SOBRE AS TAREFAS

PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

A primeira aplicação ocorreu em uma turma de primeiro ano de uma escola estadual do Rio de Janeiro no qual a professora pesquisadora é lotada.

Não se trata de uma turma na qual a referida professora seja regente, mas sim uma turma cedida por uma colega de escola para vivenciar o conjunto de tarefas inicialmente elaborado a partir de pesquisa bibliográfica e composto de: 1) Análise de vídeo, tarefa; 2) Investigação de uma tabela; 3) Avaliação das tarefas 1 e 2).

Segundo análise de perfil os estudantes participantes nunca estudaram logaritmos e tem idade entre 14 e 16 anos e apresentam baixíssimos índices de repetência. Não tendo sido observados, portanto, casos de distorção idade-série na turma em foco.

PREPARANDO A INVESTIGAÇÃO COM UM VÍDEO

Para a primeira tarefa dividimos os estudantes em oito grupos e apresentamos a estes o vídeo Matemática é para sempre, que mostra a construção da Matemática enquanto campo de saber e o papel das conjecturas e demonstrações nesta construção. Após a exibição a proposta foi proposta uma discussão acerca do mesmo.

O vídeo, nesta aplicação, apresentou alguns problemas técnicos e de conteúdo, a saber: o fato dele não ter o áudio na língua materna dos participantes, o português, uma vez que o áudio está na língua espanhola o que dificultou o entendimento. Não obstante o vídeo tenha legendas, as mesmas são muito pequenas assim como a televisão que utilizamos para reproduzi-lo que tem apenas vinte e uma polegadas[45]. O próprio recurso nos pareceu insuficiente para ilustrar os conceitos de conjectura e demonstração conforme pretendido por nós. Para contornar esta dificuldade, após a exibição do vídeo explicamos no quadro do laboratório os referidos conceitos. Este é um ponto que revisamos para a próxima aplicação neste ciclo.

---

[45] Aproximadamente 53 centímetros na diagonal da tela.

INVESTIGANDO REGULARIDADES EM UMA TABELA

No segundo momento do conjunto, dedicado à investigação, iniciamos a exploração e a busca de regularidades na tabela recebida pelos estudantes. Nesta tarefa buscamos aliar à investigação da tabela perguntas instigadoras que procuraram não interferir nos raciocínios dos estudantes, mas sim estimulá-los.

Entretanto, observamos que os participantes apresentaram dificuldade em alcançar a principal, para nós, relação implícita na tabela dada: que é que cada elemento da linha um corresponde ao expoente do elemento de mesma coluna da linha dois na base dois. Essa dificuldade pode ter contribuído para que os grupos se dispersassem. Visando contornar esta problemática fomos ao quadro para modificar a tabela recebida pelos estudantes (figura 3).

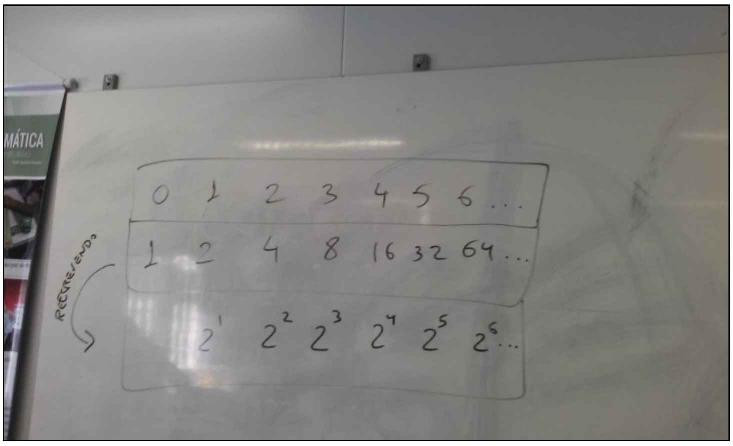


Figura 3: Tabela modificada durante a tarefa

Esta percepção a respeito da dispersão dos participantes transpareceu no seguinte trecho das anotações de diário de campo da professora: “Ao final da atividade de busca quando os estudantes estavam dispersando sugeri na tabela uma terceira linha Como os valores da segunda linha reescritos como potências, tal intervenção reativou a atenção da maior parte dos grupos que persistiu até depois da atividade ir se encerrando para outros grupos” (Diário de campo, 2016, p.1).

Com esta intervenção, alguns estudantes conseguiram estabelecer relações alcançando algumas regularidades que levam aos logaritmos. Ainda que tal não seja conhecido pela turma participante que não teve acesso a tal conteúdo percebemos indícios da apreensão de propriedades deste conceito pelos estudantes N. R e B, participantes desta aplicação, que podem ser vistas no quadro 4.

Quadro 4: Construção de propriedades do conceito por um grupo de estudantes

“As potências da 3ª tabela são a resposta. Se pegar uma potência do segundo quadrado na terceira tabela, por exemplo, que é 2^1, o expoente é o número vai ser sempre o número da primeira tabela e resolvendo a potenciação, o resultado vai ser sempre o número da primeira tabela e resolvendo a potenciação, o resultado vai ser sempre o número da 2ª tabela. Outro caso seria a potência de 2^4, o expoente é o mesmo número que está acima na tabela e resolvendo essa potência o resultado vai estar na 2ª tabela.”

Dos oito grupos participantes observamos a construção de propriedades do conceito para seis deles que chegam a conclusões semelhantes às expostas anteriormente. Os outros grupos alcançaram relações internas à própria seqüência. Tal perfil é representado pela observação constante no quadro 5.

Quadro 5: Relação interna a uma seqüência

"Todos os números são multiplicados por dois."

Percebemos, a partir da leitura do material escrito pelo grupo em foco, que a existência apenas de números naturais na tabela investigada pode ter levado estudantes que a utilizaram a construir o conceito de forma incorreta, uma vez que não representamos os expoentes negativos que também fazem parte do mesmo. Esse é um ponto que revisamos para aplicação futura.

Observamos também que a ausência de uma tarefa disparadora para a investigação da referida tabela fez falta para a motivação dos estudantes na busca de regularidades na mesma, este também foi um ponto que revisamos para a aplicação vindoura.

No momento da exposição oral das inferências levantadas pelos grupos que fecha a tarefa de investigação percebemos que a turma como um todo se apresentou de forma muito tímida.

Contornamos esta dificuldade fazendo perguntas instigadoras a cada grupo buscando fomentar sua discussão na plenária quando perguntamos: quem tinha feito parecido, se alguém tinha feito diferente e como tinha sido esse diferente? A respeito desta intervenção encontramos a seguinte observação em diário de campo: "Fiz várias perguntas instigadoras levando os estudantes a ampliar suas observações e a escrevê-las na folha de investigações, estimulei também a troca entre os participantes" (Diário de campo, 2016, p. 1).

PRIMEIRA AVALIAÇÃO DO CONJUNTO

.

A partir das respostas dos estudantes ao questionário objetivo de avaliação no qual os indagamos acerca do conteúdo e das condições da vivência das tarefas observamos um indicativo de seu acolhimento à proposta como pode ser visto na tabela 30.

Tabela 30: Avaliação dos dois primeiros momentos do conjunto de tarefas: Aplicação 1/Ciclo 1-Estudantes secundaristas

Conteúdo		**Clareza na apresentação**		**Materiais Disponibilizados**		**Duração**		**Ambiente**	
Ótimo	15%	Ótimo	85%	Ótimo	15%	Ótimo	30%	Ótimo	0%
Bom	85%	Bom	15%	Bom	70%	Bom	15%	Bom	42,5%
Regular	0%	Regular	0%	Regular	15%	Regular	55%	Regular	15%
Ruim	0%	Ruim	0%	Ruim	0%	Ruim	0%	Ruim	42,5%
Péssimo	0%	Péssimo	0%	Péssimo	0%	Péssimo	0%	Péssimo	0%

LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

A segunda aplicação aconteceu no dia da Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro- Instituto Multidisciplinar do qual participaram licenciandos daquela instituição[46]. O conjunto aplicado nesta ocasião é resultado da reelaboração das tarefas testadas no Colégio de Ensino Médio na aplicação anterior.

Nosso intuito nesta aplicação foi o de analisar a reação de participantes, que já tinham estudado logaritmos em algum momento de sua vida acadêmica, a um conjunto de tarefas pensado para a introdução deste tema.

Para esta oportunidade utilizamos: como primeira tarefa a reprodução e análise das reações dos participantes ao vídeo Matemática é para Sempre, do qual já falamos no presente trabalho; como segunda tarefa introduzimos a investigação das caixas misteriosas (a respeito da qual falamos adiante); como terceira tarefa introduzimos a brincadeira com as calculadoras rudimentares (a respeito da qual tecemos comentários na seqüência); como quarta tarefa, modificamos a investigação da tabela ampliando-a; como quinta tarefa modificamos a análise de perfil de aplicação substituindo o questionário utilizado na primeira aplicação por uma roda de conversa. Fechando o conjunto mantivemos como sexta tarefa a avaliação dos momentos de motivação e investigação matemática.

As tarefas supracitadas permanecem organizadas em três momentos: o primeiro de sensibilização do qual fazem parte as tarefas um e dois, o segundo de investigação do qual fazem parte as tarefas três e quatro e o terceiro dedicado à avaliação do qual fazem parte as tarefas cinco e seis.

Resumindo, temos a tabela 31:

Tabela 31: Resumo das tarefas

Tarefa	**Momento**
1.Vídeo	Sensibilização
2.Investigação das Caixas Misteriosas	
3.Provocando a Curiosidade sobre regularidades	Investigação
4.Investigação Matemática	
5.Avaliação	Avaliação
6.Análise de perfil	

Apresentamos a seguir a análise destes momentos.

A SENSIBILIZAÇÃO: PREPARANDO A INVESTIGAÇÃO COM O USO DE UM VÍDEO E UMA DINÂMICA

Como primeira tarefa, assim como na aplicação anterior, apresentamos aos participantes o vídeo a Matemática é para sempre que discorre sobre o caráter eterno da Matemática e explica a construção da rainha das ciências de forma descontraída.

Analisando a vivência desta tarefa, observamos que embora tenhamos trabalhado na solução dos problemas técnicos encontrados na aplicação anterior (utilizando um projetor e aumentando, portanto, o tamanho da legenda, uma vez que um dos problemas que encontramos na aplicação anterior foi o tamanho reduzido da tela). Tal não se mostrou suficiente, uma vez que a lâmpada do aparelho disponível no local estava fraca e isto dificultou a leitura das legendas. Isto levou os participantes a pedirem para assistir ao vídeo diretamente no *notebook* disponível na sala. Isto foi feito sem dificuldades, não obstante o tamanho reduzido da tela do aparelho[47]:

[46] Nesta ocasião substituímos o questionário de análise de perfil por uma roda de conversa.
[47] 14 polegadas de diagonal o que é igual a aproximadamente 35 centímetros.

Tal pedido e observações da pesquisadora constam em nosso diário de campo: "Iniciamos a oficina com o vídeo TED/Cabezon com grande receptividade dos participantes. O projetor está com baixa resolução de imagem e os participantes presentes se propuseram a assistir direto no *notebook* o que foi bem sucedido. "(Diário de Campo, 2016, p.2).

Aqui parece haver uma inconsistência entre a primeira e a segunda aplicação uma vez que na primeira o tamanho da tela se apresentou como um obstáculo ao bom andamento da tarefa e na segunda isto não aconteceu. A diferença aqui reside na quantidade de participantes; uma vez que a primeira aplicação contou com 35 participantes que não conseguiram, por questões de espaço, assistir ao vídeo a uma curta distância da tela da TV utilizada, o que ocorreu na segunda aplicação devido ao baixo número de participantes (12 licenciandos).

Durante a discussão que sucedeu a apresentação do vídeo aos participantes nosso olhar sobre tal atividade se modificou. Nesta oportunidade observamos que tal tarefa apresentou, assim como na primeira aplicação, um viés declaratório que nos remeteu ao ETV o que não era nossa intenção. Além disso, observamos novamente que os conceitos de conjectura e demonstração não eram esclarecidos pelo vídeo como esperado. Optamos, portanto, por retirá-lo do conjunto de tarefas.

Como segunda tarefa, ainda dentro das atividades motivadoras para a investigação, incluímos no conjunto de tarefas aqui em questão a exploração das caixas misteriosas. Trata-se de uma atividade desenvolvida pelo *Science Museum*[48] e que apresentamos a seguir,

Tarefa:

As caixas misteriosas consistem em seis caixas opacas lacradas, com estas em mãos vocês devem empreender uma investigação dividida em duas etapas, a primeira dedicada à observação, anotação e proposição de um palpite para o que está escondido no interior das caixas. O segundo se constitui em uma plenária no qual se busca o consenso entre os palpites de todos os grupos participantes. Nesta, seus grupos podem concordar uns com os outros e mudar seus palpites caso algum ou alguns outros grupos o convençam de seus argumentos.

O objetivo da tarefa das Caixas misteriosas é que os estudantes vivenciem na prática as etapas do método científico. A compreensão destas etapas se mostra oportuna a quem se proponha a empreender uma investigação Matemática (PONTE *et al*, 2005). Esta atividade dura, aproximadamente, 50 minutos.

Para a vivência desta tarefa os participantes devem ser organizados em, no máximo, 6 grupos, uma vez que a dinâmica prevê o uso de igual número de caixas[49]para. Nesta dinâmica, estas pessoas são informadas que cada grupo se constitui em um grupo de pesquisa cujos membros, em conjunto, irão tentar descobrir o que existe no interior de caixas misteriosas numeradas de 1 a 6, caixas estas lacradas e feitas de material opaco (figura 4), e que contém no seu interior objetos desconhecidos por todos os presentes[50]. A vivência das caixas é feita em duas etapas e em ambas os participantes ficam organizados nos mesmos grupos do início

48 O Science Museum é um dos três principais museus em *Exhibition Road, South Kensington*, Londres. Ele foi fundado em 1857 e é hoje um das principais atrações turísticas da cidade, com cerca de 2.7 milhões de visitantes anuais (https://pt.wikipedia.org/wiki/Science_Museum_(Londres). Tradução Pessoal.

[49] O uso maior de caixas tornaria a atividade arrastada segundo informações do próprio sítio eletrônico do *Science Museum*, criador desta dinâmica (http://www.sciencemuseum.org.uk/educators/mystery-boxes-private).

[50] Inclusive a professora pesquisadora.

ao fim.

Figura 4: Caixas Misteriosas[51]

A primeira etapa consiste na investigação sobre o que está contido no interior de cada caixa e, como tais são lacradas, todo tipo de observação é levada em consideração, desde que as caixas não sejam abertas. Os participantes devem estimar o peso, inferir de que material de que cada objeto no interior de cada caixa pode ser feito, etc.

Os participantes devem Sempre anotar suas estimativas e inferências em uma folha dividida em seis partes numeradas de um a seis, sendo que o número de cada parte da folha corresponde ao um número da caixa. Adiante (figura 5) é possível visualizar de que forma este preenchimento é feito,

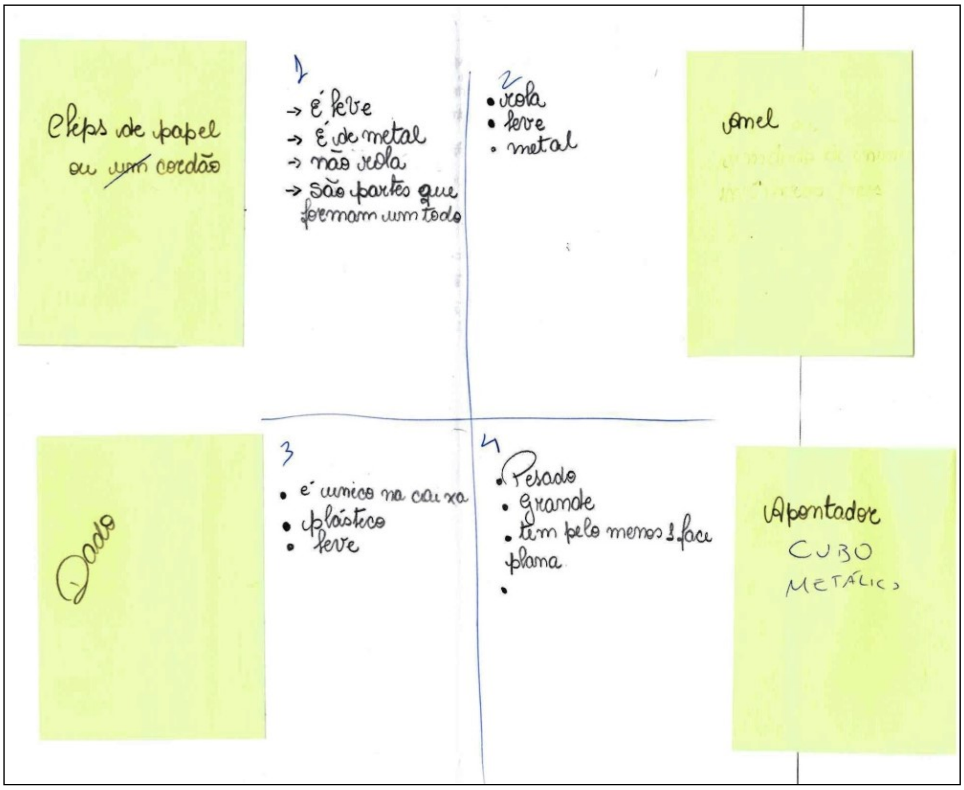


Figura 5: Ficha de trabalho das caixas misteriosas

---

51 Material confeccionado a partir das orientações do sítio eletrônico do Science Museum*(id ibid*).

as observações devem ser grafadas na folha branca numerada, tendo um quadrante para cada caixa e os palpites nas folhas amarelas anexadas e correspondentes a cada quadrante.

A partir da tarefa supracitada é feita uma investigação, pelos licenciandos, de uma caixa por vez e ao final de dois de minutos de observação para cada caixa cada equipe deve dar um palpite sobre o que existe dentro de cada caixa. Palpite esse baseado nas inferências anotadas no campo correspondente a cada caixa analisada. Este palpite é anotado em um adesivo e colado no campo da folha correspondente à caixa. Este processo é repetido quatro vezes que foi o número de caixas utilizadas.

Quando todas as equipes escrevem palpites para o conteúdo de todas as caixas, começa a segunda parte da dinâmica que consiste em uma plenária no qual cada grupo defende o seu palpite e colocar os seus argumentos. Em caso de concordância entre os grupos a respeito do conteúdo de determinada caixa a professora que conduz a vivência afirma que uma "teoria" é constituída para o interior da respectiva caixa, em caso contrário não existe estabelecimento de uma "teoria" (SCIENCE MUSEUM, 2016, tradução pessoal).

INVESTIGANDO AS CAIXAS

Na vivência das caixas misteriosas, os participantes foram divididos em quatro equipes com três membros cada uma vez que nesta aplicação participaram 12 pessoas o que nos permitiu a divisão em um número menor de equipes mantendo um número reduzido de membros por grupo.

No primeiro momento da exploração os sujeitos em seus referidos grupos fizeram suas inferências acerca do conteúdo das caixas uma a uma e escreveram seus palpites para o interior das mesmas.

No segundo momento os participantes se envolveram ativamente no momento de discussão das inferências e estabelecimento ou não de uma teoria como observamos nas anotações em Diário de campo "Nas caixas misteriosas uma equipe pediu a caixa para reforçar suas inferências. O debate se estabeleceu de forma natural [...]" (Diário de campo, 2016, p.2).

Ao refletir sobre a avaliação dos sujeitos ao conjunto de tarefas observamos que dos oito formulários de avaliação das tarefas preenchidos, sete apontaram as caixas como um momento de incentivo à reflexão. Escolhemos a colocação de um dos participantes que respondeu à avaliação como representante desta satisfação com a tarefa (quadro 7), o que nos levou a mantê-la para o próximo ciclo de aplicações no qual nosso olhar sai das tarefas para repousar especificamente na produção escrita dos participantes.

Quadro 6: Comentário de participante sobre as caixas misteriosas

Qual material ou jogo que mais gostou? "Caixa misteriosa" *Por quê? "Pois nos levou a fazer uma reflexão, a pensar sobre o que tem dentro da caixa."*

A INVESTIGAÇÃO: UMA ATIVIDADE MOTIVADORA E UMA BUSCA POR REGULARIDADES

Para o segundo momento apresentamos duas situações: a primeira, do tipo relâmpago, adaptada de Simões e Sônego (2013) consiste em que os estudantes sejam provocados a descobrir um segredo envolvendo regularidades e a segunda em uma situação na qual eles tem mais tempo para descobrir tal segredo, no caso a relação entre duas sequências numéricas.

A primeira atividade que consiste em escrever em no quadro negro ou similar, sequências multiplicativas e aditivas, onde é proposto um desafio aos grupos, no qual cada um, utilizando uma calculadora, compete com a pesquisadora que não utiliza recurso tecnológico algum para efetuar a multiplicação ou a divisão de valores da segunda coluna da tabela. Como, por exemplo, multiplicar 125 por 625 na tabela disponível a seguir:

Tarefa:

Pegue sua calculadora para disputar com a professora quem multiplica ou divide mais rápido os números da coluna da esquerda.

0	1
2	5
4	25
6	125
8	625
10	3125
12	15625
14	78125
16	390625
18	1953125
20	9765625

Essa tarefa dura cerca de 5 a 10 minutos e seu objetivo é o despertar a curiosidade dos estudantes para a investigação da tabela. Uma vez que como a professora/pesquisadora na verdade está somando/subtraindo os números da primeira coluna; ou seja, está operando com expoentes (que é uma propriedade que desejamos que os participantes alcançassem), enquanto eles estão multiplicando/dividindo os números da segunda coluna.

Na aplicação desta tarefa observamos que os licenciandos ficaram intrigados com a rapidez da pesquisadora o que pode tê-los motivado a descobrir como ela conseguia fazer as contas tão rapidamente e de maneira correta.

Para a quarta tarefa do conjunto, modificamos a tabela utilizada na primeira aplicação, uma vez que a tabela utilizada anteriormente não incluía os expoentes negativos. Para torná-la mais abrangente, os incluímos como segue adiante.

Tarefa:

Busque regularidades na tabela abaixo e descreva o que observa:

...	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
...	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	...

A aplicação nesta segunda oportunidade seguiu os moldes da primeira. Aqui observamos indícios de que os grupos participantes conseguiram, a partir da tabela proposta, construir propriedades do conceito de logaritmo. Colocamos aqui como exemplo desta observação a produção escrita de um dos grupos (participantes D.P.J.B) em questão (quadro

7).

Quadro 7: Inferências de um grupo a respeito da tabela modificada

> *"A primeira linha são os expoentes, já a segunda linha são as potências, logo quando realizamos as operações de multiplicação (ou divisão), estamos na verdade somando (ou subtraindo) os expoentes e mantendo a base."*

Entretanto, não obstante tenhamos observado indícios da construção das propriedades que desejávamos, sentimos a necessidade da ampliação desta tarefa. Visando ampliar o leque de propriedades dos logaritmos que poderiam ser construídas pelos participantes. Este foi um ponto revisado para futura aplicação.

A AVALIAÇÃO: QUESTIONÁRIO E RODA DE CONVERSA

Encerramos a última aplicação do ciclo com a avaliação das tarefas 1 a 4 do conjunto. Tarefas estas pertencentes aos momentos dedicados à motivação e à investigação matemática. Como o evento no qual foi aplicado o conjunto de tarefas em questão apresentou um formulário próprio de avaliação, optamos por utilizar algumas perguntas constantes deste questionário como avaliação da segunda aplicação do conjunto de tarefas em foco. Elencamos abaixo as perguntas que selecionamos no referido questionário.

> Tarefa:
>
> Avalie, de forma individual, o conjunto de tarefas vivenciado:
>
> 1. Qual material ou jogo mais gostou?
> 2. Mudou a visão da Matemática?
> 3. Avalie o minicurso.

As respostas dos participantes indicam que o grau de satisfação com as tarefas propostas foi elevado, com especial destaque à atividade das Caixas Misteriosas (tabela 32).

Tabela 32: Avaliação dos dois primeiros momentos do conjunto de tarefas: Ciclo 1-Licenciandos

Qual material ou jogo mais gostou?		**Mudou a Visão?**		**Avaliação do minicurso**	
Mistery Boxes	88,5%	Melhorou	55%	Ótimo	44%
Jogo da Tabela	11,5%	Manteve	11,5%	Bom	0
Análise Tabela	0	Reforçou	11,5%	Regular	0
Video	0	Piorou	0	Ruim	0
Encerramento	0	S/Resposta	22%	S/Resposta	55%

Todos os momentos passaram, no primeiro ciclo, por duas aplicações de refinamento que subsidiaram as tarefas propostas para a coleta de dados visando a análise das produções escritas dos participantes do segundo ciclo. Os três momentos do conjunto de tarefas passaram por reformulações conforme se observa na tabela abaixo:

Tabela 33: Percurso de reelaboração de tarefas

Conjunto de tarefas para introdução ao conceito de logaritmos			
Momento	**Tarefas propostas no primeiro ciclo em duas aplicações**		**Tarefas propostas no segundo ciclo: Aplicação única**
	Aplicação 1	Aplicação 2	
1° momento: Preparação e motivação para a investigação:	Tarefa 1: Análise do Vídeo Matemática é para sempre	Tarefa 1: Análise do Vídeo Matemática é para sempre Tarefa 2: Caixas Misteriosas	Tarefa 1: Caixas Misteriosas.
2° momento: Investigação	Tarefa 2: Busca de regularidades entre uma progressão aritmética e uma progressão geométrica utilizando sequências finitas.	Tarefa 3: Brincadeira das calculadoras rudimentares de logaritmos. Tarefa 4: busca de regularidades entre uma progressão aritmética e uma progressão geométrica utilizando sequências infinitas à esquerda e à direita.	Tarefa 2: Exploração de sequências numéricas; Tarefa 3: busca de regularidades entre progressões aritméticas e geométricas entre sequências previamente escolhidas;
3° momento: Avaliação	Tarefa 3: Análise de perfil e avaliação pelos participantes do conjunto de tarefas, ambas via questionário.	Tarefa 5: Análise de perfil em roda de conversa e avaliação pelos participantes do conjunto de tarefas em questionário diverso do utilizado na primeira aplicação do primeiro ciclo.	Tarefa 4:Avaliação, do conjunto de tarefas pelos participantes em questionário elaborado a partir da combinação dos dois questionários de avaliação utilizados no primeiro ciclo.

4.2 SEGUNDO CICLO: UM OLHAR SOBRE A PRODUÇÃO ESCRITA DOS ESTUDANTES

Neste ciclo foram propostas quatro tarefas aos participantes: A primeira foi a investigação das Caixas Misteriosas[52]; a segunda foi a exploração de seqüência numéricas em uma perspectiva livre; a terceira foi a busca de regularidades, em uma perspectiva orientada, entre progressões aritméticas e geométricas entre seqüência previamente escolhidas; e a quarta e última tarefa foi a avaliação do conjunto de tarefas pelos participantes em questionário elaborado a partir da combinação dos dois questionários de avaliação utilizados no primeiro ciclo.

O material coletado a partir da aplicação das tarefas supracitadas foi reduzido por complementaridade, semelhança ou divergência e analisado com o apoio da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2009) onde nosso olhar repousou sobre a

[52] Nos mesmos moldes da aplicação efetuada no ciclo anterior.

congruência das conversões efetuadas.

APRENDENDO A PESQUISAR E A OBSERVAR REGULARIDADES

TAREFA 1: CAIXAS MISTERIOSAS

O objetivo desta tarefa é o de levar seus participantes a externar suas observações por meio da fala e da escrita, estimular suas inferências a partir do que individualmente ou em grupo observam despertar a motivação para a busca de consenso em torno de um problema apresentado, no caso o problema em questão é descobrir que objetos estão ocultos em cada caixa misteriosa analisada. Esta atividade foi realizada em 50 minutos, ou seja, uma aula.

Relembramos aqui que a vivência das Caixas Misteriosas é dividida em duas etapas: 1) Investigação em grupo e 2) Plenária.

Em relação à vivência da primeira etapa da tarefa: observamos que os grupos em foco, não obstante tenham aceitado o convite para o estabelecimento de um cenário para investigação, uma vez que se mostraram interessados, participativos e curiosos, apresentaram a necessidade de orientação e estímulo por parte da professora pesquisadora em forma de perguntas instigadoras para que escrevessem detalhadamente suas observações no papel, como por exemplo: ”*O que observa?* O conteúdo da caixa é leve? É pesado? O material que está dentro da caixa ocupa todo o espaço? O material rola? Desliza?” (Diário de campo, 2016, p.3). Inferências dos estudantes podem ser observadas na produção escrita do grupo 1(figura 6):

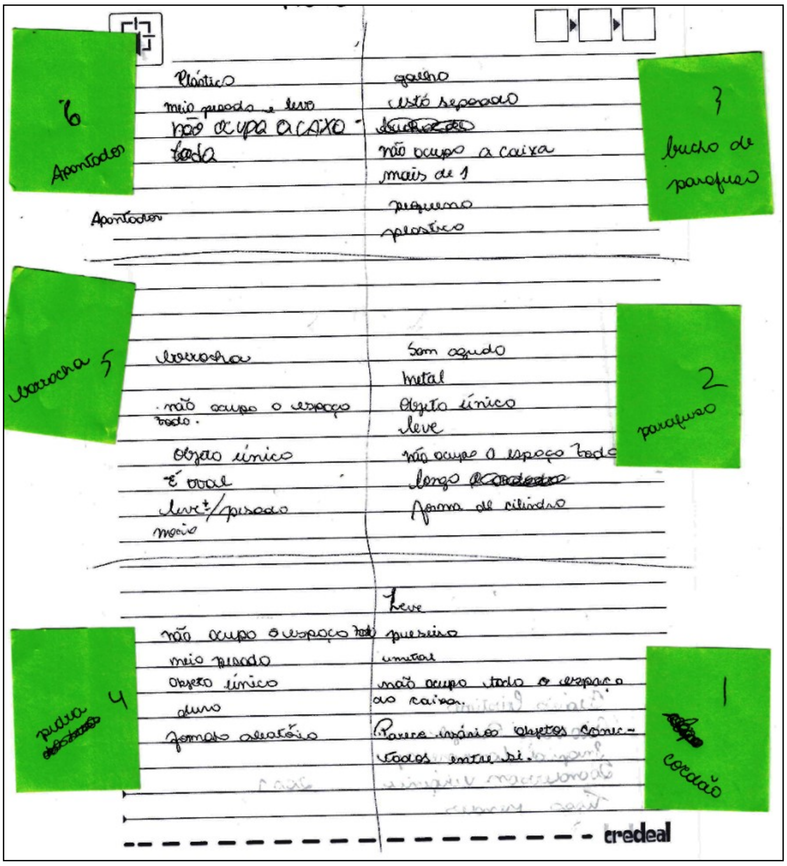


Figura 6: Observações do grupo G1 sobre as caixas misteriosas

De maneira geral, encontramos identidade na forma como os estudantes buscaram determinar o objeto escondido. Ou seja, os estudantes envolvidos descreveram o objeto a partir dos seus sentidos. Em especial pela audição, tato e visão o que foi percebido individual ou coletivamente. Dos cinco sentidos, o olfato não foi usado embora tal fosse possível, uma vez que poderia existir ervas aromáticas no interior das caixas. O paladar foi o único sentido que não pôde ser usado, pois as caixas estavam lacradas.

Para contornar a opacidade das caixas os estudantes utilizaram lanternas dos seus celulares (observamos aqui que tal utilização não contraria as regras da dinâmica das caixas uma vez que somente é vedada a abertura da caixa). A iniciativa partiu de um único grupo, e foi imediatamente imitada pelos demais.

Entretanto, não obstante os estudantes tenham conseguido divisar alguma silhueta dos objetos desconhecidos ainda assim não houve consenso para o conteúdo da maioria das caixas. Isto pode ter ocorrido devido ao fato desta tarefa requerer o uso de mais de um sentido para definir um palpite para o objeto existente no interior das caixas.

Reunimos as inferências e palpites de todos os grupos organizados para a primeira tarefa. Nomeamos estes grupos como G1, G2, G3 e G4 na tabela comparativa adiante para observarmos o desenvolvimento da tarefa. Em especial dirigimos nossa atenção aos momentos nos quais as produções dos grupos apresentaram semelhança, complementaridade ou dissonância e de que forma estes perfis poderiam nos ajudar na compreensão das produções escritas dos estudantes.

Tabela 34: Produção escrita dos 4 grupos para a tarefa 1

Caixa	**Observações**			**Palpite sobre a natureza do objeto**			
	Audição	**Tato**	**Visão**	**G1**	**G2**	**G3**	**G4**
1	*"Metal" (G1); "barulho metálico" (G2); "faz muito barulho" (G3.); "é metal"(G4).*	*"Leve" (G1 e G3); "é leve" (G4).*	*"Pulseira, Não ocupa todo o espaço da caixa, parece (sic) vários objetos conectados entre si" (G1); "bolinhas" (G2); "é pequeno" (G3); "Tem vários, tá unido"(G4).*	*"Cordão"*	*"Cordão"*	*"Cordão"*	*"Cordão"*
2	*"som agudo, metal" (G1); "barulho metálico"(G2).*	*"Leve" (G1); "objeto pesado" (G3).*	*"Objeto único, Não ocupa o espaço todo, longo, forma de cilindro" (G1), "formato cilíndrico, com a luz com cabeça achatada" (G2); "formato não definido, único objeto" (G3), "é um só, é quadrado" (G4).*	*"Parafuso"*	*"Prego"*	*"Pedra"*	*"Dado"*
3	*"Plástico" (G1); "várias bolinhas separadas" (G2).*	*"Objeto leve" (G3); "não desliza" (G4).*	*"galho, está separado, não ocupa a caixa, mais de 1, pequeno" (G1), "com a luz, tem formato de bucha de prego"(G2); "tem mais de um objeto" (G3); "não é quadrado, é um só "(G4).*	*"Bucha de parafuso"*	*"Bucha"*	*"Bucha"*	*"Pedra"*
4	*"Barulho de dado" (G2); "faz muito barulho" (G3)*	*"Meio pesado, duro" (G1); "parece pesado" (G2) "objeto pesado" (G3); "pesada" (G4)*	*"não ocupa o espaço todo, objeto único, formato aleatório" (G1), "quadrado; sem formato fixo, grande" (G4).*	*"Pedra"*	*"Cubo/dado"*	*"Apontador"*	*"Pedra grande"*

5	*"Borracha" (G1); "faz pouco barulho" (G3).*	*Leve + - /pesado (G1); leve(G3); leve (G4).*	*"não ocupa o espaço todo, objeto único, é oval" (G1), "não tem forma certa, com luz tem formato triangular arredondado"(G2); "único objeto" (G3); "formato indefinido, média"[52]*	*"borracha"*	*"Borracha"*	*"Borracha"*	*"borracha"*
6	*"Plástico" (G1), "parece plástico"(G2)*	*"Meio pesado e leve" (G1); "um pouco pesado" (G2); "Pesado" (G3); "é leve, é mais pesado que outros apontadores(comparação)*	*"não ocupa a caixa toda" (G1),"formato indefinido" (G2); "parece ser redondo e plano, é um objeto único" (G3); "só um objeto, não é um quadrado" (G4)*	*"apontador"*	*"Pote de maquiagem"*	*"Broche"*	*"apontador"*

Com base nas respostas elencadas observamos formas distintas de abordagem utilizadas para identificar o conteúdo no interior das caixas.

Para identificar o conteúdo da caixa 1 notamos convergência tanto nas observações envolvendo a audição (todos os grupos) quanto nas que envolveram o tato para (G1, G3 e G4). Já em relação à visão (todos os grupos), observamos que a complementaridade das inferências dos grupos se mostrou decisiva para o consenso de todos os envolvidos em relação ao conteúdo da mesma.

Salientamos também a importância da negação. Por exemplo, a frase "não ocupa todo o espaço da caixa" (utilizada por todos os grupos com mínimas alterações) propicia a categorização do objeto em um universo bem definido. Neste caso as possibilidades para a caixa se dividem em: 1) o objeto ocupa todo o espaço e 2) o objeto não ocupa todo o espaço, tendo os presentes optado pela segunda categoria.

Em relação à caixa 2, temos convergência de opiniões em relação à audição para os grupos (G1 e G2), Divergência total para o tato (G1 e G3) e opiniões diversificadas com relação à visão para os grupos 1 a 4.

Para a caixa 3, em relação à audição, os grupos 1 e 2 apresentaram inferências soltas: fato que se repetiu em relação ao tato nas observações dos grupos 3 e 4. Não obstante as inferências sejam soltas, elas se complementam e contribuem para a compreensão do todo.

Já em relação ao sentido da visão temos inferências complementares e também inferências dispares. Nas primeiras os grupos fizeram observações semelhantes tais como: "o objeto se parece com um galho" (G1), "uma bucha de prego" (G2) "não é quadrado" (G4). Alertamos aqui que estas observações não se excluem mutuamente, o que não é o caso das observações díspares onde temos dois grupos que afirmaram haver mais de um objeto (G1 e G3) e um grupo que afirmou haver um único objeto (G4). Na plenária, o conjunto destas observações nos permitiu vislumbrar um consenso para esta caixa.

Já para a caixa 4 temos convergência total em relação à audição para os palpites dos grupos (G1 e G2), divergência de opiniões em relação ao tato para os grupos (G1 a G3) e complementaridade de palpites com relação ao sentido da visão para os grupos (G1 a G4). As demais caixas seguem perfis semelhantes de inferências.

INFERÊNCIAS SOBRE A TAREFA 1

Ao final da vivência das caixas misteriosas, como já citado, elas não foram abertas. Ou seja, não houve um momento de descobrimento do conteúdo de cada caixa. Observamos indícios de que a não abertura destas tenha aguçado a curiosidade dos participantes e foi neste espírito que nos encontramos para iniciar a próxima tarefa.

TAREFA 2: EXPLORANDO SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS

A tarefa 2 consiste na exploração, pelos participantes, de uma tabela contendo seqüência numéricas diversificadas. O seu objetivo é levá-los a buscar regularidades nestas, uma vez que tais se constituem em um fundamento para a construção do conceito de logaritmo.

Tarefa: Observem a tabela adiante e baseados nela respondam as perguntas 1 a 5:

a	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
b	1	5	25	125	625					
c	0	4	8	12	16					
d	1	3	P	27	81	243	729	2187	6561	19683
e	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
g	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
h	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
i	1	1/3	1/9	1/27	1/81	1/243	1/729	1/2187	1/6561	1/19683
J	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
k	1	-2	-4	-8	-16	-32	-64	-128	-256	-512
l	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

Comparem as linhas entre si, analisem cada uma delas e escrevam pelo menos cinco frases sobre o que observaram.

Completem as linhas das letras b e c.

O que acontece entre os elementos de uma mesma sequência? Expliquem sua resposta. E em seguida, encontrem mais três elementos para cada uma delas.

Se quisermos continuar cada uma das linhas, acrescentando elementos à esquerda, como devemos proceder?

Comparem todas as linhas com a sequência da letra f. O que observam?

Para esta tarefa os participantes foram divididos em seis grupos (GA a GF), o uso de calculadora foi liberado, o que se mostrou uma vantagem segundo o registro da professora pesquisadora: ”Como o uso de calculadora foi permitido os estudantes não tiveram receio de números grandes, ou seja, tal recurso auxiliou as inferências de todos” (Diário de Campo, 2016, p.5). Ao final da exploração da tabela uma plenária para discussão de todos os grupos sobre suas observações foi estabelecida. A aplicação desta tarefa foi feita em 100 minutos, ou seja, duas aulas.

Adiante discutimos as inferências dos participantes, tanto em seus grupos quanto na plenária, em relação às questões propostas nesta primeira tarefa, assim como sua semelhança, complementaridade ou disparidade conforme for o caso além da forma como representaram, converteram e trataram os conceitos em jogo.

QUESTÃO 1: COMPARANDO SEQUÊNCIAS

A primeira questão pede a comparação das linhas entre si e pelo menos cinco frases sobre o que o grupo observaria nesta comparação. Neste item observamos que os grupos buscam atender ao enunciado formulando pelo menos cinco frases sobre o que notaram na tabela.

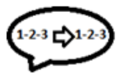
Na redução dos dados para análise optamos por observar as linhas estudadas e discutidas por mais de um grupo.

PG DE RAZÃO DOIS

Na P.G. em foco (1,2,4,8,16,32,64,128, 256, 512) os grupos GD e GC apresentam respostas semelhantes quando identificam a multiplicação por dois, não se estendendo em suas considerações.

A resposta do grupo D apresenta em língua natural de forma sucinta uma das características da sequência em foco. Trata-se de uma conversão que observamos adiante (tabela 35):

Tabela 35: Análise de congruência na conversão da P.G. de razão 2

Grupo	**Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)**	**Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)**			
GD	(1,2,4,8,16,32,64 ,128, 256, 512)	*"Vai multiplicando de 2 em 2"*	não	Não	Não

Aqui o grupo supracitado faz uma conversão fortemente não congruente, pois não existem elementos significantes que se correspondam nos registros de partida e chegada e, uma vez que tais não existem também não se apresentam em uma mesma ordem.

Além disso, o registro de chegada se mostra ambíguo, pois afirma existir uma multiplicação por dois não especificando o que é multiplicado e de que forma esta multiplicação acontece.

Já na plenária encontramos um consenso para a existência de uma sequência multiplicativa de razão dois para a linha em questão conforme observado no diário de campo da professora:"As discussões em torno da linha A não avançaram muito uma vez que logo se estabeleceu um consenso rápido em torno da multiplicação por 2 e da sequência ser uma P.G. de razão 2."(Diário de campo , 2016, p.6).

P.G. DE RAZÃO CINCO

Nas considerações envolvendo a linha B (1, 5, 25, 125, 625, ...[53], ..., ..., ..., ...) observamos que as respostas elencadas pelos grupos C, D e B se complementam.

Adiante organizamos as conversões feitas por estes grupos na tabela 36: tanto para formar um cenário que nos permita relacioná-las quanto para observar a sua congruência na conversão para posterior discussão:

Tabela 36: Análise de congruência na conversão da P.G. de razão 5

[53] Estes pontos representam o vazio na tabela da questão proposta.

Grupo	Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)	Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3 ⇨ 1-2-3
GC	(1, 5, 25, 125, 625, ..., ..., ..., ..., ...)	*"Na linha B os números são multiplicados por 5"*	Não	Sim	Não
GD		*"Existe uma progressão geométrica"*	Não	Sim	Não
GB		*"Todos os números que terminam em 5 multiplicados por 5 dão 25 no seu final."*	Sim	Sim	Sim

Observamos na tabela 36 que as afirmações dos grupos contemplam propriedades que juntas descrevem a linha estudada uma vez que as produções escritas dos grupos C e D quando lidas em conjunto apresentam a seqüência em questão não só como uma P.G., como também destacam sua razão que é 5. Ambos os grupos utilizam conversões fortemente incongruentes uma vez que não estabelecem relações entre elemento significante de partida e elemento significante de chegada.

Já a produção escrita do grupo B quando colocada lado a lado com a dos grupos D e C (tabela 36) destaca uma regularidade essencial da P.G. em foco uma vez que o grupo B observa e registra que a partir do terceiro termo todos os termos terminam em 25 e isso é apresentado pelo grupo em questão como decorrente da multiplicação da razão 5 pelo segundo termo em diante. A conversão deste grupo além de totalmente congruente nos fornece mais elementos para observar o desenvolvimento da questão.

Ou seja, na plenária, durante o debate das inferências sobre a linha B, a multiplicação é associada à progressão geométrica, que somada à constatação do grupo B, de que todos os números que terminam em cinco quando multiplicados por cinco terminam em vinte e cinco desperta a curiosidade dos presentes. Nesta conversa surge a sugestão de que tal regularidade está associada à multiplicação da unidade cinco pela razão cinco da multiplicação chegando ao valor vinte e cinco que é uma potência, isto é, cinco ao quadrado.

P.A. DE RAZÃO 4

Para a linha C (0,4,8, 12, 16, ..., ..., ..., ..., ...) os grupos C e D fazem observações semelhantes que podem ser representadas pela escrita do primeiro e sobre a qual nos estendemos adiante (tabela 37).

Tabela 37: Análise de congruência na conversão da P.A. de razão 4

Grupo	Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)	Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3 ⇨ 1-2-3
GC	(0,4,8, 12, 16, ..., ..., ..., ..., ...)	*"Na linha C é sempre acrescentado 4 no número anterior"*	Não	Sim	Não

Observamos nas inferências do grupo a apresentação de uma propriedade fundamental da P.A., a razão constante, e isso é feito atendendo ao critério de único entendimento para o registro de chegada, registro esse que é constituído das inferências do grupo em língua natural.

Entretanto, a falta de desenvolvimento desta resposta aparentemente leva à não contemplação dos demais itens. Ou seja, falta a apresentação de exemplos de como se daria este acréscimo a cada termo o que nos permitiria compreender melhor o desenvolvimento da produção escrita dos estudantes aqui apresentada. Esta discussão acerca desta linha também não se desdobra na plenária, uma vez que os grupos de maneira geral se limitam a concordar com as colocações do grupo C.

P.A. OU P.G. DE RAZÃO ZERO

Nas considerações envolvendo a linha E (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0) observamos vários perfis de resposta (tabela 38):

Tabela 38: Análise de congruência na conversão da P.A. ou P.G. de razão 0

Grupo	**Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)**	**Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)**	*⇨*	!	1-2-3⇨1-2-3
GE	(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)	*"Possui uma linha só com zeros"*	Sim	Sim	Sim
GD		*"E na fileira E a multiplicação é feita apenas por número 0"*	Não	Sim	Não
GB		*"A sequência "e" e "h" é constante"*	Não	Sim	Não

As inferências dos grupos acima apresentam diferentes propriedades da linha em foco tal como enquadramentos diferentes em uma fotografia de uma mesma paisagem.

As respostas dos grupos E, D e B se complementam:

Enquanto o grupo E descreve a seqüência em foco de forma literal e de maneira totalmente congruente estabelecendo relações entre os registros de chegada e partida elemento significante a elemento significante, também esse grupo apresenta um único entendimento possível para a sua resposta.

O grupo D aborda a multiplicação por zero para cada termo da seqüência. Já o grupo B declara não só a seqüência em foco, linha E (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0) constante, mas também traz a linha H (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1) para a discussão declarando-a constante também. Ambos os grupos não se estendem em suas considerações o que indica um entendimento de falta de necessidade de ampliar esta discussão para os estudantes envolvidos. Nos dois casos temos uma conversão fortemente incongruente justamente pelo fato de que o único critério de congruência alcançado é o da clareza no registro de chegada. Ou seja, na resposta tanto para o grupo D quanto para o grupo B.

Nas discussões da plenária envolvendo a linha E, formada por zeros, os estudantes destacam que nela também aparece a soma por zero e que as seqüência E e H são constantes porque uma soma com zero e a outra multiplica por um.

Observamos que neste diálogo surge a idéia de elemento neutro tanto para a adição quanto para a multiplicação e uma possível relação destes para a existência de uma seqüência que pode tanto ser uma progressão aritmética quanto geométrica, conforme observação registrada no diário de pesquisa da professora: "[...]surge também a idéia de constância das seqüência para a soma com zero e a multiplicação por um. Emerge na discussão que ela tanto pode ser uma P.A. quanto uma P.G." (Diário de campo, 2016, p.6).

P.A. DE RAZÃO 1

Em relação à referida linha F (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) percebemos que as inferências dos grupos GC e GD são complementares e que a observação do grupo E é dispare e incorreta como vemos a seguir na tabela de análise destas conversões (tabela 39) que posteriormente discutimos:

Tabela 39: Análise de congruência na conversão da P.A de razão 1

Grupo	**Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)**	**Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)**	*⇨*	!	1-2-3⇨1-2-3
GC	(0 ,1,2,3,4, 5,6,7, 8,9)	*"na linha F a sequência é normal"*	Não	Não	Não
GD		*"não é uma P.G."*	Não	Sim	Não
GE		*"a linha K é a inversão da linha F"*	Não	Sim	Não

Observamos que o grupo C caracteriza a linha F como normal, de forma totalmente incongruente uma vez que não só os registros de partida e chegada não observam relação como também a resposta dada pelo grupo se mostra ambígua. Destacamos aqui que esta colocação para a linha F surge na plenária em diversos momentos sendo associada à contagem comum do dia a dia por exemplo.

Já o grupo D afirma a não existência de uma P.G. para a linha analisada, porque ele não explicita o que o leva a inferir que a sequência analisada não é uma progressão geométrica, ou seja, apenas o registro de chegada é apresentado de forma inequívoca. Isto nos leva a concluir que a conversão é fortemente incongruente pois somente atende ao segundo critério de congruência.

As observaçõesdos grupos C e D se complementam, pois enquanto o grupo C diz que a sequência é "normal" visto que ela foi associada aos números naturais, o grupo D afirma que ela "não é uma P.G.". O que fica subjacente é que este grupo associa uma razão constante que é somada e não multiplicada.

Já a observação do grupo E , além de totalmente incongruente, é incorreta uma vez que aparentemente aponta para a linha K (1,-2,-4, -8,-16, -32, -64, -128, -256, -512) como sendo a inversão da linha F (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) o que não está correto uma vez que esta não é uma relação possível entre as duas linhas. O que nos leva a crer que eles usam para afrmar que é uma inversão é o fato dos sinais serem opostos (+ e -).

P.G. DE RAZÃO 1/3

Nas relações que envolvem a linha I (1, 1/3, 1/9, 1/27, 1/81, 1/243, 1/729, 1/2187, 1/6561, 1/19683) temos que As observações dos grupos A e F são semelhantes e representadas pelo segundo na tabela adiante. Já a resposta do grupo B complementa as inferências supracitadas.

Tabela 40: Análise de congruência na conversão da P.G. de razão 1/3

Grupo	Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)	Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3 ⇨ 1-2-3
GB	(1, 1/3, 1/9, 1/27, 1/81, 1/243, 1/729, 1/2187, 1/6561, 1/19683)	*"Na sequência "i" os números ficam cada vez menores."*	Não	Sim	Não
GF		*"Há multiplicações por números fracionários"*	Não	Sim	Não

O grupo B percebe que os números da referida linha estão diminuindo e que a resposta do grupo F complementa essa informação uma vez que seus integrantes identificam a multiplicação dos números desta linha por números fracionários, ambas afirmativas nos ajudam a compreender propriedades da seqüência em foco.

Identificamos que embora as conversões efetuadas pelos grupos supracitados não apresentem ambigüidade, que é o segundo critério de congruência na coordenação de registros, as conversões se apresentam fortemente incongruentes, pois não estabelecem uma relação clara entre os elementos significantes dos registros de partida e de chegada que é necessária a contemplação dos demais critérios.

Nas discussões da plenária, iniciadas pela apresentação das respostas dos grupos supracitados e comentadas em grupo, surge e se dissemina a ideia de que para que um número diminua ele deve ser multiplicado por frações. Após estas colocações a estudante C1coloca para a plenária o motivo pelo qual o número está diminuindo: "[...] o um está sendo dividido por números maiores e maiores e diminuindo portanto." (Diário de campo , 2016, p.8).

SEQUÊNCIA NUMÉRICA QUALQUER

Nas inferências envolvendo a linha K (1,-2,-4,-8,-16,-32,-64,-128,-256,-512) encontramos divergência entre as inferências dos estudantes, pois os três grupos que a investigam, apresentam idéias diferentes que reunimos na tabela abaixo para posterior discussão:

Tabela 41: Análise de congruência na conversão da Seqüência Numérica Qualquer

Grupo	Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)	Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3 ⇨ 1-2-3
GD	K (1,-2,-4,-8,-16,-32,-64,-128,-256,-512)	*"sequência decrescente multiplicando de 2 em 2"*	Não	Sim	Não
GB		*"Se continuarmos a sequência "K" sempre os números serão negativos"*	Não	Sim	Não
GA		*"Acho possível ter um erro pois ainda não vimos um modo de 1 virar -2 e depois -4"*	Não	Não	Não

O grupo D observa que os termos da seqüência aqui discutida são sucessivamente dobrados em módulo.

O grupo B observa que se a "seqüência" fosse continuada, tal seria por números negativos o que indica compreensão de uma propriedade do conjunto dos inteiros que determina que quanto mais à esquerda da reta dos inteiros um número está menor é este número.

Já o grupo A aponta um "erro" na seqüência, apresentando suas considerações a respeito de como não consegue estabelecer uma única lógica que modele toda a linha em questão.

Observamos aqui que todas as conversões em relação à linha K aqui apresentadas são fortemente incongruentes uma vez que apresentam respostas sem ambigüidade e não as relacionam diretamente termo a termo com a seqüência analisada.

Na plenária, durante a discussão envolvendo esta linha, o grupo A apresenta sua dúvida em relação aos elementos constantes nesta, elencando argumentos para defender a inexistência de uma seqüência lógica para a mesma.

As equipes GD e GB defendem suas considerações durante alguns momentos, mas após nova argumentação do grupo A um clima de dúvida se instala na plenária que não chega a um consenso, o que é muito positivo uma vez que a curiosidade dos participantes sobre esta linha é despertada.

Este momento da plenária é registrado pela professora conforme segue adiante: "Na linha K somente o grupo A ficou intrigado com a observação da dificuldade de estabelecer uma lógica para os elementos da linha. Ao dividir com a plenária suas inquietações a plenária entrou em discussão e se dividiu." (Diário de campo, 2016, p.7).

Entretanto, as observações e discussões foram riquíssimas, pois os alunos ficaram muito intrigados com a não existência de uma razão, de uma lógica única. Ou seja, se partissem do primeiro elemento o um, e o multiplicassem por -2 não dava certo para o termo seguinte. Se partissem do -2 e dividissem por 2 não chegavam ao termo anterior. Isto é, aparentemente a razão tinha a ver com o número 2, mas os sinais que antecedem os elementos provocavam incoerência com o possível resultado.

SEQUÊNCIA FIBONACCI

Nas discussões envolvendo a linha L (1,1,2,3,5,8,13,21,34,55) dois grupos de forma complementar se referem à seqüência Fibonacci. Adiante apresentamos a tabela 42 para elencar estas inferências que em seguida discutimos:

Tabela 42: Análise de congruência na conversão da seqüência Fibonacci

Grupo	Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)	Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3 ⇨ 1-2-3
GB	(1,1,2,3,5, 8,13,21,34,55)	*"A sequência "L" parece o número áureo"*	Não	Não	Não
GC		*"Na linha L nos lembra a sequência de Fibonacci"*	Não	Não	Não

Aqui vemos que o grupo B relaciona o número de ouro à linha Estudada. Já o grupo C apresenta a linha L como semelhante à seqüência Fibonacci.

Ambos utilizam conversões totalmente não congruentes uma vez que não existe correspondência termo a termo entre o registro convertido. As respostas apresentadas tem mais de uma interpretação possível e levantam questões tais como: A seqüência toda é o número áureo? Existe alguma operação entre os números da seqüência que nos levem ao número de ouro? Quão semelhante a seqüência vislumbrada é da seqüência Fibonacci? Ou seja, muitas ideias ficam soltas nas afirmações feitas.

Na plenária não avançamos muito, pois os estudantes de forma geral após breve debate concordaram a respeito da existência de uma relação entre a linha apresentada e a seqüência Fibonacci, mas não se estenderam em suas considerações. Segundo as anotações da pesquisadora há um pequeno acréscimo às considerações dos grupos supracitados: “Há quem se lembre do “problema dos coelhos[54].” (Diário de Campo, 2016, p.5). Mas tal contribuição se limita a uma menção que não é desenvolvida pelos participantes.

Observamos nesta primeira questão que cada seqüência é um objeto por si só. Os alunos buscam identificar alguma identidade entre os seus elementos. Dificilmente comparam uma linha com outra. As inferências ditas para uma das linhas raramente são vistas como possíveis de serem observadas nas demais. O único momento em que se vislumbra uma comparação entre linhas ocorre para as seqüência E e H aparentemente por terem elementos repetidos e não pela razão $r = 0$ e $q = 1$, respectivamente.

QUESTÃO 2: COMPLETAR A P.G. DE RAZÃO 5 E A P.A. DE RAZÃO 4

Para a questão dois é proposto aos estudantes que completem as linhas b e c da tabela (tabela 43) apresentada:

Tabela 43: Seqüências a serem completadas na segunda questão

B	1	5	25	125	625						
C	0	4	8	12	16						

Em relação a esta questão observamos apenas a existência de tratamento que é a manipulação de dados dentro de um mesmo sistema semiótico de representação, no caso o registro numérico quando observamos que “[...] todos os grupos completaram a tabela sem dificuldades.” (Diário de campo, 2016, p.8).

Para cada uma das linhas, as respostas dos estudantes à questão se apresentam nas formas diferentes: alguns completam a seqüência na própria tabela, outros responderam fora dela. Em todos os casos a escritura numérica é utilizada como suporte semiótico de representação.

Cinco dos seis grupos participantes apresentam acerto total e um apresenta acerto parcial, sendo este o grupo C que apresenta acerto na seqüência B somente até o item 62500 (tabela 44),

Tabela 44: Resposta do grupo C à questão dois

[54] A seqüência de Fibonacci tem origem num problema clássico, o problema dos coelhos. Em seu livro, o Liber Abaci (Livro de Cálculo), o primeiro problema proposto por Fibonacci foi: "Um casal de coelhos pode reproduzir-se após dois meses de vida e, a partir daí, produz um novo casal a cada mês. Começando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais existirão ao final de um ano?” a resposta a esse problema é, em casais por mês: 1 1 3 5 8 13.... Nesta seqüência quando se divide o número posterior pelo anterior quanto mais altos o dividendo e o divisor mais próximo do número de ouro se chega. Para mais informações consulte(http://educacao.uol.com.br/planos-de-aula/medio/matematica-sequencia-de-fibonacci.htm).

B	1	5	25	125	625	3.125	15.625	62.500	312.500	1.562.500
C	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36

após este termo da seqüência, por algum engano com as teclas da calculadora que compromete o restante da linha, os demais valores se apresentam incorretos; entretanto, este erro não compromete a compreensão do que é pedido pela questão uma vez que o grupo em questão assim como os outros observa que a linha B se trata de uma progressão geométrica cuja razão é cinco.

QUESTÃO 3:EXPLORANDO E AMPLIANDO AS SEQUÊNCIAS

A questão três prevê duas ações: A primeira que questiona o que acontece com elementos de uma mesma linha Explicando suas respostas e a segunda que pede aos participantes que encontrem mais três elementos para cada uma das linhas da tabela.

O QUE ACONTECE COM ELEMENTOS DE UMA MESMA LINHA NA TABELA EM FOCO?

Para a primeira ação encontramos três perfis de resposta, representados pelos grupos F, A e B que juntos compõe uma tabela sobre a visão dos participantes sobre elementos colineares:

Analisamos adiante a congruência desta conversão (tabela 45) e posteriormente a discutimos.

Tabela 45: Análise de congruência na conversão de respostas à questão 2

Grupo	Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)	Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3 ⇨ 1-2-3
GF	Tabela da tarefa 2	*"Em algumas sequências os números estão somando ou diminuindo"*	Não	Não	Não
GA		*"Uma razão constante vai multiplicar ou somar o termo anterior"*	Não	Não	Não
GB		*"Algumas sequências são semelhantes, apenas tem alguma mudanças, como a "a" e a "k", uma se multiplica por dois e a outra também, assim como a "f" e a "j" são semelhantes."*	Não	Não	Não

No primeiro perfil o grupo F se limita a uma observação geral da existência de multiplicações ou somas nas linhas analisadas, identificando o tipo de operação.

No segundo perfil o grupo A além de identificar a existência de somas ou multiplicações nas linhas estudadas, também verifica a existência de uma constante nestas operações, ou seja, aqui se identifica além da operação também a razão.

O terceiro perfil o grupo B observa multiplicações e somas como os anteriores e vai além, elencando as sequências semelhantes. Ou seja, classifica as que possuem o mesmo tipo de operação e a mesma razão em módulo.

Todas as conversões apresentadas se mostram totalmente incongruentes. Este viés pode ter conexão com a predominância de respostas lacônicas dadas pelos participantes até então.

Essa postura lacônica é abalada na plenária quando durante a discussão a estudante C1 destaca que para a maioria das linhas temos elementos sendo multiplicados ou somados a uma razão o que mostra uma visão global da tabela quando afirma que: “Os elementos são multiplicados por uma razão ou somados na maioria das linhas” (Diário de campo, 2016, p.8).

A colocação da estudante C1 desperta o interesse do estudante A que retoma a discussão a respeito da possibilidade não existência de seqüência numérica para todas as linhas quando afirma: “E tem a linha K, aquela estranha” (Diário de campo, 2016, p.8).
Esta fala do estudante levanta novamente a discussão do grupo como um todo, grupo este mais uma vez se dividindo e discutindo o fato da linha K ser ou não uma seqüência sem, no entanto, novamente, chegar a um denominador comum. A questão em relação à linha K segue em aberto no grupo o que pode indicar uma fissura na cultura enraizada na vida dos estudantes do ETV que prevê perguntas fechadas que admitem uma única resposta.

ENCONTRANDO MAIS TRÊS ELEMENTOS PARA CADA LINHA DA TABELA PROPOSTA

Para a segunda ação observamos a existência apenas de tratamentos, uma vez que os grupos que respondem à questão em foco escolhem como suporte semiótico para suas respostas a escritura numérica que também é o suporte semiótico da pergunta feita.

Para esta questão encontramos dois perfis complementares de respostas e uma abstenção, uma vez que o grupo F não responde à questão. O primeiro perfil continua a seqüência, de forma semelhante, para a direita e para a esquerda (GE, GB, GC, GD) representado pelo grupo E (Tabela 46), o segundo perfil faz a continuação para a esquerda na tabela 47 (GA).

Tabela 46: Respostas do grupo E à segunda ação da questão 3

0,125;0,25; 0,5	A	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024, 2048, 4096
	B	1	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125	9765625, 48.828.125,244140625
-12, -8, -4	C	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40, 44, 48
	D	1	3	P	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049, 177.147, 531441
0,0,0	E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,0,0
-3,-2, -1	F	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10,11,12
	G	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30, 33, 36
1,1,1,	H	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1,1,1
	I	1	1/3	1/9	1/27	1/81	1/243	1/729	1/2187	1/6561	1/19683	1/59049, 1/177.147, 1/531441
3,2,1,	J	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10, -11,-12
8,4,2	K	1	-2	-4	-8	-16	-32	-64	-128	-256	-512	-1024, -20148, -4096
	L	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89, 144, 233

No primeiro perfil o grupo E apresenta continuações corretas para todas as linhas da direita o que indica entendimento da lógica multiplicativa ou aditiva para cada linha, considerando a continuidade da seqüência para a direita.

Já no sentido contrário nem todas as linhas são completadas pelo grupo em foco. Estes estudantes respondem àquelas em que o resultado era facilmente visualizado ou calculado pelo grupo e usam a calculadora para efetuar a divisão por 2. Não respondem à seqüência em que basta dividir por 5 (linha B) e por 3 (linha D) e aquela em que deveriam multiplicar por 3 (linha I). Em relação à linha K o grupo deveria ter estipulado números que somados da esquerda para a direita resultassem no número subseqüente a estes, o que não ocorre.

Tabela 47: Resposta do grupo A segunda ação da questão três

0,125	0,25	0,5	A	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
0,008	0,004	0,2	B	1	5	25	125	625					
-12	-8	-4	C	0	4	8	12	16					
0,37	0,111	0,33	D	1	3	p	27	81	243	729	2187	6561	19683
0	0	0	E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-3	-2	-1	F	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-9	-6	-3	G	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
1	1	1	H	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1/27	-1/9	-1/3	I	1	1/3	1/9	1/27	1/81	1/243	1/729	1/2187	1/6561	1/19683
3	2	1,	J	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
8	4	2	K	1	-2	-4	-8	-16	-32	-64	-128	-256	-512
-1	-1	0	L	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

No segundo perfil de respostas, o grupo A (tabela 47) opta por acrescentar três elementos à esquerda da tabela. De forma geral a lógica de cada linha é compreendida como subtração ou divisão por uma razão fixa no sentido da direita para a esquerda. São exemplos desta compreensão a continuação das linhas A, B, C e D.

Também a subtração pelo elemento neutro aparece para a linha E, e a multiplicação pelo elemento neutro na linha H.

Para as linhas C, F, G, I, J e K os estudantes usam a simetria, ou seja, e para a direita é positivo ou negativo para a esquerda é negativo ou positivo tendo o zero como referência, também a Linha L merece destaque, pois é espelhada com sinal trocado e tendo o zero como ponto de referência para este espelhamento ainda que tal esteja incorreto.

O grupo F não faz a segunda ação requerida pela questão 3. Ao serem indagados pela professora respondem estar cansados com a tarefa.

QUESTÃO 4: COMPLETANDO LINHAS À ESQUERDA

Nesta questão os participantes são perguntados sobre o que é necessário para que as linhas sejam completadas no sentido oposto ao convencional de leitura. Para esta pergunta temos dois perfis se complementando os quais juntos nos permitem ver melhor algumas propriedades da tabela estudada. No primeiro perfil de respostas os grupos C, B, E e F apresentam inferências semelhantes quando identificam a necessidade utilização da operação inversa, estas respostas podem ser representadas pelas inferências do primeiro grupo. No segundo perfil de respostas os grupos A e D vão além da operação inversa apresentando inferências semelhantes e que podem ser representadas pela resposta do grupo D.

Organizamos as respostas que representam cada um destes perfis na tabela 48 para melhor compreensão:

Tabela 48: Análise I de congruência na conversão da resposta à questão 4

Grupo	Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)	Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3 ⇨ 1-2-3
GC	Tabela da: Tarefa 2	*"Devemos repetir cada processo, mas com suas operações opostas"*	Não	Sim	Não
GD		*"Na P.G. iremos dividir para poder retroceder e na P.A. vai diminuindo"*	Não	Sim	Não

O grupo C se limita a destacar a operação inversa utilizando a palavra oposta fazendo referência à direção dos termos a serem identificados na linha Como oposta à de leitura associando tais sentidos à operação a ser efetuada. Já o grupo D além de identificar a necessidade da utilização de operações inversas no sentido contrário ao da leitura também as associa às progressões geométricas e aritméticas em foco.

Observamos aqui que as conversões efetuadas pelos grupos são fortemente não congruentes e compatíveis com o viés que tem se apresentado durante a análise da tarefa em foco que é a falta de discussão da própria questão em língua natural, a falta de detalhar raciocínios, a falta da exemplificação que tem se mostrado uma constante nas produções escritas dos estudantes que ora analisamos.

No debate mediado pela professora na plenária a operação inversa é discutida e a partir desta se forma rapidamente um consenso relacionando as linhas à seqüência numéricas, consenso esse quebrado por uma estudante quando esta lembra que a linha analisada pode não ser uma seqüência uma vez que ainda havia a linha K. Novamente a discussão se volta para esta linha e novamente um consenso não é estabelecido; uma vez que estes relutam em admitir que a professora possa ter proposto algo que em sua opinião seja "errado", ou seja, não se constitua em uma seqüência em sua opinião. "As estudantes C1 e E2 dizem que viram a razão da seqüência e fazem a operação inversa. A estudante C1 põe esta afirmação em dúvida quando exclama: "se for uma seqüência". Os estudantes em geral acharam dificuldade na linha K" (Diário de Campo, 2016, p.7).

QUESTÃO 5: COMPARANDO A P.A. DE RAZÃO 1 COM AS DEMAIS SEQUÊNCIAS DA TABELA EM FOCO

Nas inferências envolvendo a comparação da linha F com as demais seqüências da tabela estudada aqui temos dois perfis de respostas. O primeiro fazendo análises isoladas de linhas (grupo C) e o segundo (grupo D) relacionando-as (tabela 49).

Tabela 49: Análise II de congruência na conversão da resposta à questão 4

Grupo	Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)	Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3 ⇨ 1-2-3
GC	Tabela da tarefa 2	*"A linha F é a única que segue a sequência decimal, de uma forma cotidiana."*	Não	Não	Não
GD		*"A sequência f vai somando de 1 em 1,*	Sim	Sim	Sim
		agora em comparação as outras elas vão multiplicando ou dividindo por outros números"	Não	Não	Não

Do primeiro perfil fazem parte os grupos GC e GF que analisam de forma semelhante apenas a própria linha F. A produção escrita do grupo C representa este perfil quando observa que os elementos desta são acrescidos de uma unidade no sentido convencional de leitura e atribuem a este acréscimo o adjetivo cotidiano associando-a ao sistema decimal utilizado em nosso dia a dia. Entretanto tal afirmativa carece de clareza uma vez que não é estabelecida aqui uma correspondência termo a termo na mesma ordem para os registros assim como um entendimento único para o registro de chegada.

Do segundo perfil de inferências fazem parte os grupos GA, GB e GD que relacionam a linha F às demais de forma geral buscando compor um entendimento mais amplo sobre estas relações. A resposta do grupo D representa este perfil. Inicialmente o grupo tece considerações, totalmente congruentes, acerca da própria linha F, estabelecendo uma lógica para a sua construção. E, na seqüência, atrelam esta seqüência a operações com outros números; neste registro escrito que fecha as considerações do grupo percebemos como muito confusa uma vez que o grupo não estabelece a que seqüência e relações às quais se referem tornando inviável o atendimento aos três critérios de congruência.

Observamos aqui que as conversões efetuadas pelos grupos em foco são, em sua maioria, incongruentes e que isso, como já observado ao longo de toda a análise desta tarefa, aponta para a possibilidade de uma relação entre a falta de detalhamento e discussão das respostas em língua natural e falta de congruência na conversão efetuada.

Esta falta de aprofundamento na resposta é colocada em questão na plenária quando todos são convidados a aprofundar seus questionamentos e observações. Durante a discussão da questão em foco o grupo C é perguntado sobre o que quer dizer com cotidiana, e seus integrantes respondem se tratar de uma sequência de algarismos associados à vida normal: "Os estudantes acrescentaram de algarismos, cotidiana" (Diário de campo , 2016, p.9).

A esta declaração todo a plenária aquiesce e passa a dar exemplos de contagens cotidianas em suas vidas e a discussão se distancia das relações entre a sequência F e as demais e passou a se centrar na própria linha F, ou seja, a P.A. de razão 1.

OBSERVAÇÕES SOBRE A TAREFA 2

De maneira geral observamos que os grupos participantes apresentam uma relação entre as sequências e processos de contagem. Destacamos especialmente as observações sobre a linha F que é uma P.A. de razão um quando alguns grupos a apresentam como sendo normal e cotidiana, nesta apresentação está implícito que uma sequência normal serve para: contar, ordenar, fazer parte do dia a dia de forma natural.

Ou seja, aqui observamos que o conjunto dos números naturais está sendo utilizado para definir o que seja normal[55]. Com os números naturais vem implícitas uma série de idéias: A ideia de determinar o próximo elemento, a ideia de que cada intervalo apresenta a mesma "distância", a ideia de razão como divisão.

Com a P.G. um pouco desta "normalidade se quebra" como por exemplo a ideia de que o intervalo entre elementos é constante como acontece aos elementos de qualquer P.A.

Com esta tarefa visa levantar uma discussão sobre sequências numéricas observamos que a cada exploração e discussão os participantes vão ficando mais confiantes em suas inferências, sentindo-se mais a vontade para compartilhá-las com os colegas tanto em seus grupos quanto na plenária como um todo, mas que este é um processo lento que necessita do

[55]Kindel (1998) denomina esta posição de referência para a normalidade de Paradigma dos Naturais. Para maior aprofundamento no tema indicamos a leitura de sua dissertação de mestrado: Discutindo os racionais na 7ª série visando à noção de densidade.

encorajamento constante da professora.

Observamos também que só há conversão quando esta é explicitamente pedida em questões do tipo escreva o que observa. Lembramos que os dados da questão a serem analisados são propostos em escritura numérica, e que os estudantes se limitam a utilizar, de forma lacônica, a conversão em suas respostas quando solicitada dentro do sistema semiótico sugerido pela pergunta (língua natural). O que pode prejudicar a congruência na coordenação de registros pela falta de exemplos que relacionem termo a termo, na mesma ordem, pergunta e resposta. Além disso, esta conversão deve ter um único entendimento possível. Lembramos que a coordenação congruente de registros está associada à compreensão de conceitos matemáticos (DUVAL; 2006, 2009).

A seguir vemos como é o processo de investigação concomitante de sequências numéricas previamente escolhidas (Tarefa 3) com vistas a consolidar este trabalho de exploração de sequências e facilitação da construção de propriedades do logaritmo.

TAREFA 3: COORDENANDO SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS DUAS A DUAS

Nesta tarefa os participantes dos seis grupos relacionaram seqüência da tabela utilizada na tarefa anterior buscando regularidades entre elas. Nosso objetivo aqui é abrir caminho para o trabalho com o conceito de logaritmos abordando especificidades de sua definição[56] sem, no entanto, abordá-la diretamente, uma vez que o conjunto em questão visa trabalhar com a introdução ao conceito de logaritmo. Esta atividade foi feita em 100 minutos, ou seja, duas aulas.

Tarefa: Observem a tabela preenchida na atividade anterior e relacionem as linhas desta escrevendo o que observam:

1) Linhas A e F
2) Linhas D e F
3) Linhas D e G
4) Linhas H e F
5) Linhas E e F
6) Linhas I e J
7) Existem outras duplas de linhas que vocês compararam? O que observam nelas?

Esta tarefa se dá em uma perspectiva orientada. Ou seja, para cada par de seqüências elencadas temos em mente a construção de propriedades que em conjunto formam a definição de logaritmo embora não estejamos isolados nas propriedades elencadas abaixo uma vez que estas se constituem em propriedades principais esperadas (tabela 50):

Tabela 50: a propriedades em foco para cada um dos pares de seqüência cuja coordenação é proposta

[56] Um logaritmo pode ser definido por $a^x=b$, isso implica em que $x=log_ab$, sendo que *b* e *a* são maiores que zero e a é diferente de um e maior que zero. Temos que a é a base do logaritmo, b é o logaritmando ou antilogaritmo e *x* é o logaritmo (IEZZI *et al* 2010; PAIVA, 2009) .

Investigação	Linhas	Objetivos
1	A e F	Nessa análise a propriedade em foco é a constatação da base do logaritmo como uma relação entre uma progressão geométrica e uma progressão aritmética.
2	D e F	Nessa análise a principal propriedade do logaritmo em foco é a mudança de base, uma vez que é possível encontrar aqui uma base diferente da que surgiu anteriormente, temos aqui bases pertencentes ao conjunto dos naturais.
3	D e G	Nessa análise, a propriedade do logaritmo envolvida é a mudança de base, entretanto, aqui buscamos romper com a busca que se faz normalmente por uma base natural mostrando que a base também podem ser irracional, por exemplo.
4	H e F	Nessa análise, a principal propriedade do logaritmo envolvida aqui é a de que o logaritmo ser zero admite a possibilidade do zero elevado a zero que é indefinido e portanto não desejado.
5	E e F	Nessa análise, a principal propriedade do logaritmo envolvida é a que diz que tanto a base quanto o logaritmando não podem ser iguais a zero, uma vez que excetuando-se o zero nenhuma potência resulta em zero e que zero elevado a um número negativo resultaria em uma divisão por zero o que é impossível.
6	I e J	Nessa análise, a principal propriedade do logaritmo envolvida é que o logaritmo não pode ser negativo.

Os estudantes chegaram muito agitados no laboratório, o que fez com que levassem um tempo para se acalmar e entrar na atividade. O primeiro momento, após o recebimento da ficha com a tarefa, os estudantes ficaram silenciosos à medida que liam a tarefa. Assim que leram e "entenderam" o que era para ser feito os integrantes começam a interagir e discutir a tarefa proposta e que é respondida item a item.

Adiante apresentamos a análise das respostas dos estudantes às questões propostas na tarefa em foco. Respostas estas selecionadas a partir de sua semelhança, complementaridade ou disparidade. Ou seja, não fazemos uma análise do percurso de cada grupo, por este motivo nem sempre vemos nas respostas analisadas o mesmo grupo.

COMPARAÇÃO DA P.G. DE RAZÃO 2 E A P.A. DE RAZÃO 1

Na análise da primeira questão que pede que os estudantes comparem as linhas A (1,2,4,8,16,32,64,128, 256, 512) e F (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) obtemos dois perfis de respostas:

No primeiro perfil de respostas quatro grupos analisam as sequências separadamente, e no segundo perfil os demais grupos fazem conexões entre as sequências em jogo.

Deste primeiro perfil fazem parte os grupos A, B, D, E e F que apresentam, de forma semelhante, propriedades de cada uma das sequências analisadas e cujas contribuições podem ser representadas pela resposta do grupo E cuja conversão feita é analisada na tabela 51 adiante:

Tabela 51: Primeiro Perfil: Análise de congruência na conversão-questão 1

Grupo	Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)	Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3 ⇨ 1-2-3
GE	A (1,2,4,..., 512) F (0,1,2,...,9)	*"São sequências crescentes,*	Sim	Sim	Sim
		na linha A a razão 2 é multiplicada,	Sim	Sim	Sim
		já na linha F a razão 1 é somada,	Sim	Sim	Sim
		são números naturais."	Sim	Sim	Sim

Aqui propriedades das sequências são apresentadas dentro de uma conversão totalmente congruente. Uma vez que tanto os elementos significantes de pergunta e resposta têm uma relação parte a parte em uma mesma ordem, como também a resposta se mostra livre de ambigüidades, o que facilita o entendimento das inferências do grupo em questão.

Por exemplo, quando o grupo em questão aponta que A e F são seqüências crescentes: é possível observar esta relação com clareza, pois ambas as seqüências tem seus elementos com valores crescentes no sentido de leitura; o mesmo ocorre para a observação do grupo de que para os termos da linha A são duplicados; também a adição de um número aos termos da linha F é apresentada. O grupo fecha suas considerações situando ambas as seqüências dentro dos números naturais esquecendo-se de que elas também são infinitas à esquerda.

Continuando, mais adiante, Este grupo escreve:

Quadro 8: Tratamento do grupo E para suas inferências

"Os números 1, 2, 4 e 8 são compartilhados entre as duas sequências"

Entretanto, não explica o motivo para que tais números estejam presentes em ambas as sequências. Ou seja, identificam os elementos comuns e os registram. Aqui temos um tratamento, pois as inferências do grupo se dão dentro do mesmo sistema semiótico (língua natural) utilizado por este para a conversão feita.

No segundo perfil de respostas o grupo GC faz duas conversões em sua resposta, a primeira do registro numérico para a língua natural e a segunda da língua natural para o registro numérico.

Analisamos abaixo a primeira conversão, fortemente congruente, efetuada (tabela 52):

Tabela 52: Análise de congruência na primeira conversão do segundo perfil de respostas para a questão em foco

Grupo	Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)	Registro de chegada 'Língua natural (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3 ⇨ 1-2-3
GC	A (1,2,4,...,512) F (0,1,2,...,9)	*"A razão da sequência A, elevado aos números da letra F, dá os números da letra A."*	Sim	Sim	Sim

O grupo em sua primeira conversão identifica a razão da seqüência multiplicativa F como sendo 2 e observa que esta razão da seqüência A elevada aos números da seqüência F resultam nos números da própria seqüência A. Conforme é possível observar no registro escrito dos estudantes.

Analisando o registro escrito de GC identificamos que para além da conversão das sequências dadas, os integrantes deste grupo afirmam que a razão da PG surge como base e os termos da PA surgem como expoentes dos elementos da seqüência A.

Esta é uma propriedade fundamental dos logaritmos, uma vez que operar com logaritmos é operar com os expoentes da razão da seqüência multiplicativa, e é justamente isto que faz com que consigamos converter multiplicações e divisões em somas e subtrações, que é uma das propriedades fundamentais do logaritmo.[57]

Já na segunda conversão do grupo C seus integrantes retornam ao registro numérico para ilustrar a sua fala e explicitam as relações entre: a base dois considerada, seu expoente e sua potência correspondente. Na tabela 53 analisamos as relações entre a primeira e a segunda conversões realizadas pelo referido grupo:

Tabela 53: Análise de congruência na segunda conversão do segundo perfil de respostas para a questão 1

Grupo	**Registro de partida** **Língua natural** **(Escrita dos estudantes)**	**Registro de chegada** **Escritura numérica** **(Escrita dos estudantes)**	*⇨*	!	1-2-3⇨1-2-3
GC	*"A razão da sequência A, elevado aos números da letra F, dá os números da letra A."*	*A=124 8* *F=* $2^0\ 2^1\ 2^2\ 2^3$	Sim	Sim	Sim

Aqui observamos congruência total entre os registros de partida e chegada uma vez que a cada elemento de partida corresponde um elemento de chegada, correspondência essa que se dá na mesma ordem e onde também os elementos de chegada permitem um único entendimento.

Observamos que o uso de conversões sucessivas e congruentes pelo grupo C se mostra como fator facilitador da nossa compreensão acerca das inferências apresentadas e também indica o entendimento por parte do grupo de propriedades fundamentais dos logaritmos como, por exemplo: o logaritmo como relação entre uma progressão aritmética e outra geométrica. Pois, o grupo identifica a razão e expressa os elementos da P.G. como potência de uma base (no caso: 2) e os elementos da P.A. são os expoentes, alinhado os elementos verticalmente.

A reunião dos dois perfis de resposta nos permite visualizar particularidades de cada seqüência. As respostas dos estudantes, de maneira geral, indicam consciência sobre o que diferencia uma progressão aritmética de uma geométrica se constitua como tal. E de que maneira tais progressões podem estar relacionadas, ou seja, a idéia de que o logaritmo seja o expoente de uma base em que os termos da P.A. dada são os expoentes e que a potência resultante desta operação se constitui no termo da P.G. e a razão desta é a base.

Observamos que uma mudança no viés anterior de respostas lacônicas e diretas começa a ser delineado neste item.

COMPARAÇÃO DA P.G. DE RAZÃO 3 E A P.A. DE RAZÃO 1

Na análise da segunda questão que pede que os sujeitos articulem as linhas D (1, 3, P, 27, 81, 243,729, 2187,6561,19683) e F (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) encontramos dois perfis de resposta: O primeiro analisando uma das sequências separadamente, e o segundo comparando

---

[57] Vide item 3.1 desta dissertação para uma compreensão mais aprofundada dos logaritmos.

as duas seqüências em foco.

Do primeiro perfil faz parte o grupo F que se limita a analisar um pormenor da linha D (tabela 54):

Tabela 54: Análise de congruência na primeira conversão
do primeiro perfil de respostas para a questão 2

Grupo	Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)	Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3 ⇨1-2-3
GF	D (1,3,P, ...,19683)	*"A linha D é constituída por uma letra P onde substitui um número"*	Sim	Não	Sim

Neste primeiro perfil o grupo F identifica que a letra P substitui um número, não se alongando em sua consideração à qual falta clareza (não se contempla aqui o segundo critério de congruência que é um único entendimento possível do registro de chegada).

No segundo perfil os demais grupos analisam regularidades entre as sequências elencadas para esta questão observando, de forma semelhante, o papel da base nas relações entre as sequências em foco. A contribuição do grupo GA, constituída de uma conversão (tabela 53) e de um tratamento (tabela 55) representa este perfil:

Tabela 55: Análise de congruência na conversão do
segundo perfil de respostas para a questão 2

Grupo	Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)	Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3 ⇨1-2-3
GA	D (1,3,P,...,19683) F (0,1,2,...,9)	*"Uma PG e a outra PA*	Sim	Sim	Sim
		sendo a razão da PG 3 e a razão da PA 1."	Sim	Sim	Sim

O grupo apresenta suas considerações de forma totalmente congruente identificando as operações de cada uma das sequências analisadas e identificando as sequências numéricas em foco assim como suas razões. Após a conversão o grupo segue discutindo a questão dentro do mesmo sistema semiótico de chegada, ou seja, a língua natural, o que se constitui em um tratamento, e explica que:

Quadro 9: Tratamento do grupo GA

> *"Se elevar um número a a uma potência ele irá pular conforme a quantidade elevada exceto 1 ou qualquer número da linha D elevada ao próximo número da sequência F vai pular na mesma quantidade."*

Conforme os estudantes do grupo em questão avançam em suas inferências, mais eles se aproximam de propriedades em jogo do logaritmo para a questão proposta.

Na plenária, durante a discussão sobre esta questão, coordenações de sequências propostas em questões anteriores, vem à tona e a percepção de que a base de um logaritmo pode ser trocada quando se mudam as progressões geométrica e aritmética relacionadas. Isto ocorre, particularmente, na discussão sobre as linhas D e F onde surge a troca de base (Diário de Campo, 206, p.9).

Aqui observamos a consolidação da mudança de viés para as respostas encontradas, uma vez que conforme a investigação avança, as contribuições dos estudantes vão se mostrando cada vez mais ricas e detalhadas. As conversões vão se apresentando com maiores ocorrências de congruência e os tratamentos começam a surgir ampliando o raio de propriedades observadas e aproximando os participantes do conceito; uma vez que quanto mais propriedades percebidas, melhor se dá a formação do conceito segundo Duval (2006, 2009).

COMPARAÇÃO DA P.G. E DA P.A. DE RAZÃO 3

Na análise da terceira questão que pede que os sujeitos coordenem as linhas D (1, 3, P, 27, 81, 243,729, 2187,6561,19683) e G (0,3,6,9,12,15,18,21,24,27) observamos um único perfil de resposta onde cinco grupos estabelecem relações entre as linhas D e G, também temos uma abstenção uma vez que o grupo C deixou a questão em branco.

As respostas dos grupos A, B, D, E e F são semelhantes, pois tecem relações entre as sequências apresentadas associando-as a progressões situando suas razões e apresentando regularidades diversas. Dentre as respostas apresentadas por estes grupos elencamos as contribuições do grupo E (tabela 56).

Tabela 56: Análise de congruência na conversão-questão 3

Grupo	Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)	Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3 ⇨ 1-2-3
GE	D (1,3,P, ..., 19683) G (0,3,6,..., 27)	*"São sequências crescentes;*	Sim	Sim	Sim
		na linha D a razão 3 é elevada a todos os termos	Sim	Não	Sim
		e na P.G a razão também é 3, mas é multiplicada."	Sim	Sim	Sim

Temos em relação à conversão feita pelo grupo para o registro de partida algumas observações pertinentes, uma vez que seus membros observam que:

As sequências em foco são crescentes em uma colocação de único entendimento totalmente congruente; que a linha D é composta de potências de 3. Esta colocação é parcialmente congruente uma vez que a colocação "todos os termos" levanta dúvidas sobre a fala do grupo, o que não contempla o segundo critério de congruência que é o único entendimento possível do registro de chegada; e que a razão da P.G. em foco (linha 3) envolve multiplicação, esta afirmação se dá de forma totalmente congruente.

Desta forma, de maneira geral as colocações do grupo E são fortemente congruentes o que pode estar associado à clareza de entendimento observada nas colocações do grupo.

O grupo em foco não se limita apenas a estabelecer suas inferências em língua natural, ampliando esta ação ao, posteriormente, tratar a conversão efetuada conforme destacamos adiante (quadro 10):

Quadro 10: Inferências do grupo E sobre a questão 3

"Logo as razões das sequências D e G são múltiplos de 3 e compartilha dos números 3 e 27"

No tratamento efetuado vemos uma confusão conceitual entre razão e termos das sequências e também a constatação de múltiplos de 3 que se encontram em ambas as sequências , uma generalização para o fato de que ambas as seqüência são constituídas de múltiplos de 3 não é observada aqui.

A existência de tratamento em língua natural para a questão reforça a idéia de adesão à proposição de falar sobre o que se observa indo além também falando sobre o que se reflete a partir do que se observa.

COMPARAÇÃO ENTRE UMA PA OU PG CONSTANTE DE RAZÃO ZERO E UMA PA DE RAZÃO 1

Na análise da quarta questão que pede que os sujeitos coordenem as linhas H (1,1,1,1,1,1,1,1,1,1) e F (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) observamos dois perfis de respostas.

No primeiro perfil (**tabela** 57) os grupos D e F fazem a análise das sequências em separado. Observamos que suas respostas apresentam a linha H como multiplicada por 1 apresentando a sua constância.

Tabela 57: Primeiro Perfil: Análise de congruência na conversão-questão 4

Grupo	**Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)**	**Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)**			
GF	H (1,1,1,..,1) F (0,1,2,..., 9)	*"A linha H é multiplicada por 1 onde dá ele mesmo"*	Sim	Sim	Sim
GD		*"Apesar da linha H repetir o número 1 constantemente ela não é uma sequência numérica, ao contrário da F ser uma sequência numérica"*	Sim	Não	Sim

O entendimento destes grupos apresenta pontos de convergência uma vez que o grupo F observa a constância da seqüência H quando diz (multiplicada por 1 onde dá ele mesmo), constância essa também visualizada pelo grupo D quando afirma (repetir o número 1 constantemente), ou seja, o grupo identifica o elemento neutro da multiplicação.

O grupo D se equivoca ao afirmar que apenas F é uma seqüência numérica não estendendo este reconhecimento à seqüência H, ou seja, uma seqüência constante para eles não é uma seqüência numérica.

Aqui temos uma conversão totalmente congruente para o grupo F e fortemente congruente para o grupo D. O primeiro apresenta congruência total em sua conversão uma vez que a sua resposta além de ser clara também estabelece relação dentro de mesma ordem de elementos de partida e chegada e o segundo grupo apresenta correspondência termo a termo na mesma ordem carecendo apenas de um único entendimento para o seu registro de chegada o que compromete a clareza de sua resposta.

No segundo perfil os demais grupos relacionam as seqüência H e G, de forma semelhante (tabela 58). Elencamos as respostas do grupo E para representá-lo.

Tabela 58: Segundo Perfil: Análise de congruência na conversão-questão 4

Grupo	Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)	Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3⇨1-2-3
GE	H (1,1,1,...,1) F (0,1,2,...,9)	*"Foi observado que sempre que somamos o número de cima (H) com o de baixo (F) temos o número da direita na linha De baixo (F).*	Sim	Sim	sim

Surge a relação entre as sequências para enunciar uma propriedade essencial dos números naturais que é a sua infinidade e a idéia de que sempre é possível acrescentar uma unidade para encontrar o próximo termo da seqüência. O grupo em questão apresenta uma regularidade de forma totalmente congruente o que indica clareza do grupo em relação à resposta apresentada pela equipe.

Este mesmo grupo vai além fazendo conversões seguidas com o objetivo de exemplificar suas inferências, a segunda conversão efetuada pelo grupo pode ser vista na tabela 59 em que ele circula os primeiros elementos das duas sequências

Tabela 59: coordenação de registros efetuada pelo grupo GE

Grupo	Registro de partida Língua natural (Escrita dos estudantes)	Registro de chegada Escritura numérica (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3⇨1-2-3
GE	*"Foi observado que sempre que somamos o número de cima (H) com o de baixo (F) temos o número da direita na linha De baixo (F).*	H 1, 1, 1, 1, 1 ,1, 1, 1, 1, 1 + F 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	sim	Sim	Sim

Observando a tabela acima identificamos que os elementos de ambas as representações se correspondem elemento a elemento, isso acontece em uma mesma ordem e o registro de chegada se mostra livre de duplas interpretações e que é evidenciada com as setas.

Visando ampliar as discussões acerca das relações entre o par de sequências em foco a equipe supracitada fez a opção por efetuar mais uma conversão, desta vez da escritura numérica para a língua natural. Ela pode ser observada na tabela 60:

Tabela 60: Nova coordenação de registros efetuada pelo grupo GE

Grupo	Registro de partida Escritura Numérica (Escrita dos estudantes)	Registro de chegada Língua Natural (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3⇨1-2-3
GE	H 1, 1, 1, 1, 1 ,1, 1, 1, 1, 1 + F 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	*"A linha H não é crescente, é constante, diferente da F que cresce com a razão 1 somada."*	sim	Sim	sim

Aqui também o grupo demonstra segurança na discussão de propriedades das sequências em jogo relacionando-as de forma correta e apresentando inferências sobre as relações entre elas.

Para finalizar suas observações os estudantes explicam o que observam, tratam, portanto, a conversão efetuada uma vez que suas observações seguem sendo feitas em língua natural, ou seja, mantendo o mesmo sistema semiótico. (quadro 11):

Quadro 11: Tratamento de registro efetuado pelo grupo GE

"A linha H é versátil, pode ser uma PA ou uma PG, diferente da linha F que só pode ser somada por 1."

O desenvolvimento do tema no grupo e as observações levantadas levam à compreensão de que a base de um logaritmo não pode ser igual a um, pois o logaritmo o expoente de qualquer potência de base um é igual a ela mesma o que resultaria improdutivo.

COMPARANDO A P.A. OU A P.G. DE RAZÃO ZERO À P.A. DE RAZÃO 1

Na análise da quinta questão que pede a coordenação das linhas E (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0) e F (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) observamos dois perfis de respostas que vão confirmando a tendência dos grupos em se dividirem em equipes que coordenam e que não coordenam as sequências em foco.

No primeiro perfil os grupos A, B, D, E e F analisam em separado cada seqüência. Observamos que as respostas dos grupos A, D, E e F são semelhantes podendo ser representadas pelo registro escrito do grupo A e complementadas pelas inferências do grupo B que analisamos adiante (tabela 61):

Tabela 61: Primeiro perfil: Análise de congruência-questão 5

Grupo	Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)	Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3 ⇨ 1-2-3
GA	E (0,0,0,...,0) F (0,1,2,...,9)	*"As duas são P.A.*	Sim	Sim	Sim
		sendo que uma tem razão 1	Sim	Sim	Não
		e outra 0"	Sim	Sim	Não
GB		*Na sequência "f" todos os números diminuídos por eles mesmos dá 0, como na linha "e".*	Sim	Sim	Sim

Aqui observamos que o grupo A descreve propriedades das sequências de forma fortemente congruente uma vez que apenas a ordem de apresentação dos registros (3º critério de congruência) não é atendida uma vez que o grupo aborda primeiro a segunda seqüência (linha F) e depois a primeira seqüência (linha E) o que compromete levemente a clareza de sua resposta. Por outro lado, a escolha em falar primeiro da seqüência F e depois da seqüência E, nos leva a acreditar que o grupo já entendeu o que é uma P.A. Isto é, é preciso que a seqüência tenha uma razão constante entre seus elementos. Mas, falar da seqüência E não é tão natural quanto falar da F, que é associada ao conjunto dos números naturais, mais familiar, visto como referência.

Já o grupo B complementa as inferências do grupo quando traz a idéia de que números opostos se anulam ao afirmar que na linha F cada elemento diminuído por si mesmo resulta no zero como na linha E e a aplica à seqüência constante E. E segue fazendo inferências dentro do sistema semiótico que usa como suporte de sua resposta, fazendo um tratamento, portanto, quando afirma:

Quadro 12: Tratamento efetuado pelo grupo B à sua resposta à questão 5

> *"Porém teríamos que somar os mesmos números se fossemos continuar para a esquerda"*

Os estudantes em foco apresentam uma propriedade dos números naturais que consiste em sempre ser possível obter um novo número natural à direita, se somarmos uma unidade ao número atual considerado.

No segundo perfil, o grupo C observa a existência da base zero unindo as sequências em foco (E (0,0,0,...,0) e F (0,1,2,...,9)), dentro da escritura numérica,afirmando que zero elevado a quaisquer dos elementos da linha F resulta nos elementos da linha E conforme a quadro 13 adiante.

Quadro 13: Tratamento do grupo C sobre o registro de partida da questão 5

base 0
E 0 0 0 0
F 0 1 2 3
____
0 0 0 0
Base

Na plenária surge a discussão sobre a base zero (Diário de Campo, 2016, p.7) e a discussão gira em torno da possibilidade da base e do expoente serem iguais a zero. Durante o debate surge a ressalva para o fato de que zero elevado a zero é indeterminado[58] e, portanto, deve ser constituída uma restrição para evitar essa condição, discussão esta levantada pela professora pesquisadora e conclui-se, em grupo, que é necessário que haja restrição para a base do logaritmo, que precisa ser diferente de zero.

COMPARANDO UMA P.G. DE RAZÃO 1/3 A UMA P.A. DE RAZÃO -1

Na questão 6 que propõe a comparação das linhas I (1, 1/3, 1/9, 1/27, 1/81, 1/243, 1/729, 1/2187, 1/6561, 1/19683) e J (0, -1, -2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9) aqui encontramos um único perfil de respostas pois todas as equipes analisaram as sequências separadamente.

Os grupos A, B e C fazem inferências semelhantes que podem ser representadas pela resposta do grupo B. O grupo D de forma díspare não encontra relação entre as sequências. E, complementando as colocações de B e D os grupos E e F, de forma semelhante, fazem colocações sobre a orientação dos termos das sequências e que podem ser representadas pelas inferências do grupo F. Adiante organizamos representantes em uma tabela para análise e posterior discussão (tabela 62).

Tabela 62: Análise de congruência-questão 6

Grupo	Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)	Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3⇨1-2-3
GB	I (1,1/3,1/9,...,1/19683) J (0, -1,-2, ..., -9)	*"Mesmo que os componentes das duas sequências fiquem com números enormes eles diminuem cada vez mais, e já que o denominador maior é o mesmo que quociente menor"*	Sim	Sim	Sim
GD		*"Não possuem relação"*	Não	Não	Não
GF		*"A linha I, os números são fracionários e a letra J os números negativos estão do lado direito, no qual na verdade deveria estar ao lado esquerdo."*	Sim	Sim	Sim

Nestas inferências os estudantes integrantes do grupo B observam que no sentido de leitura os números estão diminuindo e que, na seqüência I, essa diminuição está associada ao aumento do valor do denominador das frações integrantes da seqüência e da relação deste aumento com a diminuição do quociente, ou seja, aqui a fração é vista como uma divisão entre números que é dependente do "tamanho" do divisor, ou seja, quanto maior o divisor menor o resultado. No qual as propriedades do conjunto dos números Naturais são aplicadas ao conjunto dos racionais observando estritamente o denominador. O grupo supracitado

58 Indeterminação em Matemática leva a resultados não naturais e inconvenientes (http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/passa7d.html).

utiliza aqui uma conversão totalmente congruente, isso se reflete no cuidado dos estudantes em estabelecer relações claras entre pergunta e resposta.

Já o grupo F. aponta para a associação do sentido de leitura como orientação positiva para os sinais envolvidos e o contrário disso ao negativo o que nos remete à organização dos números no eixo cartesiano[59], por exemplo. O grupo chega a destacar que a orientação dos números negativos da linha J deve estar à esquerda indicando que a orientação cartesiana pode influenciar no entendimento dos estudantes. Observamos aqui que o grupo faz uma colocação clara utilizando para isto uma conversão totalmente congruente.

Na plenária, durante a discussão desta questão uma estudante chama a atenção para a relação existente entre as linhas conforme consta em anotação no diário de campo da professora: “C1. fala que é uma inversão, uma potência negativa” (2016, p.8).

COMPARANDO A P.A. DE RAZÃO 1 COM AS DEMAIS SEQUÊNCIAS

Na comparação da linha F (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) com as demais linhas da tabela dada apenas os grupos B e C atendem à questão (tabela 63), os grupos E e F fogem a ela e os grupos A e D se abstém de respondê-la.

Tabela 63: Análise de congruência-questão 7

Grupo	Registro de partida Escritura numérica (Conjunto de tarefas)	Registro de chegada Língua natural (Escrita dos estudantes)	*⇨*	!	1-2-3 ⇨ 1-2-3
GB	F (0,1,2,..., 9) J (0, -1, -2, -3, ..., -9)	*“F” e “J” são sequências semelhantes, porém, uma diminui e outra aumenta.*	Sim	Não	Não
GC	F (0,1,2,..., 9) E (0,0,0,...,0)	*“a E tem outra base.”*	Sim	Não	Sim

O grupo B apresenta a oposição entre os elementos das linhas F (0,1, 2,3,4,5,6,7,8,9) e J(0,-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9) e o segundo apresenta a diferença de base entre as linhas E (0,0,0,...,0) e F (1,2,3,4...,9), que adiante analisamos:

Aqui vemos indícios de observação, pelo grupo B, da simetria existente entre as sequências em questão, observamos que a conversão efetuada pelo grupo em questão se mostra fortemente incongruente pela falta de uma relação de correspondência entre os registros de partida e chegada na mesma ordem e também porque o registro de chegada carece de clareza uma vez que não é possível identificar qual seqüência diminui e qual aumenta, por exemplo.

Já o grupo C vislumbra a mudança de base. Entretanto, sua resposta soa imprecisa, o que pode estar associado à sua conversão levemente incongruente, uma vez que esta não atende ao segundo critério de congruência que é o entendimento único da resposta.

[59]O Sistema de Coordenadas Cartesianas, mais conhecido como Plano Cartesiano foi criado por René Descartes com o objetivo de localizar pontos. Ele é formado por dois eixos perpendiculares: um horizontal e outro vertical que se cruzam na origem das coordenadas. O eixo horizontal é chamado de abscissa (x) e o vertical de ordenada (y). Os eixos são enumerados compreendendo o conjunto dos números reais. Segundo à orientação o eixo é positivo à direita e acima e negativo à esquerda e abaixo (http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/plano-cartesiano.htm).

Os grupos E e F fazem inferências que não as pedidas pela sétima questão, inferências estas que reproduzimos adiante na tabela 64:

Tabela 64: Respostas que fugiram à questão 7

Grupo	Inferências apresentadas
GE	*"As linhas possuem números iguais, porém com sinais diferentes."*
GF	*"A linha B é multiplicada por 5 onde em todos finais de número contém 25. E a fileira L, os números são somados pelos atuais com os antecedentes para obter resposta para o número seguinte."*

O grupo E faz observações gerais e vagas sobre linhas que possuem números iguais e sinais diferentes, mas não indica que números e linhas sejam estes. Já o grupo F faz observações isoladas sobre as linhas B e L, observando regularidades em ambas. Em nenhum momento a linha F é citada diretamente pelos dois grupos.

A baixa adesão à questão pode indicar o cansaço dos participantes diante da investigação de um número significativo de questões em um espaço de duas aulas. Esse desânimo é registrado no diário de campo da professora: (2016, p.10).

CONSIDERAÇÕES SOBRE A TAREFA 3

Observamos que as respostas dos estudantes às questões propostas representam a discussão e sistematização de diversos conceitos matemáticos necessários à formação do conceito de logaritmo. E que ao contrário do que o senso comum preconiza, os estudantes possuem conhecimentos diversificados acerca da base Matemática necessária para a construção deste conceito. Desta forma a tarefa em foco parece ser um instrumento facilitador para a construção de propriedades dos logaritmos.

De maneira geral observamos nesta terceira tarefa uma mudança do viés observado na análise das respostas em relação às inferências dos estudantes na tarefa 2 na qual os grupos fazem uma conversão entre os sistemas semióticos da pergunta e da resposta quando esta era solicitada pela questão respondida, o que não ocorre na presente tarefa, pois aqui há um maior desenvolvimento das respostas dos participantes que apresentam predominância de congruência nas conversões envolvendo seqüência cujas razões racionais sejam maiores ou iguais a um e uma maior presença de incongruência em conversões envolvendo seqüência cuja razão racional está situada entre zero e um ou abaixo de zero.

Como as questões presentes na tarefa em foco são do tipo "Escreva o que observa"; em alguns casos temos também nesta terceira tarefa uma segunda conversão indicando uma maior familiaridade de participantes com a investigação Matemática uma vez que nesta terceira vivência as respostas se mostram mais elaboradas. Esta ampliação da percepção de propriedades também surge na plenária quando cada um dos grupos expõe suas inferências para os demais participantes sem um ambiente dialógico.

Observando as produções escritas dos sujeitos para esta terceira tarefa, que se constitui em uma investigação orientada para a construção de propriedades da definição dos logaritmos, tanto em seus grupos quanto na plenária. Nossa análise desta terceira tarefa aponta para a construção por participantes de propriedades dos logaritmos tais como: o logaritmo é o expoente de uma base, que operar com logaritmos é operar com expoentes e que dados dois números reais positivos a e b, onde $a > 0$, sendo que $a \neq 1$e $b > 0$, existe somente um número real x, tal que a^x=b.

No próximo item apresentamos um estudo sobre a avaliação dos participantes para o conjunto de tarefas vivenciadas o que nos permite compreender melhor de que forma os estudantes vivem a experiência desta proposta o que se constitui em subsídio para a indicação de caminhos para a melhoria do conjunto em foco.

TAREFA 4: AVALIAÇÃO

Para a avaliação das tarefas 1 a 3 aplicamos um questionário aos participantes com o objetivo de coletar as impressões e sugestões dos participantes para a melhoria do conjunto como um todo. Esta atividade durou cerca de 15 minutos.

Tarefa:

1. Avalie, de forma individual, o conjunto de tarefas vivenciado:

	Ótimo	Bom	Regular	Ruim	Péssimo
Conteúdo:					
Clareza na apresentação					
Materiais disponibilizados					
Duração					
Ambiente					

2. Qual atividade mais gostou e por quê?
3. O que você achou da Matemática apresentada desta forma?
4. Na sua opinião, qual foi o ponto positivo? E o negativo?

Analisando as respostas dos participantes observamos que a primeira pergunta resultou em um apanhado geral de suas impressões: As perguntas 2 e 3 suscitaram observações específicas dos participantes acerca do conjunto e as perguntas 4 e 5 retomam e ampliam as respostas às perguntas 2 e 3.

AVALIAÇÃO OBJETIVA

A partir da avaliação objetiva, em que cada estudante participante marcaria com um x uma das cinco opções dadas, observamos que de maneira geral que não só o conjunto de atividades é bem aceito pelos estudantes como também os materiais utilizados, a duração e o ambiente no qual as tarefas foram desenvolvidas. Ou seja, todos os tópicos tiveram índice superior a 70% quando juntamos a avaliação ótimo e bom e taxa de 15% para avaliação regular e ruim, mais detalhes na tabela 65:

Tabela 65: Avaliação objetiva do segundo ciclo

	Ótimo	**Bom**	**Regular**	**Ruim**	**Péssimo**
Conteúdo	28,5%	50%	21,4%	0%	0%
Clareza na apresentação	7,1%	64,2%	28,5%	0%	0%
Materiais disponibilizados	50%	42,8%	0%	7,1%	0%
Duração	21,4%	50%	14,2%	14,2%	0%
Ambiente	57,1%	35,7%	7,1%	0%	0%

PREFERÊNCIAS DOS ESTUDANTES

Quando os estudantes destacam o que mais gostam nas atividades vivenciadas observamos que as suas respostas indicam o aceite ao cenário proposto para desenvolver as tarefas, conforme destacado a seguir:

Tabela 66: Altos e baixos do conjunto de tarefas

Estudante	Registro escrito do (a) estudante
E1	*"As das caixas, bem dinâmica e investigativa." "Abrir as caixas misteriosas."*
P	*"Ambiente de trabalho, exercícios apresentados"*
A3	*"Negativo: Não descobrimos o que tinha na caixa.".*

Aqui mais de três quartos dos estudantes destacaram a tarefa das caixas misteriosas como a que eles mais gostaram. Falas essas representadas pela contribuição da estudante E1. Embora os estudantes tivessem ficado frustrados por não poderem abrir as caixas como explicitado por E1 quando sugere "abrir as caixas misteriosas" esta foi uma das tarefas que o grupo aprovou. Outro ponto a ser destacado é a procura por um gabarito ou pela resposta única. Como tal não existe, uma vez que a tarefa prevê questões abertas ela coloca os estudantes em uma situação desconfortável pela falta de vivência deste tipo de situação uma vez que a sala de aula de Matemática tem sido o lugar das respostas únicas.

O estudante P destaca de forma positiva o clima da investigação quando responde à quarta questão que pede os destaques positivos e negativos da seqüência o que em nosso entender reforça a fala da estudante E1 estendendo-a ao conjunto como um todo.

A estudante A3 elenca como ponto negativo do conjunto o fato das caixas não serem abertas, aqui vemos uma forte associação da resposta da estudante com o ETV uma vez que este tem como integrante no rol de suas práticas o uso de exercícios com uma única resposta conhecida e a qual temos acesso no gabarito dos manuais escolares.

Com relação à produção escrita sobre as suas preferências um sétimo dos sujeitos participantes destaca a investigação dos pares de seqüência como ponto alto do conjunto de tarefas. Estas respostas (tabela 67) de maneira geral destacam a importância da coordenação das sequências:

Tabela 67: Fala dos estudantes acerca da investigação das sequências

Estudante	Produção/Produções escrita(s) do (a) estudante(s)
F	*"A parte de comparar sequência. Achei interessante pois, lendo pensávamos que as sequências não tinham comparação entre elas. Então depois descobrimos que era possível"*
B	*"Gostei da análise de termos em duplas pois vemos todas as diferenças e similaridade de uma linha para outra."*
E2	*"Positivo: Aprender detalhes mais profundos."*

Observamos ainda que as respostas dos sujeitos F e B se complementam. Ou seja, a primeira destaca a percepção da existência de regularidades entre seqüência e o segundo, destaca a satisfação do estudante em observar não só as similaridades quanto também as diferenças entre as mesmas. Aqui a contribuição da estudante E2 reforça a importância da investigação para o aprofundamento teórico

OPINANDO ACERCA DA ABORDAGEM DO CONJUNTO

Quando perguntados sobre o que eles acharam a respeito da Matemática apresentada dessa forma os estudantes K e F2 destacam o seu progressivo entendimento sobre as possibilidades que a investigação oferece a seu aprendizado, o complementando esta pergunta surgem as respostas dadas pelas alunas K, B e I nos destaques dos pontos positivos e negativos e a fala do aluno P nas sugestões pedidas para o conjunto de tarefas vivenciado respectivamente (tabela 68):

Tabela 68: Autodescobertas reveladas pelo percurso formativo

Estudante	Produção/Produções escrita(s) do(a) estudante(s)
K	*"Um pouco confusa, mas consegui perceber que a Matemática não é só número é reflexão, descritiva e fascinante"* *"Ela foi cansativa, trabalhosa."*
F2	*"Razoável, no começo, mas depois vi que era possível, era importantíssimo aprender dessa forma."*
B1	*"Descobri minha capacidade de análise"*
P	*"Mais trabalhos conjuntos com a professora e dinâmicas. A motivação para a pesquisa é escassa."*
I	*"Faz a gente se matar para saber o que é."*

A estudante K, por exemplo, destaca a importância de sair da zona de conforto para compreender que a essência da Matemática é muito mais do que fazer contas repetidamente em processos mecânicos, visão essa apresentada também pela estudante F2 e pela estudante B1 que ao relatar os pontos positivos e negativos da vivência relata uma descoberta sobre si mesma e sua relação com as tarefas propostas. Ao mesmo tempo a estudante K destaca como ponto negativo, na questão que faz este pedido, o quão cansativo este processo é para ela, esta opinião é compartilhada pela estudante I, quando responde na questão dedicada a inquirir os pontos positivos e negativos do conjunto de tarefas que um ponto negativo é o extremo trabalho para se descobrir o que se investiga.

As questões abertas propostas são interpretadas como nebulosas pelos participantes F1 e E2 quando estes avaliam a forma como a Matemática é apresentada no percurso formativo vivenciado (tabela 69)

Tabela 69: Opiniões acerca do percurso formativo

Estudante	Produção/Produções escrita(s) do(a) estudante(s)
F1	*"Regular, pois a matéria não ficou muito clara"*
E2	*"É muito fácil se perder nas ideias"*

O estudante F1 destaca a falta de clareza do percurso o que mostra a comparação com o ETV que apresenta sem discussões o tema do momento em uma estrutura já conhecida. A fala deste estudante é complementada pelas observações da estudante E2 quando ela fala a respeito da dispersão que pode estar associada a este tipo de tarefas vivenciadas.

Também vemos a posição de alguns estudantes em relação ao tema trabalho em grupo como algo relevante. A este respeito temos respostas positivas e também em uma situação intermediária (Tabela 70):

Tabela 70: Opiniões sobre o trabalho em grupo

Estudante	Produção/Produções escrita(s) do(a) estudante(s)
I e F1	*"O trabalho em equipe."*
A3	*"Trabalhamos em equipe (porém, prefiro individual acho que aprendo melhor)."*

Os estudantes I e F1 destacam a organização dos participantes em grupos como sendo positiva quando respondem à quarta questão. Enquanto que a estudante A3 escolhe uma posição intermediária ao destacar o trabalho em grupo como ponto positivo fazendo a ressalva para a sua preferência pessoal por um trabalho individual.

O acolhimento em relação à organização em grupo dos estudantes aponta para o rompimento dos participantes à tradicional arrumação das carteiras na qual cada estudante olha para a nuca do colega e onde ao professor é reservada a condição de falante. Segundo Sacristan (1998) esta organização apresenta aspectos do currículo oculto dentro da perspectiva do ETV que a figura 7 apresenta.

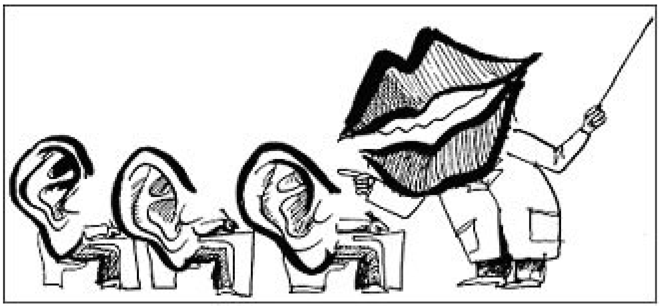


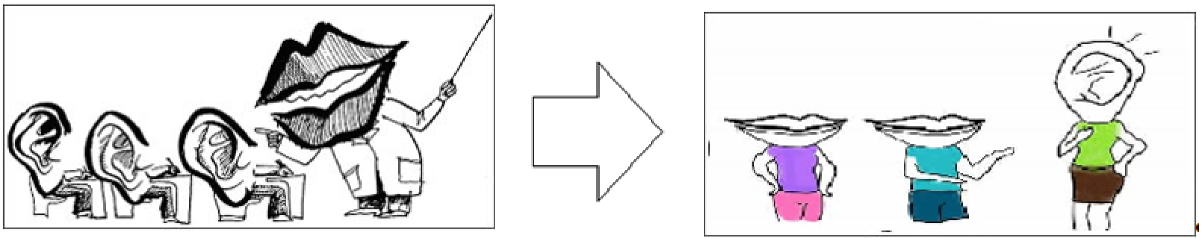
Figura 7: Sala de aula tradicional
Fonte: (BRASIL ESCOLA, 2016, sem página)

SOBRE O CONJUNTO DE TAREFAS

Observamos que de maneira geral os estudantes aderiram ao conjunto de tarefas proposto, tal adesão não se deu de forma acrítica uma vez que diversas ponderações sugestões e críticas são colocadas pelos participantes. Pelas inferências dos estudantes observamos que estes não lidam bem com a incerteza e também tem dificuldades em empreender uma investigação, pois a incerteza é uma prerrogativa desta, entretanto, uma vez transposta esta barreira vários estudantes puderam se surpreender com a sua própria capacidade de observação, de análise, de síntese além de perceberem na busca de regularidades algo prazeroso e fonte de satisfação intelectual.

Apresentamos uma síntese do percurso vivenciado pelos alunos e apresentado ao longo desta pesquisa (quadro 14).

Quadro 14: Síntese do percurso de pesquisa



[60]

O próximo capítulo é dedicado às considerações finais desta dissertação.

[60]Adaptação da figura 7 feita por Vinícius Ávila Miranda para esta dissertação.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa estabelecemos um quadro do processo de ensino aprendizagem de logaritmo; elaboramos, refinamos e aplicamos aos sujeitos da pesquisa um conjunto de tarefas para uma introdução a este conceito e observamos, através das produções escritas dos estudantes, as representações, tratamentos e conversões efetuadas pelos participantes a partir da vivência do referido conjunto.

As reflexões apresentadas nos capítulos anteriores são aqui retomadas e sintetizadas a fim de trazer respostas ao nosso problema de pesquisa.

Em primeiro lugar retornamos à discussão sobre o estabelecimento do quadro de ensino aprendizagem de logaritmos, em segundo lugar nos detemos no capítulo 4 que contém as reflexões acerca de nosso trabalho de campo e em terceiro lugar falamos acerca das limitações e possibilidades de desdobramento encontradas durante a realização da pesquisa.

Durante a construção de um quadro para a compreensão do processo de ensino aprendizagem de logaritmos dentro do contexto no qualestamos inseridos caminhamos da fundamentação Matemática deste conceito, passamos pela análise de um livro de referência para a formação de professores de Matemática e dos livros didáticos adotados pela escola que sedia esta pesquisa e finalizamos o referido quadro com a análise de dissertações sobre o processo de ensino aprendizagem do tema seja abordando diretamente o processo ou seja subsidiando o processo supracitado.

Ao compormos um quadro teórico para visualizar a situação do ensino aprendizagem dos logaritmos buscamos inicialmente estabelecer uma compreensão aprofundada do conceito de logaritmo como uma relação entre progressões geométricas e aritméticas, relação esta associada à potenciação.

Tal opção se constitui em nosso ponto de partida fundamentando matematicamente o presente trabalho. Observamos que esta opção nos subsidia na compreensão de quais propriedades dos logaritmos abordar no conjunto de tarefas que elaboramos e reelaboramos, se constituindo em um material de consulta sempre presente a nortear os nossos passos.

LIVROS E DISSERTAÇÕES: EU VEJO O FUTURO REPETIR O PASSADO...

Na análise de livros que se segue à discussão sobre o conceito de logaritmo observamos a forma como este é apresentado em uma perspectiva de passado/presente/futuro.

O passado sendo representado pelo livro logaritmos de Elon Lages (1980) que há décadas tem grande influência no ensino deste conceito.

O presente sendo representado pelos livros didáticos de Manoel Paiva (2009) e Gelson Iezzi e colaboradores (2010) adotados pela instituição que recebe esta pesquisa.

O futuro é representado pelas pesquisas que indicam caminhos e subsídios para o ensino deste tema.

Com surpresa percebemos que tais limites temporais não são rígidos uma vez que passado, presente e futuro se interpenetram através do livro de Elon Lages (1980) que se constitui em fundamentação teórica tanto dos livros didáticos quanto de todas as dissertações analisadas por nós rompendo, portanto, com os limites temporais.

Observamos também que não obstante o lapso temporal entre as obras analisadas, e a inevitável marcha do progresso em pesquisas em educação Matemática durante cerca de três décadas, uma vez que a primeira edição do livro de Elon Lages data de 1973 e as edições dos livros didáticos analisados datarem de 2009 e 2010 para as coleções de Paiva e Iezzi e colaboradores respectivamente.

A estrutura das obras mais recentes tem como espinha dorsal a mesma organização da obra mais antiga. Ou seja, os livros analisados na sua totalidade se apresentam engessados em uma estrutura fixa que se constitui da apresentação de uma definição, seguida de um exemplo que norteia uma prática Matemática algorítmica associada à esta definição, esta estrutura é encerrada com a proposição de exercícios semelhantes ao exemplo dado nos quais os aprendizes devem repetir o passo a passo dado no exemplo para resolvê-los.

Este recorte temporal ilustra a persistência dos autores dos livros didáticos analisados a este modelo para o ensino de Matemática calcado no ETV. Não obstante os mesmos tenham acrescentado exemplos cotidianos e problemas reais a esta estrutura visando contextualizar os conteúdos abordados uma vez que uma abordagem contextualizada e em movimento da Matemática é uma exigência do Plano Nacional do Livro didático, que descreve como ela é abordada nas coleções:

> A Matemática produzida e organizada no decorrer da história é uma das mais significativas conquistas do conhecimento humano. Além disso, ela faz parte do cotidiano das pessoas, contribui para as atividades das outras ciências e das tecnologias. Ela se mantém viva e crescente devido a esses usos e às contribuições vindas, em especial, dos centros acadêmicos e de pesquisa, nos quais se verifica uma permanente produção de conhecimento matemático (PNLD, 2012, p.14).

Entretanto, observamos que tal inclusão de aplicações cotidianas da Matemática se apresenta no livros didáticos analisados de maneira apenas acessória à estrutura pautada pelo ETV destas coleções o que não indica um rompimento real com o ensino descontextualizado da Matemática.

Em termos cognitivos, inferimos que o livro mais antigo dentre os analisados, Logaritmos de Elon Lages (1980), à luz da TRRS mostra conversões predominantemente congruentes para cada faceta dos logaritmos apresentada. Como já discutimos neste trabalho a congruência nas conversões está associada a altos índices de sucesso escolar (DUVAL, *id ibid*). Tal perfil de conversões não ocorre nos livros didáticos analisados cujas apresentações do tema logaritmo se constituem majoritariamente de conversões não congruentes o que entendemos com Duval (*id ibid*) ser associado ao fracasso escolar e, portanto, não desejável para a apresentação de um conceito matemático.

Para complementar nossa busca procuramos identificar o que nos apontam as dissertações tendo como base o programa de pós graduação em Educação Matemática da UNESP. As dissertações analisadas: 1)Logaritmos e aplicações, 2)Logaritmos uma proposta de ensino, 3)Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst: uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais e 4) Diferentes maneiras de definir a função logarítmica natural se apresentam majoritariamente focadas em fundamentação Matemática e nenhuma delas traz uma proposta para o ensino de logaritmos o que reforça a necessidade de pesquisas futuras com esta temática.

Devido à escassez de propostas para o ensino de logaritmos elaboramos, como produto desta dissertação, um guia didático que une não só uma apresentação Matemática focada na congruência das conversões, mas também uma proposta delineada para a introdução do conceito de logaritmos. Disponibilizamos ao final do guia um material para uso em sala de aula formatado para impressão ou fotocópia com o objetivo de facilitar o trabalho docente.

ELABORAÇÃO E REELABORAÇÃO DE TAREFAS E O PRODUTO RESULTANTE

Para a construção e reconstrução sucessiva do conjunto de tarefas em ciclos de acordo com a metodologia adotada por nós, experimento de design, que preconiza o uso de ciclos iterativos (aqui utilizamos dois ciclos, o primeiro de refinamento do conjunto de tarefas constituído de duas aplicações, e o segundo de coleta de dados constituído de uma aplicação). A estrutura inicialmente definida por nós para o conjunto de tarefas se manteve durante os ciclos sucessivos, ou seja, o primeiro momento dedicado à disparar a investigação, o segundo momento à investigação Matemática em si e o terceiro momento à avaliação das tarefas se mantiveram ao longo das aplicações que fizemos.

As vivências do primeiro momento contribuíram para que nós rompêssemos com o ETV uma vez que aqui caminhamos da discussão sobre um vídeo (utilizado nas aplicações do primeiro ciclo) na qual a construção da Matemática é apresentada em uma perspectiva declaratória, onde propúnhamos uma "discussão" acerca do tema na qual depois durante a análise da aplicação desta tarefa observamos que esta não era aberta, se configurando em um simulacro de investigação que pouco acrescentava ao conjunto. Só nos demos conta do nosso falso afastamento do ETV na segunda aplicação de refinamento do conjunto que fizemos. Já a adoção das caixas misteriosas para este momento se mostra uma decisão acertada, pois nas duas aplicações em que foram utilizadas (segunda aplicação do primeiro ciclo e aplicação única do segundo ciclo) os participantes ficaram motivados para o segundo momento do conjunto de tarefas.

Nas vivências do segundo momento nos apoiamos na tríade unida pela resolução de problemas (figura 8):

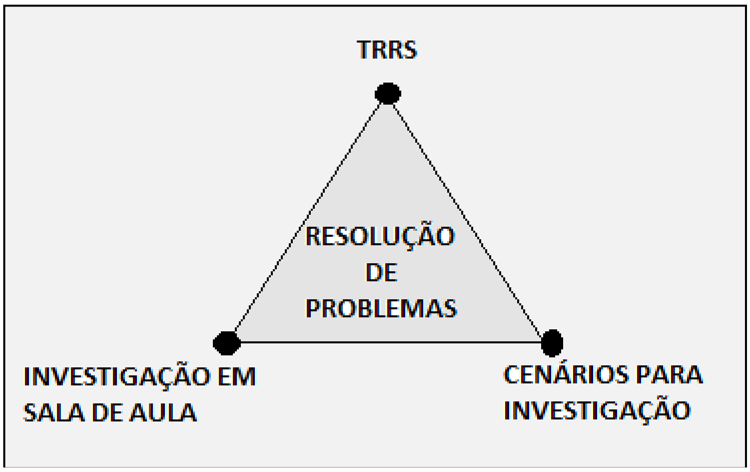


Figura 8: Tríade unida pela resolução de problemas

Nessa reunião na qual a resolução de problemas une os três aportes teóricos escolhidos pensamos em uma atividade aberta, dentro da Matemática pura e que fizesse o estudante obrigatoriamente a fazer a conversão entre o suporte numérico de representação para a língua natural.

Fizemos uma transição de uma investigação na qual exploramos a propriedade na qual os logaritmos transformam multiplicações em somas e divisões em subtrações, pois são operações entre expoentes. Esta proposta de investigação (vivenciada no primeiro ciclo de aplicações) se mostra insuficiente para a introdução do conceito de logaritmos não só pela escassez de propriedades abordadas, mas também pelo fato de que os estudantes chegavam com certa facilidade a alguma regularidade e logo desistiam de seguir procurando. Buscamos então uma série de tarefas que estimulassem a exploração de seqüência numéricas e que também abordassem propriedades inerentes à definição de logaritmos (aplicadas no segundo ciclo em uma aplicação).

Estas tarefas se mostraram adequadas ao nosso objetivo de introduzir o conceito. Entretanto, observamos que uma atividade de fechamento em uma perspectiva diretiva se mostrou necessária e que atendemos para o produto resultante desta dissertação que é um guia didático para professores que aborda o ensino de logaritmos.

A terceira etapa do conjunto foi a que menos variou, sendo que no primeiro ciclo ela foi constituída de avaliação das tarefas e avaliação de perfil através de respostas a questionários elaborados para este fim. O questionário de avaliação das tarefas caminhou de uma série de perguntas predominantemente objetivas na primeira aplicação, passando por perguntas predominantemente dissertativas em uma segunda aplicação até chegar à configuração atual que se constitui em um equilíbrio entre os dois polos e que julgamos adequado. Para futuras aplicações propomos a substituição do questionário de avaliação por uma roda de conversa uma vez que observamos certo engessamento nas respostas dos participantes ainda que a mudança sucessiva no questionário tenha buscado evitá-lo. Já a análise de perfil não mudou nas duas primeiras aplicações e foi substituída por pesquisa documental na terceira aplicação.

A partir desta dissertação de mestrado fizemos um guia didático para professores quevisa dividir com professores do ensino médio não só um conjunto de tarefas para a construção do conceito de logaritmos assim como a fundamentação teórica que fundamenta a formação do mesmo.

Guia este que apresenta a seguinte estrutura: Introdução com apresentação, objetivo e estrutura do trabalho. Na segunda unidade apresentamos a fundamentação teórica da investigação em sala de conjunto de tarefas aliada aos cenários para investigação, pois é a partir destes referenciais que elaboramos o conjunto de tarefas que apresentaremos mais adiante. A terceira unidade apresenta os logaritmos como operações entre expoentes o que se mostra fundamental para a compreensão unidade 4 que detalha o conjunto de tarefas proposto neste guia. A quarta unidade traz o conjunto de tarefas para a construção do conceito de logaritmos. Encerramos o guia com a bibliografia consultada para a confecção deste trabalho e, nos anexos, disponibilizamos aos professores as tarefas propostas na versão para estudantes.

5.1 RESPOSTA À QUESTÃO PROBLEMA

A análise dos dados coletados nos permitiu responder à questão problema: Quais as produções escritas de estudantes do ensino médio frente a uma introdução investigativa ao conceito de logaritmos? Como eles representam, convertem e tratam o conceito em jogo? O que isto nos indica?

De maneira geral observamos que a coordenação entre registro numérico e língua natural como suportes de representação de um objeto matemático e o tratamento deste neste segundo suporte de representação facilita a construção do conceito que está sendo trabalhado.

Tal constatação se deu através da observação de que a cada tarefa que ensejava tal conversão vivida, mais os estudantes aderiam à nossa proposta de converter conceitos matemáticos da linguagem numérica para a natural e a discutí-los neste segundo suporte. E Quanto mais essa discussão era ampliada em língua natural mais congruentes as conversões se mostravam. Isso se apresentou como uma tendência que aponta para a progressiva compreensão do conceito para os estudantes envolvidos.

5.2 LIMITAÇÕES ENCONTRADAS E DESDOBRAMENTOS POSSÍVEIS

A primeira dificuldade encontrada por nós foi a escassez de trabalhos sobre aprendizagem de logaritmos. Entendemos, portanto, que nossa pesquisa se apresenta como uma contribuição nesse sentido.

Outra limitação foi enfrentada por nós devido à opção pela não utilização de gravações em áudio e vídeo. Isso limitou nossas observações uma vez que aplicar as tarefas e escrever observações concomitantemente se mostra de difícil coordenação na prática. Este é um ponto a ser revisto em futuras pesquisas.

Uma indagação levantada por esta pesquisa é a respeito da necessidade de permanência deste tema no currículo da Base Nacional Comum uma vez que identificamos uma abordagem inadequada do tema no ensino médio o que não ocorreu para o ensino superior, entretanto, esta é uma observação nascida da análise de um número pequeno de livros e que pode ser expandida em futuras pesquisas.

Por fim gostaríamos de salientar que o tempo que dedicamos a esta pesquisa muito nos acrescentou em termos de crescimento profissional e pessoal. Não imaginávamos no início desta caminhada o quanto nossa visão sobre o que se constitui a atividade de pesquisa iria se modificar ao longo do tempo.

Tempo que de uma forma ou de outra sempre esteve presente em nossas preocupações. Tivemos o tempo de começar este estudo, o tempo de definir o tema, o tempo de desenvolver a pesquisa, tempo reduzido para o lazer, tempo reduzido para a família, tempo de sorrir, tempo de chorar, tempo de escrever artigos, tempo de viajar a congressos e agora é tempo de terminar este estudo e partir para novos desafios. Fecho esta dissertação com um trecho da música "Oração ao tempo" que traduz o meu estado de espírito neste momento.

> "[...]Tempo, tempo, tempo, tempo. Peço-te o prazer legítimo e
> o movimento preciso. Tempo, tempo, tempo, tempo. Quando o tempo
> for propício. Tempo, tempo, tempo, tempo, tempo. De modo a que
> meu espírito ganhe um brilho definido. Tempo, tempo, tempo, tempo.
> E eu espalhe benefícios. Tempo, tempo, tempo, tempo [...]"
> Caetano Veloso

6.BIBLIOGRAFIA

BATISTA, Adriana Maria da Silva Barbosa; SPINILLO, Alina Galvão. Nem todo material concreto é igual: a importância dos referentes na resolução de problemas. Estud. psicol. (Natal), Natal, v. 13, n. 1, p. 13-21, Abr. 2008.

COBB et. al. (2003). *Design Experiments* in Educational Research. Vol 32: pp. 9- 13. Disponível em: http://dixieching.wordpress.com/2010/08/14/designexperiments-in-educational-research-Cobb-et-al-2003/. Acesso em: 09 maio 2011.

CONY, C.H. CéstlaGuerre!". Antologia de Crônicas, org. Herberto Sales, 3ª ed., São Paulo: Ediouro, 2005, p. 13-14

CUNHA, H. OLIVEIRA, H. PONTE, J.P. Investigações Matemáticas na sala de aula. Actas do ProfMat95, Lisboa: APM, 1995 (p. 161-167)

D'AMORE, B. Elementos de didática da Matemática. Tradução de Maria Cristina BonomiBarufi. São Paulo: Livraria da Física Editora, 2007.

DUVAL, R..Registros de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2013.

_______, Semiósis e pensamento humano – Registros semióticos e aprendizagens intelectuais(fascículo 1) 1º Ed. São Paulo. Livraria da Física. 2009.

_______, Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning (1999).Disponível em<http://eric.ed.gov/?id=ED466379 >.Acesso em nov. 2016.

_______, A cognitive analysis of problems of compreehension in a learning of mathematics. Educational studies in mathematics, 2006.

FIORENTINNI, D. LORENZATO, S. Investigação em educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos. 3 ed. rev. Campinas, SP. Autores associados, 2012.

GRANDO, R.C. O conhecimento Matemático e o uso de jogos na sala de aula. Campinas: FE/UNICAMP. Tese de Doutorado, 2000. 183 p.

IEZZI *et al*. Matemática Ciência e Aplicações. 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

IGLIORI, S.B.C. MARANHÃO,M.C. Registros de Representação e Números Racionais do livro: Aprendizagem de Matemática. In: Silvia Dias Alcântara Machado (org) Aprendizagem de Matemática – Registros de Representação Semiótica: Campinas SP: Papirus, 2013.p. 57-70.

KINDEL, D. S. Discutindo os racionais na 7ª série visando à noção de densidade. Dissertação de mestrado. Rio de Janeiro: USU-RJ, 1998.

___________. Um Ambiente Colaborativo a Distância: Licenciandos Dialogando sobre os Infinitos/ Dora Soraia Kindel, Tese de Doutorado, São Paulo, 2012.

___________. Investigações em Sala de Aula de Matemática: a Geometria Fractal e as Sequências Numéricas Infinitas Xi Encontro Nacional de Educação Matemática Curitiba – Paraná, 20 a 23 de julho de 2013 Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática– ISSN 2178-034X.

LIMA, E.L. Logaritmos. Rio de Janeiro: SBM, 1980.

LIMA, F. Dica saudável, bolor no laboratório de Matemática. Revista Cálculo, São Paulo, n. 49, p. 21- 25, fev. 2014.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de Matemática e materiais didáticos manipuláveis. O laboratório de Matemática na formação de professores. Sérgio Lorenzato (org.), 3ª ed. Campinas, SP. Autores Associados, 2010.

MACHADO, S. Registros de Representação e Números Racionais do livro: Aprendizagem de Matemática. In: Silvia Dias Alcântara Machado (org) Aprendizagem de Matemática – Registros de Representação Semiótica: Campinas SP: Papirus, 2013.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. Vigotski e o processo de formação de conceitos. In: Piaget, Vigotski, Wallon - Teorias psicogenéticas em discussão. São Paulo: Summus, 1992.

__________. Vigotski – Aprendizado e desenvolvimento Um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione, 1998.

__________. Vigotski Aprendizado E Desenvolvimento Um Processo Sócio Histórico-São Paulo: Scipione, 1997.

MOYSÉS, L. Aplicações de Vigotski à educação Matemática. 11ª ed. Campinas – SP

MATHIAS, C.E.M.. Programas de Geometria Dinâmica Plana:realizando construções mais avançadas no R.e.C. Unidade 4. Universidade Aberta do Brasil. Curso de Especialização em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática. Disponível em: <http://ntem.lanteuff.org/mod/folder/view.php?id=6594>. Acesso em: 29 jan. 2016.

MATTA, A.E.R. *et al*. Design-BasedResearch Ou Pesquisa De Desenvolvimento: Metodologia Para Pesquisa Aplicada De Inovação Em Educação Do Século XXI. Revista da FAEEBA – Educação e Contemporaneidade, Salvador, v. 23, n. 42, p. 23-36, jul./dez. 2014

MOUTINHO, I. PAIS, R.B. Diversificação de Recursos para o Ensino de Números nos Primeiros Anos Escolares. Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática. Disponível em: <http://sbem.bruc.com.br/xiienem/pdf/7300_2967_ID.pdf>. Acesso em jul. 2016.

NAVAS, M.G.M. Medidas em telecomunicações e eletrônica, Ed. SENAC, Rio de Janeiro, 2015.

PEREZ, G. (1993). O laboratório de ensino e os materiais didáticos no ensino de Matemática. Rio Claro, UNESP, Abr. (MANUSCRITO) Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-294X2008000100002&lng=en&nrm=iso>. Acesso emAgo. 2015.

PONTE, J.P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, Investigações Matemáticas em Sala de Aula. Autêntica. Belo Horizonte. 2005.

PONTE, J.P. Investigar, ensinar e aprender. In: ACTAS do ROFMAT. Lisboa: APM,.p. 25-39, 2003.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. Bolema. Ano 13, n. 14, 2000. p. 66 a 91.

_______________. Desafios da reflexão em educação Matemática crítica. Tradução Orlando de Andrade Figueiredo, Jonei Cerqueira Barbosa. Campinas: Papirus, 2008.

_______________. Educação Crítica: Incerteza, Matemática, Responsabilidade, tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo, Cortez Editora, São Paulo, 2007.

SACRISTÁN, José Gimeno. Currículo: Uma Reflexão Sobre a Prática. 3. ed. Tradução Ernani Ferreira da Fonseca Rosa. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

SCIENCE MUSEUM.Mystery Boxes: supporting resources. Disponívelem<http://www.sciencemuseum.org.uk/educators/mystery-boxes-private>.Acesso em fev. 2016

SILVA, D.M.V. A importância do ambiente para o aprendizado de Matemática. Disponível em: <http://www.laboratoriosustentaveldematematica.com/2015/02/a-importancia-do-ambiente-para-o-aprendizado-de-matematica.html>. Acesso em: Set. 2015.

SILVA. S. F.; NÚÑEZ. I. B.. O Ensino por problemas e trabalho experimental dos estudantes - reflexões teórico-metodológicas. Revista Química Nova, v.25, n.6b, p.1197-1203, dez. 2002. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo. php?script=sci_arttext&pid=S0100-40422002000700023.

SILVA, Maria Regina Gomes da. Avaliação: um contrato de trabalho. Interface (Botucatu), Botucatu , v. 2, n. 2, p. 155-172, Feb. 1998 . Disponível em <http://www.scielosp.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1414-32831998000100009&lng=en&nrm=iso>. Acesso em abr. 2016

SIMÕES, M., SÔNEGO, D. A coisa sem sentido faz sentido há séculos. Revista Cálculo, São Paulo. Fascículo 33, p.43-54. Out, 2013.

TED, Math is forever. Disponível em: <https://www.ted.com/talks/eduardo_saenz_de_cabezon_math_is_forever?language=pt-br>. Acesso em nov. 2016.

TURRIONI, A.M.S., PEREZ, G. Implementando um laboratório de Educação Matemática para apoio na formação de professores. O laboratório de Matemática na formação de professores. Sérgio Lorenzato (org.), 3ª ed. Campinas, SP. Autores Associados, 2010.

APÊNDICE I – Modelo de autorização dos responsáveis pelos participantes da pesquisa

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA EDUCACIONAL

Eu, ____, brasileiro(a), ______________________ (estado civil), portador da carteira de identidade nº ______________________, inserito no CPF/MF sob nº ______________________, residente à Rua ____ nº ________, ______________ (I); AUTORIZO a participação de meu filho(a) ______________________ no minicurso de coleta de dados cujo objetivo principal é a investigação por alunos do ensino médio de uma tabela numérica em busca de regularidades que levem aos logaritmos, estou ciente de que não há riscos envolvidos na pesquisa da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro e de que meu filho não será filmado ou fotografado.

Local e data

____

Nome Completo

____

Responsável Legal de menor

Telefone p/ contato:

ANEXO I: 12 PROBLEMAS DE VERGNAUD E DURAND

Pedro tem 6 bolinhas de gude. Joga uma partida e perde 4 bolinhas. Quantas bolinhas tem depois da partida?

Bernardo joga uma partida de bolinhas de gude e perde 7 bolinhas. Depois da partida, tem 3 bolinhas. Quantas bolinhas ele tinha antes da partida?

Cláudio tem 5 bolinhas de gude. Depois da partida, ele tem 9 bolinhas. O que aconteceu na partida?

Paulo joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira partida, ele ganha 6 bolinhas. Na segunda perde 4. O que aconteceu?

Miguel joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira, ganha 4. Na segunda, perde 6. O que aconteceu?

Cristiano joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira partida, ganha 5. Joga uma segunda partida. Depois dessas partidas, ele ganhou ao todo 9 bolinhas. O que aconteceu na segunda partida?

Jacó joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira, perde 5. Joga uma segunda partida. Depois dessas duas partidas, perdeu 8 bolinhas. O que aconteceu na segunda partida?

Didi joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira, perde 7. Joga uma segunda partida. Depois dessas duas partidas, perdeu 4 bolinhas. O que aconteceu na segunda partida?

Olívio joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira, ganha 2. Joga uma segunda parida. Depois dessas duas partidas, perdeu 7 bolinhas. O que aconteceu na segunda partida?

Vicente joga duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira, ganha 8. Joga uma segunda partida. Depois dessas duas partidas, perdeu 2 bolinhas. O que aconteceu na segunda partida?

Bruno joga duas partidas de bolinhas de gude. Joga uma primeira e depois uma segunda. Na segunda partida, ele perde 7 bolinhas. Depois dessas duas partidas, ganhou 3 bolinhas. O que aconteceu na primeira partida?

ANEXO II - DISTRIBUIÇÃO DOS CONTEÚDOS NA COLEÇÃO IEZZI

1ª SÉRIE – 13 capítulos – 304 pp.

1	Conjuntos: noções gerais; subconjuntos; operações; noções de Lógica	20 pp
2	Conjuntos numéricos: naturais, inteiros, racionais, irracionais, reais; módulo de um número; intervalos; o número de ouro	15 pp
3	Funções: noção intuitiva; definição; definidas por fórmulas; domínio, contradomínio; gráficos; história do conceito	26 pp
4	Função afim: linear, constante; proporcionalidade; equações e inequações do 1º grau	23 pp
5	Função quadrática: definição; gráfico; equações do 2º grau; parábola; inequações	24 pp
6	Função definida por sentenças; módulo; função modular; equações e inequações modulares	14 pp
7	Potência; função exponencial; equações e inequações exponenciais; notação científica	20 pp
8	Logaritmos; função logarítmica; equações exponenciais e logarítmicas; inequações logarítmicas; história dos logaritmos	31 pp
9	Complemento sobre funções: injetoras, sobrejetoras, bijetoras; inversa; composição de funções	12 pp
10	Sequências numéricas; progressões aritméticas e geométricas; sequência de Fibonacci	27 pp
11	Matemática comercial e financeira: porcentagem; aumentos; descontos; juros simples e compostos; juros e funções	20 pp
12	Semelhança entre figuras e entre triângulos; relações métricas no triângulo retângulo; Teorema de Pitágoras	21 pp
13	Trigonometria no triângulo retângulo: razões trigonométricas; história da trigonometria	18 pp

2ª SÉRIE – 17 capítulos – 320 pp

1	Circunferência trigonométrica: arcos e ângulos; Matemática e Astronomia	12 pp.
2	Razões trigonométricas na circunferência: seno, cosseno, tangente; outras razões trigonométricas	21 pp.
3	Triângulos quaisquer: lei dos senos; lei dos cossenos	09 pp.
4	Funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente; funções periódicas	20 pp.
5	Fórmulas de adição e de subtração para seno, cosseno e tangente	08 pp.
6	Matrizes: definição, representação, operações, tipos; histórico; computação gráfica e matrizes	25 pp.
7	Equação linear; sistemas lineares: 2 x 2, m x n, escalonamento; determinantes; sistemas homogêneos; história dos determinantes	29 pp.
8	Área de figuras planas: retângulo, quadrado, paralelogramo, triângulo, losango, trapézio, polígono regular, círculo e suas partes; área e semelhança	25 pp.
9	Geometria espacial: noções iniciais, postulados; posições relativas; paralelismo; perpendicularidade; projeções ortogonais; distâncias; sólidos geométricos	26 pp.
10	Prisma: elementos, classificação; paralelepípedo; princípio de Cavalieri; áreas e volume	15 pp.
11	Pirâmide: elementos, classificação; áreas e volumes; tetraedro regular; sólidos semelhantes; tronco de pirâmide	28 pp.
12	Cilindro: elementos, classificação; áreas e volumes; equilátero	07 pp.
13	Cone: elementos, classificação; áreas e volumes; equilátero; tronco de cone	14 pp.
14	Esfera: seção de uma esfera; elementos, fuso esférico, cunha esférica; área da superfície e volume	12 pp.
15	Combinatória: princípio fundamental da contagem; fatorial; agrupamentos simples: permutações, arranjos, combinações; permutações com repetição	24 pp.
16	Binômio de Newton; triângulo aritmético	11 pp.
17	Probabilidade: espaço amostral, evento; relação com frequência relativa, equiprobabilidade, união e intersecção de eventos; probabilidade condicional; lei binomial; histórico do conceito	25 pp.

3ª SÉRIE – 08 capítulos – 272 pp.

1	O ponto: plano cartesiano; distância entre dois pontos; ponto médio; alinhamento de três pontos; histórico da geometria analítica	17 pp.
2	A reta: equação geral; formas de equação de uma reta; função afim e equação da reta; paralelismo; perpendicularidade; distância; ângulo; área do triângulo; inequações do 1º grau; introdução à programação linear	44 pp.
3	A circunferência: equações geral e reduzida; posições relativas entre pontos e circunferências, entre retas e circunferências, entre circunferências; inequações do 2º grau com duas incógnitas	25 pp.
4	As cônicas: elipse, hipérbole, parábola; órbitas de planetas e cometas	27 pp.
5	Números complexos: forma algébrica; conjugado; quociente; módulo; argumento; forma trigonométrica ou polar; operações na forma trigonométrica	38 pp.
6	Polinômios: definições; função polinomial; valor numérico; raiz; igualdade de polinômios; operações; teorema do resto; dispositivo de Briot-Ruffini	18 pp.
7	Equações polinomiais: definição; raiz; teorema fundamental da álgebra; teorema da decomposição; multiplicidade de uma raiz; relações de Girard; raízes complexas; raízes racionais; histórico sobre resolução de equações	22 pp.
8	Estatística: variável; tabelas de frequência; representações gráficas; medidas de centralidade e de dispersão	37 pp.

ANEXO III-DISTRIBUIÇÃO DE CONTEÚDOS NA COLEÇÃO PAIVA

1ª SÉRIE – 11 capítulos – 256 pp.

1	Conjuntos: conceitos primitivos, notação; finitos e infinitos; operações; conjuntos numéricos; o eixo real	34 pp
2	Álgebra: equações, inequações e sistemas de equações polinomiais do 1º grau; equações polinomiais do 2º grau; matemática financeira	18 pp
3	Geometria plana: polígonos; triângulos e suas propriedades, teorema de Tales; semelhança de triângulos; relações métricas no triângulo retângulo	22 pp
4	Função: sistema de coordenadas; definição; representações; gráficos	20 pp
5	Função real de variável real; inversa de uma função	16 pp
6	Função polinomial de 1º grau: gráfico, definida por sentenças; inequações produto e quociente	19 pp
7	Função polinomial do 2º grau: gráfico, máximo e mínimo; inequações polinomiais do 2º grau	19 pp
8	Eixo real: distância entre pontos; módulo, equações e inequações modulares; função modular	14 pp
9	Potenciação e radiciação; função exponencial; equações e inequações exponenciais	20 pp
10	Conceito de logaritmo; função logarítmica; equações e inequações logarítmicas	24 pp
11	Sequência; progressões aritméticas e geométricas	28 pp

2ª SÉRIE – 15 capítulos – 312 pp.

1	Geometria plana: circunferência e círculo; posições relativas entre reta e circunferência e entre duas circunferências; ângulos na circunferência; perímetro da circunferência; áreas de figuras planas	24 pp.
2	O triângulo retângulo e o cálculo de distâncias; razões trigonométricas no triângulo retângulo	11 pp.
3	Circunferência trigonométrica: radiano, simetrias, seno, cosseno; equações e inequações trigonométricas	27 pp.
4	Tangente; equações e inequações trigonométricas; secante, cossecante, cotangente	12 pp.
5	Seno, cosseno e tangente da soma de arcos e do arco duplo	08 pp.
6	Funções trigonométricas: gráficos; movimentos periódicos; leis do cosseno e do seno; área de triângulos	20 pp.
7	Matrizes: história, conceitos, operações	16 pp.
8	Sistemas lineares: resolução	16 pp.
9	Determinantes e aplicações; sistema linear homogêneo	14 pp.
10	Combinatória: princípio fundamental e princípio aditivo da contagem; fatorial	12 pp.
11	Agrupamentos: arranjos, permutações, combinações simples; binômio de Newton	20 pp.
12	Geometria espacial: noções iniciais; posições relativas entre duas retas; posições relativas entre reta e plano e entre plano e plano; perpendicularidade; projeção ortogonal; ângulos; poliedros	26 pp.
13	Prismas, paralelepípedo, cubo, pirâmide: definições, elementos; Princípio de Cavalieri; áreas das superfícies laterais e volumes	26 pp.
14	Cilindro, cone, esfera: definições, áreas das superfícies laterais e volumes	25 pp.
15	Probabilidades: definição, adição de probabilidades, probabilidade condicional, multiplicação de probabilidades.	19 pp.

3ª SÉRIE – 9 capítulos – 200 pp.

1	Estatística: conceitos; distribuição de freqüências; medidas estatísticas; tabelas e gráficos	22 pp.
2	Geometria analítica: distância entre dois pontos; ponto médio; bissetrizes dos quadrantes; retas horizontais e verticais	17 pp.
3	Equações da reta: geral, reduzida, paramétricas; paralelismo; perpendicularidade	16 pp.
4	Distância entre ponto e reta; área de triângulo; alinhamento de três pontos; inequação do 1º grau	15 pp.
5	Equações da circunferência: reduzida, geral; posições relativas entre um ponto e uma circunferência e entre uma reta e uma circunferência	14 pp.
6	Elipse, hipérbole, parábola: seções cônicas; lugar geométrico de pontos; equações reduzidas	33 pp.
7	Números complexos: história; operações; representação geométrica; módulo; representação trigonométrica e operações	25 pp.
8	Polinômios com uma variável complexa; divisão de polinômios por binômios do 1º grau	18 pp.
9	Equações polinomiais: história; teorema fundamental da álgebra; teorema da decomposição; teorema das raízes imaginárias, teorema das raízes racionais, relações de Girard	17 pp.

ANEXO IV - ESCALA DE ACIDEZ E LOGARITMOS

15. Sabendo que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, calcule, em função de a e b:

a) $\log 6$
b) $\log 1{,}5$
c) $\log 5$
d) $\log 30$
e) $\log \frac{1}{4}$
f) $\log 72$
g) $\log 0{,}3$
h) $\log \sqrt[3]{1{,}8}$
i) $\log 0{,}024$
j) $\log 0{,}75$

16. Sejam a, b e c reais positivos. Em cada caso, obtenha a expressão cujo desenvolvimento logarítmico, na respectiva base, é dado por:

a) $\log a + \log b + \log c$
b) $3 \log_2 a + 2 \log_2 c - \log_2 b$
c) $\log_3 a - \log_3 b - 2$
d) $\frac{1}{2} \cdot \log a - \log b$

17. Calcule o valor de x usando, em cada caso, as propriedades operatórias:

a) $\log x = \log 5 + \log 4 + \log 3$
b) $2 \cdot \log x = \log 3 + \log 4$
c) $\log\left(\frac{1}{x}\right) = \log\left(\frac{1}{3}\right) + \log 9$
d) $\frac{1}{2} \cdot \log_3 x = 2 \cdot \log_3 10 - \log_3 4$

18. Qual é o valor de:

a) $\log_{15} 3 + \log_{15} 5$?
b) $\log_3 72 - \log_3 12 - \log_3 2$?
c) $\frac{1}{3} \cdot \log_{15} 8 + 2 \cdot \log_{15} 2 + \log_{15} 5 - \log_{15} 9\,000$?

19. Considerando as aproximações $\log 2 = 0{,}3$ e $\log 3 = 0{,}48$, calcule o valor de:

a) $\log (2^4 \cdot 3^5)$
b) $\log (\sqrt[5]{90})$
c) $\log 0{,}05$
d) $\log 3{,}6$
e) $\log 2000$

20. Admitindo que $\log 8 = p$, obtenha, em função de p:

a) $\log 16$
b) $\log 1{,}28$

21. Classifique as afirmações em verdadeiras (V) ou falsas (F):

a) $\log 17 = \log 8 + \log 9$
b) $\log 25 + \log 40 = 2$
c) $\log 8 = 3 \cdot \log 2$
d) $\log_3 45 - \log_3 5 = 2$
e) $\log_2 9 - \log_2 6 = \log_2 3$

22. Considerando as aproximações $10^{0,845} = 7$ e $10^{0,699} = 5$, calcule o valor de:

a) $\log 175$
b) $\log 14$
c) $\log \sqrt[3]{\frac{25}{49}}$

Aplicações

A escala de acidez e os logaritmos

O pH é uma escala usada em Química para expressar o grau de acidez ou basicidade de uma solução aquosa. Os valores do pH variam de 0 a 14.

Para cálculo do pH usa-se a expressão:

$$\boxed{pH = -\log [H^+]}$$

sendo $[H^+]$ a concentração de íons hidrogênio em mol/L.

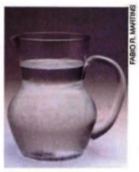
- Quando $0 \leq pH < 7$, a solução é ácida.
- Quando $pH = 7$, a solução é neutra.
- Quando $7 < pH \leq 14$, a solução é básica.

Veja o pH de algumas soluções:

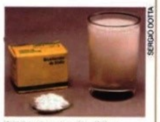
- suco de limão: 2,3
- vinho tinto: 3,8
- vinagre: 2,4 a 3,4
- leite: 6,4 a 6,8
- água destilada: 7
- sangue: 7,3
- bicarbonato de sódio: 8,4
- leite de magnésia: 10,5
- amoníaco: 12


FABIO R. MARTINS

Suco de limão: solução ácida.


FABIO R. MARTINS

Água tem pH neutro.


SERGIO DOTTA

O bicarbonato de sódio diluído em água é uma solução básica.

Como sabemos, o estômago humano apresenta um meio muito ácido, devido à presença e à ação do ácido clorídrico. O suco gástrico, produzido no estômago, é responsável pela digestão de alimentos e seu pH oscila entre 1,0 e 3,0.

Desse modo, podemos encontrar os limites para a concentração de íons H^+:

- $pH = 1 \Rightarrow -\log [H^+] = 1 \Rightarrow \log [H^+] = -1 \Rightarrow 10^{-1} = [H^+]$
- $pH = 3 \Rightarrow -\log [H^+] = 3 \Rightarrow \log [H^+] = -3 \Rightarrow 10^{-3} = [H^+]$

Assim, a concentração, em mol/L, de íons hidrogênio encontrada no suco gástrico varia de 0,001 a 0,1.

Do mesmo modo, se a concentração hidrogeniônica em uma solução de suco gástrico é $4 \cdot 10^{-2}$ mol/L, o pH da solução é:

$$pH = -\log [H^+] = -\log (4 \cdot 10^{-2}) = -[\log 4 + \log 10^{-2}] = -[2 \log 2 - 2]$$

Como $\log 2 \cong 0{,}3$, temos:

$$pH = -(2 \cdot 0{,}3 - 2) = 1{,}4$$

Para saber mais sobre esse assunto, você pode pesquisar em:

- http://educar.ac.usp.br/quimapoio
- http://pt.wikipedia.org/wiki/PH
- www.mundoeducacao.com.br
- Usberco & Salvador. *Química* vol. 2. São Paulo: Saraiva, 2009.

Mudança de base

Há situações em que nos defrontamos com um logaritmo em certa base e temos de convertê-lo a outra base.

Por exemplo, para aplicarmos as propriedades operatórias, os logaritmos devem estar todos na mesma base. Senão, é preciso que alguns logaritmos mudem de base.

ANEXOV MATEMÁTICA SEM FRONTEIRAS-

5 Inequações logarítmicas

Uma queimada em uma floresta saiu da área de controle e já devastou 2.000 ha (hectares) e, pela ação dos ventos, a área destruída cresce à taxa de 10% ao dia.

DANIEL BELTRA/GETTY IMAGES

Queimada em Alta Floresta, Pará. (2002)

Essas informações permitem estabelecer uma equação que expresse a área devastada y, em hectare, em função do tempo t, em dia:

$$y = 2.000(1 + 0{,}1)^t \Rightarrow y = 2.000(1{,}1)^t$$

Podemos assim obter t em função de y:

$$t = \log_{1,1} \frac{y}{2.000}$$

Com essa expressão matemática, é possível prever o que acontecerá em relação à área devastada se o fogo não for contido em determinado tempo. Por exemplo, se os bombeiros demorarem mais de cinco dias para controlar o incêndio, por certo a área devastada y será tal que:

$$\log_{1,1} \frac{y}{2.000} > 5$$

Inequações como essa, que têm a variável no logaritmando ou na base de um logaritmo, são chamadas de **inequações logarítmicas**. Os métodos de resolução desse tipo de inequação, que estudaremos a seguir, permitem determinar, na questão apresentada, que $y > 3.221{,}02$. Assim, se o tempo para conter o incêndio for superior a cinco dias, a área devastada será maior que 3.221,02 ha.