**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO**
**INSTITUTO DE EDUCAÇÃO / INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

# SENSIBILIZAÇÃO PARA EXISTÊNCIA DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

**RUTE RIBEIRO MEIRELES ROCHA**

2018

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO / INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

**RUTE RIBEIRO MEIRELES ROCHA**

# SENSIBILIZAÇÃO PARA EXISTÊNCIA E DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

*Sob a orientação da Professora Doutora*

**DORA SORAIA KINDEL**

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação em Ciências e Matemática**, no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática.

Seropédica, RJ

Fevereiro, 2018

**RUTE RIBEIRO MEIRELES ROCHA**

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação em Ciências e Matemática** no curso de Pós-Graduação em Ciências e Matemática. Área de concentração: Ensino e Aprendizagem em Ciências e Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM: 26 / 02 / 2018

EXAMINADORES

Dora Soraia Kindel. Profª Drª UFRRJ
(Orientadora)

Ana Cristina Souza dos Santos. Profª Drª UFRRJ

Janete Bolite Frant. Profª Drª UFRJ

Rocha, Rute Ribeiro Meireles, 1986-
R672s SENSIBILIZAÇÃO PARA EXISTÊNCIA DOS NÚMEROS IRRACIONAIS / Rute Ribeiro Meireles Rocha. - 2018.
156 f.: il.

Orientador: Dora Soraia Kindel.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA, 2018.

1. Educação matemática. 2. números irracionais. 3. investigação matemática. 4. formação de professores. 5. interação. I. Kindel, Dora Soraia, 1958-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA III. Título.

ROCHA, RUTE RIBEIRO MEIRELES. SENSIBILIZAÇÃO PARA EXISTÊNCIA DOS NÚMEROS IRRACIONAIS. 2018. 156 p. Dissertação (Mestre em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação / Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2018.


**RESUMO**

A abordagem didática das características e peculiaridades dos conjuntos dos números irracionais nem sempre apresenta estrutura necessária para a abordagem dos conceitos de forma concreta. Uma revisão bibliográfica mostra que as pesquisas sobre o tema ainda são escassas. A presente pesquisa pretende dar sua contribuição e está pautada na elaboração, implementação e análise de tarefas sobre a aprendizagem de números irracionais. Seu foco está voltado na formação de futuros professores, graduandos de um curso noturno da Licenciatura em Matemática de uma universidade pública da Baixada Fluminense e tem como meta contribuir com sua prática pedagógica e estimulá-los a perceber a relevância do estudo do tema. A metodologia de pesquisa aplicada foi a DBR (Design Based Research) partindo do levantamento através de questionários e aplicação de atividades em formato interativo sobre o conceito de conjunto dos números irracionais, suas respectivas estruturas e aplicações. A coleta de dados foi realizada por meio do diário de campo do pesquisador, do questionário, de folhas de atividades e áudio gravado dos trabalhos em grupo. A análise está orientada na construção do conceito de números irracionais e considerou a percepção de que estes números necessitam de vivência sobre medição, aproximações e diferentes representações. A pesquisa teve dois grandes momentos: o primeiro, em que se buscou compreender o perfil dos graduandos e a elaboração do material para uso em sala de aula e o segundo, a análise da proposta ao término da implementação de cada tarefa e ao final do processo. O estudo aponta a falta de familiaridade dos graduandos em usar materiais manipuláveis e com a ideia de incomensurabilidade. Como contribuição destaca-se a necessidade de verificação sobre a adequabilidade das tarefas aplicadas a estudantes do Ensino Fundamental II, de novas abordagens teóricas e de desenvolvimento de outras situações problemas envolvendo os números irracionais. Como resultado foi observado que as tarefas constituem um roteiro bastante consistente para a aprendizagem do tema e como produto educacional foi gerado uma proposta de curso de extensão para professores.



Palavras-chave: construção numérica; aprendizagem colaborativa e cooperativa; investigação e exploração.

**ABSTRACT**

The didactic approach of Irrational number Features and peculiarities not always presents enough structure to understand these concepts in a concrete way. A bibliography review shows a few researches about this subject. The present research intend to give this contribution and it is based in task's elaboration, implementation and analysis about learning irrational numbers. The point is turned to teacher education, night school Math major in college bachelors at Baixada Fluminense public university, and has the goal contribute with his pedagogical practice and encourage to figure out the relevance of this study. The research methodology was DBR (Design Based Research) from survey through questionnaires and applied activities, in iterative forms about irrational numbers set concepts, structures and applications. Data collection was done through researcher field diary, questionnaires, activities sheets, and team work audio tapes.The analyses is guide by irrational numbers concepts building  and found that perception of these numbers need living about measure, approximations and different representation. Te research was two big moment: the first to understand the bachelors professional profile and create the material used in classes and the second one the analysis at the end of each implemented task and at the process end. The study shows bachelors familiarity lack when used manipulative materials and with immeasurabble idea. As a contribution emphasise the need to check about adequacy to middle school students of tasks, news theoretical approaches and the development of new irrational numbers problem situations. As a result was observed that tasks are a strong path to learn the subject, irrational numbers and as an educational product was born a graduate course proposal for teachers about the subject.



Keywords: numerical construction; collaborative and cooperative learning; research and exploitation.

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

**BOLEMA** – Boletim de Educação Matemática

**EUA –** Estados Unidos da América

**GEPEM –** Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática

**JIEEM –** Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática

**PPGEduCIMAT _** Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática

**REVEMAT** – Revista Eletrônica de Educação Matemática

**TIC** – Tecnologias da Informação e Comunicação

**UFRRJ** – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

**UFRJ _** Universidade Federal do Rio de Janeiro

**UFRGS _**Universidade Federal do Rio Grande do Sul_

**UNICAMP _** Universidade Estadual de Campinas

**SUMÁRIO**

# INTRODUÇÃO

Tendo como motivação a jornada acadêmica que gradualmente constituiu o interesse pela construção numérica, partindo da Monografia voltada para os números racionais e perpassando por trabalhos da Especialização inclinados para a investigação sobre a prática dos professores de matemática, surge o interesse pela construção do conceito de número irracional. Além disso, a oportunidade do Estágio Docente em uma turma de licenciatura em matemática oportunizou uma experiência ímpar de observação, intervenção e interesse na formação do professor de matemática.

Esta pesquisa propõe a investigação da abordagem e apresentação dos números irracionais, á princípio na educação básica e, por reflexo, na formação dos professores de matemática.

Justificando a conveniência desta pesquisa temos algumas considerações pertinentes.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2015) consideram que o conceito de número ocupa um lugar de destaque na Matemática escolar. Desenvolver o sentido de número, ou seja, adquirir uma compreensão numérica global e usá-la de modo flexível para analisar situações e desenvolver estratégias úteis para lidar com os números e as operações é um objetivo central da aprendizagem da Matemática. As investigações numéricas contribuem de modo decisivo para desenvolver essa compreensão global da construção numérica bem como as capacidades matemáticas importantes como a formulação e teste de conjecturas e a procura de generalizações.

De acordo com Ripoll (2004) e Pommer (2012), As considerações metodológicas, epistemológicas e didáticas das características e peculiaridades dos conjuntos dos números racionais e irracionais nem sempre apresentam aspectos necessários para a compreensão desses conceitos de forma correta. A construção histórica dos conjuntos numéricos raramente costuma fazer parte do enredo de ensino dos mesmos.

Para Pommer (2012), no ensino, os conjuntos numéricos são apresentados, na maioria das vezes, em uma ordem cronológica diferente da de seu surgimento e do percurso ocorrido em seu movimento histórico. Kindel (1998) afirma que compreender conceitos matemáticos elaborados e complexos, sem fazer uma leitura histórica dos pontos - chave que surgiram durante o percurso do seu desenvolvimento, é perder a diversidade de caminhos que se foram edificando até os nossos dias. Dessa forma, seria perder a oportunidade de identificar e compreender as diferentes abordagens didático- pedagógicas que aparecem nas pesquisas e, além disso, não perceber a construção numérica como um atividade humana dinâmica e em desenvolvimento.

Não é incomum observar que em livros didáticos os números irracionais são apresentados em meia página, definindo-os como “números decimais infinitos não periódicos, portanto não racionais”. Outros recorrem à ideia de número racional para definir os números irracionais, como “Números que não são racionais”. Neste momento, o aluno é apenas informado de que a expansão decimal de $\pi$ é infinita e não periódica e que o mesmo acontece com raiz de 2, raiz de 3, Etc. Tais números são apresentados como exemplos e essa abordagem dá a impressão de existirem apenas estes irracionais. Dessa forma, apresentam a ideia de que o conjunto dos irracionais é muito reduzido, o que não é verdade.

A abordagem didática das características e peculiaridades dos conjuntos dos números irracionais nem sempre corresponde às necessidades reais de aprendizagem dos alunos, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. Segundo Pommer (2012) o movimento do ensino direcionado aos aspectos operatórios, exatos, determinísticos e finitos consiste numa tendência que encobre aspectos importantes e significativos envolvendo os números. No caso dos números irracionais, a operacionalização de cálculos que envolvam radiciação é bem usual, no entanto solucionar problemas que envolvam raízes irracionais não demonstra a existência de compreensão sobre irracionalidade numérica.

No caso específico da construção dos conjuntos numéricos, a percepção pouco estruturada de fundamentos básicos pode acarretar a defasagem de compreensão de assuntos matemáticos dependentes deste embasamento.

De acordo com Silva (2009) a noção de números reais está presente na maioria dos conteúdos de Matemática e, como evidenciam pesquisas nacionais e internacionais, muitas das dificuldades dos alunos na aprendizagem de limite e continuidade de funções, por exemplo, são decorrentes da falta de compreensão de propriedades do conjunto dos números reais.

Em um artigo apresentado no Congresso de Educación Matemática de América Central y El Caribe, Pietropaolo, Corbo e Campos (2013) apresentam um estudo sobre a imagem conceitual relativa aos números irracionais, constituída por um grupo de professores da rede pública da cidade de São Paulo. Nesta pesquisa os autores afirmam que para abordar os números irracionais em suas aulas, um professor precisa de um repertório abrangente de conhecimentos, ou ainda, é necessário que ele tenha à sua disposição uma imagem conceitual bem rica, relativa a esse assunto, a fim de que possa adequar suas instruções aos alunos com os quais está trabalhando e também possa estabelecer conexões entre esse tema e outros conteúdos dominados pelo aluno. Ao examinar as respostas dos professores, os autores concluíram que a imagem conceitual do conjunto dos números irracionais era prevalentemente constituída por noções pertencentes ao campo numérico, contendo, em alguns casos, concepções incorretas, muitas vezes relativas às representações e à classificação destes números. Além disso, os conceitos de incomensurabilidade e de interpretação geométrica dos números irracionais não constavam no repertório de conhecimentos sobre o conteúdo.

Sendo assim surge a necessidade de reavaliar a prática docente e explorar com afinco as possíveis ferramentas capazes de beneficiar a aprendizagem de tais conteúdos. Trazemos nesta pesquisa uma abordagem que pretende abranger as carências específicas na aprendizagem dos números irracionais. Tendo como questão de pesquisa a seguinte interrogação: Sobre a ótica de vivências interativas, quais caminhos são percorridos para a construção do conceito de número irracional?

Sendo esta pesquisa uma proposta de aplicação de metodologias de ensino na formação de professores e apresentando o propósito de fortalecer as ferramentas didáticas, trata-se de uma representação da definição de pesquisa dada por D’Ambrosio (1932):

> Pesquisa, portanto, é o elo entre teoria e prática. Claro, em situações extremas alguns se dedicam a um lado desse elo e fazem pesquisa chegando a teorias baseando-se na prática de outros. Outros estão do outro lado e exercem uma prática, que é também uma forma de pesquisa, baseada em teorias propostas por outros. Em geral ficamos em ma situação intermediária entre esses dois extremos, exercendo o que praticamos e refletindo sobre isso, e, consequentemente melhorando nossa prática. (D’Ambrósio, 1932, p.84)

Partindo dos princípios apresentados, esta dissertação tem como objetivo geral:

Investigar propostas de materiais e estratégias, com abordagem investigativa ou exploratória, que viabilizem a aprendizagem do conceito de número irracional;

E como objetivos específicos:

Promover a reflexão sobre o conceito de incomensurabilidade, experimentando as possibilidades de quebra de paradigma da medição através de unidades e partindo da releitura do processo histórico da construção dos números irracionais.

Introduzir a reflexão sobre a existência do conjunto dos números irracionais analisando as representações: Decimal, posicionamento na reta real e conceito geométrico.

Estimular a percepção de algumas relações entre geometria, aritmética e a construção numérica.

Elaborar um produto a partir desta pesquisa e torná-lo acessível aos demais interessados.

Desta forma, esta pesquisa encontra-se organizada da seguinte forma:

O referencial teórico, apresentado como capítulos I (objeto didático) e II (objeto matemático). O primeiro, construído com base em pesquisas relacionadas à investigação matemática, linguagem matemática, cooperação e colaboração. O segundo, apresentando os estudos sobre o conceito de número irracional e o processo histórico de sua construção.

Em seguida, no capítulo III, encontra-se a metodologia, apresentando o método denominado DBR (Design Based Research), os sujeitos envolvidos, o local onde a pesquisa foi realizada, a coleta e análise dos dados e os recursos utilizados para tal. No mesmo capítulo constam descritos os Ciclos Iterativos e as Tarefas aplicadas.

Os capítulos IV e V descrevem respectivamente aos dois ciclos de pesquisa. O primeiro voltado para sondagem, levantamento de informações e construção da proposta; e o segundo para aplicação e análise das tarefas desenvolvidas.

Por fim encontram-se as considerações finais com a apresentação dos resultados e das conclusões obtidas através da pesquisa.

# CAPÍTULO I - FUNDAMENTAÇÃO DIDÁTICA

Neste capítulo serão destacadas as pesquisas que embasarão a análise de dados pelo seu aspecto instrumental, ou seja, meios didáticos para o alcance dos objetivos no processo de aprendizagem de matemática, neste caso específico, dos números irracionais. Para realizar este suporte foram elencados assuntos pertinentes aos conceitos de investigação matemática, interpretação da linguagem matemática escrita e sua influência na aprendizagem e questionamentos sobre os pressupostos do trabalho colaborativo/cooperativo. Esses três pilares representarão tanto a base de sustentação quanto servirão como instrumentos para análise dos dados.

## 1.1-Matemática Investigativa

O que significa investigar? Para Ponte (2004) investigar é procurar conhecer o que não se sabe. Para constituir um grau de comparação com o vocabulário, um significado muito próximo, senão equivalente temos os termos "pesquisar" e "inquirir". Nos dicionários da língua portuguesa o vocábulo apresenta as seguintes descrições: *seguir os vestígios, as pistas de*; *procurar metódica e conscientemente descobrir (algo), através de exame e observação minuciosos; pesquisar*. Em inglês, existem igualmente diversos termos com significados relativamente próximos para designar esta atividade: Research, investigate, inquiry, enquiry. Para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou entre estes e novos objetos matemáticos, procurando identificar e comprovar as respectivas propriedades.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2015) aferem que uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar o problema e procurar caminhos para resolvê-lo. Por isso, não é de admirar que em matemática, exista uma relação estreita entre problemas e investigações.

Pólya (1945) ilustra que numa investigação o ponto de partida é uma situação aberta, ou seja, a questão não está completamente definida, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua concretização. Sendo possível concretizar de vários modos os pontos de partida, os pontos de chegada, que naturalmente são diferentes.

Segundo Ponte (2003) tradicionalmente, ensino e investigação são atividades distintas. O que o "investigador" descobre ou inventa, o professor, noutro tempo e noutro contexto, ensina aos seus alunos. Ensinar e investigar são duas atividades contraditórias, que não se conseguem fazer em simultâneo sem comprometer a qualidade de uma ou outra. Esta separação entre investigar e ensinar tem vindo a ser questionada, do mesmo modo que se tem vindo a pôr em causa a existência de uma separação incontornável entre investigar e aprender. O autor baseou a sua argumentação numa perspectiva sutil de investigação, como uma atividade natural à espécie humana, em contraponto com uma perspectiva elitista e restritiva, que reserva esta atividade para os "investigadores profissionais" Pelo contrário, investigar pressupõe, sobretudo uma atitude, uma vontade de perceber, uma capacidade para interrogar, uma disponibilidade para ver as coisas de outro modo e para pôr em causa aquilo que parecia certo. Investigar envolve, sobretudo, três atividades: estudar, conversar e escrever.

Assis, Frade e Godino (2013) concordam que atividades de investigação oferecem a possibilidade de os alunos vivenciarem experiências matemáticas. No entanto, para que essa atitude investigativa possa se desenvolver recomenda-se que o professor centre a aula na atividade dos alunos, em suas ideias e em sua pesquisa, e mantenha uma postura questionadora gerenciando o grau de apoio a dar aos alunos.

Mais do que uma tendência na educação matemática, o ato de investigar deve estar intrincado ao de pensar, sem a investigação o conceito de ensino se torna uma receita pronta e definitiva. Sobre tudo no contexto do pensar matemático, como podemos perceber na seguinte afirmação:

Aprender matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como conseguem. (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2015, p. 19)

No trecho a seguir Nóvoa (2002) inclui o ato de investigar em um elenco de ações fundamentais para a aprendizagem:

É preciso ir além dos “discursos de superfície” e procurar uma compreensão mais profunda dos fenômenos educativos. Estudar. Conhecer. Investigar. Avaliar. Caso contrário, continuaremos reféns da demagogia e da ignorância. As mudanças nas escolas estão, por vezes, tão próximas que provocam um efeito de cegueira. Só conseguiremos sair da penumbra através de uma reflexão coletiva, informada e crítica. (Nóvoa, 2002, p. 29)

Cunha, Oliveira e Ponte (1995) consideram que o papel de relevo que as atividades de investigação podem desempenhar na aprendizagem da matemática justifica uma atenção especial à sua elaboração. A troca de ideias e de opiniões entre professores e a experimentação de protótipos das atividades são componentes que poderão enriquecer, do nosso ponto de vista, as propostas de trabalho.

De acordo com Ponte (2004), a História mostra como o aspecto investigativo da matemática tem sido desenvolvido por pessoas nos mais diversos papéis institucionais, que vão da dedicação exclusiva à simples atividade amadora. Sendo a curiosidade e o gosto por perceber a força desta atividade, grandes motivadores. Não é razoável circunscrever essa atividade apenas a alguns grupos sociais (os “investigadores profissionais”). Podemos alargá-la aos seres humanos em geral, incluindo alunos e professores. O autor ainda afirma que na sala de aula, os professores de Matemática podem propor tarefas de natureza muito diversa. Se o objetivo é que os alunos realizem investigações matemáticas, importa analisar o modo como estas tarefas se distinguem de outras, bem conhecidas, como exercícios e problemas.

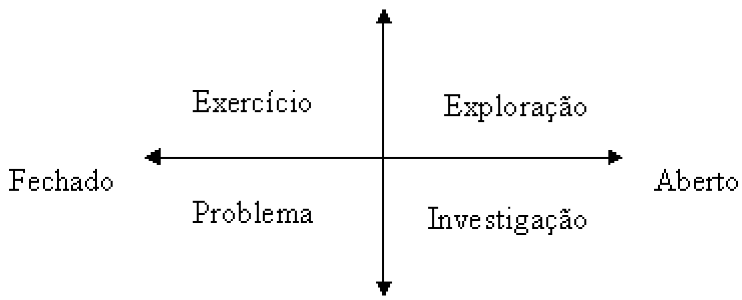
Skovsmose (2000) observou que existem variações no padrão de aula de matemática: há desde o tipo de aula em que o professor ocupa a maior parte do tempo com exposição até aquela em que o aluno fica – a maior parte do tempo envolvido com resolução de exercícios. De acordo com essas e muitas outras observações, a educação matemática tradicional se enquadra no que o autor define como paradigma do exercício. Geralmente, os livros didáticos apresentam as condições tradicionais da prática de sala de aula. Os exercícios são formulados por uma autoridade externa à sala de aula. Isso significa que a justificação da relevância dos exercícios não é parte da aula de matemática em si mesma. Além disso, a premissa central do paradigma do exercício é que existe uma e, somente uma, resposta correta.

Para Ponte (2003), o que está em causa na aprendizagem escolar da Matemática, é o desenvolvimento integrado e harmonioso de um conjunto de competências e capacidades, que envolvem conhecimento de fatos específicos, domínio de processos, mas também capacidade de raciocínio e de usar esses conhecimentos e processos em situações concretas, resolvendo problemas, empregando ideias e conceitos matemáticos para lidar com situações das mais diversas, de modo crítico e reflexivo.

Skovsmose (2000) chama de "cenário para investigação" um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação, para ele, um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações. Quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo. O que pode servir perfeitamente como um cenário para investigação a um grupo de alunos numa situação particular pode não representar um convite para outro grupo de alunos. Se certo cenário pode dar suporte a uma abordagem de investigação ou não é uma questão empírica que pode ser respondida através da prática dos professores e alunos envolvidos.

Na perspectiva de Ponte (2003), uma tarefa tem quatro dimensões básicas: O seu grau de dificuldade, a sua estrutura, o seu contexto referencial e o tempo requerido para a sua resolução. Conjugando as duas primeiras dimensões, obtemos quatro tipos básicos de tarefa, que podemos visualizar no esquema a seguir:

**Figura 1- Tipos básicos de tarefas**




Fonte: http://alb.com.br/arquivo-morto/edicoes_anteriores/anais15/alfabetica/FiorentiniDario.htm

- Os exercícios: tarefas sem grande dificuldade e estrutura fechada;
- Os problemas: tarefas também fechadas, mas com elevada dificuldade;
- As investigações: grau de dificuldade elevado, mas uma estrutura aberta;
- Tarefas de exploração: fáceis e com estrutura aberta

> As investigações matemáticas têm aspectos comuns com outros tipos de atividades de resolução de problemas. Envolvem processos de raciocínio complexos e requerem um elevado grau de empenhamento e criatividade por parte do aluno. Envolvem, no entanto, também alguns processos característicos. Enquanto os problemas matemáticos tendem a caracterizar-se por assentarem em dados e objetivos bem concretos, as investigações têm um ponto de partida muito menos definido. Assim, a primeira tarefa do aluno é tornar a questão mais precisa, um traço que as investigações matemáticas têm em comum com a formulação de problemas. (Ponte e Mattos, 1992, p. 239)

Em paralelo as estas definições básicas de tipos de tarefas, Banchi e Bell (2008) ampliam este conceito afirmando que a aprendizagem baseada na investigação pode ser desenvolvida em quatro níveis:

1. Investigação de confirmação: Os alunos confirmam uma proposição, através de uma atividade, quando os resultados são conhecidos antecipadamente.

2. Investigação estruturada: Os alunos investigam uma pergunta apresentada pelo professor, através de procedimentos prescritos.

3. Investigação guiada: Os alunos investigam uma pergunta apresentada pelo professor, usando procedimentos desenhados/selecionados pelos alunos.

4. Investigação aberta: Os alunos investigam questões que são formuladas por eles próprios, a partir de procedimentos desenhados/selecionados pelos alunos.

Canavarro (2011) afirma que o ensino exploratório da Matemática não advoga que os alunos descubram sozinhos as ideias matemáticas que devem aprender, nem tão pouco que inventem conceitos e procedimentos ou lhes adivinhem os nomes. O ensino exploratório da Matemática defende que os alunos aprendam a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que façam emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva. Os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgirem com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática

Os alunos de início não sabem o que é uma investigação. Mas, como é evidente, podem aprender. Na verdade, os estudantes podem precisar de várias experiências em trabalho investigativo para perceberem, de modo apropriado, o que é este trabalho. A função do professor é ensinar.

Saber conceitos e procedimentos básicos, obviamente, ajuda na realização de investigações, como em todo o trabalho intelectual. Mas muitas coisas aprendem-se melhor em atividades significativas, lutando com dificuldades concretas, do que de uma forma dedutiva e linear. Muitos conceitos e procedimentos podem ser aprendidos através de atividades exploratórias e investigativa s. Pode ser, "umas vezes primeiro uma coisa, outras vezes primeiro a outra", ou ainda, por vezes, "as duas ao mesmo tempo". Que o matemático e o aluno são personagens diferentes, não há dúvidas. Mas a sua atividade pode ter muitos pontos de contato

Skovsmose (2000) sustenta que a educação matemática deve mover-se entre os diferentes ambientes (tradicional, exploratório, investigativo...). Não considera a ideia de abandonar por completo os exercícios na educação matemática. É importante que os alunos e professores, juntos, achem seus percursos entre os diferentes ambientes de aprendizagem. O melhor percurso não pode ser determinado apressadamente, mas tem que ser decidido pelos alunos e pelo professor.

Para Ponte (2004), os estudos empreendidos mostram que a realização continuada de investigações, num quadro de discussão e reflexão sobre o significado dos resultados obtidos e dos processos empregues, é susceptível de influenciar de modo muito significativo as concepções dos alunos. Estes podem alterar a sua visão do trabalho investigativo, das características da Matemática, do modo de aprender Matemática e dos papéis do professor e do aluno, desenvolvendo o gosto pela disciplina e a sua confiança neste tipo de trabalho.

Skovsmose (2000) afirma que, qualquer cenário para investigação coloca desafios para o professor. A solução não é voltar para a zona de conforto do paradigma do exercício, mas ser hábil para atuar no novo ambiente. A tarefa é tornar possível que os alunos e o professor sejam capazes de intervir em cooperação dentro da zona de risco, fazendo dessa uma atividade produtiva e não uma experiência ameaçadora.

Segundo Braumam (2004) o principal problema do ensino da Matemática não é propriamente o dos conteúdos curriculares, mas o de não desenvolver a capacidade de dedução matemática. Os professores, a escola e a sociedade devem ser exigentes para permitir o pleno desenvolvimento do potencial dos jovens. O “músculo” intelectual precisa de desafios e enfraquece com a falta deles. Dessa forma, considera essencial desenvolver a investigação em educação matemática.

## 1.2- Trabalho em Grupo, Interação, Cooperação e Colaboração

Para Skovsmose (2000), a educação matemática crítica inclui o interesse pelo desenvolvimento da educação matemática como suporte da democracia, implicando que as pequenas sociedades nas salas de aulas de matemática devem também mostrar aspectos democráticos. A educação matemática crítica enfatiza que a matemática como tal não é somente um assunto a ser ensinado e aprendido (não importa se os processos de aprendizagem são organizados de acordo com uma abordagem construtivista ou sociocultural). Sendo assim, o desenvolvimento coletivo merece destaque perante os objetivos do processo de ensino-aprendizagem.

Ponte (2003) afirma que, a colaboração, constitui uma estratégia de grande valor para enfrentar os problemas da prática profissional. Várias pessoas a trabalhar em conjunto têm mais ideias, mais energia e mais força para derrubar obstáculos do que uma pessoa trabalhando sozinha e, além disso, podem capitalizar nas competências individuais. Para isso, têm, é claro, que se adaptarem uns aos outros, criando um sistema eficiente de trabalho conjunto. No entanto, a diversidade pode ser profundamente enriquecedora. Um grupo heterogêneo é um grupo com uma capacidade de ação acrescida, dada a variedade de competências dos seus membros.

Freitas e Freitas (2002) referem que foi no início do século XX que se começou a pensar na aprendizagem cooperativa como sendo uma alternativa ao processo ensino-aprendizagem que vigorava em exclusivo nas escolas, assente no individualismo e na competição entre os alunos.

Para Bruffee, citado por Freitas e Freitas (2002) “a aprendizagem colaborativa e aprendizagem cooperativa (…) são duas versões da mesma coisa” (p. 23). Freitas e Freitas (2002) consideram que colaborar e cooperar podem ser considerados sinônimos. No entanto, também salientam que o termo colaborar apresenta uma maior amplitude do que cooperar.

Para Gil-Pérez (1993), o trabalho em grupo coloca-se como elemento fundamental de uma metodologia de ensino que pretende aproximar as situações de aprendizagem das atividades dos cientistas. Essa metodologia busca explorar as dimensões do trabalho em grupos, facilitando a interação entre eles, representada por outras equipes, pelos conhecimentos já construídos, pelos textos e pelo professor.

Castro e Frant (2011) apontam que, entendendo a interação como uma cena performática, não estática, é preciso levar em conta que estas não se dão ao acaso e que, na verdade, apresentam um sentido que emerge de um conjunto de aspectos determinados pela atividade em que estes indivíduos estejam imersos. Os atores, ora falam, ora escutam construindo um processo necessariamente bilateral. O ato de falar e ouvir constitui uma ação cooperativa na qual o falante não monitora apenas suas ações, mas também a dos demais participantes do diálogo, levando ambas as ações em consideração.

Kirschner (1992) aponta o trabalho em grupo como um momento privilegiado para o desenvolvimento e a prática de habilidades intelectuais, bem como para promover a conceituação e o aprofundamento da compreensão dos alunos. Para esse autor, entender a maneira como os grupos operam através das relações que se estabelecem entre seus componentes representa uma importante contribuição para o professor saber planejar adequadamente sua intervenção, tanto no sentido de auxiliar o grupo durante uma discussão em que deve prevalecer um consenso, como no sentido de negociar suas exigências com as do grupo.

Weick (1979) sugere que as pessoas estão mais propensas a ver algo em que acreditam ao invés de acreditar no que vêem. Desse modo, as pessoas interpretam o mesmo estímulo de forma diferente, baseando-se em seus mapas cognitivos estabelecidos. Enquanto o foco da interpretação é a mudança nos entendimentos e ações dos indivíduos, o foco da integração é ação coletiva e coerente. Pela conversa entre os membros, pelo entendimento e pela mente coletiva ocorre o ajuste mútuo e ações negociadas.

Para Brown (1989), o trabalho cooperativo nos grupos potencializa os insights e as soluções que não seriam possíveis durante a aprendizagem individual, permitindo aos alunos assumirem diferentes papéis, confrontando seus conhecimentos prévios e a inadequação de suas estratégias de raciocínio, ajudando, portanto, a desenvolver as habilidades necessárias para o trabalho cooperativo, que é a maneira pela qual a maioria das pessoas aprende e trabalha.

Pequenos grupos proporcionam oportunidades para os alunos explicarem e justificarem seus pontos de vista, processo que estimula a aprendizagem, pois a habilidade de argumentação é uma das realizações mais importantes da educação científica. No processo de contar aos outros como pensam, os alunos elaboram e aprofundam a sua compreensão sobre um determinado tipo de problema.

Em sua pesquisa, Barolli (1998) apontou alguns aspectos na maneira com que os estudantes conduzem seus trabalhos e identificou uma dinâmica em que estão envolvidos vínculos de natureza subjetiva. Um resultado importante dessa pesquisa foi a descrição da atuação dos grupos nas situações de aprendizagem que, muitas vezes, agem como se possuíssem certas suposições básicas que distorcem os propósitos para os quais estão reunidos, produzindo um desvio das atividades voltadas à realização da tarefa mais objetiva que têm por fazer. A autora destacou uma crença muito comum nos grupos de aprendizagem que é a de que o professor atua como um líder na perspectiva de que só poderão aprender com ele. Assim os alunos sentem-se efetivamente dependentes do professor para a realização do trabalho que parece não poder, em momento algum, ser conduzido por outra pessoa.

Segundo Dias, Nascimento e Fialho (2010) alguns conceitos que sustentam a aprendizagem cooperativa:

- Interação face-a-face - Oportunidade de interagir com os colegas de modo a explicar, elaborar e relacionar conteúdos;
- Responsabilidade Individual - Cada elemento do grupo sente-se responsável pela sua própria aprendizagem e pela dos colegas e contribui ativamente para o grupo;
- Habilidades Sociais – Competências como comunicação, confiança, liderança, decisão e resolução de conflito;
- Processamento de grupo - Balanços regulares e sistemáticos do funcionamento do grupo e da progressão nas aprendizagens;
- Interdependência Positiva - O sentimento do trabalho conjunto para um objetivo comum em que cada um se preocupa com a aprendizagem dos colegas

Uma das dificuldades para se gerar a aprendizagem ocorre pelos próprios aspectos estruturais da organização. Segundo Steiner (1998), a estrutura organizacional, principalmente a hierarquia, impede a aprendizagem devido ao controle que impõe nas pessoas e grupos. Além disso, a própria divisão de trabalho, por áreas, dificulta o fluxo de informação e torna a aprendizagem lenta ou inviabilizada.

De acordo com Nacarato e Lopes (2009), a definição de trabalho colaborativo emerge do confronto entre pontos de vista distintos, através do surgimento de um debate, onde o objetivo é a resolução de uma tarefa. Cada um, ao possuir diferentes saberes e competências, fruto de suas vivências e experiências pessoais, terá de negociar significados e representações de onde possam surgir conflitos entre ambos, embora mantendo um nível mínimo de compreensão mútua. A noção de conflito sócio-cognitivo revela assim a necessidade de outro responsável por uma perspectiva individual alternativa.

A aprendizagem cooperativa faz com que os alunos deixem de ter essa atitude passiva e passem a ser figuras centrais no processo de aprendizagem, sendo-lhes proporcionada uma série de atividades, "através de uma metodologia servida por um conjunto de técnicas específicas a utilizar em situações educativas" (Freitas & Freitas, 2002, p.9), nas quais terão que mobilizar uma série de competências, para além daquelas que têm a ver com os saberes programáticos, como as competências sociais, ou seja, de relação com o próximo, que nas aulas tradicionais não são estimuladas. Tendo em conta toda esta necessidade de mudança na forma como se realiza o processo de aprendizagem.

Assim, o papel que o professor assume dentro da sala de aula altera-se de forma progressiva, para que a estratégia da aprendizagem cooperativa seja motivadora para os alunos e para que consiga assumir na sua plenitude as funções inerentes a esta estratégia. Para Monereo e Gisbert (2002) o professor terá que ser o engenheiro da aprendizagem cooperativa e não apenas um técnico, o que significa que terá que saber muito bem aquilo que aplica, sendo ainda capaz de fazer ajustes à realidade em que se encontra e proceder a alterações sobre aquilo que aplica, sempre que se torne pertinente. Johnson e Johnson (1999) referem que o professor deverá seguir três regras muito simples para que o resultado final da aplicação da aprendizagem cooperativa seja benéfico para os alunos, na medida em que, no seio de um grupo, existam alunos que ensinam aos colegas aquilo que sabem e alunos que apliquem aquilo que aprenderam na resolução de problemas: em primeiro lugar, o professor deve ser específico, ou seja, definir bem as estruturas que pretende que sejam desenvolvidas; em segundo lugar, o professor deve começar devagar, o que significa que não deve sobrecarregar os alunos com mais funções do que aquelas que eles têm potencial para desenvolver, num espaço de tempo que é curto. Para os autores apenas devem ser estimulados um ou dois comportamentos e os alunos devem aprender que comportamento é apropriado e que comportamento é inapropriado no seio da aprendizagem cooperativa; por último, é importante estimular e fazer com que os alunos pratiquem as capacidades sociais que foram desenvolvidas até que eles as reproduzam automaticamente e com frequência.

Cognitivamente há muito que se observar em relação ao trabalho em grupo. Nacarato e Lopes (2009) afirmam que, quando um aluno tem de formular uma resposta cognitiva para uma tarefa, começa por construir uma representação da própria tarefa, dos conhecimentos que julga ser necessários e da sua finalidade. Paralelamente, se estiver trabalhando com outro individuo, pode acontecer que essa mesma situação esteja a ser vivida por esse sujeito de outra forma, e a partir daí, as novas cognições vão construindo um jogo social complexo no qual a negociação do significado terá um papel determinante. Esta negociação é uma forma sutil e implícita de construir um significado para a situação através da comunicação, com o objetivo de solucionar uma atividade dinâmica e complexa.

Segundo Dias, Nascimento e Fialho (2010), atualmente, a aprendizagem colaborativa é implantada em várias escolas e universidades de diferentes países, onde os Estados Unidos é o maior pólo de atuação da metodologia destacando grandes pesquisas na área. Existem alguns locais específicos que merecem destaque como: Cooperative Learning Center

(Universidade de Minnesota), Universidade Californiana de Santa Cruz, Johns Hopkins University, Simons College (Boston) etc.

### 1.3- Linguagem Matemática

Neste capítulo será apresentado um aspecto fundamental para a análise dos dados desta pesquisa. A linguagem, como instrumento de comunicação e expressão está presente em todos os atos humanos, e na aprendizagem geralmente se apresenta como peça indispensável. No aspecto desta investigação estará presente conjugando com os aspectos investigativos e colaborativos através dos registros dos licenciandos, apresentando-se como importante aliada para a análise dos dados.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2015), as conjecturas dos alunos podem surgir de diversas formas, por exemplo, por observação direta dos dados, por manipulação dos dados ou por analogia com outras conjecturas. Esse trabalho indutivo tende, por vezes, a ficar confinado ao pensamento do aluno, não existindo uma formulação específica da conjectura. Outras conjecturas são apenas parcialmente verbalizadas, existindo uma linguagem gestual que completa aquilo que não é dito. Por exemplo, na tarefa em análise, os alunos, frequentemente, indicam no quadro determinada regularidade, por meio de exemplos, com

a convicção de que os restantes colegas irão intuir o mesmo resultado. Daqui decorre a importância da realização de um registro do trabalho de investigação. É somente quando se dispõem a registrar as suas conjecturas que os alunos se confrontam com a necessidade de explicitarem as suas ideias e estabeleceram consensos e um entendimento comum quanto às suas realizações.

Para um maior aprofundamento sobre os aspectos do processo de construção da linguagem e suas propriedades com instrumento de aprendizagem, cabe aqui a apresentação de conclusões e afirmações sobre o tema.

Para Martins (2010) a linguagem do meio ambiente, que reflete uma forma de perceber o mundo real num dado tempo e espaço, aponta o modo pelo qual a criança apreende as circunstâncias em que vive, cumprindo uma dupla função: de um lado, permite a comunicação, organiza e medeia a conduta; de outro, expressa o pensamento e ressalta importância reguladora dos fatores culturais existentes nas relações sociais.

Este movimento de compreensão do mundo que aparece dialeticamente na escola implica ações de investigação e de discussão para a internalização de funções mentais que garantam ao indivíduo a possibilidade de pensar por si. Para tanto é preciso estimulá-lo a operar com ideias, a analisar os fatos e a discuti-los para que, na troca e no diálogo com o outro, construa o seu ponto de regulação para um pensar competente e comprometido com determinadas práticas sociais. Este aspecto em especial vai ao encontro das considerações e percepções a cerca do trabalho colaborativo e cooperativo, bem como dos benefícios relacionados ao trabalho investigativo em matemática. Os atos de investigação, discussão e posterior internalização constituem etapa fundamental apara a construção de conceitos e a regulação da aprendizagem.

Segundo Martins (2010) quando a linguagem se dirige aos outros, o pensamento torna-se passível de partilha. Essa acessibilidade do pensamento manifesta-se na e pela linguagem, expressando, ao mesmo tempo, muitos outros aspectos da personalidade do sujeito. O processo de internalização, segundo Vigotsky (1987), pode ser entendido como a reconstrução interna de uma operação externa, onde uma série de transformações é processada, para ele:

a) uma operação que inicialmente representa uma atividade exterior é reconstruída e começa a ocorrer internamente. De forma a constituir uma versão personalizada;

b) um processo interpessoal é transformado num processo intrapessoal. O que se vê passa a representar um processo reconhecido internamente;

c) Essa transformação de um processo interpessoal num processo intrapessoal é o resultado de uma longa série de eventos ocorridos ao longo do desenvolvimento.

Ainda segundo Vigotski (2001, p.485), existe a construção oral de um entendimento, pois "A palavra não esteve no princípio. No princípio esteve a ação. A palavra constituí antes o fim que o princípio do desenvolvimento. A palavra é o fim que coroa a ação". Sendo assim, pode-se compreender que a linguagem oral é a exteriorização de um conjunto de ações anteriores, realizadas internamente, concretizando e coroando o processo de internalização.

Considerando estas afirmações podemos supor que a aprendizagem se constrói em vias de mão dupla. Sobre a luz destas constatações tanto uma operação que inicialmente representa uma atividade exterior é reconstruída e começa a ocorrer internamente quanto ao estruturar uma afirmação de forma oral ou escrita, constituiu-se antes toda uma construção ativa, antes intrapessoal e posteriormente interpessoal. Ou seja, aprendemos quando vemos, ouvimos e internalizamos e também quando imaginamos e procuramos formas externalizar e socializar.

Para Vilela e Mendes (2011) a linguagem passa a ser investigada enquanto constituída dos elementos dos nossos conhecimentos e, por isso, pode ser tomada como eixo de investigação. Ela é, num movimento de mão dupla, um critério de inteligibilidade, traz uma lógica para ver o mundo e, ainda, pode ser reveladora, porque expressa o que é importante numa forma de vida; ela dá indícios das características culturais de uma comunidade.

Dentro da proposta referente à interação, cooperação e colaboração cabe uma discussão mais aprofundada sobre características da linguagem matemática, principalmente em sua apresentação escrita. Num texto escrito, quando o escritor se dirige a um grupo de pessoas, pode-se pensar que ele dialoga, uma vez que antecipa as manifestações advindas do grupo leitor. Desse modo, podemos entender quase todas as manifestações da linguagem como diálogos, se levarmos em conta os aspectos dinâmicos dessas manifestações, se pensarmos que a linguagem sempre implica a figura do interlocutor.

As pesquisas brasileiras relacionando a produção escrita à construção do conhecimento matemático são relativamente recentes. Segundo Powell e Bairral (2006) o primeiro artigo sobre o tema foi publicado no Brasil em 1995. Para os autores o uso da escrita é apresentado como ferramenta que influencia a aprendizagem matemática e contribui para a análise da cognição e tem sido objeto de interesse na educação matemática. Estas pesquisas contribuem para o desenvolvimento das ideias matemáticas, potencializa o alcance dos objetivos e é um veículo importante na compreensão do processo de ensino e aprendizagem.

Muitas considerações didáticas surgem sobre o estudo da escrita, ela pode sugerir aos alunos que reflitam criticamente sobre suas experiências matemáticas e através do uso da prosa consigam responder a diversas situações matemáticas. A escrita matemática consiste na descrição em prosa dos pensamentos matemáticos desenvolvidos conjuntamente com a escrita simbólica, podendo-se perceber relações entre as definições de internalização apresentados anteriormente. É uma escrita aberta, multilinguística que trama símbolo e prosa. Incorporando-se novos elementos de comunicação, a cada apropriação de conceito.

Para Powell e Bairral (2006) a escrita força os interlocutores a refletir, diretamente, sobre sua experiência matemática. Enquanto examinamos nossas produções, desenvolvemos nosso senso crítico. A escrita suporta atos de cognição e metacognição, ou seja, não apenas sobre a capacidade de aprender, mas também o reconhecimento de seus próprios processos cognitivos e a habilidade de controlar esses processos, monitorando, organizando, e modificando-os para realizar objetivos concretos.

Desta forma, o estilo é individual e também coletivo, pois existe um movimento entre o gênero da escrita e seus elementos e, ao mesmo tempo, estes se fazem presentes na comunicação, sendo assumidos pelos falantes e pelos escritores. Do mesmo modo, o texto configura-se por esta relação, quando materializado pela escrita, pois existe a presença singular do escritor e do leitor, quando estabelecem relações com a produção discursiva. (Luvison, 2000)

Segundo Feres e Nacarato (2008), a escrita apresenta uma série de fatores próprios do processo de aprendizagem. Alguns fatores, apropriados e destacados para esta análise em questão necessitam ser elencados:

- Exige um assunto e a matemática tem um conteúdo – os conceitos, as ideias e os símbolos devem transitar da mente do escritor para a mente do leitor, assim o aluno ao escrever sobre a matemática irá formar, reformar e externar o seu pensamento possibilitando, uma conversa consigo mesmo e com o leitor, uma organização do seu pensar matemático;
- Permite a comunicação de um conceito matemático, já que o conceito é uma ferramenta a serviço de quem indaga, assim a escrita possibilita uma resposta; a escrita permite um planejamento e a matemática tem estratégias – o registro antes da execução pode promover uma organização do pensamento matemático;
- Tem um enredo e a matemática uma organização – a formação do pensamento matemático é sistematizada através da escrita, que exige um enredo, uma sequencia e uma ordem; exige coerência e a matemática requer uma relação - a necessidade do sentido de um texto pode permitir a conexão entre assuntos matemáticos; para promover a emissão de uma ideia, alguns fatos são relacionados;
- Registra o pensamento - tem uma intenção pragmática do cálculo escrito podendo revelar para o outro e permitir ao outro um controle desse pensamento, contribuindo para a avaliação; exige uma reescrita e a matemática uma refutação – a reescrita possibilita a contestação de uma verdade matemática, podendo ocorrer sua validação ou não, e essa é uma prática essencial para a formação do pensamento matemático;
- Inibe a repetição e estimula a criação – que podem desencadear a compreensão significativa dos conceitos matemáticos;
- Pode permitir um aprender com significado, colaborando com o processo da elaboração conceitual produzido pelo aluno, podendo promover uma transformação – tarefa tão almejada num ambiente que busca a democracia.

Para Powell e Bairral (2006) a escrita é uma ferramenta importante para o desenvolvimento da cognição e o fomento do aprendizado matemático. A cognição matemática deve ser desenvolvida em contexto de produção que vai além da expressividade e da individualidade. Deve promover reflexão crítica, bem como preconizar processos colaborativos de diferentes dimensões e de tomada de consciência sobre as experiências individuais e coletivas.

Luvison (2000) afirma que, o texto, o discurso, seja pela fala, escrita, desenho ou outro sistema semiótico, possui significado em contexto, no diálogo e pelo diálogo.

Portanto a compreensão da existência de diferentes gêneros do discurso contribui para a significação, ou seja, para uma efetiva comunicação. Ao ler, compreender e escrever sobre seus pensamentos, inferindo, antecipando, identificando e reconhecendo palavras, conceitos e a linguagem matemática, o aluno estabelece com o texto do problema uma relação de sentido que ele atribui a esses escritos e, ao mesmo tempo apropria-se deles, na leitura do próprio gênero. Ainda sobre a aprendizagem, pode-se dizer que nas situações vivificadas em que foi aplicado o uso da escrita matemática, enquanto espaço de organização de pensamentos, a aprendizagem foi se tornando cada vez mais concreta. O ato de pensar sobre suas experiências matemáticas, o registro em prosa e a elaboração de imagens em torno dos conhecimentos trabalhados, contribuíram para o desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Contudo, a escrita matemática não opera somente em um campo de aprendizagem unilateral. O registro escrito, além de revelar a complexidade dos pensamentos ou em alguns casos, parte desses pensamentos, é capaz de revelar ansiedades sobre estar correto ou não, sobre ideias que são consideradas inapropriadas ou sobre outras conexões realizadas. Tais variáveis podem ser exploradas considerando-se o tempo, o espaço e a habilidade de quem está escrevendo ao expressar seus pensamentos.

De acordo com Almeida (2016), no caso de textos produzidos por alunos em aulas de Matemática, é possível perceber que são influenciados por outros textos matemáticos experienciados por eles e por seus professores dentro e fora da escola. Podemos ampliar essa observação afirmando que a produção discursiva é resultado de uma constante interação, não somente com o outro no momento em que se produz o discurso, pois também envolve o seu próprio repertório de leitura. Este repertório de leitura, segundo o autor, pode ser tomado como a complexa rede de conhecimentos e relações estabelecidas entre o que já se leu, viu, ouviu, tocou, sentiu, que permite a aprendizagem como uma cadeia de relações que se perfazem entre esse repertório.

De acordo com Nacarato e Lopes (2009), um texto escrito pode ser visto como a tradução, por meio de palavras, de pensamentos, sentimentos e ações. No contexto ensino-aprendizagem, tanto a expressão, na forma dissertativa, de um determinado conceito quanto o eventual relacionamento deste com outros que se conectam com a busca de conhecimento e de algum domínio acerca do tema em questão. Um estudante que domina e compreende um determinado conceito deve ser capaz de escrever sobre ele, ressaltando suas certezas e possíveis dúvidas. Na aprendizagem por meio da produção escrita, não se resume a compreensão conceitual prévia à escrita fluente. Essa aprendizagem é processual, e as palavras são usadas para se chegar aos conceitos. É um fato que o exercício da escrita é aprimorado com a prática: quanto mais se escreve, mais fluência se ganha. Mas a questão principal é que a escrita amplia a aprendizagem, tornando possível a descoberta do conhecimento, favorecendo a capacidade de estabelecer conexões.

Mesquita (2001), em conversa com o grupo de alunos, afirma que o fato de expressarem seus próprios pensamentos, bem como seus sentimentos no trato com a matemática e ainda comunicar-se na oralidade com os leitores de seus apontamentos, levou-lhes ao estabelecimento de uma nova relação com a matemática. Agora, acreditam que a matemática é passível de construção de significados e que isso somente foi possível pelo fato de poderem conectar os conhecimentos elaborados anteriormente com o conhecimento trabalhado atualmente. Também se destacou um acréscimo na confiança das suas habilidades matemáticas, através do uso da escrita e nas atitudes frente o pensar, quando envolve quantidades e incógnitas. A liberdade de pensamento instaurada pela prática da escrita permitiu e propiciou que muitos dos protagonistas reformulassem seus conceitos prévios e seu modo de atuar e organizar o trabalho pedagógico, empenhando-se para que a liberdade de expressão no ambiente de ensino aprendizagem ocorresse em suas aulas.

Para Freitas e Fiorentine (2008), as narrativas de formação oportunizaram, entre outras contribuições da inserção da escrita no contexto de formação de professores de matemática, o incentivo ao desenvolvimento da capacidade de análise durante a investigação, elucidando serem a escrita e a análise elementos indissociáveis.

Silva e Burisasco (2005) analisaram que a produção escrita de alunos em questões de Matemática contribui, entre outras coisas, para que o professor busque entender as respostas dadas e o porquê das estratégias escolhidas. Com essa atitude investigativa, o professor pode reconhecer que conhecimentos os alunos já possuem e quais ainda estão em construção. “A análise do erro também pode contribuir com o aluno na medida em que o professor o incentive a analisar sua própria produção. Com isso, o aluno terá a oportunidade de identificar e compreender seus erros, podendo assim geri-los, isto é, desenvolver processos de verificação e autocorreção que o ajudem a refazer o caminho.” (Hadji, 1994).

> Agora, sinto-me convencida de que a escrita simbólica matemática e a escrita em prosa constituem-se em planos de intersecção com infinitos pontos de contatos entre si. O pensamento matemático está impregnado da prosa. O que se pretende com essa trama é dar vida a tal impregnação enquanto retorno ao modo natural de falar e/ou escrever matematicamente, com vistas à produção de significações. (MESQUITA, 2001)

De acordo com Almeida (2016), se a matemática e sua linguagem formam esse amálgama, então devem caminhar juntas nos processos de ensino, porque a aprendizagem somente ocorrerá quando elas estiverem lado a lado desde o ponto de partida. De outra forma, os professores correrão o risco de ensinar duas coisas diferentes e desvinculadas da matemática, uma seria a matemática sem linguagem, um esqueleto incomunicável, outra seria uma linguagem sem matemática, algo como vozes do além desconhecido.

Nacarato e Lopes (2009) concluem que para que haja sucesso nas atividades empregando a linguagem escrita nas aulas de matemática, estas não podem ser encaradas de forma meramente utilitária e burocrática. É crucial que o professor dê retorno freqüente aos alunos. Também é essencial que o aluno “compre’ a proposta, o que, na maioria das vezes, demanda dedicação. No entanto, o emprego da linguagem escrita, favorece um trabalho e um acompanhamento processual dos envolvidos. A mobilização do espírito crítico e reflexivo, por sua vez, é uma conquista preciosa para o estudante, em seu processo de busca e apropriação do conhecimento, e este processo certamente repercute no professor, fortalecendo os vínculos cognitivos e afetivos com a matemática.

A construção de conceitos não é apresentada por uma via de mão única, muitos processos e ações desencadeiam na elaboração do conhecimento. A linguagem oral, o processo dialógico, a internalização individual e a produção/reprodução oral e escrita desses conhecimentos são etapas deste processo. Quando se oportuniza o exercício consciente destas etapas abre-se mais de uma via oportuna para a aprendizagem, e a junção destas proporciona a otimização do processo como um todo.

Foram apresentadas algumas reflexões sobre as pesquisas realizadas sobre aspectos cuja abordagem criam possibilidades de recurso potencializador do aprendizado, que não se esgotam aqui, mas que formam um alicerce para iniciar a edificação desta pesquisa. Fazem parte ainda desta fundamentação um levantamento sobre questões voltadas às pesquisas com os números irracionais que nos impeliram também ao estudo da abordagem matemática, propriamente dita, sobre o tema.

## CAPÍTULO II- OBJETO MATEMÁTICO

Neste capítulo foi realizado o estudo sobre o conceito de número irracional e as nuances do contexto de aprendizagem deste conceito. Iniciando por uma apresentação do conceito de número irracional com uma abordagem histórica e didática e em seguida um levantamento em periódicos em destaque entre pesquisas em Educação matemática.

### 2.1- Os números irracionais. História e conceito[1]

Aqui, será apresentado um breve relato sobre a construção histórica do conjunto dos números irracionais. Este será de suma importância para as considerações relativas às construções de atividades e análise dos resultados.

Para Silva e Penteado (2009) a noção de números reais está presente na maioria dos conteúdos de Matemática e, como evidenciam pesquisas nacionais e internacionais, muitas das dificuldades dos alunos na aprendizagem de limite e continuidade de funções, por exemplo, são decorrentes da falta de compreensão de propriedades do conjunto dos números reais. Sendo assim, a demanda de propostas de intervenção torna-se perceptível e questionamentos passam a se apresentar: É possível analisar o processo histórico de forma didática? Atividades sobre construção de números irracionais, enriquecidas com conteúdo histórico, são adaptáveis à educação básica?

É importante ressaltar que não faz parte dos objetivos desta etapa da pesquisa esmiuçar toda a evolução histórica numérica, esta tarefa apresentaria um número de dados bem maior do que os citados neste trabalho. As descrições históricas expostas aqui são pontuais e selecionadas a partir do potencial didático de cada uma. Todo o enfoque destina-se aos possíveis recursos cabíveis à realidade da sala de aula.

#### 2.1.1- Os Números Racionais

De acordo com as descobertas e demandas no contexto matemático, surge a necessidade de aprimorar os conhecimentos adquiridos para resolver os novos problemas do cotidiano. A ideia de número utilizada para contagens, medidas, grandeza e espaço acompanha o homem desde a pré-história e com isso passou por várias evoluções no decorrer do tempo.

Segundo Boyer (1996) e Eves (2004) os números racionais tiveram sua origem a partir da necessidade em atribuir valores a grandezas que em um dado momento deixaram de ser representadas de forma inteira.

Cerca de 3000 a.C no Egito, eram realizadas por matemáticos dos faraós, marcações de terras nas margens do rio Nilo para que os povos cultivassem e plantassem. Mas com o período de inundação tais demarcações eram desfeitas, havendo a necessidade de remarcar as áreas. Para marcar as terras eram utilizadas cordas como unidade de medida sendo os nós separadores de cada comprimento. No entanto, dependo dos lados dos terrenos, nem sempre as medidas davam número inteiro de vezes, com isso surgiu à necessidade de se criar um novo tipo de unidade de medida, ou seja, um novo número. Surgem então, as primeiras noções de números fracionários e a utilização das frações.

[1] Este capítulo deu origem à um artigo apresentado no VIII Encontro de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática e VI Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto em 19 de maio de 2017.

As primeiras frações egípcias foram criadas a partir das necessidades de medir terras, repartirem as colheitas, medir tecidos, líquidos e outros. Tais frações eram consideradas frações unitárias, pois o numerador tinha sempre o valor unitário 1. Eram representadas na notação hieroglífica e utilizavam um sinal elíptico seguido do número inteiro correspondente.

Segundo Stewart (2015) os antigos egípcios representavam frações de três maneiras diferentes: hieróglifos especiais para 2/3 e 3/4, o olho de Hórus para representar frações unitárias com denominadores iguais às primeiras seis potencias de 2 e símbolos para frações unitárias com denominadores gerais.

Já os babilônicos utilizavam frações com denominadores 60, por ser à base do sistema de numeração adotado. Utilizavam métodos de potências para representá-las e criaram o princípio da posição às frações, ou seja, a mesma notação era usada não só para 2/ (60) + 2, mas também para 2+ 2/ (60) -1 entre outras frações. Segundo Aquino (2013) os babilônios usavam geralmente frações com denominadores 60, 600, 3600, etc., devido à base de seu sistema de numeração ser 60, atribuíam às frações uma notação racional.

A partir das frações egípcias e babilônicas, surgiram várias outras notações de várias civilizações: Romana que utilizava a base 12 para a representação, a chinesa que utilizava uma barra horizontal para representar a unidade e traços verticais para o número, entre outras.

> Durante o passar dos anos muitas notações foram usadas para representar frações. Esta notação moderna de fração deve-se aos hindus que, devido à numeração posicional decimal, expressavam frações mais ou menos como nós, em, por exemplo, 34/1265, onde 34 é o numerador e 1265 o denominador. Essa notação foi adotada e aperfeiçoada pelos árabes, que criaram a barra horizontal para separar os números. (AQUINO, 2013. P19)

Boyer (1996) e Eves (2004) afirmam que a partir do século XVI surgem as frações com numeradores maiores que o numeral 1. Essa notação moderna tem relação com os hindus e árabes. Aos hindus pelo sistema decimal adotado, aos árabes a barra horizontal separando o numerador do denominador.

Atualmente podemos definir número racional como todo número que pode ser representado por uma razão, ou seja, uma fração. O conjunto dos racionais é representado pela letra Q e tem como definição:

$$Q = \{a/b, \text{ com } a \in Z \text{ e } b \in Z^*\}$$

Segundo Rooney (2012) a forma moderna de escrever frações com uma barra ou vínculo dividindo o numerador e o denominador vem do método hindu de escrever um numeral sobre o outro, usada na *Brahma-Sphuta-Siddhanta* de Brahmagupta (628). Os matemáticos árabes acrescentaram a barra para separar os dois números. O primeiro matemático europeu a usar a barra de frações da forma como ela é usada hoje foi Fibonacci (c.1170-1250). Os decimais chegaram muito mais tarde á Europa. Francesco Pellos escreveu um tratado publicado na Itália, em 1492, que parece usar um ponto decimal para separar unidades de dezenas, mas seu trabalho não mostra um entendimento rigoroso do que ele fez. Cristoff Rudolff, escrevendo em um texto de contabilidade germânica em 1530, foi o primeiro a mostrar um total entendimento sobre como trabalhar com frações decimais, embora ele tenha usado uma barra vertical em lugar de um ponto decimal. O primeiro tratado europeu sobre decimais foi produzido por Simon Stevin, em 1585, e cabe a ele o crédito em geral pela introdução de frações decimais na Europa.

### 2.1.2- Os irracionais

Por bastante tempo os números racionais foram o máximo alcançado sobre o conceito de número. Mas, segundo Stewart (2015), os gregos antigos provaram que o quadrado de uma fração nunca poderia ser exatamente igual a 2. De forma intuitiva já era possível perceber que os racionais não eram suficientes, pois pelo Teorema de Pitágoras, o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 é raiz de 2, no entanto, esta notação ainda não existia. "A prova grega da irracionalidade emprega um processo geométrico que agora chamamos de algoritmo de Euclides. É um modo sistemático de descobrir se dois comprimentos dados *a* e *b* são comensuráveis." (Stewart, 2015, p.196)

Para Roque (2012), a percepção da incomensurabilidade pelo pitagórico Hipaso de Metaponto e da possibilidade de um conjunto de números não-racionais não estão necessariamente relacionadas ao mesmo período histórico:

> "Ninguém, suficientemente instruído em matemática poderia ficar impressionado com a existência da incomensurabilidade. Além disso, a conexão entre esse problema e a filosofia pitagórica é duvidosa. Não se tem certeza nem mesmo da relação entre a descoberta dos incomensuráveis e a aplicação do teorema de "Pitágoras" (que nos permitiria concluir que há um lado de um triângulo cuja medida é raiz de 2), uma vez que os chineses já conheciam o teorema e nem por isso concluíram pela irracionalidade do lado." (Roque, 2012, p. 125)

Substancialmente, apesar das discordâncias entre alguns historiadores matemáticos sobre a percepção sobre incomensurabilidade/irracionalidade, este conceito surge como justificativa para a necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos até então conhecidos e, no contexto didático, como possível abordagem introdutória para apresentação do conjunto dos números irracionais.

Mais formalmente, dois segmentos A e B dizem-se *comensuráveis* se são múltiplos de um segmento comum. Em outros termos, A e B são comensuráveis se existir um segmento C de medida u, escolhido como unidade de medida, e se existirem inteiros positivos m e n tais que A= mC e B= nC, então A e B são múltiplos do segmento comum C, e assim se dizem *comensuráveis*.

Segundo Baldino (2000), os pitagóricos acreditavam que tudo em geometria e mesmo nos afazeres humanos poderiam ser explicados em termos de números. Não se sabe com precisão quando a escola pitagórica tomou conhecimento da existência de grandezas que não poderiam ser comparadas por meio de inteiros.

Para Stewart (2015) a comprovação da não-racionalidade levou os geômetras gregos a focar em comprimentos geométricos e a ignorar números, no entanto a possibilidade de reforçar o sistema numérico de modo a poder lidar com questões como essas se tornaram uma alternativa melhor.

Segundo Rooney (2012), Pitágoras não conseguia provar pela lógica que os números irracionais não existiam, mas quando Hipaso de Metaponto (nascido em 500 a.C.) demonstrou que a raiz quadrada de 2 é irracional e argumentou sobre sua existência, diz a lenda que Pitágoras o afogou. Hipaso teria demonstrado sua descoberta a bordo de um navio. O banimento dos números irracionais, acionado por Pitágoras, seria então baseado em sua objeção estética, ideológica e filosófica.

Somente no século XVII, com a criação da Geometria Analítica (Fermat e Descartes), se estabelece a simbiose do geométrico com o algébrico, favorecendo o tratamento aritmético do comensurável e do incomensurável. Newton (1642-1727) define pela primeira vez "número", tanto racional como irracional.

De acordo com Iezzi e Murakami (2005), números cuja representação decimal com infinitas casas decimais não periódicas são chamados números irracionais.

Segundo Niven (2012) para demonstrar a irracionalidade de $\sqrt{2}$ podemos seguir a seguinte trajetória:

Suponhamos que $\sqrt{2}$ fosse um número racional, isto é, $\sqrt{2}$ =a/b , com a e b inteiros e b diferente de 0. Suponhamos ainda, e isso é essencial para o argumento, que a/b seja uma fração irredutível, isto é, que a e b sejam primos entre si. Usaremos, especificamente, o fato de a e b não serem ambos pares porque, se o fossem, a/b não seria irredutível. Elevando ao quadrado a equação acima e simplificando-a, obtemos 2= $a^2/b^2$, $a^2 = 2b^2$.

O termo $2b^2$ representa um inteiro par, de modo que $a^2$ é um inteiro par e, portanto, $a$ é um inteiro par, digamos $a$=2c, com c também inteiro. Substituindo $a$ por 2c na equação $a^2$=$2b^2$, obtemos:

$(2c)^2 = 2b^2$,

$4c^2=2b^2$,

$2c^2= b^2$

O termo $2c^2$ representa um inteiro par, de modo que $b^2$ é um inteiro par e, portanto, b é um inteiro par. Mas agora chegamos à conclusão de que a e b são ambos inteiros pares, enquanto a e b foram, inicialmente, supostos primos entre si. Essa contradição nos leva à conclusão de que não é possível escrever $\sqrt{2}\ na\ forma \frac{a}{b}$, portanto $\sqrt{2}$ é irracional.

De forma semelhante Niven (2012) demonstra a irracionalidade de $\sqrt{3}\cdot$, com a exceção de que o argumento chave envolve divisibilidade por 3 e não por 2, segue a demonstração:

Provaremos como resultado preliminar, que o quadrado de um inteiro é divisível por 3 se, e somente se, o inteiro em si for divisível por três. Observemos, inicialmente, que um inteiro divisível por 3 é da forma 3n, enquanto que um inteiro não divisível por 3 é da forma 3n+1 ou 3n+2. Então as equações:

$3n^2= 9n^2= 3\ (3n)^2$

$(3n+1)^2= 9n^2$+6n+1= 3$(3n^2+2n)$ +1=

$(3n+2)^2= 9n^2$+12n+4= 3($3n^2$+4n+1) +1

Suponhamos agora que $\sqrt{3}$ fosse um número racional, digamos que $\sqrt{3} = a/b$, com a e b inteiros. Novamente, como no caso de $\sqrt{2}\cdot$, suponhamos a/b irredutível, de modo que a e b não são ambos divisíveis por 3. Elevando a equação ao quadrado e simplificando, obtemos:

3= $a^2/b^2$,
$a^2= 3b^2$

O inteiro $3b^2$ é divisível por 3, isto é, $a^2\ é\ divisível\ por$ 3. . Portanto, a é divisível por 3, digamos, $a$ =3c, com c inteiro. Substituindo $a$ por 3c na equação $a^2= 3b^2$ temos:

$(3c)^2= 3b^2$,
$9c^2= 3b^2$,
$3c^2= b^2$

Isso mostra que $b^2$ é divisível por 3 e, portanto, b é divisível por 3. Concluímos, assim, que a e b são ambos divisíveis por 3 e isso contraria a hipótese inicial de ser a/b irredutível. Portanto $\sqrt{3}$ é irracional.

É bom lembrar que todas as raízes inexatas são irracionais. Na verdade estes são os números irracionais mais simples: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, etc. Estes números são soluções das equações $x^2 - 2 = 0$, $x^2 - 3 = 0$, $x^2 - 6 = 0$, respectivamente. Por essa razão eles são chamados de *irracionais algébricos*. Um número algébrico: é um número real que satisfaz alguma equação do tipo: $a^2 + n = 0$, com a e n inteiros. Ou seja, um número real se diz algébrico se satisfizer uma equação algébrica com coeficientes inteiros.

Mas acontece que muitos números irracionais não são algébricos. Por isso, são chamados de irracionais transcendentes. Estes não são raízes de equações da forma acima.

### 2.1.3- Os irracionais- $\pi$

O número $\pi$ é o exemplo mais conhecido de número irracional. Este símbolo lhe foi dado por ser a letra grega correspondente a primeira letra da palavra *perímetro*.

Segundo Stewart (2015) os egípcios acreditavam que $\pi$ fosse racional e igual a 19/6, que é aproximadamente 3,16. Para calcular este valor, usaram argumentos geométricos: traçaram um octógono inscrito num círculo e calcularam a razão entre seu perímetro e o diâmetro da circunferência.

Segundo Rooney (2012), na Bíblia, as medidas relacionadas com a construção e aparelhamento do templo de Salomão, 950 a.C., usa o valor de 3 para $\pi$.

Muitos dos símbolos matemáticos que usamos atualmente são devidos ao matemático suíço Leonard Euler (1707-1783). Foi Euler quem, em 1737, tornou conhecido o símbolo $\pi$ para o número PI. Foi também nesta época que os matemáticos conseguiram demonstrar que $\pi$ é um número irracional. Segundo Guzzo (2007) "O símbolo atual que designa o número "PI" é a letra grega $\pi$, que foi utilizada pela primeira vez em 1707 por Willian Jones, mas só foi amplamente aceita quando usada por Euler em 1737".

De forma geral $\pi$ é definido como a razão entre a circunferência de um círculo qualquer e seu diâmetro, no entanto este cálculo não representa um valor tão próximo por se tratar de um número que não pode ser representado através de uma razão. De acordo com Stewart (2015), Arquimedes apresentou uma prova lógica diferente. Utilizando um hexágono inscrito e duplicando o número de lados consecutivamente, Arquimedes obteve um valor bastante acurado para $\pi$.

Muitas tentativas foram surgindo ao longo dos anos. Algumas delas não tão obviamente relacionadas às medidas circulares. Sua representação decimal vem sendo calculada durante os anos tanto por métodos tradicionais como frações contínuas, soma de séries, cálculos trigonométricos; quanto por sistemas informatizados e softwares específicos.

Além de irracional, $\pi$ é um número transcendente, o que foi provado por Ferdinand Lindemann em 1882. Isso significa que não existe um polinômio com coeficientes inteiros ou racionais do qual $\pi$ seja uma raiz. É difícil de calculá-lo porque sendo um número irracional, sua representação decimal não apresenta nenhuma previsibilidade.

Em geral, esse esclarecimento não é enfatizado, nem pelos professores nem pelos autores dos livros didáticos, o que pode confundir os alunos, pois a forma experimental sugerida de obtenção do $\pi$ é a razão entre comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro o que pode contrariar a própria definição de número irracional, o impedimento de ser representado por uma fração. Devemos destacar os seguintes casos:

1) Quando a medida do diâmetro de uma circunferência for um número inteiro, a medida do comprimento da circunferência não será número inteiro, por isso a razão resulta

num valor aproximado de π, que é um número irracional;

2) Quando determinamos o valor do comprimento da circunferência, utilizando-se $C = 2\pi R$, como possuímos somente valores aproximados de π (3,1415...), então os valores de C serão também aproximados.

Segundo Wendpap, Bastiani e Guzzo (2008) a importância de π deve-se também ao fato da sua presença em várias equações de diferentes campos da ciência: descrevendo a hélice dupla do DNA, na teoria das supercordas, nas equações de Einstein do campo gravitacional, na arquitetura e em um grande número de problemas geométricos e estatísticos. O π apresenta-se também na teoria das vibrações e movimentos ondulatórios. Mesmo na arte π tem sido uma fonte de inspiração. Umberto Eco, na primeira página do seu livro "O Pêndulo de Foucault", descreve o pêndulo e a associação de π com o período do pêndulo. No filme "π, faith in chaos", escrito e dirigido por Darren Aronofsky, um atormentado matemático tenta decifrar um código, baseando-se em dígitos de π, para compreender o padrão do mercado de capitais.

Durante séculos as fórmulas para o cálculo de π se tornaram cada vez mais eficientes e diretas. Em 1670 Leibniz (1646-1716), divulgou uma fórmula eficaz para a construção do irracional, mas que parece ter sido descoberta, primeiro por James Gregory (1638-1675), e, portanto, conhecida como fórmula de Gregory-Leibniz.

.

### 2.1.4- Os irracionais - O número áureo φ

"O número φ surgiu inicialmente na matemática em conexão com a geometria do polígono regular, seguindo a prática padrão da época foi interpretado geometricamente, não numericamente". (Stewart, 2015)

Uma das referências mais antigas ao número φ ou ao número de ouro aparece no livro Os Elementos VI, de Euclides. Em seu livro, Euclides trata do problema de cortar (ou seccionar) um segmento em extrema e média razão. Euclides chama esse de Cortar a reta finita dada em extrema e média razão.

Segundo Santos (2013) ambos os valores obtidos para a razão AB/ AC são irracionais, e ainda se tem φ-1 = conjugado de φ e conjugado de φ +1= φ, isto é, φ e seu conjugado tem soma constante igual a 1. Com ferramentas computacionais é possível calcular φ com um grandioso número de algarismos decimais. Até onde se calculou, concluiu-se que φ e seu conjugado tem os mesmos algarismos decimais:

$\varphi = 1,61803398874989484820458683436563811772\cdots$

Conjugado de $\Phi = -0,61803398874989484820458683436563811772\cdots$

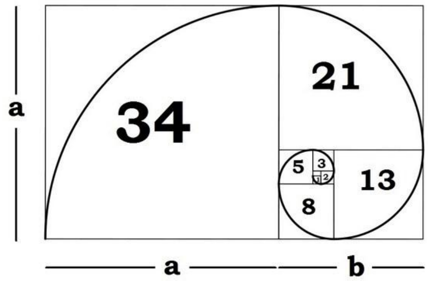
Há inúmeros problemas matemáticos em que aparece o número φ. Segundo Livio (2011) é possível ainda encontrar na literatura científica, diversos autores que sustentam a associação do número φ com fenômenos biológicos e aplicações mesmo na arte, arquitetura e em proporções de medidas humanas e de outros seres.

"O número áureo está intimamente associado aos números de Fibonacci, introduzidos em 1202 por Leonardo de Pisa" (Stewart, 2005). Esta sequencia de números é construída através da soma dos dois fatores anteriores, a saber, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233... ou seja, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com $n \geq 1$.

Esta sequência pode ser representada pela estrutura classificada como retângulo áureo:

Tomando-se um retângulo áureo, é possível obter uma curva que se assemelha a uma espiral logarítmica. Para isso, em cada quadrado traçamos um quarto de circunferência de raio igual à medida do lado do quadrado e o centro é um dos vértices do quadrado correspondente, como sugere a figura. Nesse caso, o centro da espiral é o ponto de encontro das diagonais - O Olho de Deus - e a espiral obtida será chamada espiral áurea. (Santos, 2013)

**Figura 2- Retângulo áureo e sequência de Fibonacci**




Fonte: http://brand.lehuutam.com/design/ty-le-vang-cong-thuc-tinh-toan-so-hoc-ma-nguoi-nghe-sy-da-gui-vao-buc-tranh.html

Uma das percepções relacionadas entre os números de Fibonacci e o número áureo, e talvez a mais simples de se notar, é o resultado sucessivo da razão entre os números da sequência. Ao observar-se o resultado de tais razões, é possível notar que existe uma constante aproximação com a representação numérica de φ, ou seja, 1, 618034...

A seguir o processo:

Sequência de Fibonacci: {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,89...}

½=0,5
2/3=0, 666666...
3/5=0,6...
5/8= 0, 625
8/13= 0, 6153846...
13/21= 0, 6190476...
21/34= 0, 617647...
34/55= 0, 6181818...
55/89= 0, 6179775...
89/144= 0, 618055

Ao invertemos as frações acima temos um resultado curioso:

2/1= 2
3/2=1,5
5/3= 1, 6666...
8/5= 1,6...
13/8= 1, 625...
21/13= 1, 615
34/21= 1, 619...
55/34= 1, 61764...
89/55= 1, 6181818...
144/89= 1, 6179775...

Segundo Livio (2011), a equação que relaciona diretamente o número φ à sequência de Fibonacci, aparentemente, já era conhecida por Leonard Euler (1707-1783) e também pelo matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754). No entanto, foi redescoberta pelo matemático Francês Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856), ficando, assim, conhecida como fórmula de Binet para a sequência de Fibonacci.

**Figura 3- Fórmula para Sequência de Fibonacci**

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-1)^n \Phi^{-n}}{\sqrt{5}}.$$

Fonte: http://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Fibonacci_sequence

No capítulo a seguir destacaremos características do processo didático vigente e suas potenciais falhas, bem como a influência destas no fluxo de aprendizagem matemática.

### 2.2- Irracionais e seu ensino

Ripoll (2004) realiza observações importantes sobre a definição de irracionais, e levanta apontamentos que merecem atenção. Segundo a autora, as caracterizações de números irracionais mais encontradas nos livros didáticos para a Escola Básica são as seguintes, divididas em grupos de semelhança:

(A) “Um número é irracional se não puder ser escrito na forma a/b com a; b ϵ Z e b não-nulo”. “Irracional é o número que não pode ser escrito na forma de fração".

(B) “Irracional é o número cuja representação decimal é infinita e não-periódica”. “Todo número escrito na forma de um decimal infinito e não-periódico é um número irracional".

(C) “Os números irracionais representam medidas de segmentos que são incomensuráveis com a unidade".

Crítica sobre cada uma destas descrições:

Tanto em (A) quanto em (B) ficam pressupostos o conhecimento da existência de outros números além do universo trabalhado até o momento pelos alunos (a saber, o de números racionais) - o que é até, no mínimo, incoerente, quando o que se quer é ampliar o conjunto dos números; fica pressuposta também a capacidade de um manejo com tais números que os permitam saber decidir se eles podem ou não ser escritos na forma de fração. Mas, mesmo que trabalhemos sob a premissa que o aluno saiba que existem outros números, temos problemas:

Em (A): Alunos de oitava série, num questionário aplicado pelos alunos da Licenciatura da UFRGS, afirmam que $\sqrt{-1}$ é irracional, pois também não pode ser escrito na forma de fração. Mesmo que está confusão não surja neste momento, ela poderá aparecer quando, mais tarde, seja abordado o assunto “Números Complexos". De fato, existem demonstrações para comprovar que *i* não pode ser escrito na forma de fração que podem muito bem ser utilizadas para irracionais. Modo que então, pelas definições colocadas em (A) concluiríamos que é irracional. Em outras palavras: Números imaginários não podem ser escritos na forma de fração, e nem por isso são irracionais.

Segundo Silva (2014), os números irracionais ensinados na escola são aqueles obtidos através de raízes, senos, cossenos, tangentes e logaritmos “inexatos” (não racionais), como, por exemplo, √ 2, √3, sen (8), cos (9), tan (10), log 3 etc. Como todos os irracionais têm representação infinita, sua localização na reta deve ser aproximada, e, portanto, haveria necessidade de se ensinar métodos de aproximação, o que, lamentavelmente, não é feito.

Os motivos, por que não são ensinados, são variados, e aqui destacaremos três: primeiro porque não consta no programa tradicional do ensino médio; segundo, porque se acredita que os melhores métodos de aproximação se utilizam de ferramentas do cálculo que também não está neste programa; e terceiro, porque no contexto do ensino básico, muitos professores desconhecem métodos simples de aproximação que poderiam ser apresentados aos alunos usando apenas uma calculadora de bolso, ou por ”princípios” da sua formação, são contra o uso de recursos eletrônicos em sala de aula. Além disso, alguns irracionais são “definidos” de um modo misterioso para o aluno, como, por exemplo, os números $\pi$ = 3, 1415926535... ou $e$ = 2, 718281828... Isso sugere a ideia de que cada nova casa decimal aparece aleatoriamente, e desta forma, impossibilita sua localização e precisão.

De acordo com Ripoll (2004) em geral, na sua formação dentro do curso de Licenciatura, o futuro professor faz um curso de Análise na Reta ou similar, onde é feita a construção dos números reais. Mas ali o conjunto dos Reais é construído como complemento de Q via cortes de Dedekind ou sequências de Cauchy, deduzindo-se dessa estrutura as demais propriedades, e muito pouco (ou nada) é esclarecido sobre os conflitos normalmente existentes sobre este assunto. Daí, os licenciados voltam ao Ensino Básico, agora como professores, sem o devido esclarecimento sobre tal assunto, e sem, por exemplo, nunca terem “feito a ponte" entre aquela construção vista em Análise na Reta e a resposta às suas perguntas.

Para Silva (2014), explicar para o aluno a necessidade de saber que existe um número, não inteiro, que não tem representação decimal finita, e que não tem representação como fração, chamado número irracional, cuja representação é decimal infinita e não-periódica, mas que sempre pode ser substituído (aproximado) por um número racional, é uma tarefa, no mínimo, árdua. E de fato um convite à exploração de mais um conjunto numérico abstrato que surge, através da descoberta de novos elementos e suas propriedades. Uma aventura intelectual matemática disfarçada de exercício de raciocínio lógico. Precisamos fazer exemplificações, operações e aproximações com os mais variados tipos de números reais. Pois é através dessa experiência prática que o aluno intelectualmente se aproxima das características e propriedades dos diferentes números reais.

Pietropaolo, Corbo e Campos (2013) analisando resultados de sua pesquisa sob a perspectiva de Tall & Vinner (1981), concluíram que a imagem conceitual construída pela maioria dos participantes do estudo, relativa aos números irracionais, era principalmente constituída por noções que pertencem ao campo numérico, contendo, em alguns casos, concepções incorretas – por exemplo, relativas às representações e à classificação desses números. A *incomensurabilidade de grandezas – interpretação geométrica* dos números irracionais, conceito cuja discussão pode favorecer a compreensão representativa de medidas de quaisquer grandezas, não constava do repertório de conhecimentos do conteúdo específico acumulados pelos professores. Esta constatação indica lacunas também nos conhecimentos pedagógicos necessários à apresentação desse conteúdo aos alunos. Tais resultados colocam em destaque a necessidade de promover, nos cursos de formação inicial e/ou continuada, discussões sobre a relevância dos números irracionais nos currículos de Matemática, sobre as dificuldades vivenciadas pelos estudantes quando iniciam a construção desse conhecimento e sobre a importância de seu estudo nas diversas etapas escolares.

Pommer (2012) afirma que ainda a esse respeito, é necessário reiterar o que foi dito anteriormente, sobre a importância de distribuir o estudo dos números irracionais não apenas nos dois últimos anos do Ensino Fundamental, mas também ao longo do Ensino Médio e nos cursos de Licenciatura em Matemática, para que se deem a consolidação e a ampliação desse conhecimento em etapas escolares subsequentes, nas quais os estudantes certamente já desenvolveram outras habilidades necessárias à compreensão e ao aprofundamento desse assunto.

Corbo (2012) relata que, em virtude de todo o exposto, dada a importância dos números irracionais para a compreensão da ampliação dos campos numéricos, seu estudo não pode receber uma atenção descuidada, que enfatize um único aspecto (por exemplo, o algorítmico), sob pena de provocar a elaboração de uma concepção desses números despida de significado. Isto é, a abordagem dos irracionais não pode ser feita por meio de um trabalho aligeirado, fraco, ainda que se considere toda a complexidade inerente à construção desse conhecimento.

Jover (2013) realizou uma oficina em quatro encontros, com atividades de uma hora de duração, equivalente a cinco períodos de aula, com a participação ativa dos alunos proporcionada pelo uso do software Geogebra. O estudo de números irracionais em aulas expositivas se estendeu durante um bimestre letivo (mais de vinte períodos). A diversidade da metodologia, utilizada para alcançar o mesmo propósito, apontou que a experiência proporciona mais, em menos tempo. Contudo, a aprendizagem só acontece se o aluno estiver aberto para a experiência. O discurso do educador de que "não há tempo, é necessário vencer o conteúdo" mostra uma visão da educação que anula a experiência. A preocupação excessiva do professor em vencer o conteúdo, acompanhada da quantidade de informação e de trabalho, se contrapõe à oportunidade de propiciar a aprendizagem pela experiência e de efetivamente construir o conhecimento proposto.

Laurentino (2013) afirma que também aprendemos que enquanto os números racionais são enumeráveis, os irracionais não o são, surgindo aí o primeiro resultado interessante de que podemos comparar conjuntos infinitos e obter "infinitos maiores que outros infinitos". Kindel (2012) aponta que um conjunto é enumerável se for possível estabelecer uma relação bijetora entre ele e o conjunto dos números naturais, ou seja, um conjunto infinito enumerável é aquele que possui infinitos termos, porém somos capazes de nomear cada um deles, considere o conjunto X= {x1, x2, x3,…} um conjunto finito, encontramos facilmente uma bijeção deste conjunto com os naturais, que será dada por f(n) =xn, assim, x1 = f(1), x2 = f(2),…, xn = f(n),…

Outra variável a ser considerada é a apresentação dos conjuntos numéricos em uma ordem reorganizada e diferente da que foi constituída através da história. Kindel (1998) afirma que a matemática escolar apresenta convencionalmente os conjuntos numéricos da seguinte forma: **N** C **Z** C **Q** U **I** = **R** C **C**, que se baseia no processo de axiomatização aritmética, cuja preocupação era a construção da aritmética como um sistema orgânico com fundamento lógico. Esta colocação simplista leva professores e alunos a acreditar que se "compreendemos bem" os números naturais, a construção dos outros conjuntos numéricos flui naturalmente, acreditando os estudantes na aplicação direta de propriedades dos naturais a outros conjuntos. Um caso exemplar que nos obriga a pensar simultaneamente no didático e na matemática é o que entende a fração ¾ como sendo dois naturais 3 e 4, onde se pode fazer 3+1 = 4 e 4+1= 5, então a fração ¾ = (3+1) / (4+1) = 4/5. O erro didático, neste caso, consiste em que não estão sendo reconhecidas as características diferentes dos números introduzidos, o mesmo costuma acontecer a partir da apresentação superficial do conjunto dos números irracionais.

Neste contexto, onde os conjuntos numéricos estão organizados de forma embutida como Matrioskas russas, pouco se percebe em relação ao desenvolvimento histórico e suas relações com as necessidades humanas. O estudante pode imaginar, seguindo a ordem apresentada, que os números racionais e irracionais surgiram logo após o entendimento sobre números inteiros, no entanto, foram mais de 1500 anos a partir de 300 a.C para a aceitação dos números negativos e, além disso, essa aceitação demandou discussões e considerações de diversos matemáticos.

A partir destes primeiros indicativos sobre as demandas e falhas no ensino de irracionais tornou-se necessário realizar um levantamento mais consolidado sobre os aspectos conceituais desse conjunto numérico e as práticas didáticas direcionadas para tal.

### 2.3- Levantamento Em Periódicos

Nesta etapa da pesquisa foi realizado um levantamento dos trabalhos de pesquisa relacionados ao conceito de número irracional. O método selecionado foi a presença dos *termos pesquisados* no título ou nas palavras-chave de cada trabalho. Os termos pesquisados foram: *irracionais*, *números irracionais* e *conjunto dos irracionais*. Surgiu o interesse pela pesquisa dos termos número π e número φ, no entanto os espaços para pesquisa não aceitam tais símbolos. Os periódicos analisados foram: *Jornal Internacional De Estudos Em Educação Matemática, Educação Matemática Pesquisa, Perspectivas Da Educação Matemática, Zetetiké, Revista Eletrônica De Educação Matemática*, estes, analisados no período de sete anos, janeiro de 2010 a dezembro de 2016. O critério para escolha dos periódicos foi a busca por espaços que objetivem a publicação de artigos que reflitam sobre pesquisas em Educação Matemática, observando tanto a variedade de temas quanto as diferentes metodologias adotadas, além disso, priorizou-se aqueles que possuem reconhecimento Nacional. As observações sobre este levantamento serviram de norte para o progresso da pesquisa no concernente às abordagens conceituais do conjunto do número irracionais, ou seja, nas características particulares de tais números e nas demandas didáticas para uma construção conceitual abrangente para os mesmos. Não foram encontradas publicações enquadradas nos parâmetros da pesquisa nos seguintes periódicos:

- Jornal internacional de estudos em educação matemática;
- Educação matemática pesquisa;
- Vydia. Revista eletrônica.
- Revista Eletrônica De Educação Matemática

Quatro artigos foram encontrados nos demais periódicos, a saber:

- *Veridiana Rezende, Clélia Maria Ignatius Nogueira*. Existe ou não existe um quadrado de medida de área 13 cm2?
- *Eliana Farias e Soares, Maria Cristina Costa Ferreira, Plínio Cavalcanti Moreira*. Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura.
- *Veridiana Rezende, Clélia Maria Ignatius Nogueira*. Conhecimentos de Alunos Brasileiros e Franceses Relacionados ao Campo Conceitual dos Números Irracionais
- *Antonio Sales, José Felice*. A Racionalização de Frações Irracionais: ideias implícitas e adjacentes.

Na tabela abaixo se encontram enumerados os artigos encontrados em cada periódico pesquisado, com as respectivas informações pertinentes.

**Tabela 1- Primeiro levantamento em periódicos (Contínua)**

| ORIGEM | PALAVRA CHAVE | ARTIGO | RESUMO |
|---|---|---|---|
| EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA.<br>http://www.sbembrasil.org.br/revista/index.php/emr | Números Irracionais<br>Ou<br>Conjunto dos irracionais | Existe ou não existe um quadrado de medida de área 13 cm2?<br>*Veridiana Rezende, Clélia Maria Ignatius nogueira* | Apresentamos neste trabalho quatro atividades para serem desenvolvidas em sala de aula como uma sequencia introdutória ao estudo dos números irracionais. Estas atividades têm como objetivo favorecer a reflexão e a possível desestabilização de conhecimentos falsos, mobilizados pelos alunos durante a aprendizagem deste conceito. Elas constituíram parte do instrumento de pesquisa e análises de uma investigação mais ampla que realizamos sobre os números irracionais no ensino de matemática. |
| ZETETIKÉ. REVISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.<br>http://ojs.fe.unicamp.br/ged/index.php/zetetike/%3b | Números Irracionais<br>Ou<br>Conjunto dos irracionais | Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura. | Os autores acreditam que uma nova abordagem dos sistemas numéricos deve ser construída especificamente voltada para a formação de professores. Tal abordagem teria que partir fundamentalmente da problematização das representações conceituais já existentes entre os licenciados e chegar a uma visão global do conjunto R que efetivamente instrumentalize para o ensino. Para conhecer melhor essas imagens conceituais, foi aplicado um questionário a 84 alunos dos alunos dos cursos de Matemática da UFMG e da UFSC e os resultados são analisados neste artigo. O significado da incomensurabilidade de dois segmentos, o sentindo e a necessidade dos irracionais passa ao largo de quase todas as respostas. Esse parecer ser o ponto central das dificuldades na compreensão de uma série de conceitos ligados à estrutura dos reais.<br><br>Formação de professores; Licenciatura em Matemática; Formação matemática do Licenciando; Números reais; Números irracionais. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA<br>http://seer.ufms.br/index.php/pedmat | Números Irracionais<br>Ou<br>Conjunto dos irracionais | Conhecimentos de Alunos Brasileiros e Franceses Relacionados ao Campo Conceitual dos Números Irracionais<br><br>*Veridiana Rezende, Clélia Maria Ignatius Nogueira* | A presente pesquisa foi desenvolvida com vistas a identificar conhecimentos relacionados aos números irracionais, mobilizados em resolução de atividades matemáticas, por alunos brasileiros, concluintes do Ensino Fundamental, Médio e Licenciatura em Matemática, e alunos franceses, concluintes de níveis de ensino correspondentes. O motivo de se investigar sujeitos de países distintos decorre do fato de que os currículos da Educação Básica do Brasil e da França apresentam diferenças, especialmente em relação aos irracionais. Como procedimentos metodológicos realizaram-se entrevistas individuais com resolução de atividades matemáticas, que foram filmadas. No decorrer das análises buscou-se identificar os possíveis teoremas em ação falsos mobilizados nas respostas dos alunos. Os resultados apontam que o fato de os números irracionais estarem explícitos ou não nos currículos e livros didáticos não interfere no desempenho dos alunos em relação a esse conceito. Ao contrário, é a experiência escolar e a diversidade de situações matemáticas que eles vivenciam que vai favorecer a aprendizagem relacionada aos números irracionais. |
| PERSPECTIVAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA<br>http://seer.ufms.br/index.php/pedmat | Números Irracionais<br>Ou<br>Conjunto dos irracionais | A Racionalização de Frações Irracionais: ideias implícitas e adjacentes<br><br>*Antonio Sales, José Felice* | O presente trabalho consiste numa discussão sobre o processo de racionalização das frações irracionais. Sendo resultado de uma discussão entre colegas sobre o assunto apresenta resumidamente o significado da racionalização, as diversas ideias que conduzem a uma divisão e como essas ideias influenciam no entendimento de fração irracional. Analisa a valência instrumental didática da forma racionalizada na perspectiva da Teoria Antropológica do Didático e as dificuldades para o entendimento desse tipo de fração. Descortina a matemática que se oculta no processo de racionalização e conclui que a ideia de |

| | |
|---|---|
| | divisão como medida interna é a que melhor explica a fração irracional. |

Fonte: Produção própria

Além deste levantamento realizado nos periódicos supracitados, realizamos também um mapeamento dos artigos publicados no GEPEM[2], no entanto não foram encontrados, no período de 2000 a 2016, registros de trabalho com as palavras-chaves da busca geral detalhados acima, assim expandimos o período pesquisado englobando toda a publicação do Boletim Gepem para todo o período de publicação, ou seja, de 1976 a 2016. 2

Neste mapeamento foram encontrados três artigos com referência indireta às palavras-chave "Números irracionais" ou "conjunto dos irracionais", tanto no título quanto no resumo. A saber:

**Tabela 2- Segundo Levantamento. Boletim Gepem**

| Boletim | Título | Autor | Assunto |
|---|---|---|---|
| 26/1990 | **Sobre a construção dos números reais.** | Luiz Adalto da Justa Medeiros | Conjunto dos números Reais |
| 27/1990 | **Cálculo numérico da raiz quadrada** | José Paulo Carneiro | Referências aos números irracionais |
| 30/1992 | **Corte de Dedekind e o número $\pi$** | Luiz Adalto da Justa Medeiros | Construção do conjunto dos números reais e estudos sobre o número $\pi$. |

Fonte: Produção própria

Os trabalhos encontrados apresentaram enriquecedor suporte didático concernente à sugestão de propostas metodológicas e produção de tarefas investigativas e exploratórias. No entanto, permaneceu a demanda de apresentação de abordagens conceituais sobre as características fundamentais do conjunto dos números irracionais. Fez-se necessário buscar embasamento teórico que respondesse o seguinte questionamento: Quais conceitos necessitam ser apresentados para viabilizar a efetiva compreensão sobre os números irracionais?

Tornou-se necessário ampliar este levantamento em busca da especificação dos conceitos fundamentais para a aprendizagem das propriedades destes números. Sendo assim, recorremos à ferramenta virtual de busca *Google Acadêmico,* no intuito de analisar teses, dissertações e Artigos de Eventos Nacionais e Internacionais, buscando por referências conceituais para o conjunto dos números irracionais.

[2] Este levantamento, com uma abordagem mais ampla, incluindo também o conjunto dos números racionais, foi submetido ao periódico Boletim Gepem como Estado da Arte sobre números racionais e Irracionais.

**Tabela 3- Terceiro levantamento (contínua)**

| ORIGEM | PALAVRA CHAVE | ARTIGO | RESUMO |
|---|---|---|---|
| UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL INSTITUTO DE MATEMÁTICA<br>http://euler.mat.ufrgs.br/~vclotilde/disciplinas/html/cultura_matematica_%20numero%20_%20ouro%20.pdf | Números Irracionais<br>Ou<br>Conjunto dos irracionais | O número de ouro como instrumento de aprendizagem significativa no estudo dos números irracionais. | Este trabalho tem como eixo o conceito do número de ouro. A partir daí desenvolve uma proposta de ensino que inclui outros tópicos fundamentais na matemática escolar: noções de medida, razão e estimativa, números irracionais e operações com radicais. |
| PROFMAT/UFF<br>http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/409/2011_00280_GRAZIELE_SOUZA_MOZER.pdf?Sequence=1 | Números Irracionais<br>Ou<br>Conjunto dos irracionais | Para que servem os números irracionais? Manifestações em aritmética, combinatória e geometria<br><br>GRAZIELE SOUZA MOZER | No Ensino Básico, a justificativa apresentada para o estudo dos números irracionais se apóia principalmente no fato de que esses números aparecem em Geometria com fórmulas para o calculo de perímetros, áreas e volumes e em Álgebra com solo¸ solução de equações. Neste ˜ trabalho procuramos dar um enfoque diferente aos números irracionais: apresentamos vários exemplos onde algo interessante e não˜ obvio acontece porque um determinado número é irracional. Esperamos que esta nova perspectiva que articula números irracionais com problemas em aritmética, combinatória e geometria seja útil aos colegas professores e aos alunos de licenciatura em Matemática interessados no ensino e na aprendizagem de números irracionais. |
| TESE/USP<br>http://repositorio.minedu.gob.pe/bitstream/handle/123456789/1633/2012_Pommer_A%20constru%C3%A7%C3%A | Números Irracionais<br>Ou<br>Conjunto dos irracionais | A construção de significados dos números irracionais na educação básica.<br><br>Wagner Marcelo Pommer | Estudo qualitativo orientado pela questão "Como são abordados os números irracionais no ensino básico, considerando como fonte os livros didáticos de matemática?" |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3o%20de%20significos%20dos%20n%C3%BAmeros%20irracionais%20no%20ensino%20b%C3%A1sico.pdf?sequence=1&isAllowed | | | |
| UNIVERSIDADE SEVERINO SOMBRA Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu Mestrado Profissional em Educação Matemática<br>http://www.uss.br/arquivos/posgraduacao/strictosensu/educacaoMatematica/dissertacoes/2012/DISSERTACA_Sonia_Cristina_da_Cruz_Mendes.pdf | Números Irracionais<br>Ou<br>Conjunto dos irracionais | PRÁTICAS PEDAGÓGICAS PARA O ENSINO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS<br><br>SÔNIA CRISTINA DA CRUZ MENDES | Constitui-se em uma investigação de práticas pedagógicas para o ensino dos números irracionais, com o objetivo de fornecer material para auxiliar os professores em suas práticas e estimular a reflexão sobre a importância de uma boa formação desse conceito. Será agregada ao trabalho uma construção epistemológica no estudo da razão áurea, quando se trata de relacionar a existência dos números irracionais de forma articulada à realidade e nas construções geométricas. |
| I CEMACYC, República Dominicana, 2013<br>http://funes.uniandes.edu.co/4245/1/Mendon%C3%A7aOsn%C3%BAmerosCemacyc2013.pdf | Números Irracionais<br>Ou<br>Conjunto dos irracionais | Os Números Irracionais e seu ensino delineando a imagem conceitual de um grupo de professores<br><br>Ruy César Pietropaolo<br><br>Olga Corbo<br><br>Tânia Maria Mendonça Campos | Este artigo resulta de investigação sobre a imagem conceitual relativa aos números irracionais, constituída por um grupo de professores da rede pública da cidade de São Paulo. Consideramos as concepções explicitadas pelo grupo, em resposta a questionários envolvendo itens concernentes aos conhecimentos necessários ao professor, relativos ao conteúdo "números racionais e irracionais" e ao seu ensino |
| Anais SBHC/2012<br>http://www.sbhc.org.br/resources/anais/10/1345071046_ARQUIVO_13oSNHCT- | Números Irracionais<br>Ou<br>Conjunto dos irracionais | Contrastes e Similaridades nas abordagens de Dedekind e Tannery no que se refere à construção dos Números Irracionais | A partir de uma reflexão inicial foi possível discutir as diferenças nas concepções de rigor que emergiram tanto do movimento alemão quanto do movimento francês de fundamentação da Análise e compreender o status dado a este |

| | | | |
|---|---|---|---|
| TrabalhoCompleto_15ago2012_.pdf | | LUCIANA FELIX DA COSTA SANTOS1 TATIANA MARINS ROQUE2 | conceito no que diz respeito à valorização ou não da intuição. Também é possível propor um ponto de vista alternativo ao relato histórico tradicional que aponta Dedekind como "pai" ou "introdutor" único da abordagem dos "cortes" na definição de número real, além de trazer à tona outras várias das peculiaridades presentes nos textos. |
| PROFMAT<br><br>http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/589 | Números Irracionais<br>Ou<br>Conjunto dos irracionais | Frações Contínuas - Uma Forma de Representar e de Aproximar os Números Irracionais<br>Raimundo Silva Nascimento | Neste trabalho, fizemos um estudo sobre a teoria das frações contínuas, demonstrando algumas de suas propriedades e relatando também um pouco da sua história. Além disso, apresentamos Frações Contínuas como uma boa "ferramenta" para os professores de o ensino básico justificar de forma mais convincente a formação dos números reais. Um assunto presente em diversas áreas da Matemática, as frações contínuas são muito utilizadas porque fornecem as melhores aproximações racionais para números irracionais. O que hoje conhecemos, foi estudado por grandes matemáticos durante séculos. |
| REMAT/IFRS<br><br>https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/1246/1083 | Números Irracionais<br>Ou<br>Conjunto dos irracionais | O ensino de Matemática em uma perspectiva investigativa: a construção de alguns números irracionais<br><br>Caroline Maffi<br>Francieli Bandeira de Fraga<br>Diego de Vargas Matos | Esta oficina tem como objetivo principal apresentar uma sequência de atividades enfatizando a prática da investigação matemática em sala de aula, envolvendo números reais e em especial os números irracionais para estudantes do Ensino Fundamental. Para tanto, são desenvolvidas três atividades. A primeira sugere uma exploração da reta numérica e aproximações sucessivas de radicais. Na segunda atividade, é proposto a construção da espiral pitagórica. Finalmente, na terceira atividade, utiliza-se o Tangran como recurso para explorar medidas que envolvam números irracionais. Busca-se discutir e ampliar o conjunto dos números reais, por meio das |

| | | |
|---|---|---|
| | | atividades de investigação matemática. Além disso, evidencia-se que o conceito de número irracional, quando construído por meio de atividades investigativas e considerando os aspectos históricos, torna-se mais compreensível e significativo. A abordagem por meio de investigações matemáticas torna o processo de aprendizagem mais dinâmico e mais interessante para os estudantes. - |

Este último levantamento, mais amplo, gerou resultados positivos em relação ao contorno conceitual do conjunto dos números irracionais. Esta determinação apresentou-se fundamental para o delineamento dos critérios de análise dos resultados das aplicações de cada tarefa. Dos dez artigos encontrados neste último levantamento quatro mereceram destaque por seu conteúdo sobre a estrutura conceitual e didática dos números irracionais.

**Tabela 4- Destaques do levantamento (contínua)**

| TÍTULO<br>AUTOR<br>ANO | ORIGEM | DESTAQUE DE ABORDAGEM CONCEITUAL |
|---|---|---|
| A construção de significados dos números irracionais na educação básica.<br><br>Wagner Marcelo Pommer<br>2012 | Tese de doutorado/<br>USP | • Construção do conceito numérico através do processo intuitivo;<br>• Eixos constitutivos: Finito/infinito, exato/aproximado e discreto/contínuo;<br>• Aproximação a um número racional;<br>• Comensurável e incomensurável;<br>• Representação geométrica/conceito de medida. |
| Práticas pedagógicas para o ensino dos números irracionais.<br><br>Sônia Cristina da Cruz Mendes<br><br>2012 | Dissertação de Mestrado<br>USS | • Construções geométricas que explorem a percepção, a visualização, a interpretação, a noção de infinito;<br>• Conceito de completude do conjunto dos números reais, com a inserção dos números irracionais na reta real;<br>• Construções geométricas e algébricas do número $\phi$; |

| | | |
|---|---|---|
| | | • Importância e apresentação histórica;<br>• Construções geométricas; |
| Os Números Irracionais e seu ensino delineando a imagem conceitual de um grupo de professores<br><br>Ruy César Pietropaolo<br>Olga Corbo<br>Tânia Maria Mendonça Campos<br>2013 | I CEMACYC 2013 | • Conceito de incomensurabilidade de grandezas e de sua relação com os irracionais;<br>• Ir além da exploração de propriedades e operações com radicais;<br>• Aproximações racionais para números irracionais;<br>• Localização de números irracionais na reta numérica;<br>• Indispensabilidade dos números irracionais. |
| O ensino de Matemática em uma perspectiva investigativa: a construção de alguns números irracionais<br>Caroline Maffi, Francieli B. Fraga, Diego V. Matos<br><br>2015 | REMAT | • Aspectos históricos;<br>• Exploração da reta numérica;<br>• Espiral Pitagórica e representação geométrica:<br>• Incomensurabilidade de $\sqrt{2}$ |

## 2.4- Parâmetros fundamentais para a compreensão da irracionalidade

A partir desta explanação sobre as percepções fundamentais para construção do conceito de número irracional, foi possível elaborar uma linha estrutural de investigação. Nesta encontram-se os seguintes aspectos Parâmetros fundamentais para a compreensão da irracionalidade:

(1) Aspectos de indispensabilidade e fundamentação histórica. Incomensurabilidade;

(2) Eixos constitutivos: Finito/infinito, exato/aproximado e discreto/contínuo;

(3) Representação e construção geométrica;

(4) Representação decimal, infinita e não periódica/aproximação/pertinência na reta numérica;

Pensar nas múltiplas possibilidades de abordagens e características dos números irracionais é uma tarefa que compensa o esforço. Como consequência deste esforço, no capitulo seguinte, dedicado à organização da pesquisa, sob a luz de uma metodologia cujas características prevêem diferentes momentos de iteração, interação entre os participantes é uma reflexão sobre a prática em conexão com as teorias, a fim de embasar nossas análises a partir desses pressupostos.

# CAPÍTULO III- METODOLOGIA

Arquitetar um ambiente propício à investigação, já é um grande feito, porém, não é suficiente para que ocorra a aprendizagem. É preciso que sejam criadas condições para o diálogo. Ou seja, a possibilidade de intervenção, interação, reflexões, convocar ao debate, à discussão, trazendo os atores (professor, pesquisador, estudantes, envolvidos no processo) para este ambiente cenário.

Nesta direção, é apresentada uma ideia de implementação pautada nos pressupostos do *Design-Based Research (DBR),* em consonância com vivências em outros espaços educacionais e com os objetivos da disciplina em curso, lócus do seu desenvolvimento, de forma a torná-la coerente com os objetivos acordados nesta investigação.

## 3.1- DBR (Design Based Research)

Por esta se tratar de uma pesquisa voltada para a qualidade do processo de ensino aprendizagem e a manutenção das práticas didáticas na formação, inicial e continuada, de professores, a metodologia científica denominada DBR (Design Based Research) apresentou adequação satisfatória as expectativa envolvidas.

Sobre essa metodologia, Santiago e Matta (2016) destacam seu surgimento por volta anos noventa, mais precisamente em 1992, quando Allan Collins, em parceria com Ann Brown, postulou as primeiras noções, introduzindo-a no campo da educação a partir do conceito de Design Experiments.

De acordo com Matta, Silva e Boaventura (2014), Design-Based Research – DBR, como está se tornando conhecida, é uma metodologia de pesquisa que desenvolve a avaliação de seus resultados e desenvolvimento, durante processo de investigação, ou ainda formativamente. É importante identificar o caráter formativo, a necessidade de associar o desenvolvimento de uma investigação a um resultado concreto, a uma solução prática e aplicada para um problema ou situação dada. Delimita-se como sendo de uma abordagem específica, parecida com a pesquisa-ação devido à necessidade de considerar todos os envolvidos como autores, pesquisadores e parte da equipe de pesquisa, que constroem o resultado coletivamente No entanto, se diferencia pela sua explícita objetivação em resultados e melhorias concretas e perceptíveis associada ao desenvolvimento de suas pesquisas.

A DBR foca no desenvolvimento de aplicações que possam ser realizadas e de fato integradas às práticas sociais comunitárias, considerando sempre sua diversidade e propriedades específicas, mas também aquilo que puder ser generalizado e assim facilitar a resolução de outros problemas.

Ainda segundo Matta, Silva e Boaventura (2014), na DBR as teorias são ponto de partida, de chegada e de investigação. Elas se mostram como princípios de design e modelagem para as soluções práticas demandadas. Utiliza-se o fundamento teórico escolhido e o diálogo com o contexto de aplicação, para que a pesquisa desenvolva o propósito de intervir no campo das práxis pedagógicas que pretenderá produzir:

a) Produtos educacionais tais como materiais didáticos de toda natureza e suporte;

b) Processos pedagógicos como, por exemplo, recomendações de atitude docente, novas propostas didáticas;

c) Programas educacionais como currículos, cursos, organização de temas e didáticas, também desenvolvimento profissional para professores;

d) Políticas educacionais como protocolos de avaliação docente ou discente, procedimentos e recomendações de investimento, aquisição, opções para relação entre a escola e a comunidade.

De fato, a DBR começa com a identificação de uma situação que necessita de intervenção e de um resultado de desenvolvimento prático, somente possível de obter a partir de uma investigação científica de natureza aplicada. Colaborativa: a DBR é sempre conduzida em meio a vários graus de colaboração, é moldada pelo diálogo entre a sabedoria dos participantes, o conhecimento teórico, suas interpretações e advindos da literatura, e pelo conjunto dos testes e validações diversas realizadas em campo. Além destas características, ainda se destaca a Iteratividade, a DBR, por ser uma metodologia voltada para a construção de soluções práticas, não é feita para terminar. De fato, cada desenvolvimento é o resultado de uma etapa, de um processo de arquitetura cognitiva, e necessariamente será o início do próximo momento de aperfeiçoamento e de melhorias

De acordo com Mazzardo (2016), as características da DBR são as seguintes:

1) Metodologia flexível – a flexibilidade possibilita o desenvolvimento dos ciclos iterativos e o redesign (refinamento) constante;

2) Colaboração entre pesquisadores e participantes - todos os participantes devem estar envolvidos no projeto de investigação, com o objetivo de assegurar a realização do plano inicial e melhorar o projeto em curso em colaboração;

3) Fundamentada na teoria e na prática e realizada em contextos do mundo real;

Segundo Collins ET al. (2004) as investigações podem ser realizadas em escolas, universidades, salas de aula e ambientes virtuais de aprendizagem. O desenvolvimento da DBR em ambientes reais apresenta variáveis que não podem ser controladas, exigindo dos participantes, observações constantes dos aspectos qualitativos e a avaliação através de ciclos iterativos para refinar a teoria e a prática

Mazzardo (2016), no Congresso Ibero Americano de Investigação Qualitativa, considera que, como nos passos de avaliação do processo são utilizados instrumentos tradicionalmente adstritos a uma metodologia ou a outra, surge a vontade de classificar a DBR numa ou outra. Fruto, portanto, da sua juventude a DBR que aspira a evidenciar práticas que na sua maturidade poderão verter para um modelo generalizável.

Com o intuito de melhor posicionar o leitor nos processos metodológicos a serem descritos, os detalhes instrumentais da pesquisa em si serão detalhados a seguir.

### 3.2- Participantes e Local

Os participantes da pesquisa foram os alunos do curso de licenciatura em matemática do Instituto Multidisciplinar da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, inscritos na disciplina Ensino de Matemática I e II. A turma apresenta aspecto heterogêneo, pois a inscrição é livre a partir do 3º período, assim constam como inscritos alunos de diversos períodos.

O local onde a pesquisa se realizou foi o Instituto Multidisciplinar, uma Unidade Acadêmica da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro situada no município de Nova Iguaçu, em funcionamento desde o ano de 2006. Campus instalado na Baixada Fluminense com o intuito de ampliar a oferta de Educação em nível Superior na área.

### 3.3- Coleta de dados, recursos e análise.

Optamos pelos seguintes recursos na coleta de dados:

- Questionário de sondagem prévia;
- Diário de campo;
- Registro escrito dos alunos das atividades individuais e em grupo;
- Gravações em áudio dos trabalhos desenvolvidos.

A turma foi dividida, sempre que possível, em grupo de 3 ou 4 integrantes, formados em cada aula. Os grupos não possuíram formação permanente, ou seja, seus integrantes puderam variar suas formações. Na análise dos dados os estudantes foram caracterizados de duas formas diferentes: Na descrição das respostas do questionário foram apresentados através da Letra Inicial de seus primeiros nomes, seguida pelo período em curso. Na descrição dos áudios foram utilizadas as letras A, B, C ou D para cada integrante dos grupos, no entanto, não há relação entre as respostas indicadas por essa caracterização entre os grupos, ou seja, o *Aluno A* apresentado no grupo1/aula1 não necessariamente será o mesmo *Aluno A* no grupo1/aula2.

*Questionário de sondagem*

Na fase 1 da pesquisa de design foi aplicado um questionário individual com o objetivo de sondar o perfil acadêmico e profissional de cada estudante, as características individuais e as noções prévias sobre o método investigativo e a construção do conjunto dos números irracionais.

*Diário de Campo*

No Diário de Campo, foram feitas anotações sobre as atividades, os alunos, as dinâmicas no trabalho e as ideias surgidas em função do andamento da pesquisa. Foi registrado o processo de planejamento e aplicação de cada tarefa/aula.

*Áudio*

Em cada atividade as considerações dos grupos foram gravadas, de forma negociada e autorizada por eles previamente. A organização dos grupos será requerida com antecedência e planeja-se que sua estruturação será fixada. Haverá também a gravação geral das atividades através de um dispositivo individual.

*Produções escritas*

Serão aproveitados para a coleta de dados os registros individuais das atividades investigativas, produzidos pelos alunos, e também a produção de um pequeno relatório de aproveitamento de cada uma das atividades.

### 3.4- Ciclos Iterativos e tarefas

Partindo dos preceitos constitutivos da DBR foram planejados 3 ciclos iterativos. Todos aplicados com as diretrizes descritas no capítulo anterior.

A seguir encontra-se tabelada a primeira versão das tarefas propostas, esta construção foi realizada posteriormente à aplicação e análise do questionário de perfil e sondagem e seu processo de elaboração foi realizado sobre a luz das abordagens conceituais previstas no capítulo denominado objeto matemático. No entanto, graças aos aspectos cíclicos da metodologia DBR estas primeira versão pode sofrer alterações a fim de trazer benefícios didáticos e/ ou de metodológicos.

**Tabela 5- Ciclos de aplicação e tarefas**

| TAREFA | TEMPO PREVISTO | OBJETIVO | EXPECTATIVAS |
|---|---|---|---|
| **1: Incomensurabilidade e o paradigma da unidade na medição.** | 2 TEMPOS DE 50 MINUTOS | Refletir sobre o conceito de incomensurabilidade. Experimentar as possibilidades de quebra de paradigma da medição através de unidades. Realizar a releitura do processo histórico da construção dos números irracionais. | Que seja possível perceber a impossibilidade de medir comprimentos irracionais através de unidades ou frações. |

| CICLO | DESCRIÇÃO | SUJEITOS DA PESQUISA |
|---|---|---|
| 1° | Aplicação do questionário de perfil e elaboração da primeira versão das tarefas. | Licenciandos do curso de matemática do Instituto Multidisciplinar da UFRRJ. |
| 2º | Aplicação de seis tarefas desenvolvidas através de análise da história da construção dos números irracionais, de intenção exploratório-investigativa. | Licenciandos do curso de matemática do Instituto Multidisciplinar da UFRRJ. |
| 3º | Analise e redesign das tarefas com aporte teórico.<br>Elaboração do produto | Pesquisadoras |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **2: Introdução aos números irracionais** | 2 TEMPOS DE 50 MINUTOS | Questionar a existência do conjunto dos números irracionais, sua construção histórica e a percepção de sua pertinência na sociedade. | Conjecturar definições alternativas para o conceito de irracional e de número irracional. Observando algumas de suas propriedades através de experimentação. |
| **3: Representações Para Os Números Irracionais** | 2 TEMPOS DE 50 MINUTOS | Testar representações dos números irracionais: Número decimal, posicionamento na reta real e conceito geométrico. | Reconhecer através de experimentação, a propriedade geométrica da raiz de 2 como medida de comprimento.<br>Elaboração de hipóteses e construção de teoria a partir de exercício exploratório. |
| **4: Raiz de 2 e tangram** | 2 TEMPOS DE 50 MINUTOS | Visualizar a representação geométrica da raiz de 2 e sua funcionalidade.<br>Investigar a relação entre a medida do lado do quadrado e as medidas dos lados de cada peça. | A percepção do conceito de irracionalidade. Reconhecimento dos recursos para conclusão deste processo. |
| **5: Sequência didática construção do número PI.** | 2 TEMPOS DE 50 MINUTOS | Explorar as uma das diferentes formas de cálculo do número PI e sua relação com a geometria e com a trigonometria. | Perceber algumas relações sobre o número PI através de investigação e abordagem construtiva.<br>Relacionar conceitos de círculo, circunferência, medida de número irracional, trigonometria. |
| **6: Sequência de Fibonacci e número áureo** | 2 TEMPOS DE 50 MINUTOS | Refletir sobre as definições de sequência numérica, número racional e número irracional.<br>Perceber algumas relações tênues entre geometria e aritmética. | Reconhecer a sequência de Fibonacci em sua representação numérica e geométrica. Observar o comportamento da sequência dos resultados das razões entre os termos. |

| | |
|---|---|
| | Vislumbrar os conceitos de sequência, convergência e noção de limite. |

As atividades na íntegra, considerando as modificações necessárias, encontram-se descritas e apresentadas nos apêndices 1 a 5.

# CAPÍTULO IV- Ciclo 1- Sondagem e planejamento.

A concepção da possibilidade de legitimação de uma pesquisa-interacionista, carrega a demanda de se conhecer a realidade do grupo no qual se pensa intervir e interagir. Assim, como ponto de partida foi realizado uma sondagem sobre o perfil profissional e acadêmico dos estudantes para que se levando em conta termos identificados como fundamentais, estes possam se constituir parte do ambiente de aprendizagem a ser arquitetado. Essa necessidade se faz presente visto que a metodologia escolhida destina ao pesquisador não somente o lugar de observador, mas também o de participante da pesquisa, daí o seu caráter interacionista. Ao longo do processo, o professor/pesquisador interage e intervêm sobre os estudantes, oportunizando mudanças capazes de promover análises e reflexões sobre aspectos da sapiência dos estudantes. Este processo é capaz de promover o crescimento e a mudança sobre os aspectos de seu conhecimento sobre o tema, além de oportunizar o desenvolvimento cognitivo e profissional do grupo de licenciandos e do pesquisador.

## 4.1- Questionário de levantamento e sondagem [3]

O objetivo deste levantamento foi o reconhecer, mesmo que superficialmente, o perfil dos estudantes e foi elaborado sobre três aspectos: vida acadêmica (disciplinas cursadas e evolução no curso; reconhecimento da metodologia exploratório/investigativa e conhecimento acerca dos números irracionais). O questionário completo encontrasse descrito como APÊNDICE A.

Neste levantamento de informações acadêmicas buscou-se sondar a situação atual de cada licenciando no curso e estabelecer um parâmetro em relação às disciplinas em que o conhecimento dos números irracionais é requerido (mesmo que em seu formato operacional, onde reconhecem a utilização, mas não o conceito), bem como a experiência com disciplinas que envolvam a metodologia de investigação matemática. Vale ressaltar que As disciplinas de Ensino de matemática I e II são posicionadas no final do curso, a partir do 6º período e surge como fechamento das disciplinas com conteúdo didático/pedagógico.

O quantitativo de estudantes inscritos nas disciplinas de Ensino de matemática I e II foi o de 29 matrículas, no entanto no decorrer do curso um aluno se desligou. Mesmo com a inscrição oficial de 28 estudantes apenas 20 responderam o questionário. Uns por estarem ausentes durante os dias em que o mesmo foi aplicado, outros por decidirem não participar da pesquisa. Para se integrar à pesquisa os estudantes foram orientados a ler e assinar (em caso de concordância) o Termo de Livre Consentimento, que aqui está aqui incluído como APÊNDICE B.

## 4.2-Vida acadêmica e profissional.

O Objetivo deste primeiro levantamento de informações acadêmicas foi distinguir o nível de evolução de cada licenciando no curso e estabelecer um parâmetro em relação às disciplinas em que o conhecimento dos números irracionais é requerido, bem como a experiência com disciplinas que envolvem a metodologia de investigação matemática.

Ao final do levantamento chegamos a este parecer:

**Tabela 6- Disciplinas já cursadas pelos licenciandos.**

| DISCIPLINAS | ALUNOS QUE CONCLUÍNTES |
|---|---|
| ÁLGEBRA I | 18 |
| ÁLGEBRA II | 17 |
| ÁLGEBRA III | 18 |
| ANÁLISE REAL | 12 |
| CÁLCULO I | 20 |
| CÁLCULO II | 19 |
| CÁLCULO III | 16 |
| CÁLCULO IV | 11 |
| ENSINO DE MATEMÁTICA I | 9 |

Os dados apresentados além de nos informar quais estudantes já concluíram as disciplinas de matemática oferecidas nos períodos anteriores, também nos oferece um quadro sobre a relação entre o período em que estão cursando a disciplina de Ensino de matemática I e II e a quantidade de períodos cursados.

Observando a tabela a cima, percebe-se que dos 20 participantes, mais de 50% dos licenciandos, já concluíram as disciplinas que apresentam conteúdo matemático em nível superior. A partir dessa informação é possível analisar quais conteúdos apresentam relação direta ao conceito de irracionalidade numérica através das ementas de cada disciplina.

Nas ementas e programas analíticos, os conteúdos das disciplinas encontram-se com a seguinte configuração:

**Tabela 7- Programas analíticos (contínua)**

| CÁLCULO I | CÁLCULO II | CÁLCULO III | CÁLCULO II |
|---|---|---|---|
| Funções de uma variável real.<br><br>Gráficos. Limites e continuidade.<br><br>A derivada. Aplicação da derivada.<br><br>A integral.<br><br>A função inversa, o logaritmo e a exponencial | Aplicação da integral definida.<br><br>Cônicas e quádricas.<br><br>Funções de várias variáveis.<br><br>Equações diferenciais ordinárias de 1a ordem.<br><br>Equações diferenciais ordinárias de 2a ordem. | Curvas em R2 e R3.<br><br>Funções vetoriais. Integração múltipla.<br><br>Integração de funções vetoriais.<br><br>Análise vetorial.<br><br>Teoremas integrais. | Séries infinitas.<br><br>Solução de equações diferenciais por séries.<br><br>Equações ordinárias lineares de ordem M > 2.<br><br>Transformadas de Laplace. |
| ÁLGEBRA I | ÁLGEBRA II | ÁLGEBRA III | ÁNÁLISE REAL |
| Lógica proposicional.<br><br>Conjuntos. Relações.<br><br>Funções. Operações. Álgebra de Boole. | Grupos. Grupos cíclicos.<br><br>Homomorfismos e isomorfismos de grupos.<br><br>Grupos quocientes. Teoremas de Sylow. | Anéis. Corpos. Ideais. Anéis quocientes.<br><br>Polinômios sobre um corpo.<br><br>Domínios fatoriais. | Números naturais. Corpos. Seqüências. Séries numéricas.<br><br>Topologia da reta.<br><br>Limites de função. Funções contínuas.<br><br>Derivadas. |

| | |
|---|---|
| | Integral de Riemann. Seqüências e séries de funções. |

Fonte: http://cursos.ufrrj.br/grad/matematica/organizacao/disciplinas/obrigatorias/

Ao observar individualmente as ementas de cada disciplina obrigatória com o intuito de buscar relação direta com o conhecimento matemático sobre números irracionais, podemos destacar os seguintes conteúdos: *Funções de uma variável real, Curvas em R2 e R3, Conjuntos, Relações, Anéis, Corpos, Números naturais, Seqüências, Séries numéricas. T*odos os citados apresentam problematizações que demandam habilidades operatórias relacionadas ao conjunto dos números Reais e consequentemente ao dos números irracionais.

A partir desta análise é possível perceber que os licenciandos são capazes de operar matematicamente com números irracionais, aplicar, comparar e desenvolver demonstrações com os mesmos. No entanto torna-se necessário comparar este dado com as afirmações de Pommer (2012) quando declara que o ensino direcionado aos aspectos operatórios, consiste numa tendência que encobre expressões importantes e significativas envolvendo os números. Para o autor, existem diversos conteúdos (tanto em nível de Educação Básica quanto Superior) que são ensinados no formato operatório, de forma que seja possível dominar algumas propriedades e aplicá-las nos cálculos de forma superficial e aparentemente prática, no entanto esse fator operacional encobre o conceito real do objeto matemático, seu histórico na evolução humana, sua relação com o meio e com outras áreas do conhecimento.

O segundo questionamento objetivou o levantamento de estudantes que já atuam em sala de aula, tanto como professores, quanto como estagiários, incluímos também os que já possuem habilitação para docência nas séries iniciais.

**Tabela 8 - Licenciandos que já lecionam**

| | |
|---|---|
| Sim. Ensino fundamental e/ou médio | 8 |
| Sim. Séries iniciais do Ensino Fundamental | 1 |
| Não | 11 |

Cerca de 90% dos que responderam este item, já trabalham em algum nível de ensino e a maioria, 8 de 11, trabalha no nível a que se destina o curso, formação de professores com habilitação a partir do Ensino Fundamental II. Estes dados reforçam nossa justificativa sobre a necessidade de pensarmos em ações que contribuam para a sala de aula dos futuros professores, visto que a maioria já atua na profissão.

Foi importante salientar o envolvimento dos estudantes com programas de iniciação científica e estágio docente, para que fosse possível comparar os conhecimentos prévios sobre investigação matemática e números irracionais entre os diferentes grupos.

**Tabela 9- Participação em programas de bolsa ou monitoria**

| | |
|---|---|
| Sim | 10 |
| Não | 10 |

Incluídos no grupo de estudantes que participaram de programas de monitoria e iniciação científica, encontram-se 8 que participaram do PIBID no período em que se desenvolveu a pesquisa. Outro dado interessante é a situação profissional destes estudantes, pois quase todos os alunos atuantes no PIBID já atuam como professores, dos 8 bolsistas 7 já trabalham em sala de aula.

Desta forma foi possível consolidar o perfil dos licenciandos envolvidos. No segundo bloco do questionário o foco verteu-se para conhecimentos sobre metodologia de didática da matemática, em principal, a de investigação.

### 4.4- Ideias sobre investigação matemática

**Tabela 10- Questão 4- Sobre Investigação matemática (contínua)**

| Licenciando | Qual é o seu entendimento sobre a metodologia investigativa na educação matemática? |
|---|---|
| V- 3º período | *Essa metodologia é ótima, pois através dela o aluno constrói e quebra conceitos. Chega a diferentes conclusões e em cima dessas analisa o que é válido.* |
| E- 3º período | *Método que provoca no aluno uma resposta criativa.* |
| J- 6º período | *Ainda não tive contato com este tipo de metodologia* |
| R- 10º período | *Não estou familiarizada com este tipo de atividade, pois é a segunda aula que assisto.* |
| D- 8º período | *É o método onde se expõe a matéria ao aluno para discussão da resposta, até que se encontre um consenso comum.* |
| J- 13º período | *É a busca por novos métodos para a educação matemática, são novas técnicas onde o aluno juntamente com o professor cria técnicas para interpretação matemática* |
| Sem identificação | *Pesquisa para que o aluno possa construir a informação* |

| | |
|---|---|
| L- 9º período | *Uma área da matemática que investiga aspectos novos da educação matemática podendo dar efeitos inovadores no processo de ensino.* |
| Jo- 6 º período | *Investigação dos diversos métodos de ensino de matemática.* |
| Ju- 6º período | *Que seria a forma dinâmica de se propor o ensino da matemática, buscando novas técnicas de se ensinar.* |
| Je- 7º período | *O Aluno Tem O Incentivo de pensar e questionar assuntos matemáticos e o professor tem mais percepção da compreensão do aluno.* |
| B- 11º período | *Uma metodologia que não leva as respostas para os alunos, mas os próprios buscam as respostas através de atividades lúdicas.* |
| A-12º Período | *Não Tenho entendimento do assunto. Tenho que conhecer mais.* |
| JO-8º Período | *É fundamental para a construção do conhecimento matemático.* |
| A-6º período | *Necessária para mudar e se atualizar.* |
| P- 7º período | *Bem diferente do tradicional, construtivista, porém mais difícil de aplicar também.* |
| H- 6º período | *Visa tornar o ensino mais dinâmico e atrativo.* |
| R- 7º período | *Ajuda no desenvolvimento da atividade.* |
| D- 8º período | *Instigar a aprendizagem de conceitos matemáticos. Os alunos compreendem pelos seus próprios interesses.* |
| N- 11º período | *Estratégia para perceber a forma de raciocínio de cada pessoa para entender um determinado problema.* |

Foi possível perceber que a participação dos licenciandos em programas de formação inicial (PIBID) contribuiu para que tivessem um posicionamento aparentemente claro sobre investigações matemáticas, diferente dos que consideram o ato de investigar uma atividade restrita aos pesquisadores.

Para compreender melhor o papel das atividades realizadas no programa constatou-se que 70% dos estudantes que participam ou participaram do PIBID vivenciaram este tipo de atividade no grupo do qual fazem parte. Uma característica bem marcante é o trabalho realizado pelo coordenador de área que tem como foco do seu trabalho as atividades investigativas. Abaixo estão listadas algumas respostas especificas de participantes do PIBID:

Je- 7º período- *O Aluno Tem O Incentivo de pensar e questionar assuntos matemáticos e o professor tem mais percepção da compreensão do aluno.*

JO-8º Período- *É fundamental para a construção do conhecimento matemático.*

P- 7º período- *Bem diferente do tradicional, construtivista, porém mais difícil de aplicar também*

D- 8º período- *Instigar a aprendizagem de conceitos matemáticos. Os alunos compreendem pelos seus próprios interesses.*

N- 11º período- *Estratégia para perceber a forma de raciocínio de cada pessoa para entender um determinado problema.*

Foram observadas, nas respostas dos estudantes participantes do PIBID, afirmações sobre o conceito de investigação matemática fundamentadas em suas experiências, bem como exemplos de tarefas mais condizentes com a proposta, enquanto os demais estudantes, não participantes do PIBID, não sinalizaram a compreensão de tal abordagem.

## 4.5- Ideias sobre números Irracionais

**Tabela 11- Questão 5- Conhecimentos prévios sobre números irracionais (contínua)**

| Licenciando | No seu modo de entender, para que servem os números irracionais? Qual é a sua origem? |
|---|---|
| V- 3º período | *Servem para compreender melhor. Não sei sua origem.* |
| E- 3º período | *Registram quantidades mínimas após a vírgula. Não sei qual a origem.* |
| J- 6º período | *São números que não conseguimos definir através de frações. Não sei a origem* |
| R- 10º período | *Lembro dos números irracionais como um grupo à parte. Subconjunto apenas dos números reais.* |
| D- 8º período | *Na geometria servem para calcular perímetros áreas e volumes. Na álgebra para solução de equações. Sua origem foi na Grécia por Pitágoras.* |
| J- 13º período | *Para resolver problemas. É utilizado na geometria para o cálculo da área de triângulos "$\sqrt{2}$"* |
| Sem identificação | *Para a solução de um problema mais aproximado do real. Não sei a origem.* |
| L-9º período | *Os números irracionais servem para dar valores que não se adaptam as classificações quantitativas.* |

| | |
|---|---|
| Jo- 6º período | *Para se estudar a divisão não exata, quando o resultado é uma dízima periódica. Não sei a origem.* |
| Ju- 6 º ano | *Para um entendimento dos números cujo limite é desconhecido. Originaram-se através do estudo mais complexo dos números.* |
| Je- 7º período | *Servem para cálculos na geometria e na aritmética. Não conheço a origem.* |
| B- 11º Período | *Pela necessidade de expressar números onde os números reais não abrangem com exatidão.* |
| A-12º Período | *Servem para tudo. Começando pela classificação, aqueles que são decimais, infinitos e não periódicos.* |
| JO-8º Período | *Os números Irracionais são uma representação de números não periódicos infinitos, é um conjunto fundamental para preencher a reta numérica, além disso, para representar raízes não exatas.* |
| A-6º período | *Justificar parâmetros que os racionais não podem descrever. Não conheço a origem.* |
| P- 7º período | *Causar grandes discussões nos séculos XVI e XVII.* |
| H- 6º período | *Não sei.* |
| R- 7º período | *Entre os séculos XVI e XVII para auxiliar na geometria.* |
| D- 8º período | *Para dar uma função a cálculos sem números inteiros. Não me lembro sua origem.* |
| N- 11º período | *Para resolução de problemas com solução exata. Não tenho noção da origem.* |

Entre as respostas encontram-se aquelas em que os números irracionais exercem a função de instrumento ou estratégia, para resolver problemas da álgebra, da geometria ou da aritmética. "*Na geometria servem para calcular perímetros áreas e volumes". "Na álgebra, para solução de equações."*

Também se podem destacar as que se aproximam da extensão algébrica dos conjuntos numéricos, isto é "*Os números irracionais servem para dar valores que não se adaptam as classificações quantitativas"* ou, "*Na geometria servem para calcular perímetros áreas e volumes. "Na álgebra para solução de equações",* também, são "*utilizados na geometria para o cálculo da área de triângulos"*

Outras abordagens estão relacionadas aos cálculos, como é o caso em que eles servem para: “*Se estudar a divisão não exata, quando o resultado é uma dízima periódica.”;* “*Dar uma função a cálculos sem números inteiros.”;* “*A resolução de problemas com solução exata.”*

Outras aplicações dos números irracionais estão relacionadas à axiomatização dos conjuntos numéricos, com a idéia de limite, de infinito ou de propriedades não satisfeitas pelos demais conjuntos numéricos. Isto é: *“Servem para tudo. Começando pela classificação, aqueles que são decimais, infinitos e não periódicos. Neste sentido, para a solução de um problema mais aproximado do real”; “Para um entendimento dos números cujo limite é desconhecido”; “Pela necessidade de expressar números onde os números reais não abrangem com exatidão*.”. Em ultima instância mostram a necessidade de um novo número que vem *“justificar parâmetros que os racionais não podem descrever.”.*

A partir deste ponto, pode-se dizer que a aplicabilidade e a definição destes números se confundem:

*“ São números que não conseguimos definir através de frações”.”; “Lembro dos números irracionais como um grupo à parte”.;” Subconjunto apenas dos números reais.”; “Os números Irracionais são uma representação de números não periódicos infinitos, é um conjunto fundamental para preencher a reta numérica, além disso, para representar raízes não exatas."*

**Tabela 12- Questão 6- Definição dos números irracionais e posição perante os demais conjuntos. (contínua)**

| Licenciando | Como você define o conjunto dos números irracionais? Em que posição, em relação aos outros conjuntos numéricos, os irracionais estão? |
|---|---|
| V-3º período | *Um conjunto de números mais complicados de trabalhar. Porém necessários.* |
| E-3º período | *São expressões numéricas que não podem ser representadas em forma de fração. Estão na 4ª posição, após os racionais e dentro dos reais.* |
| J- 6º período | *Não sei defini-los exatamente* |
| R- 10º período | *Não lembro desta experiência como aluna. Não tenho experiência em sala de aula.* |
| D- 8º período | *É o complemento do conjunto dos números racionais.* |
| J- 13º período | *Conjunto complementar dos racionais, não um conjunto a parte, mas tão importante quanto os outros.* |

| | |
|---|---|
| Sem identificação | *Números com dízimas periódicas* |
| Jo- 6º período | *É o conjunto em que os números são dízimas periódicas ou não. Os irracionais estão dentro dos complexos.* |
| Ju- 6º período | *Como o conjunto dos números cujo limite é desconhecido. Ele pertence aos reais, porém não está contido no conjunto dos naturais, inteiros e racionais.* |
| Je- 7º período | *Número real não racional, ou seja, que não pode ser representado por fração.* |
| B-11º Período | *Números onde não conseguimos expressar com exatidão, pois possuem número de casas decimais infinitas, e são explícitos alguns números populares como: raiz de 2, PI e outros, sem maiores explicações.* |
| A-12º Período | *Todos que não são escritos utilizando frações. Não sei.* |
| JO-8º Período | *Representações infinitas que não podem ser apresentadas em forma de fração geratriz. Estão contidos em Reais, porém não estão contidos nos racionais.* |
| A- 6º período | *Para mim é um número complexo.* |
| P- 7º período | *Estão fora dos racionais, sua interseção é vazia com os racionais.* |
| H- 6º período | *Não podem ser escritos na forma fracionária.* |
| R- 7º período | *Não sei definir. Não sei dizer.* |
| D- 8º período | *Um subconjunto dos reais. Está relacionada por ser um conjunto a parte dos reais.* |
| N- 11º período | *Não saberia definir. É um subconjunto dos Reais.* |

Foi possível observar nas respostas dos licenciandos as mesmas definições de repetição sinalizadas por Ripoll (2004), presentes principalmente, nos livros didáticos:

- “Irracional é o número cuja representação decimal é infinita e não-periódica”.
- “Todo número escrito na forma de um decimal infinito e não-periódico é um número irracional".

Destaca-se também que assim como consta na pesquisa de PietroPaolo, Corbo e Campos (2013), termos relacionados à *incomensurabilidade de grandezas* e *interpretação geométrica dos números irracionais*, conceitos cuja discussão pode favorecer a compreensão da indispensabilidade dos números irracionais para representar a medida de grandezas, não consta do repertório de conhecimentos dos licenciandos, indicando lacunas também nos conhecimentos pedagógicos necessários à apresentação desse conteúdo aos futuros alunos.

**Tabela 13- Questão 7- Sobre a abordagem dos números irracionais na Educação Básica (contínua)**

| LICENCIANDO | Em sua opinião, de que forma é apresentado o conjunto dos números irracionais na educação básica? Você acredita na eficácia desta proposta? |
|---|---|
| V- 3º Período | *É apresentada uma definição, a partir dessa o aluno decora quais são irracionais. Não, deveria ser feito de modo prazeroso, de forma que eles possam explorar atividades relacionadas aos irracionais.* |
| E- 3º Período | *Dentro da raiz quadrada ou em forma de "vírgulas".* |
| J- 6º Período | *Superficialmente, acredito que seria mais eficaz se estudássemos mais profundamente.* |
| R- 10º período | *Também não sei.* |
| D- 8º período | *Acho que em forma de números infinitos com vírgula, ou o próprio $\pi$.* |
| J- 13º período | *Geralmente o conjunto dos números irracionais surgiu no momento de se ensinar área do triângulo.* |
| Sem identificação | *Procurar a raiz exata de números naturais como 2.* |
| L- 9º Período | *São apresentados como decimais infinitos. Não acredito nessa proposta por não apresentar profundidade.* |
| Jo- 6º período | *Usar no assunto frações. Na educação não é passado de forma aprofundada.* |
| Ju- 6º período | *Com os números sem limite, dízimas, conjuntos, divisões não inexatas. Acredito que ainda carece de estudo e novos métodos de se propor em sala de aula.* |
| Je- 7º período | *Conheci no E.F de forma corrida, o que não me trouxe compreensão do assunto.* |
| B – 11º Período | *Medir vários objetos redondos e dividirmos pelo diâmetro dos respectivos objetos. Levaria o aluno a perceber que todas as divisões levam a o número PI (aproximadamente 3 146...)* |

| | |
|---|---|
| A-12º período | *Através de jogos e aproveitando a vivência dos alunos.* |
| JO-8º período | *São apresentadas como dízimas não periódicas De pouca eficácia, pois apenas a reta numérica não é capaz de representá-los.* |
| A-6º período | *Através da teoria dos conjuntos o que para a educação básica é muito complexo.* |
| P- 7º período | *De forma superficial, parece buscar mais aceitação do que entendimento, sem dizer de onde vem ou aparecem.* |
| H- 6º período | *São apresentados no estudo dos conjuntos numéricos.* |
| R- 7º período | *De forma superficial. Muitas vezes nem é dado.* |
| D- 8º período | *De uma maneira muito teórica. Não acredito na proposta, acredito que deveria ter mais aplicação no cotidiano.* |
| N- 11º período | *Não sei responder como é apresentado. Não é de fácil compreensão pelos alunos.* |

Nesta etapa do questionário (questões 7 e 8) o objetivo foi o de realizar um paralelo entre as experiências dos licenciandos em sua vida escolar com suas expectativas na docência, ou seja, comparar os métodos que conheceram como alunos aos que imaginam utilizar como professores. Novamente foram descritas definições equivocadas em relação aos números irracionais, como por exemplo:

*"Dentro da raiz quadrada ou em forma de "vírgulas";*

*"Acho que em forma de números infinitos com vírgula";*

*"São apresentados como decimais infinitos";*

*"Medir vários objetos redondos e dividirmos pelo diâmetro dos respectivos objetos. Levaria o aluno a perceber que todas as divisões levam a o número PI (aproximadamente 3 146...)".*

Neste último o licenciando relata uma prática comum que, no entanto, pode levar a um equívoco e que deveria ser trabalhada de forma mais consistente. Este assunto será novamente abordado na apresentação e análise das tarefas.

Nas demais respostas destacadas acima é possível notar uma distorção entre as definições de dízima periódica e não periódica e na interpretação de toda representação decimal infinita como número irracional.

Contudo, além de definições equivocadas, a descrição da experiência escolar destes licenciandos reforça a certeza da pouca ou nenhuma estrutura didática na construção do conceito de número irracional na educação básica. Muitos não conseguem nem se quer recordar a forma como lhe foi apresentado o conceito de irracionalidade; outros recordam e, inclusive, estabelecem uma crítica às metodologias utilizadas:

*"É apresentada uma definição, a partir dessa o aluno decora quais são irracionais. Não,*

*deveria ser feito de modo prazeroso, de forma que eles possam explorar atividades relacionadas aos irracionais.”*

*“Superficialmente, acredito que seria mais eficaz se estudássemos mais profundamente.”*

*“Conheci no E.F de forma corrida, o que não me trouxe compreensão do assunto.”*

Nestes relatos. os estudantes reforçam a superficialidade do tratamento do assunto o que remete às dificuldades que os professores encontram ao trabalharem com assuntos com os quais tiveram pouco contato efetivo.

Nas repostas a seguir é possível notar os aspectos operacionais destacados por Pietropaolo, Corbo e Campos (2013) e Pommer (2012), ou seja, práticas e metodologias onde são trabalhadas as operações com números irracionais e/ou casos onde eles podem surgir, e estratégias para resolver o “problema” de seu surgimento na operação.

*“Geralmente o conjunto dos números irracionais surge no momento de se ensinar área do triângulo.”*

*“Através da teoria dos conjuntos o que para a educação básica é muito complexo”*

*“De forma superficial, parece buscar mais aceitação do que entendimento, sem dizer de onde vem ou aparecem.”*

**Tabela 14- Questão 8- Exemplo de atividade/ tarefa sobre números irracionais.**

| Licenciando | De um exemplo de atividade que envolva a compreensão do conjuntos dos números irracionais, dentro do contexto da educação básica. Detalhe o nível escolar da turma em questão. |
|---|---|
| V-3º período | *Através de um diagrama de Venn. Onde uma “afirmação” será feita, a partir dessa o aluno analisará se a informação está correta.* |
| E- 3º período | *Por exemplo, e uma comparação entre racional e irracional:*<br>*Racional= p/q tal que p e q são inteiros pertencentes aos Reais.*<br>*Irracional= Só pode ser representado com vírgulas, pois após a vírgula apresentam dízimas periódicas. Ex: 1, 124794* |
| J- 6º período | *Raiz de um número primo.* |
| D- 8º período | *Não respondeu* |
| J- 13º período | *Divisões não exatas. De onde surgiram esses números?* |
| Sem identificação | *Encontrar a diagonal de um quadrado. 9º ano.* |
| L-9º PERÍODO | *Não apresentou nenhuma sugestão* |
| Jo- 6º período | *Creio que o assunto sobre dízimas cabe ser uma atividade que envolve números irracionais. Por exemplo: 2/3= 0, 6666666...* |
| Ju- 6º período | *Resolução de dízimas periódicas. Para o oitavo ano do Ensino Fundamental.* |
| Je- 7º período | *Uma atividade que utiliza os irracionais é a de semelhança de triângulos, que pode ser trabalhada a partir do 7º ano.* |
| A-12º período | *Não tenho nenhum exemplo no momento.* |

| | |
|---|---|
| JO-8º período | *Tentar descobrir o valor da raiz de 2 por aproximação, através das tentativas descobrirem que não há um valor exato e então introduzimos o conceito de números irracionais.* |
| A-6º período | *Abordar no estudo das frações, entretanto não sei qual seria a eficácia e o entendimento dos alunos do Ensino Médio.* |
| P- 7º período | *Estou acostumado a ver atividades do tipo: Circule os irracionais, onde se espera que os alunos encontrem dízimas não periódicas.* |
| H- 6º período | *Não sei.* |
| R- 7º período | *Não sei dar um exemplo.* |
| D- 8º período | *No momento não tenho nada em mente.* |
| N- 11º período | *Trabalhar todos os conjuntos de uma vez só, para trabalhar suas relações e individualidades.* |

Fonte: produção própria

Novamente, na elaboração de propostas para o ensino do conceito de número irracional, surgem muitas definições errôneas, constantes repetições das definições consolidadas nos livros didáticos e algumas propostas que merecem destaque:

*"Divisões não exatas. De onde surgiram esses números?"*
*"Creio que o assunto sobre dízimas cabe ser uma atividade que envolve números irracionais. Por exemplo: 2/3= 0, 6666666..."*
*"Resolução de dízimas periódicas. Para o oitavo ano do Ensino Fundamental."*

Nota-se a repetição padronizada da distorção entre o conceito de dízima periódica e não-periódica, também a pouca variação entre as metodologias que seriam futuramente aplicadas.

De forma positiva, merecem destaque duas propostas com cunho exploratório citadas pelos licenciandos, uma relacionada à medida da diagonal do quadrado e a segunda referente à busca do valor de uma raiz irracional através da aproximação de seu resultado, as únicas sugestões em que se prioriza a construção do conhecimento regida pela iniciativa dos estudantes.

De forma geral foi possível conceber que as caracterizações de números irracionais mais encontradas nos livros didáticos se repetem nas respostas dos licenciandos em um formato de reprodução, raramente preenchido com algum significado real. Além disso, que surgem de forma iterativa os aspectos operatórios, exatos, determinísticos que engessam o conceito numérico e impedem a transcendência da construção numérica em seu formato mais consolidado, considerando a evolução histórica e a relação com circunstâncias reais.

Existe a percepção em destaque de que os licenciandos envolvidos na pesquisa não tiveram à sua disposição, tanto na Educação básica quanto durante o curso de superior, uma imagem conceitual apropriada em relação à construção dos conjuntos numéricos, o que possivelmente prejudicará o futuro processo didático em que estarão envolvidos como professores. Este aferimento culmina com ideias de Ponte (2003) quando afirma que o que deveria estar em foco na aprendizagem escolar da Matemática, é o desenvolvimento integrado e harmonioso de um conjunto de competências e capacidades, que envolvem conhecimento de fatos específicos, domínio de processos, mas também capacidade de raciocínio e de usar esses conhecimentos e processos em situações concretas, resolvendo problemas, empregando ideias e conceitos matemáticos para lidar com situações das mais diversas, de modo crítico e reflexivo.

Assim como Ripoll (2004) destacou em sua pesquisa, afirmando que na formação dentro do curso de Licenciatura é feita a construção dos números reais, deduzindo-se dessa estrutura as demais propriedades, e muito pouco é esclarecido sobre os conflitos normalmente existentes sobre este assunto. Daí, os licenciados voltam ao Ensino Básico, agora como professores, sem nunca terem relacionado à construção vista em Análise na Reta e suas dúvidas reais.

Desta forma os dados apresentados indicam a necessidade intervenções oportunas já na educação em nível básico, mas principalmente na licenciatura.

# Capítulo V- Ciclo 2- Descrição analítica das Tarefas

Na pesquisa desenvolvida por Kindel (1998), a autora constatou que para os estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental a reta é racional e que, portanto, para aqueles estudantes, números irracionais não existiam.

Neste capítulo, buscamos compreender a idéia, a concepção que futuros professores de matemática têm sobre estes números e para tanto elaboramos uma sequencia de cinco tarefas cuja abordagem e análise encontra-se apresentada a seguir.

## 5.1- Aula 1- Mensurando o incomensurável.

Nesta tarefa é apresentado como foco a exploração do paradigma de medição por unidades e frações, baseado na descoberta das medidas incomensuráveis já descritos nos Capítulo II.

*Objetivos e etapas*

As Etapas desta tarefa consistem em: Medição do comprimento do lado e da diagonal de quadrados utilizando como recurso réguas genéricas e peças da escala Cuisinaire. Objetivos: Propor situações sobre o conceito de incomensurabilidade para que os estudantes possam: a) verificar que não é possível encontrar uma unidade com a qual seja possível medir com exatidão o lado e a diagonal; b) experimentar as possibilidades de quebra de paradigma da medição através de unidades; c) realizar a releitura do processo histórico da construção dos números irracionais.

Para tal, cada grupo recebeu um roteiro de atividade com as seguintes orientações:

**Quadro 1- tarefa 1**

1. Medir o lado e a diagonal de quadrados diversos (em anexo no final do roteiro) utilizando réguas genéricas sem escala de medida e peças da escala Cuisinaire.
2. Registro e análise das possibilidades.
3. Produção de registro dissertativo sobre as investigações e experiências.

A expectativa principal na aplicação desta atividade era a percepção, mesmo que experimental, de que existem empecilhos para a medição exata da diagonal de qualquer quadrado com a utilização de uma unidade e suas frações.

*Dinâmica*

A turma foi dividida em grupos, a principio era previsto formar grupos com três integrantes, e as carteiras foram distribuídas e divididas com este intuito.

A fase da aula que antecedeu a aplicação da tarefa foi à apresentação da proposta, com as orientações devidas sobre preenchimento do questionário de perfil do estudante e do termo de livre concordância. Também foram esclarecidos os objetivos das tarefas de uma forma geral. Este processo durou em torno de 30 minutos.

*G1- Partindo da maior peça.*

Composto por três componente iniciaram prontamente a atividade. Demonstraram bastante afinco. Obtiveram percepções interessantes sobre as dificuldades de medição, como os seguintes trechos do áudio do grupo podem comprovar.

Para fazer as medições o grupo escolheu a maior régua, começou medindo a diagonal e verificou que esta não cabe exatamente. Completam dizendo:

00:50- Aluna A: _ A diagonal seria duas vezes?
01:05- Aluna B: _Duas e em pedacinho.

Possivelmente nenhuma das peças, por menor que fosse não representava com exatidão à medida que o grupo buscava. E a divisão em frações não parecia clara.

Ao observarem que a maior régua não atende às suas necessidades, os licenciandos passaram a discutir sobre qual seria a melhor peça para identificar a unidade escolhida. A discussão girou em torno de medir os lados e a diagonal do quadrado e assim escolher a peça que mais facilite o processo por completo, simplificando os possíveis cálculos.

*02:10-* Aluna B: _Duas verdes e duas vezes a natural.
Aluna A: _Se a gente encontrasse um tamanho.
Aluna C: _Mas ai ela vai passar...
*06:37-* Aluna B: _Tem certeza que podemos usar todos?
07:49- Aluna C: _Mas de qualquer forma vai entrar fração.
*08:38-* Aluna A: _De qualquer forma vamos usar fração
Aluna C: _Se menor usaremos multiplicação.

Nesta busca por uma melhor unidade e na dificuldade em encontrá-la, é possível identificar que o grupo também procurou se distanciar das frações. Esta impossibilidade de encontrar uma unidade que medisse simultaneamente o lado e a diagonal criou um impacto, expresso pelo silencio de quase 7 minutos. Para sair do impasse, o grupo mudou de estratégia de medição em função do lado para encontrar a medida em um função da diagonal, o grupo se distraiu e deixou de acompanhar o que foi proposto na tarefa. Ao invés de utilizar a unidade de medida para calcular o comprimento da lateral do quadrado, o grupo escolheu uma unidade conveniente de acordo com a medida da diagonal.

14: 58- Aluna A: _A lateral do quadrado menor é 2/7 da unidade.
15:41- Aluna B: _Esse?

Aluna C: _Esse passou?
Aluna A: _3/7 dela?
17:133- Aluna A: _2 unidade mais 1/7
Aluna B: _Agora não sei perai...
Aluna C: _Ta sobrando...

Ao concluir as medições, mesmo que de forma imprecisa, o grupo deu início à última etapa da tarefa. Esta consistia em relatar através de um texto dissertativo informal, as etapas do processo de investigação, os conteúdos abordados e suas conclusões finais (sugestões e críticas). Apesar de terem desenvolvido diversas hipóteses durante a discussão em grupo, nem todos os momentos de dúvida foram relatados no texto.

O grupo em nenhum momento percebeu que se tratava de uma situação em que não era possível encontrar uma unidade comum, embora tenham percebido que não era exato e isto pode ser verificado no uso das frações para expressar esta ideia.

*G1- Texto final*

*1ª observação: Utilizando a peça preta, na diagonal do quadrado menor é exatamente o tamanho da peça preta, unidade.*

*2ª observação: Com esta peça, houve um padrão em que a diagonal do segundo quadrado é exatamente 2 vezes a peça preta que é 1 e o terceiro quadrado possui diagonal três vezes a peça preta.*

*Lateral do quadrado menos é 5/7 da unidade.*

*A lateral do segundo quadrado é 1 unidade mais 3/7 da unidade.*

*A lateral do quadrado maior é 2 unidades mais 1/7 da unidade.*

*Usamos como unidade a peça preta e para medir a diagonal do quadrado menor é exatamente 1 unidade. No segundo quadrado utilizamos na diagonal 2 vezes a unidade e no quadrado maior 3 vezes a unidade. Para medir laterais, vimos que o quadrado menor corresponde a 5/7 da unidade, o quadrado médio é 1 unidade mais 3/7 da unidade, terceiro é 2 unidades mais 1/7 da unidade.*

*Os conteúdos usados foram: frações para medir os lados do quadrado, multiplicação para medir os lados do segundo quadrado e subtração para medir o quadrado menor.*

*A atividade apresentada pode ser usada pelo professor que ministra para o ensino fundamental, recapitulando conteúdos simples como subtração, multiplicação e fração.*

De forma geral o G1 se ateve ao conceito de medição através de quantidades sólidas, ou seja, embasados pelo conceito de contagem oriundo da estrutura dos conjuntos dos naturais e racionais.

*G2. Partindo da menor peça.*

Também composto por 3 integrantes. Através de simples observação foi possível notar que o grupo interagiu menos do que os demais grupos. Os componentes decidiram distribuir tarefas. Enquanto um fazia teste com as peças, outro realizava cálculos algébricos e a terceira integrante ficou responsável por redigir o processo de investigação. No entanto ao acompanhar a gravação em áudio da discussão foi possível notar que, em diversos momentos, hipóteses valiosas eram consideradas.

00:30- Aluno A: _Acho que faltou... faltou não sobrou.
Aluno B: _Aqui já deu errado... faltou.
Aluno A: _Caraca, tem alguma bruxaria aqui. Tem alguma coisa errada.

Estas ideias apresentam o momento onde a medição começa a apresentar dificuldades.

Em seguida, um dos estudantes iniciou o processo do cálculo algébrico com a intenção de encontrar um resultado numérico e posteriormente representá-lo através das peças. Não obteve um resultado apurado como desejou, no entanto ampliou a discussão sobre as dificuldades de medição através de unidades.

5:36- Aluno A: _No caso a diagonal eles usavam teorema de Pitágoras. Então pode usar?

6:15- Aluno A: _Será que essa figura (minha) é a mesma que aquela?
6:40- Aluno B: _Quando não sobra falta... tenho dislexia não é possível.
7:50- Aluno A: _tá escrito aqui... Eles já usavam Pitágoras.
Aluno B: _Ai entra a parte do irracional... deu 6 raiz de 2.

8:36Aluno A: _vai dar um valor irracional esse daí...
Aluno B: _Usando Pitágoras da 6 raiz de 2.

9:08- Aluno B: _Pronto provei o irracional... ta ai.
9:30- Aluno A: _Mas eles não usavam irracional, usavam algoritmo de Euclides.
9:53- Aluno A: _O algarismo de Euclides não era o resto da divisão... então e agora?
10:55- Aluna C: _Como eu vou escrever alguma coisa que não existe?
Aluno B: _Então é aproximadamente... Escreve ai a diagonal do quadrado é aproximadamente tanto.

A estratégia do grupo foi a de encontrar o resultado numericamente e em seguida representá-lo através das peças, no entanto, o impasse continuou o mesmo, afinal não encontravam uma forma de representar o número irracional encontrado com o uso das peças. E o problema da representação utilizando as referências unitárias continua sendo um desafio no trecho seguinte:

12:15- Aluno A: _Me dá todas as peças ai... vou tentar fazer.
12:51- Aluno B: _não pode usar irracional... coloca aproximadamente.
13:26- Aluno A: _nós não sabemos como representar. Meu problema é representar.
Aluno B: _É exatamente esse o problema.
(risos)

14:05- Aluno A: _O cara precisa ter feito Havard pra montar isso... (risos)

A partir desse momento, o aluno B iniciou a proposta de construção de alguma sentença ou equação onde a incógnita representaria a porção desconhecida da medida do lado do quadrado:

14:35 Aluno B: Mais 5 menos 10... mais 5 menos quatro....dá um número real...tipo 15 menos 6. Dá 9 até aqui?

Aluno A: _Você ta fazendo o lado... nós temos o lado. O problema é a diagonal. (risos)

16:19- Aluno A: _Encontramos 6 raiz de 2 então temos que encontrar o que pode representar isso.

18:00- Aluno B: _Deu 16 unidades (com as peças)... mas por Pitágoras dá 12 raiz de 2.

21:12-. Aluno B: _Podíamos dizer que o que sobra ou falta e chamar de x.

21:32-Aluna C: _Nem dá pra resolver...

22:25-Aluno B: _Coloca nos comentários assim... buguei. (risos)

23:08-Aluno A: _Aqui bateu certinho.

Aluno B: _Como pode bater certinho cara? Não pode... tem que dar 12 raiz de 2. Aqui deu ruim. Aqui bugou!

Foi possível notar que a discussão sobre a comparação do resultado encontrado com a medida das peças (16 unidades) e o resultado numérico irracional ($12\sqrt{2}$ =16, 9705627484...) causaram grande desequilíbrio entre as concepções e certezas do grupo. Este desequilíbrio entre a comparação da medida com o resultado encontrado por caminhos algébricos se deu, provavelmente, pela poucas oportunidades anteriores (educação básica) de comparação entre imagens conceituais dos números irracionais. Os estudantes conhecem o resultado irracional e verificaram a medida através dos recursos, no entanto não relacionam os dois resultados como aproximadamente equivalentes.

A partir desse momento, a Aluna C iniciou a produção do texto final relatando o processo da investigação. No entanto, os outros dois componentes continuaram a explorar outras possibilidades:

25:23- Aluno A: _Vou usar como unidade a diagonal do cubinho. É uma idéia... se vai dar certo....

26:06- Aluno B: _Falta pouca coisa... alguns centímetros de diferença.

26:31 -Aluno A: _Aqui deu 11. (raiz de 2)

Aluno B: _Mas é 12!

27:56- Aluno A: _Eu medi daqui até aqui. Deu 8 unidades e mais um pedacinho que eu chamei de x. b é 8 mais x.

Ai eu medi daqui até aqui, deu 11.

Ai medi daqui até aqui, deu 2 unidades e mais um pedacinho. Eu chamei de y. Ai eu vou chamar de b'.

Ai eu sei que b' é 11. Beleza!

X +y=1. Igual a uma unidade...

Nesse ponto do áudio, o grupo é interrompido pela conclusão de outro grupo e a falta de tempo não permitiu que esta construção se prorrogasse.

Apesar da riqueza de detalhes e propostas desenvolvidas durante a discussão, o grupo deixou de registrar tudo que consideraram equivocado.

*G2- Texto Final*

*Primeiramente escolhemos a peça que seria tomada como unidade, para tal o menos cubo foi escolhido.*

*Notamos que o menos quadrado tinha lado 6, que também poderia ser representado pela peça verde.*

*O quadrado médio tem lado 9, que pode ser representado pela peça azul.*

*O quadrado maior tem lado 12 e pode ser representado pelas peças azul e verde clara se colocadas juntas.*

*Foi utilizado o conhecimento dos números racionais, geometria, algoritmo de Euclides.*

*A atividade é instigante e nos leva a refletir sobre o surgimento do conjunto dos irracionais e como era possível realizar os cálculos sem esse conteúdo.*

*Uma sugestão seria uma instrução mais explicada, por conta da complexidade da atividade*.

O grupo dois utiliza de estratégias mais articuladas com a realidade histórica do conceito de irracionalidade/incomensurabilidade, pois utilizaram percursos aritméticos e algébricos na tentativa de representar a raiz de 2 com números pertencentes ao conjunto de números racionais.

Os grupos 3 e 4 não conseguiram enviar os áudios das discussões desta tarefa, apresentando tão somente seu texto final e alguns registros aleatórios. As considerações serão feitas a partir deste material.

*G3- Utilizando unidades diferentes*

Ao analisar os registros escritos do grupo, é possível perceber que usaram aproximações muito distantes das medições reais. Ao calcular a diagonal do quadrado de unidade 1 informaram o valor 1+2/3, que em representação decimal é 1, 6666666666667.

No entanto é possível notar que seus resultados não apresentavam certeza ao observar uma das respostas incluídas no roteiro:

Foi possível encontrar um valor exato? Quais foram as dificuldades?

*Sim. A maior dificuldade foi medir a sobra das medidas.*

Possivelmente, ao se defrontar com "sobras" difíceis de serem calculadas, o grupo optou por uma aproximação menos precisa que os demais.

*G3- Texto final*

*1º com a escala Cuisenaire utilizamos a medida verde escuro e verde clara, para complementar no quadrado da última página.*

*Com as réguas utilizamos a régua azul para medir todos os quadrados da 3ª folha.*

*2º o conteúdo matemático utilizado foi números inteiros e frações.* Não foi mencionada a utilização de números racionais, o que reforça a busca por resultados construídos com o uso de unidades.

*3° concordamos que é um tipo de exercício fácil, de ser aplicado, de fácil entendimento.*

*G4- Procurando unidades.*

Assim como o G3. Ao calcular a medida dos lados e das diagonais dos quadrados, o grupo chegou a apresentar resultados compostos por números naturais: Lado igual a 5 unidades e diagonal igual a 7 unidades.

No entanto, assim como o G3, ao responder ao mesmo questionamento sobre as dificuldades em realizar medições exatas a resposta do grupo foi:

*Foi possível em alguns lados, pois com as peças propostas em sala não conseguimos preencher a diagonal de forma completa.*

Sendo assim, ficou mais claro compreender as respostas encontradas. O grupo se conformou com os resultados obtidos com a soma das peças e não arriscou nenhuma outra estratégia para compor frações da unidade escolhida.

*G4- Texto final*

*Denominamos a peça branca como referencia, ou seja, ela equivale a uma unidade. Fizemos as medições e obtemos valores exatos e também não exatos.*

*Utilizamos da matemática para resolver essa questão o Teorema de Pitágoras, comprimento e medidas.*

*A iniciativa foi ótima, é interessante trabalhar dessa forma. Porém o material nos deixou com dúvidas em relação às medidas.*

Apesar de apresentarem o teorema de Pitágoras como uma das estratégias, o grupo não apresentou uma comparação entre o resultado deste cálculo e suas medições.

Tanto o G3 quanto o G4 apresentaram estratégias mais conformistas, possivelmente influenciadas pela pouca experiência com atividades de investigação.

*G5- Unidade mais conveniente*

O grupo apresentou certa descontração e afinidade, no entanto em muitos momentos demonstraram dificuldades para realização das tarefas por falta de concentração e desvio da proposta.

No primeiro momento o grupo se ateve em procurar uma peça que representasse uma unidade mais conveniente, ou seja, que facilitasse todo o processo da tarefa, diminuindo a quantidade de cálculos.

00:23- Aluno A: _Todos os lados do quadrado e depois todas as diagonais.

00:30- Aluno B: _Vamos medir o lado depois as diagonais. Você pode usar mais de um. Amarelo e roxo.

01:15- Aluno A: _A diagonal não é exatamente a preta.

Aluna B: _Se usa a amarela como unidade a preta é igual a 2 amarelas

Aluna C: _Usamos a amarela e agora vai ficar difícil.

Aluno B:_ O problema não é medir esse troço, o problema é como vamos chamar.

Aluno A: _Essa aqui então é 1 mais 1/3.

Aluno B: _De qualquer maneira vamos ter que fazer conta.

Apesar de toda a relutância para dar início ao processo de cálculo das diagonais, no momento em que iniciaram as tentativas já é possível perceber que o contexto de incomensurabilidade, ou seja, impossibilidade de medir uma grandeza irracional através de unidades e suas frações começa a surgir.

11:15- Aluno B: _Esse aqui é 1 mais 1/3. Não nos mínimos detalhes, estamos colocando assim, grossamente.

11:29- Aluno A: _é 1 e mais 1/3.

12:30- Aluno B: _É 1 + 1/3 não nos mínimos detalhes... assim “grossamente”.
23:23- Aluno C: _Foi possível encontrar um valor exato?
Aluno A: _Claro que não.
Aluno B: _Claro que foi!
Aluno A: _Vocês estão metendo um monte de frações... Então foram valores aproximados...
Aluno B: _Então encontramos valores aproximados em relação à unidade escolhida.

Essa aproximação condiz com o raciocínio necessário para o entendimento do conceito de irracionalidade, pois se o grupo não conseguiu emitir uma comparação com nenhuma fração específica ou representação decimal abre a oportunidade para questionamentos sobre outra possível representação.

*G5- Texto Final*

*Escolhemos a peça amarela de Cuisenaire como unidade de medida e a sobrepomos na folha, assim verificamos que em determinadas figuras usaríamos vários da unidade que escolhemos.*
*Frações, números decimais, inteiros menores ou maiores.*
*Sugestão: Precisaria de um tempo maior para a realização da atividade.*
*Gostamos demais da atividade, a atividade introduz os conteúdos de forma lúdica, auxiliando a aula e o professor e o aluno a assimilar o conteúdo facilmente.*

Apesar da pouca certeza, e do fato de considerarem as frações como medida inexata foi possível notar que o G5 entra em conflito no momento de expressar as medidas das diagonais, dessa forma a problematização sobre incomensurabilidade foi percebida, mesmo que de forma não declarada.

**Tabela 15- Resumo das estratégias e conclusões**

| GRUPO | ESTRATÉGIA | CONCLUSÃO |
|---|---|---|
| 1 | Usar a maior peça como unidade e medir inicialmente a diagonal. | O grupo imaginou que ao iniciar a resolução pela medição da diagonal teriam a resposta do problema de forma rápida, afinal o questionamento envolvia tal medida. No entanto o paradigma da medição através de unidade (incomensurabilidade) permaneceu. |
| 2 | Usar a menor peça como unidade e encontrar relação lado x diagonal. | Conceito de contagem (números naturais) ressaltado através da estratégia pretendida. Iniciar da menor peça pode indicar uma tendência à |

| | | |
|---|---|---|
| | | quantificação (quantos?). |
| 3 | Utilizar peças quaisquer e representar através de frações. | Utilização de frações sem aproximação refletindo a não percepção do conceito de irracionalidade da diagonal do quadrado. |
| 4 | Utilizar peça maior e representar através de números naturais. | Novamente, o Conceito de contagem (números naturais) ressaltado através da estratégia pretendida. Iniciar da menor peça pode indicar uma tendência à quantificação (quantos?). |
| 5 | Utilizar peça que mais se aproxima da medida do lado e realizar adição entre naturais e racionais. | Operacionalização do conceito de número misto (natural mais racional) sem apropriação de que o mesmo também representa um número racional. |

De forma geral, foi possível perceber que a relação entre medida e contagem surge como referência na maioria das estratégias, ou seja, os licenciandos trabalham o conceito de medida (quanto mede?) atrelado aos de número natural (quantos?) e ao se depararem com o desafio de transcender essa percepção, vão ao encontro do que chamaram de "complexidade".

**5.2- Aula 2- Número Irracional: Finito ou infinito? Exato ou aproximado?**

*Objetivos e etapas:*

Objetivos: Introduzir a reflexão sobre a existência do conjunto dos números irracionais e a percepção de sua necessariedade.

Etapas: Tempestade de ideias. Definição e comparação de números irracionais. Uso da calculadora.

Etapa 1: Tempestades de ideias. 1ª termo ***irracional.*** 2ª termo ***número irracional.*** 2 rodadas para cada termo.

Etapa 2: Definição do conceito de número irracional.

Calcular as raízes e seus resultados. Elevando os resultados a 2ª potência ou eventualmente a potências maiores. Comparando os resultados e registrando-os. Relatando as possíveis situações reais onde esses números poderão surgir.

**Quadro 2- tarefa 2**

Etapa 1: Tempestades de ideias. 1ª termo ***irracional.*** 2ª termo ***número irracional.***

Etapa 2: Definição do conceito de número irracional.

Individualmente, calcule utilizando a calculadora de seu celular, o valor decimal dos números irracionais: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,, $\sqrt{7}$, *e* $2\sqrt{2}$ . Registre e compare com o grupo.

Os valores encontrados individualmente apresentaram alguma diferença? Por que isso aconteceu?

O valor decimal encontrado para $\sqrt{8}$ é o mesmo valor ao calcularmos $2\sqrt{2}$ na calculadora? Por quê?

Etapa 3: Produção de registro dissertativo.

*Dinâmica*

Para proporcionar maior entendimento sobre a tarefa "tempestade de idéias" iniciamos com uma palavra simples: *Chuva*. E as respostas que surgiram desta rodada foram: nuvem, água, água, tristeza, molhado, água, pingo, seco, temporal, tempestade, guarda-chuva, pingo, raio, capa, enchente, pingo, poça.

O segundo termo escolhido da tempestade de palavras foi *irracional*, e as palavras que surgiram foram: sem lógica, $\sqrt{2}$, dízima, dificuldade, complexo, loucura, animal, raiz quadrada, vírgula, PI.

Foi possível notar a repetição de termos que remetem a visão de estudante sobre os números irracionais como: dificuldade, complexo, loucura, sem lógica. Essas palavras podem ter relação direta com a aprendizagem e a abordagem que os licenciandos vivenciaram durante a Educação básica, é possível notar que essa percepção de "dificuldade" aplicada aos números irracionais não pode ser superada durante a graduação.

O intuito da tarefa era trabalhar uma sequência maior de palavras, onde outras palavras genéricas fossem apresentadas e posteriormente os termos: *irracional* e *números irracionais*. No entanto ao findar esta primeira rodada o tempo previsto para tal já havia se esgotado e o prosseguimento prejudicaria a realização da tarefa escrita sobre irracionalidade numérica e a sua base conceitual apresentada pelos alunos. Sendo assim prosseguimos para a segunda etapa.

Nesta etapa, os alunos calcularam o valor decimal de raízes quadradas irracionais com o auxílio da calculadora e registraram os valores expressos na tela, conservando todos os dígitos. Posteriormente elevavam esse valor ao expoente dois e também registraram. O objetivo consiste em observar se, ao elevar ao quadrado a calculadora apresentaria o valor exato que constava como radicando ou se alguma diferença surgiria após este processo.

*G1*- $2\sqrt{2}$ *diferente de* $\sqrt{8}$*?*

O G1 realizou todos os cálculos e percebeu que apenas a calculadora de uma das três integrantes apresentava resultado diferente da expectativa ao realizar a operação inversa à radiciação. Vale ressaltar que nestes resultados não houve menção à igualdade de 2, 00000001 e 2 ou qualquer outra comparação semelhante. Da seguinte forma:

**Tabela 16- Respostas do G1/ aula 2**

| Raiz | Resultado decimal | Elevando ao quadrado |
|---|---|---|
| $\sqrt{2}$ | 1, 4142135626 | 2, 0000000001 |
| $\sqrt{3}$ | 1, 7320508076 | 3, 0000000001 |
| $\sqrt{5}$ | 2, 2360679775 | 5 |
| $\sqrt{7}$ | 2, 6467513111 | 7, 0000000001 |
| $2\sqrt{2}$ | 2, 8284271248 | 8, 0000000003 |
| $\sqrt{8}$ | 2, 8284271247 | 7, 9999999997 |

Ao responderem as questões inseridas no questionário descreveram:

Os valores encontrados individualmente apresentaram alguma diferença? Por que isso aconteceu?

*Apenas um dos valores deu diferente e creio que isso se dá pela precisão da calculadora, as outras duas arredondaram os valores.*

Neste momento torna-se claro que nenhum dos integrantes percebe igualdades entre dízimas como 3 00000000000001 e 3.

O valor decimal encontrado para $\sqrt{8}$ é o mesmo valor ao calcularmos $2\sqrt{2}$ na calculadora? Por quê?

*Sim. Porque fatorando a raiz de oito fica duas vezes raiz de dois, entretanto em uma das calculadoras deu diferente, pois não arredondou os valores.*

Na transcrição do áudio deste momento da tarefa é possível perceber como o G1 analisa a situação.

1:30- Aluna A- Sim deu a mesma coisa. Por que 2 ao cubo é oito. Porque fatorando da à mesma coisa.

Aluna B- Fatorando a raiz de oito da à mesma coisa.
Aluna C- Vamos ver na calculadora. Não deu igual. Raiz de 8 deu final igual a 7
Aluna B- Tira raiz de 2 agora. Bate?
Aluna C- Não deu final 8. Deu diferente.
Aluna B- Eu, hein?
Aluna A- Vou colocar aqui então. Entretanto...
Aluna B- O nosso bate, mas o dela não.
Aluna A- Vamos ver na nossa, vai arredondar também.
Aluna B- O seu ta cortando 4 casas
Aluna A- O dela é que está arredondando o nosso não.

É possível perceber que surge uma ruptura referente à definição tida anteriormente como certeza, pois no momento em que os resultados encontrados para $2\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$ diferem, abre-se uma nova visualização conceitual para irracionalidade. O problema levanta uma discussão e promove um consenso, mesmo que superficial, o que remete ao conceito de internalização de Vigotsky (1987), que pode ser entendido como a reconstrução interna de uma operação externa, onde uma série de transformações são processadas antes da construção conceitual definitiva. Neste momento de discussão os estudantes se deparam com um conceito que consideravam definitivo, no entanto ao verificar dados diferentes essa percepção passa a se remodelar e reconstruir.

*G1- Texto Final*

*Percebemos ainda, que um dos conceitos mais perceptíveis é a questão do arredondamento dos números, daí tirou-se que quanto maior as casas decimais, mais preciso, e isso tudo envolve: radiciação, potência, dízimas e fatoração.*

Esta afirmação do grupo destaca a surpresa sobre o conceito de aproximação e exatidão.

Possivelmente, os estudantes não haviam tido oportunidade anterior a essa para explorar os diferentes resultados obtidos com o uso da calculadora e refletir sobre a exatidão destes resultados.

É possível perceber a partir desta descrição que a discussão sobre conceito de aproximação e precisão permeou a experiência do grupo. Esta variação entre certeza e dúvida/ opinião e consenso, apresentada pelos licenciandos, remete as afirmações de Ponte (2003) quando defende que várias pessoas a trabalhar em conjunto têm mais ideias, mais energia e mais força para derrubar obstáculos do que uma pessoa trabalhando sozinha e, além disso, podem capitalizar nas competências individuais.

*G2- Dispositivos diferentes = resultados diferentes*

O G2 encontrou uma diversidade maior entre as respostas que tinham como expectativa, o grupo parece não se conformar facilmente com esta diversidade de resultados e confere os cálculos repetidamente na esperança de ter havido algum engano como segue registrada na tabela abaixo:

**Tabela 17- Respostas G2/ aula 2 (contínua)**

| | Resultado decimal | Elevando ao quadrado |
|---|---|---|
| $\sqrt{2}$ | 1, 4142135624 | 2, 0000000001 |
| | 1, 414213562 | 1, 9999999999 |
| | 1, 4142135624 | 1, 4142135624 |
| $\sqrt{3}$ | 1, 7320508076 | 3, 0000000001 |
| | 1, 732050808 | 3, 0000000001 |
| | 1, 7320508076 | 3, 0000000001 |
| $\sqrt{5}$ | 2, 2360679775 | 5 |
| | 2, 2360679775 | 4, 9999999998 |
| | 2, 2360679775 | 5 |
| $\sqrt{7}$ | 2, 6467513111 | 7, 0000000002 |
| | 2, 646751311 | 7 |
| | 2, 6467513111 | 7, 0000000002 |
| $2\sqrt{2}$ | 2, 8284271247 | 7, 9999999997 |
| | 2, 8284271245 | 8, 0000000001 |
| | 2, 8284271247 | 7, 9999999997 |
| $\sqrt{8}$ | 2, 8284271247 | 7, 9999999997 |
| | 2, 8284271245 | 8, 0000000001 |
| | 2, 8284271247 | 7, 9999999997 |

Após o término do cálculo o grupo dois descreveu os acontecimentos da seguinte maneira:

Os valores encontrados individualmente apresentaram alguma diferença? Por que isso aconteceu?

*Sim. Por causa da capacidade de cada dispositivo utilizado para se procurar os resultados.*

O valor decimal encontrado para $\sqrt{8}$ é o mesmo valor ao calcularmos $2\sqrt{2}$ na calculadora? Por quê?

*Sim. Porque ambos os valores se relacionam ao efetuarmos fatoração de raiz de oito.*

*G2- texto Final*

*Com diferentes dispositivos calculamos separadamente cada valor e debatemos os resultados obtidos, verificando diferenças decimais em alguns resultados.*

*Utilizamos os conceitos de radiciação, lógica e podemos utilizar no estudo dos decimais, dos irracionais...*

*Diante disso, pode-se introduzir o uso correto do cálculo matemático inexato, ou aproximado de raízes. A calculadora apresenta diferenças mínimas, logo dificilmente se aproximará do resultado desejado em uma raiz, logo, mais estudo se torna necessário.*

Outro ponto perceptível nesta descrição remete as pesquisas sobre escrita matemática onde Powell e Bairral (2006) afirmam que a mesma tem a capacidade de promover reflexão crítica, bem como preconizar processos colaborativos de diferentes dimensões e de tomada de consciência sobre as experiências individuais e coletivas. Ao refletir sobre aproximação de resultados infinitos, definição de número irracional e questionamentos sobre a continuidade das ideias, as conclusões desse grupo ratificam as afirmações contidas nas pesquisas relacionadas ao trabalho em colaboração, pois tiveram e aproveitaram oportunidades de troca e interposição de argumentos e ideias.

*G3- Reconhecimento dos irracionais.*

De acordo com os registros do G3, assim como ocorrido no G1, apenas um integrante encontrou resultados diferentes do esperado pelo grupo.

**Tabela 18- Respostas G3/aula2**

| | Resultado decimal | Elevando ao quadrado |
|---|---|---|
| $\sqrt{2}$ | 1, 414214 | 2, 00000012378 |
| $\sqrt{3}$ | 1, 732051 | 3, 0000006666 |
| $\sqrt{5}$ | 2, 2360679775 | 5 |
| $\sqrt{7}$ | 2, 645751 | 6, 9999998354 |
| $2\sqrt{2}$ | 2, 8282127 | 7, 999999999 |
| $\sqrt{8}$ | 2, 8282127 | 7, 999999999 |

Respostas discursivas do G3:

Os valores encontrados individualmente apresentaram alguma diferença? Por que isso aconteceu?

*Sim. Alguns celulares reconhecem os números irracionais e outros não.*

O valor decimal encontrado para $\sqrt{8}$ é o mesmo valor ao calcularmos $2\sqrt{2}$ na calculadora? Por quê?

*Sim. Pois cada calculadora trabalha com um algoritmo diferente, aproximando ou não os resultados. Mas os quatro algarismos significativos são iguais.*

Este entendimento sobre “algarismos significativos” provavelmente advêm de práticas de “arredondamento”, pouco esclarecidas na educação básica. Neste modelo, ao se deparar com os valores 1, 65239 e 1, 65230, por exemplo, ao considerar apenas os 3 números posicionados após a vírgula, o estudante tende a considerá-los idênticos e não aproximados.

*G4- Valores iguais*

No G4, que possuía apenas dois componentes. Todas as respostas das calculadoras apresentaram valores próximos ou iguais, possivelmente por se tratarem de celulares ou calculadoras com sistema operacional semelhante, e com visor com menor capacidade.

**Tabela 19- Respostas G4/aula2**

| | Resultado decimal | Elevando ao quadrado |
|---|---|---|
| $\sqrt{2}$ | 1, 4142135 | 2 |
| $\sqrt{3}$ | 1, 7320508 | 3 |
| $\sqrt{5}$ | 2, 2360679 | 5 |
| $\sqrt{7}$ | 2, 6467513 | 7 |
| $2\sqrt{2}$ | 2, 8284271 | 8 |
| $\sqrt{8}$ | 2, 8284271 | 8 |

Para o G4 os argumentos foram:

Os valores encontrados individualmente apresentaram alguma diferença? Por que isso aconteceu?

*Os valores foram exatamente iguais em todos os resultados.*

O valor decimal encontrado para $\sqrt{8}$ é o mesmo valor ao calcularmos $2\sqrt{2}$ na calculadora? Por quê?

*Sim. Porque raiz de oito, racionalizada, equivale a duas vezes a raiz de dois.*

É possível, a partir da análise dos resultados dessa tarefa, destacar um ponto importante relacionado a definição de dízima numérica: Nenhum dos integrantes de nenhum dos grupos registrou qualquer consideração sobre o fato de 1,99999...= 2 ou  7,999999...= 8, entre outros exemplos. Essas demonstrações sobre igualdades podem ser apresentadas tanto na educação básica quanto no Ensino Superior, no entanto raramente são incluídas no contexto de construção numérica. Segue um exemplo de demonstração que valida esta afirmação:

**Quadro 3- Demonstração: 0 9999999... = 1**

Dizemos que 1/3 = 0, 333…

Multiplicamos por 3 ambos os membros: 3 × (1/3) = 3 × 0 333…, que deveria dar 0, 999…

Vemos que 0, 999… deve ser 1, pois, que (1 / 3) × 3 = 1.

Ou:

Suponhamos que x = 0, 999… [1]

Multiplicamos por 10 os dois números: 10x = 9, 999… [2]

Subtraindo membro a membro dessas igualdades ([2] – [1]), teremos: 10 x - x = 9, 999… - 0 999…

Obtemos que 9x = 9, é dito, x = 1, como queríamos demonstrar.

---

Há outras provas mais sofisticadas que fazem uso de limites, séries infinitas, encaixe de intervalos, cortes de Dedekind ou sucessões de Cauchy; todas chegam à mesma conclusão. O mesmo vale para qualquer dízima periódica cujo período seja 9. Ou seja, 2, 2999... é igual a 2,3; 5,677999... é igual a 5,678; e assim por diante.

Um fator interessante que surgiu em comum entre os grupos é a surpresa ao perceber que os resultados para $2\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$, observados no visor da calculadora, não se apresentarem exatamente iguais, esta surpresa pode ser resultado de uma imagem determinística tanto das operações com raízes quanto da definição de número irracional, fruto do ensino baseado na repetição de exercícios que reforçam tal igualdade incondicional, desconsiderando o fator da aproximação da representação decimal de um número irracional.

Esta tarefa proporcionou a oportunidade de perceber ideias defendidas por Duschl (1995) e Wheatley (1991), pois estes autores ressaltam que, no ensino, quando se aumentam as oportunidades de discussão e de argumentação, também se incrementam as habilidades dos alunos compreenderem os temas ensinados e os processos de raciocínio envolvidos, além disso, afirmam que pequenos grupos proporcionam oportunidades para os alunos explicarem e justificarem seus pontos de vista, processo que estimula a aprendizagem, pois a habilidade de argumentação é uma das realizações mais importantes da educação científica. No processo de contar aos outros como pensam, os alunos elaboram e aprofundam a sua compreensão sobre um determinado tipo de problema. Mesmo que a imagem conceitual da representação decimal dos números irracionais não tenha sido exaurida nesta tarefa, o eixo constitutivo exato/aproximado pode ser observado e discutido.

Todos os grupos ficaram surpresos com os dados obtidos ao se elevar o resultado das raízes ao quadrado e não encontrar exatamente o radicando, isto é, o número que deu origem ao resultado da raiz quadrada.

Por se tratar de um trabalho não rotineiro, mesmo para estudantes do curso de matemática (o uso de calculadora para encontrar a raiz quadrada de um número irracional) foi possível identificar soluções não comuns e a suas surpresas diante do inesperado. Como afirma Canavarro (2011), em tarefas exploratórias como esta, os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgirem com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

**5.3- Aula 3- Calculadora Quebrada**

Com base na análise das respostas dos estudantes nas tarefas anteriores reelaborarmos a tarefa para a aula 3. A partir das observações nos últimos encontros surgiu a necessidade de planejar uma segunda proposta de tarefa, que não invadisse o território dos irracionais específicos (π e σ) e ao mesmo tempo suprisse as demandas referentes ao conceito de número irracional, percebidas nas aulas anteriores. Para tal, optamos por construir uma breve apresentação de slides apresentando um feedback das tarefas anteriores e trazendo uma discussão sobre a definição do conjunto dos números irracionais. Ponte, Brocardo e Oliveira (2015) consideram que como em todas outras atividades, nas investigações matemáticas existe a necessidade de avaliação. Essa avaliação permite ao professor mensurar o sucesso do processo e sua relação com as expectativas prévias, bem como a necessidade de repensar suas ações. Permite também, que o aluno saiba como seu desempenho é visto e se existe aspectos a que precisa dar mais atenção.

Sendo assim, a aula 3 sofreu modificações posteriores ao primeiro planejamento, procedimento adequado à metodologia DBR. De início a proposta consistia na utilização do Tangram e no cálculo de suas medidas. Esta proposta tinha como objetivo a percepção da indispensabilidade do conjunto dos números irracionais e de suas representações numérica e geométrica, já que no decorrer da tarefa seria possível concluir que a relação entre a medida do lado do quadrado (x) está diretamente relacionada à medida de sua diagonal ($x\sqrt{2}$). No entanto esta tarefa se tornou desnecessária, pois esta percepção surgiu na aplicação da tarefa 1, muitos dos estudantes usaram esta definição ao analisar o problema da incomensurabilidade da diagonal do quadrado.

*Objetivos e etapas*

Após as alterações, a aula 3 passou a ter como objetivos:

Avaliar o processo através das considerações dos estudantes sobre as aulas apresentadas:

Retomar os questionamentos acerca do conceito de número irracional através do *feedback* das investigações realizadas e da análise de definições apresentadas;

Investigar através da tarefa "calculadora quebrada" percursos diferenciados para observação de características dos números irracionais.

As três etapas desta aula consistiram em feedback das aulas anteriores, análise de definições sobre conjuntos numéricos e "calculadora quebrada".

*Dinâmica*

Com o intuito de dar início as considerações do grupo acerca do conceito de número irracional, apresentamos uma imagem encontrada em uma página do *facebook*, reconhecida por apresentar conteúdo matemático voltado para vestibulares e concursos, com as seguintes informações:.

**Quadro 4- Discussão acerca de conjuntos numéricos**

| |
|---|
| Conjuntos:<br>Naturais= 0, 1, 2, 3,4...<br>Inteiros: ...-2, -1, 0, 1, 2...<br>Racionais: ...-1, 0, 1, 2. .e frações<br>Irracionais: Só as não frações. Raízes não inteiras e dízimas não periódicas.<br>Reais: Todos os anteriores. |

A imagem foi copiada de uma postagem pública de uma rede social, com as identificações dos usuários protegidas, o objetivo desta era a divulgação de um material voltado para cursos pré-vestibulares e preparatórios para Enem. A proposta da análise da imagem foi de levantar a discussão sobre a definição e a constituição dos conjuntos numéricos, em especial o conjunto dos números irracionais.

Nesta etapa da aula surgiram diversas considerações sobre falhas na estrutura proposta na imagem. Muitas dúvidas foram citadas em relação à exposição dos conceitos numéricos incluídos na imagem, destacam-se os comentários relacionados aos números irracionais.

O principal questionamento da turma foi quanto ao destaque realizado pelo autor da imagem: Na descrição "raízes não inteiras" o autor induz o leitor a incluir no conjunto dos irracionais as raízes de números racionais. A partir desse foco a turma iniciou um debate aberto sobre esta afirmação. Chegaram à conclusão de que há uma falha nesta afirmação, pois raízes como $\sqrt{\frac{25}{16}}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{\frac{49}{36}}$ (exemplos dados pelos licenciandos), com radicandos não inteiros, não podem ser consideradas irracionais, pois seus resultados pertencem ao conjunto dos números racionais. Esta discussão promoveu a reflexão sobre as definições equivocadas apresentadas por livros, apostilas e resumos que acabam por reforçar um conceito equivocado sobre irracionalidade numérica.

Em seguida foi apresentada a definição da tarefa chamada "calculadora quebrada", para melhor compreensão da proposta utilizamos alguns exemplos simples para elucidar a proposta. Esta tarefa consiste em encontrar alternativas para resolução de cálculos com a supressão de determinadas teclas da calculadora, ou seja, o estudante precisa encontrar estratégias de cálculo diferentes das que costuma utilizar.

**Figura 4- Calculadora quebrada**


Fonte: (http://www.atividadesdematematica.com/jogos-de-adicao-e-subtracao/jogo-de-matematica-calculadora-quebrada)

A partir deste exemplo os alunos sugeriram sequências de operações com os resultados pedidos, e foi possível compreender que o objetivo da tarefa é exercitar caminhos alternativos para o mesmo resultado.

Para a nossa proposta o objetivo da utilização deste jogo foi o exercício do método de aproximação para o cálculo de raízes irracionais. Dessa forma, informamos que a tecla com o sinal de raiz quadrada estava quebrada e que deveriam encontrar outra forma de calcular as representações decimais das seguintes raízes: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$. E em seguida os seguintes questionamentos: Quais foram as maiores dificuldades encontradas? Foi possível encontrar o valor exato de todas as raízes irracionais? Por quê? Quais conceitos o aluno pode perceber ou aprender com esta atividade?

*G1- Aproximação manual*

O grupo 1 iniciou a tarefa com bastante dificuldade. Não perceberam de início qual operação poderia ser utilizada para alcançar a representação decimal de uma raiz irracional. Após algumas considerações iniciaram o cálculo da $\sqrt{2}$ e chegaram ao seguinte resultado (descrição exata):

Procedimento manual, aproximação por tentativas:

1ª -1,5 x1, 5= 2,25
2ª- 1,3x 1,3= 1,69
2ª -1,4 x 1,4= 1,96
3ª- 1,41 x 1,41= 1, 9881

Foi possível perceber que a estratégia do grupo foi iniciar as tentativas pelo intervalo localizado no ponto médio entre dois números inteiros consecutivos. Feito isso, buscam novamente o novo ponto médio entre a escolha anterior e o número inteiro. Sempre avaliando a conveniência da escolha de um número racional maior ou menor. Em todas as tentativas a idéia da busca por um ponto médio permanece. Por fim inclui-se a estratégia de acrescentar uma casa decimal para alcançar um resultado mais aproximado. Segue abaixo os esquemas da estratégia de aproximação utilizada pelo grupo.

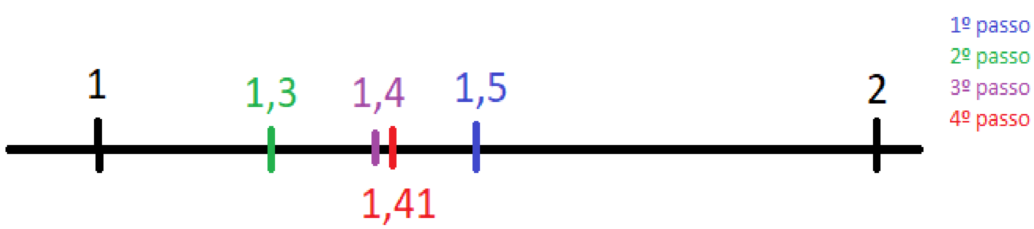
**Tabela 20- Estratégia de aproximação realizada pelo grupo 1 (contínua)**

| Operação | Estratégia usada |
|---|---|
| $\sqrt{2}$ | Partem da hipótese de que $1 < \sqrt{2} < 2$ e testam um valor intermediário: 1,5. Multiplicam por ele mesmo. |
| 1ª -1,5 x 1, 5 = 2,25 | Verificam que o resultado ultrapassou, então diminuem o valor testado. Mas ao invés de buscar o meio entre 1 e 1,5; diminuem um décimo do valor escolhido anteriormente e testam. |
| 2ª -1,4 x 1,4 = 1,96 | Faltou. Como entre 1,4 e 1,5 não existe nenhum outro número decimal com uma casa decimal, eles passam a trabalhar com os centésimos e aumentam 0,01 ao valor anterior e calculam o resultado para 1,41. |
| 3ª- 1,41 x 1,41 = 1, 9881 | Neste momento, descobrem que existe um meio mais rápido para encontrar a representação decimal, elevar o radicando ao expoente meio e lêem o resultado no visor. |

(2) ^ (1/2) = 1, 414214

Fim da experiência, por tentativa. Todas as outras raízes foram calculadas desta forma.

**Figura 5- Esquema de estratégia para aproximação**




Fonte: produção própria

Novamente tem-se em destaque nesta análise a percepção da pseudo-suficiência de três casas decimais para o resultado. Esta conclusão pode advir dos padrões operatórios de costume, utilizados tanto na educação básica quanto no Ensino Superior onde, geralmente, os professores indicam a necessidade desta quantidade de casas decimais e a utilização de reticências após elas.

Esta estratégia os obrigou a sair do ponto de conforto e é apresentada por Pommer (2012) como instrução de alguns livros cujo conteúdo sobre números irracionais é apresentado de forma mais concreta. Na imagem abaixo consta o processo exemplificado em uma das coleções analisadas pelo autor:

**Figura 6 - Estratégia exemplificada em livro didático**

Tabela 1: Aproximação para um intervalo de inteiros [Fonte: Coleção B].

| **Tentativas** | $\ell$ | $\ell \times \ell$ | **Conclusão** |
|---|---|---|---|
| 1ª | 16 | 16x16 = 256 | 256 < 300; é pouco. |
| 2ª | 17 | 17x17 = 289 | 289 < 300; é pouco. |
| 3ª | 18 | 18x18 = 324 | 324 > 300; é muito. |
| **Tentativas** | $\ell$ | $\ell \times \ell$ | **Conclusão** |
| 4ª | 17,5 | 17,5 x 17,5 = 306,25 | 306,25 > 300; é muito, mas está perto. |
| 5ª | 17,4 | 17,4 x 17,4 = 302,76 | 306,25 > 300; é muito, mas está perto. |
| 6ª | 17,3 | 17,3 x 17,3 = 299,29 | 299,29 < 300; é pouco, mas está mais perto. |

Fonte: Pommer (2012)

Na Calculadora o grupo também apresentou uma estratégia, que apesar de simples, não é tão usual para alcance do valor de raízes irracionais:

(2) ^(1/2) = 1, 414214

O grupo percebeu que poderia utilizar a operação x^y (potenciação) na calculadora científica, aplicando o valor do radicando ao x e ½ ao exponencial y. Seguiram com esse raciocínio durante todo o restante da tarefa.

Esta ideia está diretamente relacionada ao contexto de raízes quadradas racionais, onde elevando o resultado ao quadrado o radicando é encontrado, no entanto não foi mencionada nenhuma relação com a aproximação do resultado. Esta estratégia pode estar atrelada ao conceito de área de um quadrado.

Ao responder os três questionamentos o G1 respondeu da seguinte forma:

1- Quais foram as maiores dificuldades encontradas?

*Foi o método da aproximação, a partir do 3º algoritmo decimal.*

*2-* Foi possível encontrar o valor exato de todas as raízes irracionais? Por quê?

*Não*

*3-* Quais conceitos o aluno pode perceber ou aprender com esta atividade?

*Potenciação, aproximação por algarismos significativos, conceito de infinito, propriedades de radiciação.*

G1- Texto Final

*A aula foi muito produtiva, conversamos sobre todos os conjuntos numéricos, especificamente sobre os irracionais.*

*Já apresentando uma atividade chamada "calculadora quebrada", onde fizemos a* *demonstração de como deve ser utilizada em sala de aula.*

*Realizamos também com as raízes irracionais, onde fizemos anotações.*

*Observamos que não é fácil encontrar números próximos das raízes irracionais.*

O G1 manteve a postura investigativa durante o processo o que permitiu que duas estratégias muito consistentes surgissem. Nelas os conceitos de aproximação/exatidão e finito/infinito puderam ser contemplados e averiguados de forma autônoma. Essas observações podem ser constatadas em frases proferidas pelos integrantes:

*Potenciação, aproximação por algarismos significativos, conceito de infinito, propriedades de radiciação.*

*Observamos que não é fácil encontrar números próximos das raízes irracionais.*

Vale destacar aqui a importância do método utilizado pelo grupo 1, afinal Silva (2014) e Kindel (1998) afirmam que como são poucas as operações presentes nas aulas de matemática e geralmente realizadas sobre o conjunto dos racionais que é enumerável, os estudantes acabam por concluir que os irracionais daí obtidos formam um subconjunto também enumerável. Como todos os irracionais têm representação infinita, sua localização na reta deve ser aproximada, e, portanto, haveria necessidade de se ensinar métodos de aproximação, o que, lamentavelmente, não é feito. A proposta apresentada aqui vem ao encontro desta necessidade e colabora para a melhor construção do conceito de irracionalidade.

*G2- Utilizando $x^y$ como estratégia*

O G2 percebeu que poderia utilizar o comando $x^y$ desde o início, no entanto quando foi questionado sobre a existência de outro caminho, iniciou o cálculo de aproximações muito próximas aos procedimentos descritos nos registros históricos, analisando os quadrados perfeitos próximos à raiz desejada e submetendo valores maiores ou menores a testes consecutivos.

Ao responder os três questionamentos o grupo 2 elaborou da seguinte forma:

1- Quais foram as maiores dificuldades encontradas?

*Não foram encontrados números exatos para os resultados e os valores aproximados possuem muitas casas decimais.*

*2-* Foi possível encontrar o valor exato de todas as raízes irracionais? Por quê?

*Não. A maioria são números primos ou resultado da multiplicação de números primos, como o 6, que é resultado de 2x3, por exemplo.*

*3-* Quais conceitos o aluno pode perceber ou aprender com esta atividade?

*Trabalhos com números periódicos e fracionários, multiplicação, raízes de números primos etc...*

*G2- Texto Final*

*A atividade foi produtiva, pois, dentro dos cálculos de raízes que não são quadrados perfeitos podemos analisar conceitos implícitos.*

*Tais conceitos são basilares, podemos destacar o conceito de infinito, raiz quadrada, propriedades de raízes entre outros.*

*É de extrema importância que o aluno consiga perceber a sutileza das aproximações, além disso, deve dominar a aritmética, pois os cálculos devem ser realizados de forma instantânea.*

*O auxílio da calculadora facilitou e é mais uma ferramenta para simplificar a lógica.*

Tem-se em destaque na prática deste grupo a situação de aprendizagem entre pares não homogêneos, a dupla foi formada por um aluno com mais experiências e vivências investigativas e também com habilidade na elaboração de estratégias de cálculo, este precisou orientar sua companheira na elaboração da melhor estratégia para o problema. Esse caso remete às pesquisas Brown (1989) e Duschl (1995), que afirmam que o trabalho cooperativo nos grupos potencializa os insights e as soluções que não seriam possíveis durante a aprendizagem individual, permitindo aos alunos assumirem diferentes papéis, confrontando seus conhecimentos prévios e a inadequação de suas estratégias de raciocínio. Ressaltam que, no ensino, quando aumentam as oportunidades de discussão e de argumentação, também se incrementam as habilidades dos alunos compreenderem os temas ensinados e os processos de raciocínio envolvidos.

Também merece destaque na dinâmica desta tarefa o acomodamento encontrado no que Skovsmose (2000) chama de paradigma do exercício. O autor defende que os livros didáticos geralmente apresentam as condições tradicionais da prática de sala de aula, ou seja, os exercícios são formulados por uma autoridade externa à sala de aula e aplicados aos estudantes que se acostumam a essa hierarquia de aprendizagem. Nesta proposta aplicada, os licenciandos necessitaram buscar estratégias diferentes para a resolução de um problema que tradicionalmente seria resolvido com a utilização do cálculo de radiciação, e este desvio na rotina provoca uma ruptura da visualização costumeira do conceito de número irracional, possibilitando o enriquecimento conceitual.

## 5.4- Aula 4- Irracionais na Reta e Espiral Pitagórica

Com o intuito de reforçar a análise das representações geométrica e decimal dos números irracionais, bem como realizar uma avaliação intermediária, a aula 4 também apresentou a necessidade de alterações e melhorias.

Sua primeira versão apresentava a seguinte configuração:

**Quadro 5- Tarefa 4. Primeira versão**

Selecione 6 raízes irracionais. Calcule seus valores utilizando a calculadora e posicione suas localizações na reta real.

Agora, Observe o processo geométrico para a localização de raízes irracionais e repita-o com as raízes selecionadas na tarefa.

- Construa um triângulo retângulo com cateto de comprimento igual a 1 unidade.
- Trace a hipotenusa e calcule seu valor.
- Trace um seguimento de valor unitário perpendicular a hipotenusa formando um novo triângulo retângulo. Calcule a hipotenusa deste novo triângulo .
- Prossiga repetindo o processo por 6 vezes.

Os pontos (representação decimal) marcados anteriormente coincidiram com os encontrados? Houve diferença? Por quê?

O que foi possível perceber ao final da tarefa? Que estrutura foi construída?

sência de

oportunidades investigativas e da flexibilidade para exploração de opções. Além disso, apresentou-se a necessidade de sondar a evolução da construção conceitual dos licenciandos em relação ao conjunto dos números irracionais. Tornou-se necessário realizar modificações na estrutura das tarefas.

*Objetivos e etapas*

As tarefas reformuladas apresentaram como objetivos:

Investigar o posicionamento dos números irracionais na reta real sem o auxílio da verificação de suas representações decimais.

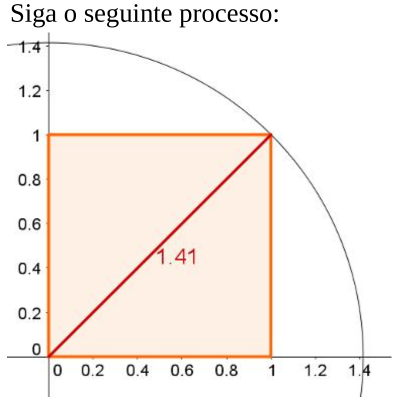
Observar a construção da representação geométrica dos números irracionais através da medida de seguimentos incomensuráveis.

As etapas das tarefas da aula 4 foram elaboradas com o seguinte processo:

**Quadro 6- tarefa 4 Aplicada**

1-Observe o processo geométrico para a localização da raiz quadrada de 2 e repita-o para as demais raízes.

Siga o seguinte processo:



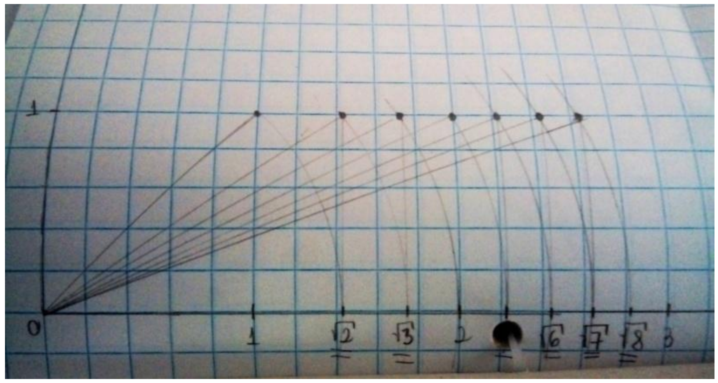

1- Esta tarefa colaboraria par a aprendizagem do conceito de números irracionais na educação básica?

*Dinâmica*

Ao realizar a tarefa a turma focou na elaboração dos gráficos, no cálculo dos valores irracionais e nas respectivas comparações. Os gráficos foram traçados com atenção à proposta, no entanto um grupo em especial elaborou uma conjectura diferenciada dos demais, e inesperada nesta fase da investigação.

*G1- Visualizando a espiral Pitagórica*

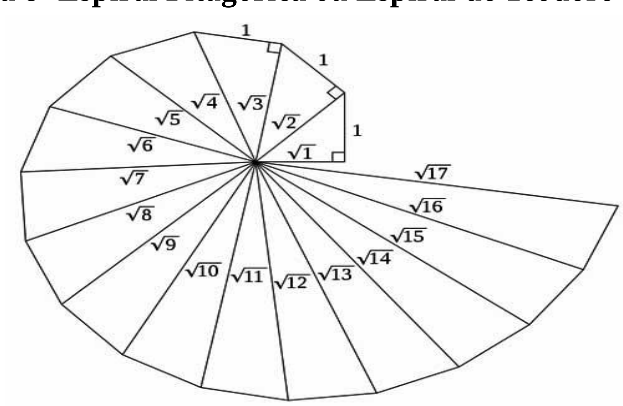
**Figura 7- Registro G1/aula 4**



Fonte: produção do G1

Este grupo analisou a recorrência do seguinte processo: Ao traçar a diagonal do quadrado de lado igual a 1 unidade, o identificaram como raiz de dois e com auxílio do compasso realizaram a correspondência desta medida na reta real. Consideraram a medida traçada na reta como um cateto de um próximo triângulo quadrado e completaram então este triângulo retângulo com um segundo cateto de medida 1. Perceberam que a nova hipotenusa apresentara medida igual à raiz de três. Continuaram construindo novos triângulos retângulos com um cateto irracional e um segundo cateto unitário. Com esta investigação construíram o que os gregos chamavam de Espiral Pitagórica, mais uma representação geométrica da correspondência entre número irracional e medida de comprimento..

**Figura 8- Espiral Pitagórica ou Espiral de Teodoro**




Fonte: https://matemelga. wordpress.com/2015/08/05/la-espiral-de-teodoro/

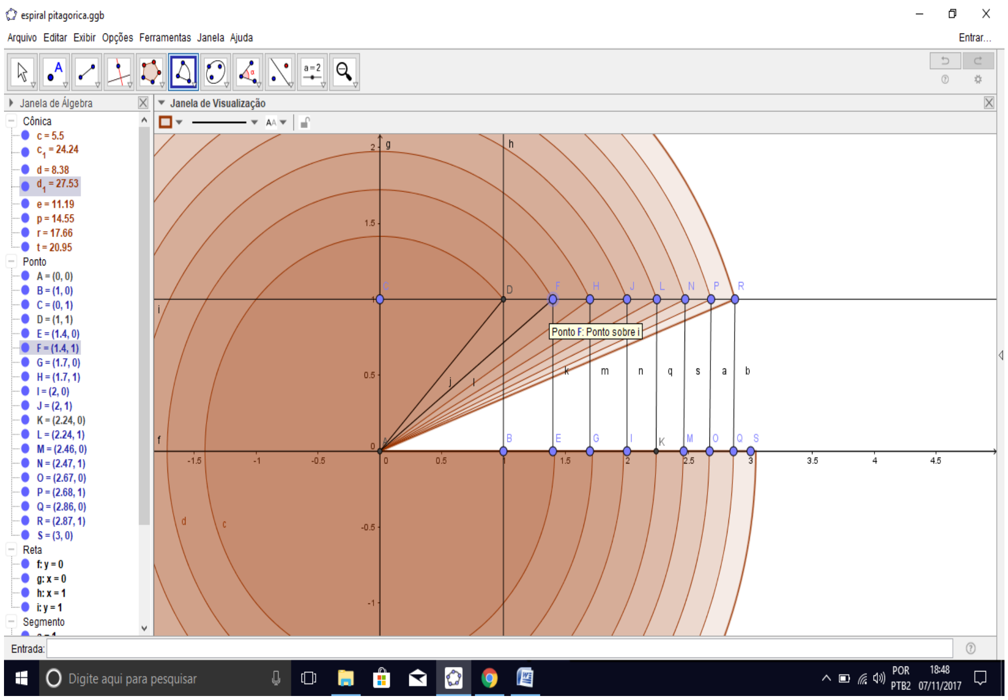
Este conceito chegou a permear a possibilidades de aplicação por meio de outra tarefa que estaria prevista para uma aula posterior, no entanto acabou surgindo de uma investigação matemática livre, tornando esta outra tarefa prevista dispensável.

Esta tarefa se justifica por sua diversidade de experiências que permeiam o conceito de irracionalidade, uma prática destacada por Corbo e Campos (2013) quando afirmam que um professor precisa de um repertório abrangente de conhecimentos, ou seja, é necessário que ele tenha à sua disposição uma imagem conceitual bem rica, relativa a esse assunto, a fim de que possa adequar suas instruções aos alunos com os quais está trabalhando.

Outra abordagem com princípios semelhantes seria a utilização do software Geogebra para verificar as relações entre os seguimentos de medidas irracionais e a construção da reta real com inclusão das raízes irracionais. Dessa forma as relações entre visualização geométrica e representação decimal podem também serem comparadas.

Abaixo, um exemplo desta construção, utilizando *o software Geogebra*.

**Figura 9- Exemplo de abordagem da Espiral Pitagórica com uso de Geogebra.**



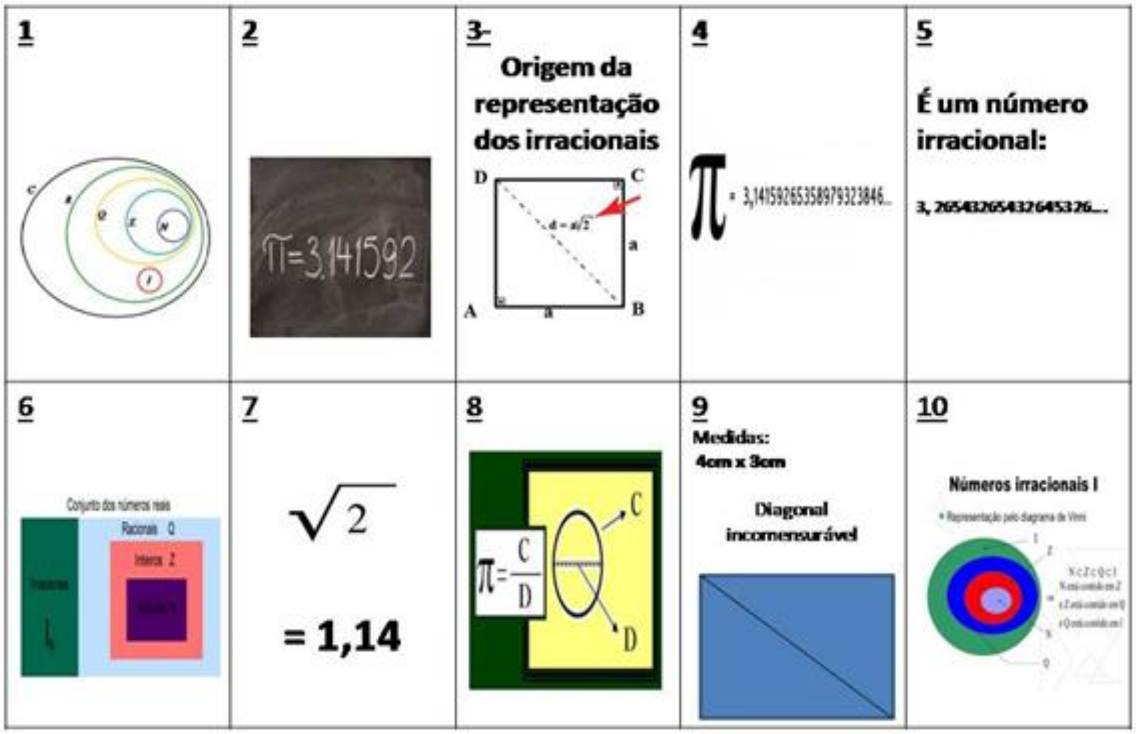

A exploração desta proposta vai ao encontro de pesquisas como a de Braumam (2004) que defende que o principal problema do ensino da Matemática não é propriamente o dos conteúdos curriculares, mas o de não desenvolver a capacidade de dedução matemática. Nesta aplicação foi possível estabelecer um contato mais aproximado com o conceito de irracionalidade, pois permite a observação simultânea de duas representações (decimal e geométrica) para um mesmo número, enriquecendo o repertório visual dos estudantes.

Foi Incluída na mesma aula uma avaliação intermediária, elaborada com a estrutura de uma tarefa de contexto generalizado. Seu objetivo é a sondagem do processo de construção conceitual das características dos números irracionais.

**Quadro 7- Jogo dos 7 erros**

Jogo dos 7 erros

Analise estas 10 imagens/informações e julgue-as. Destaque as 7 que apresentam algum erro ou imprecisão.




Fonte: produção própria

O tempo previsto para a realização da primeira tarefa desta 4º aula não foi suficiente, e por este motivo apenas dois grupos conseguiram registrar suas considerações sobre esta avaliação, seus registros serão comparados e analisados a seguir:

**Tabela 21- Respostas. Grupos 1 e 2 / aula 4**

| Imagem | G1 | G2 | Observações |
|---|---|---|---|
| 1 | Errado: os irracionais se encontram dentro dos Reais | Certo: Todos os conjuntos estão na devida ordem. | Nenhum dos dois grupos chegou a discutir a dimensão do conjunto dos irracionais em relação aos demais. |
| 2 | Errado: π é aproximadamente 3 141592 | Errado: π não possui raiz exata. | O conceito de infinito foi considerado. |
| 3 | Certo | Errado: As medidas são incomensuráveis. | Possivelmente o G2 ainda confunde o conceito de incomensurabilidade com a impossibilidade de determinação de medidas. |
| 4 | Certo | Certo: raiz de pi é infinita. | Interpretação sobre conceito finito/infinito |
| 5 | Certo | Errado: não é um irracional e sim uma dízima periódica. | O G2 não apresenta o conceito de dízima periódica ou não periódica bem definido, pois considera o número 3, 265412654326545326... como uma dízima periódica e portanto irracional, o que não é verdadeiro. |
| 6 | Errado: irracionais se encontram dentro dos reais. | Errado: pois os racionais não pertencem aos reais. | A pouca resolução da imagem pode ter confundido a percepção de que o retângulo maior representa os conjunto dos números reais. |
| 7 | Errado: raiz de 2 é diferente de 1,14. | Errado: Errado: o valor deveria estar aproximado. | Conceito de número aproximado foi bem apontado. |
| 8 | Certo. | Certo: Mas deveria ser aproximadamente. | Conceito de número aproximado foi bem apontado. |
| 9 | Errado: A diagonal é comensurável. | Errado: pois é possível achar o valor da diagonal. | Os dois grupos apontaram a comensurabilidade da diagonal do retângulo em destaque, no entanto, o G2 permanece confundindo incomensurabilidade com impossibilidade de medição. |
| 0 | Errado: O conjunto N, Q e Z não estão contido nos irracionais. | Errado: Irracionais é um conjunto à parte. | Ambos perceberam o destaque posicional do conjunto dos números irracionais. |

A partir desse momento foram aplicadas tarefas com foco em irracionais específicos, com o intuito de ampliar os horizontes, do ponto de vista conceitual, relacionados ao conjunto dos números irracionais.

### 5.5- Aula 5- Quem é π?

Esta tarefa foi elaborada com o intuito de propor aos estudantes a ampliação conceitual do número π, partindo da observação de um dos experimentos mais utilizados para percepção da constante existente entre medida da circunferência e do diâmetro de círculos.

*Objetivos e etapas*

Nesta aula os objetivos apresentados foram: Observar relações entre o número π e as medidas relacionadas aos círculos. Explorar estratégias que permitam a percepção de características do número π. E também o objetivo específico de estruturar os conceitos relacionados à apresentação do número irracional π e desvincular seus estudo das abordagens usuais.

Esta tarefa também sofreu alterações antes da aplicação. A etapa de registro no plano cartesiano foi reformulada permitindo ao aluno uma contemplação de diversas possibilidades de cálculos e relações matemáticas, podendo realizar sua investigação em um perfil de maior liberdade.

Foram escolhidas duas tarefas, a primeira baseada no método de medição da circunferência e do diâmetro e o cálculo de sua razão, no entanto com a inclusão de uma perspectiva didática e de uma provocação relacionada aos conceitos estudados. A segunda apresenta um perfil de investigação livre, também relacionada às medidas de círculos.

**Quadro 8- Tarefa 5 aplicada**

1- Meça, com ajuda do barbante e da régua, o diâmetro e a circunferência das formas fornecidas. Registre e reserve os barbantes com as medidas.

Calcule a razão entre circunferência e diâmetro. O valor é igual em todos os casos?

2- Calcule a média destes valores. O que podemos concluir com esse primeiro processo? Que estratégia poderia ser usada para contornar o problema e chegar a um valor mais apurado?

3- Registre no plano cartesiano as medidas de circunferência e diâmetro. Escolhendo um eixo para cada item.

Exemplo: (0,C) e (d,0) ou (0,d) e (C,0)

Que relação matemática poderia resultar na observação de aproximações de π? Explique seu

*Dinâmica*

Para uma melhor visualização, serão apresentados aqui os resultados e análises de forma separada. Inicialmente as respostas dos licenciandos (medições e reflexões), posteriormente a análise do segundo momento da tarefa, contendo os gráficos e as suposições obtidas através da investigação dos mesmos e por fim os textos conclusivos de cada grupo.

Os grupos apresentaram os seguintes resultados:

**Tabela 22- Calculando a razão entre circunferência e diâmetro**

| | Razão Entre Medida Da Circunferência E Diâmetro | | |
|---|---|---|---|
| *GRUPO* | *LATA* | *COPO GRANDE* | *COPO PEQUENO* |
| 1 | 32/10=**3,2** | 15/4, 5= **3,33**... | 15/5=**3** |
| 2 | 31,5/10,1=**3,11** | 22,5/7,5=**3** | 16,5/5=**3,3** |
| 3 | 31/10=**3,10** | 21/6, 3=**3,08** | 15,4/4,8=**3,20** |
| 4 | 32/10=**3,2** | 21.5/7,5=**2, 866...** | 15,5/5,5= **2, 81818...** |
| 5 | 32/10=**3,2** | 21,5/7= **3,07** | 15,5/5= **3,1** |

Fonte: Produção própria

A primeira observação feita por cada grupo individualmente foi o não surgimento de um valor tão próximo à π, a maior parte dos licenciandos acreditavam que surgiriam valores mais apurados e aproximados da constante. Esse dado remete as afirmações de Weick (1979) quando sugere que as pessoas estão mais propensas a ver algo em que acreditam ao invés de acreditar no que vêem. Nesse momento a ruptura de uma certeza abre espaço para questionamentos que podem geram a reconstrução do conceito que tinham anteriormente.

A segunda questão que provocou polêmica e discussão nesta primeira tarefa da aula foi a ampla diferença de valores entre os grupos, cabe ressaltar que os objetos distribuídos possuíam medidas idênticas (lata de leite, copo de 200ml e copo de 100ml) e os mesmos instrumentos foram distribuídos (barbante e régua comum), portanto a turma esperava que os resultados dos grupos apresentassem o mesmo padrão. Como essa padronização não ocorreu levantaram hipóteses para explicar as divergências, conjecturaram a possibilidade de instrumentos de medição mais precisos, no entanto, como se tratam de tarefas aplicáveis na educação básica (com poucos recursos) esta possibilidade foi descartada.

Sugestões sobre instrumentos mais firmes do que barbante foram consideradas. O G3 decidiu repetir a medição com o apoio de tiras de papel sulfite e régua, chegando a medidas bem mais próximas à π. Mas de qualquer forma, existia a expectativa de observar o surgimento de valores mais precisos, o que fez com que considerações críticas sobre a aplicação desta atividade surgissem.

- Que estratégia poderia ser usada para contornar o problema e chegar a um valor mais apurado?

*G1- Utilização de instrumentos de medição mais firmes. Ao calcular a média entre os resultados encontramos 3, 1533*

*G2- Calcular a média entre os resultados.*

*G3- Utilizar instrumentos de precisão e retirar a média dos resultados encontrados.*

*G4- Uma das estratégias possíveis é a realização da média aritmética dos resultados de cada grupo. E então a construção de um critério de aproximação.*

*G5- A Repetição Com Uma Quantidade Bem Maior De Objetos Traria Um Valor Mais Aproximado. Uma ampliação de dados traria um valor mais preciso.*

Ainda aqui é possível perceber que existe um conflito entre o que foi visto. Ainda há a expectativa de visualizar o valor de pi exato através destas medições. No entanto, a percepção de aproximação e de que $\pi$ é uma constante irracional vai surgindo durante o processo.

- Que estratégia poderia ser usada para contornar a dificuldade e chegar a um valor mais preciso?

*G1-Assim como os matemáticos calcularam pi através da periodicidade, a repetição com diversos tamanhos de círculos, traria um valor bem aproximado de pi, mostrando que quanto mais dados para esse estudo mais próximo se chegaria ao valor de pi.*

*G2- Uma das estratégias a serem adotadas é realizar uma média aritmética simples dos valores encontrados de cada grupo e então um critério de aproximação e comparação para que cheguemos a um valor aproximado de pi.*

*G3-Utilizar materiais de medição mais firmes. Calcular as médias entre valores encontrados, resultando em 3, 1533...*

*G4- calcular a média entre os resultados. Tirar a média entre os valores obtidos ou utilizar de instrumentos mais precisos de medição.*

*Representando as medições*

Este item buscava encontrar relações matemáticas entre as medidas encontradas nos objetos circulares e uma possível representação geométrica. Para isso sugeriu-se uma análise sobre a ótica geométrica, ou seja, a construção de figuras planas utilizando as medidas encontradas em busca de possíveis relações entre as mesmas. No entanto os licenciandos foram esclarecidos que não buscávamos uma resposta única e sim resultados de suas investigações. Não foram delimitadas as estratégias, a metodologia ou o resultado a ser buscado, o objetivo foi investigar relações que poderiam surgir a partir da transferência dos resultados numéricos para um campo geométrico.

3- Registre no plano cartesiano as medidas de circunferência e diâmetro. Escolhendo um eixo para cada item.

Exemplo: (0, C) e (d, 0) ou (0, d) e (C, 0). Com C representando a circunferência e D o diâmetro.

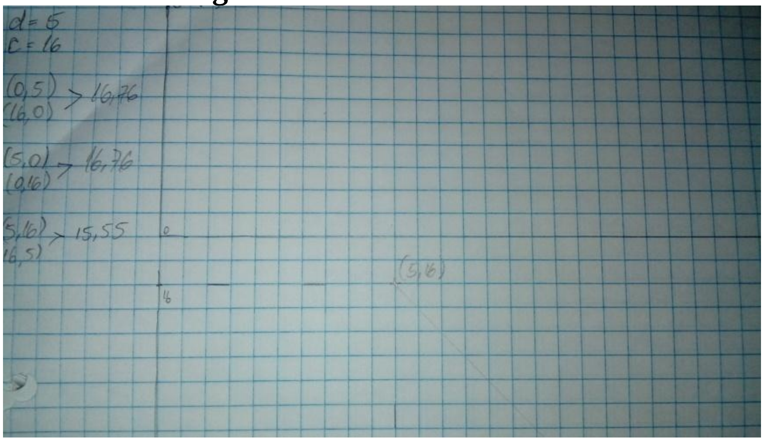
Na análise das respostas verificamos três tipos de estratégias utilizadas:

Nada consta; Razões trigonométricas; teorema de Pitágoras.

- Nada consta.

O grupo G1 afirmou que não conseguiu visualizar relação através desse procedimento.

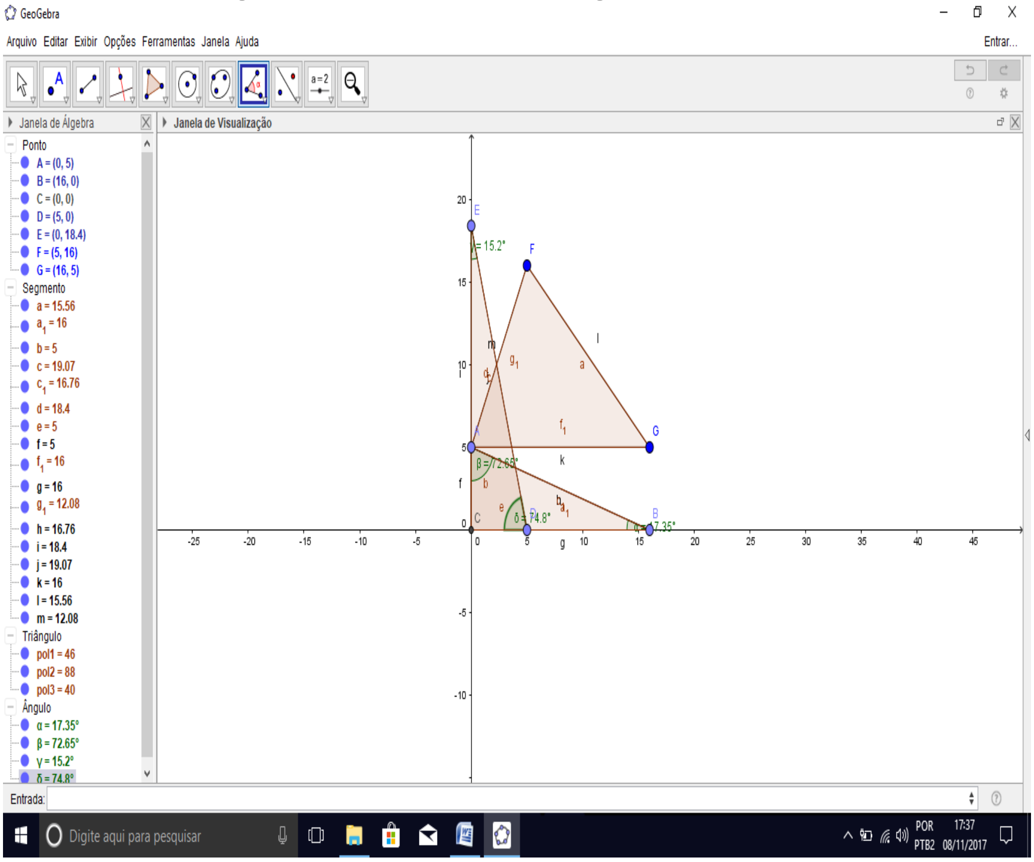
**Figura 10- Gráfico G1/aula 5**




Fonte: produção do grupo

Observando o gráfico original construído pelo grupo foi difícil acompanhar o traçado e a estratégia, deixando a impressão de que o grupo não havia conseguido relacionar a representação geométrica com as medidas encontradas. Para melhor análise, as coordenadas apresentadas pelo grupo foram reconstruídas no Geogebra.

**Figura 11- Reconstrução do gráfico aula5/G 1**




Fonte: Produção dos estudantes/ reprodução própria

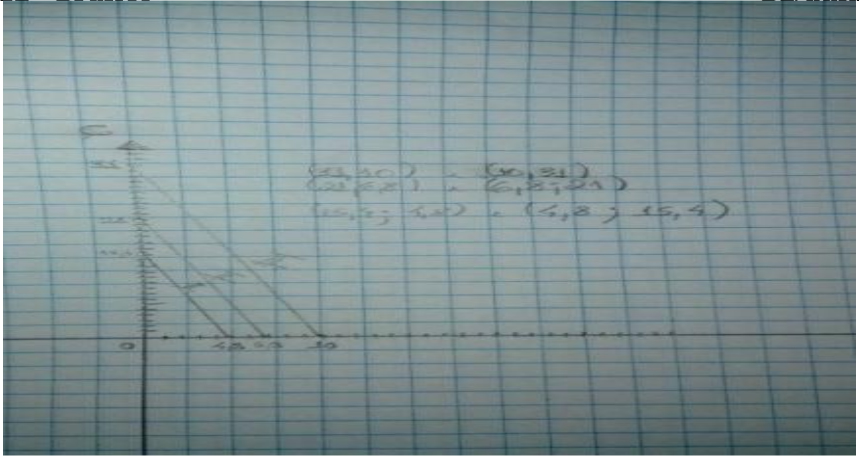
Após a representação no Geogebra, foi possível visualizar as coordenadas dos pontos apresentadas pelo grupo. É possível notar que os triângulos que surgiram são bem distintos. Buscamos procurar relação entre os triângulos traçados, no entanto não a encontramos um padrão destacável.

O G1 construiu três triângulos distintos e não utilizou nenhum recurso para descrição da estratégia de raciocínio, o que dificultou a análise da tarefa.

- Relações trigonométricas

*G2- Sim. Olhando para o plano cartesiano, ao usarmos as relações trigonométricas cotangente=cateto adjacente / cateto oposto será uma relação idêntica a relação apresentada,*
*comprimento/diâmetro.*

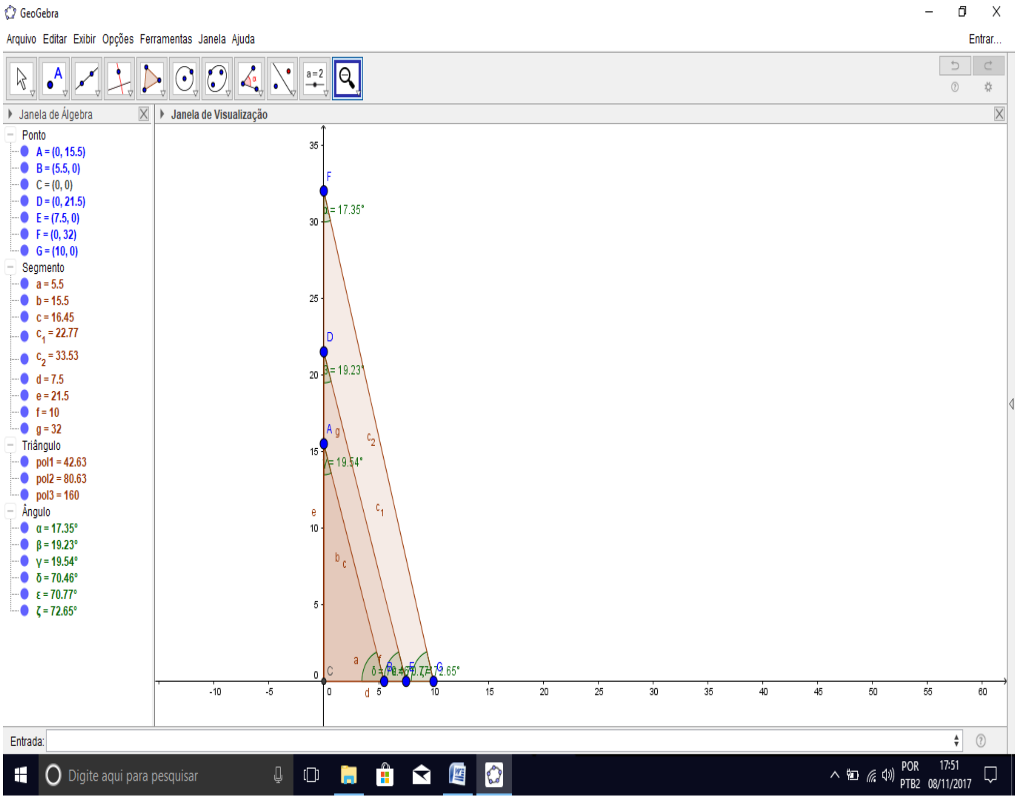
**Figura 12- Gráfico G2/aula 5**



**F**onte: produção do grupo

Para melhor visualização da estratégia e do resultado, o gráfico do grupo também foi reconstruído com auxílio do Geogebra.

**Figura 13- Reconstrução do gráfico aula5/G 2**



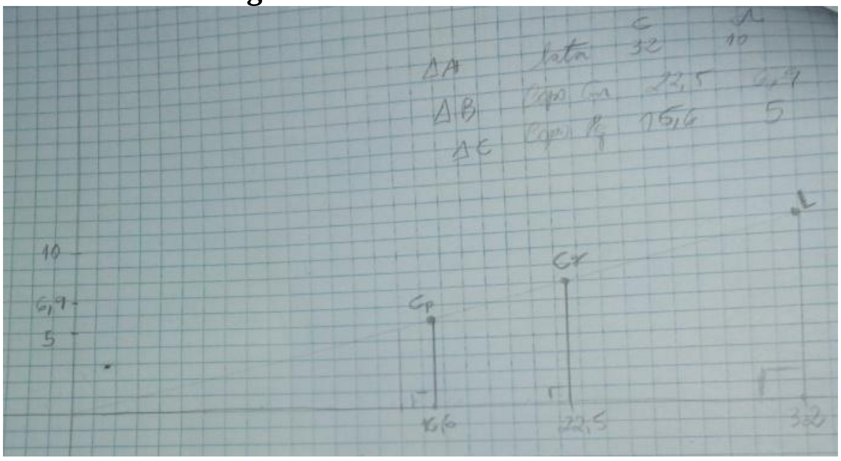

Fonte: Produção dos estudantes/ reprodução própria

*Concluímos que os triângulos são proporcionais, pois apresentam a mesma relação de semelhança. E sem de 1= 0, 335, sem de 2= 0, 330 e sem de 3= 0, 298. Remetem-nos as aproximações de pi.*

A construção do G2 já é bem mais específica. Foram construídos três triângulos, cada um utilizando as medidas encontradas em um dos objetos (diâmetro e circunferência) representando os catetos de cada triângulo e a partir destes traçaram a hipotenusa. O resultado destas construções foi à visualização de três triângulos retângulos semelhantes. Esta semelhança foi visualizada a olho nu através dos gráficos traçados. No entanto ao reconstruirmos os triângulos no Geogebra é possível observar semelhanças na proporção das medidas de área de cada triângulo (40, 80 e 160) e também de seus ângulos internos, que se aproximam: o primeiro entre 19° e 20°; e o segundo entre 70° e 71°. Considerando que essas medidas surgiram da medição aproximada de objetos, os resultados ainda foram bastante precisos e nos remetem à existência de π como a constante que existe entre as medidas de diâmetro e circunferência.

G3- *Representamos por (0, d) e (c, 0), obtemos 3 triângulos retângulos, calculamos seno. Cosseno e tangente. Observamos que os valores encontrados são próximos.*

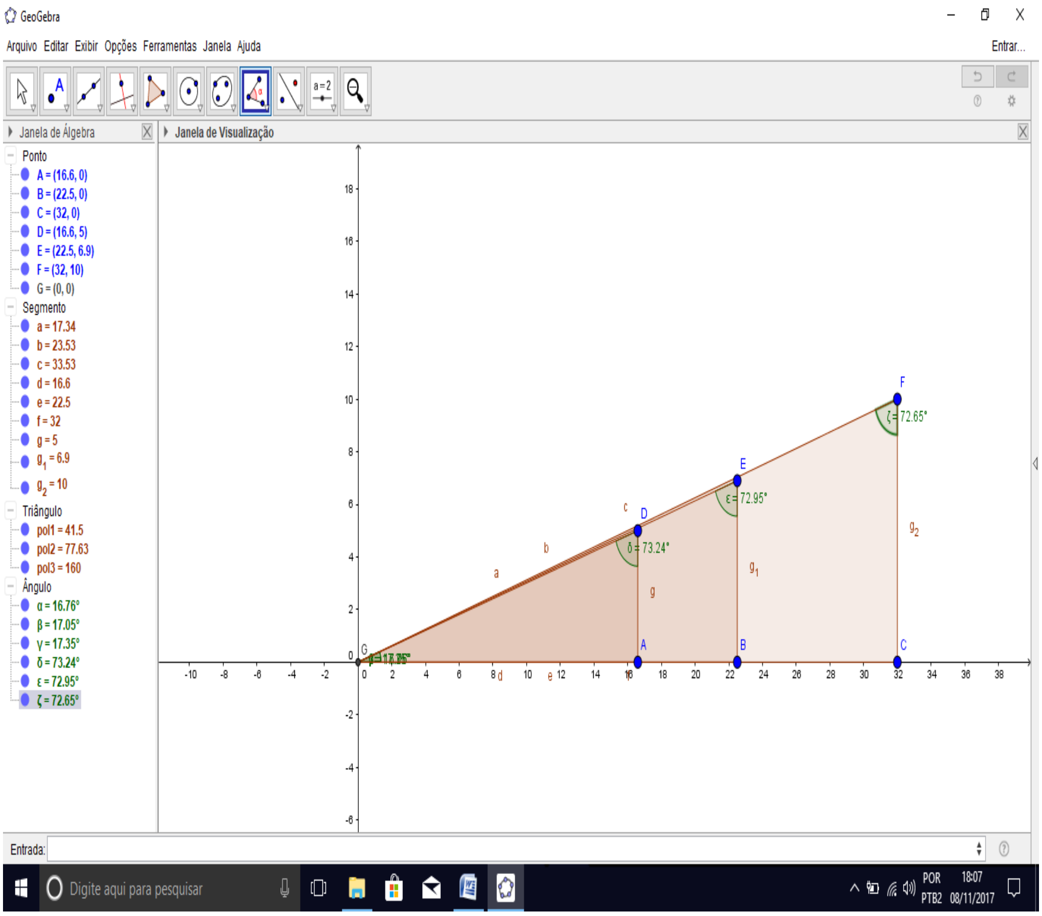
**Figura 14- Gráfico G3/ aula 5**



Fonte: Produção do grupo

Apesar de apresentar um traçado com maior potencial visual, o gráfico também foi reconstruído a fim de ser possível visualizar as medidas dos ângulos.

**Figura 15- Reconstrução do gráfico aula5/G 3**



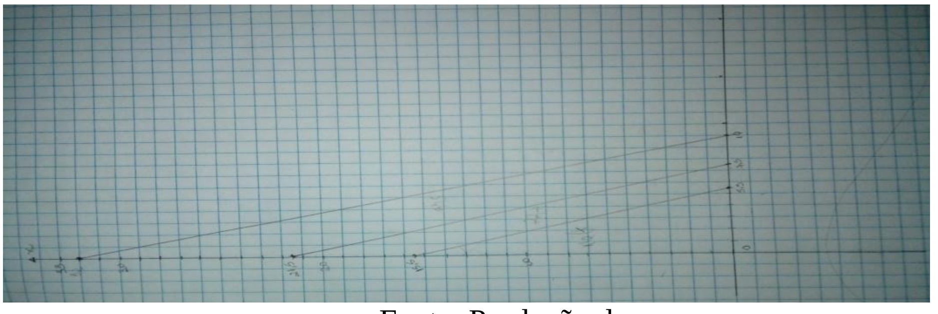

Fonte: Produção dos estudantes/ reprodução própria

O G3, assim como esperado neste contexto investigativo, realizou uma construção diferente, traçando triângulos que se complementam no gráfico, como extensões. Nesta construção a semelhança entre os ângulos se torna ainda mais visível, sempre variando, um entre 11° e 13° e o outro entre 77° e 79º. Além desta observação, o G3 realizou a comparação do valor das tangentes dos ângulos internos e encontrou em um dos casos valores muito próximos a π, o que caracteriza uma maneira diferenciada de abordar seu conceito.

*Tg1= 0, 3123*
*Tg2= 0.3066*
*Tg3= 0, 3012*

*G4- Sim. Através do cálculo da tangente de um dos triângulos.*

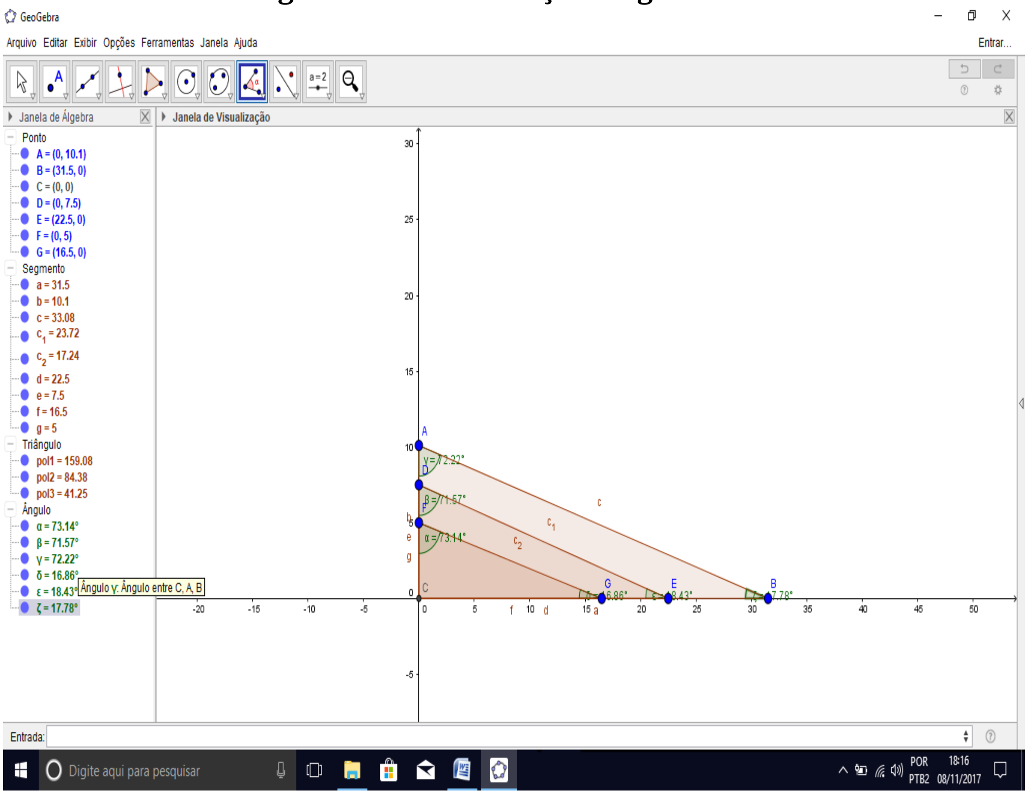
**Figura 16- Gráfico do G4/aula5**



Fonte: Produção do grupo

Também com o intuito de proporcionar melhor visualização e comparar os valores dos ângulos de cada triângulo, tornou-se conveniente reproduzir o gráfico de grupo 5.

**Figura 17- Reconstrução do gráfico aula5/G 4**




Fonte: Produção dos estudantes/ reprodução própria

O G4 realizou uma construção muito próxima a realizada pelo G3, no entanto se equivocou durante a produção do gráfico e posicionou os pontos sobre os valores negativos no eixo. No entanto, ao reconstruir o gráfico no Geogebra foi possível visualizar as mesmas semelhanças entre as áreas e os ângulos apresentadas pelo G2, salvo algumas variações oriundas da aproximação do software. Estas semelhanças nos levam a crer que a representação dos valores obtidos na medição dos objetos circulares nos gráficos através da construção de triângulos sempre nos trará dados interessantes, pois ao compararmos cada um dos triângulos sempre será possível observar semelhanças que nos farão refletir sobre a Constância existente nas relações de medida dos objetos circulares.

O grupo também optou por calcular as relações métricas nos triângulos construídos e por consequência das medidas $\frac{circunfer\hat{e}ncia}{di\hat{a}metro}$ ser a mesma encontrada em $\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$ as medidas das tangentes de um dos ângulos internos traz um valor aproximado de $\pi$:

A- *Tg (α) = 0,32 e tg (β) = 3,11*

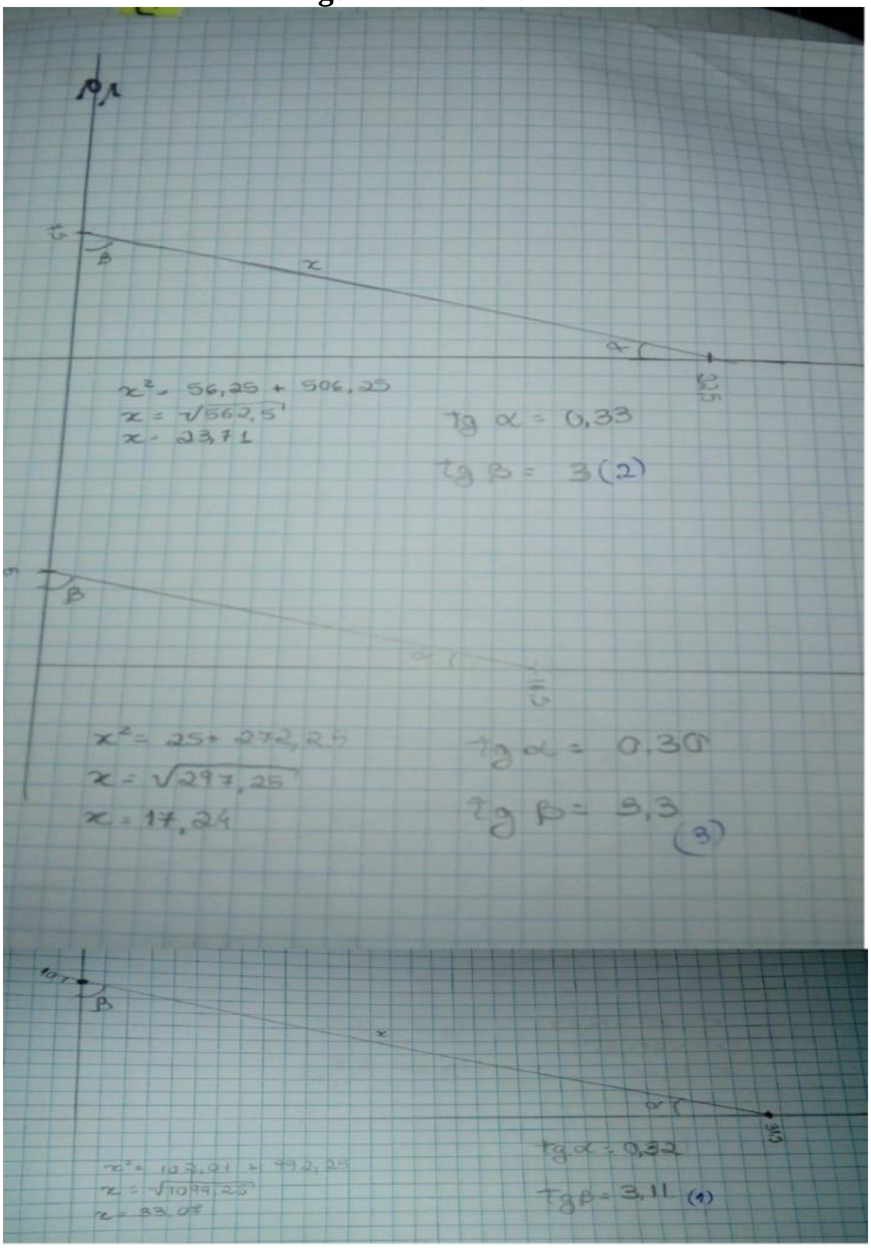
B- *Tg (α) = 0,33 e tg (β) = 3*

C- *Tg (α) =0,30 e tg (β) = 3,3*

- Teorema de Pitágoras

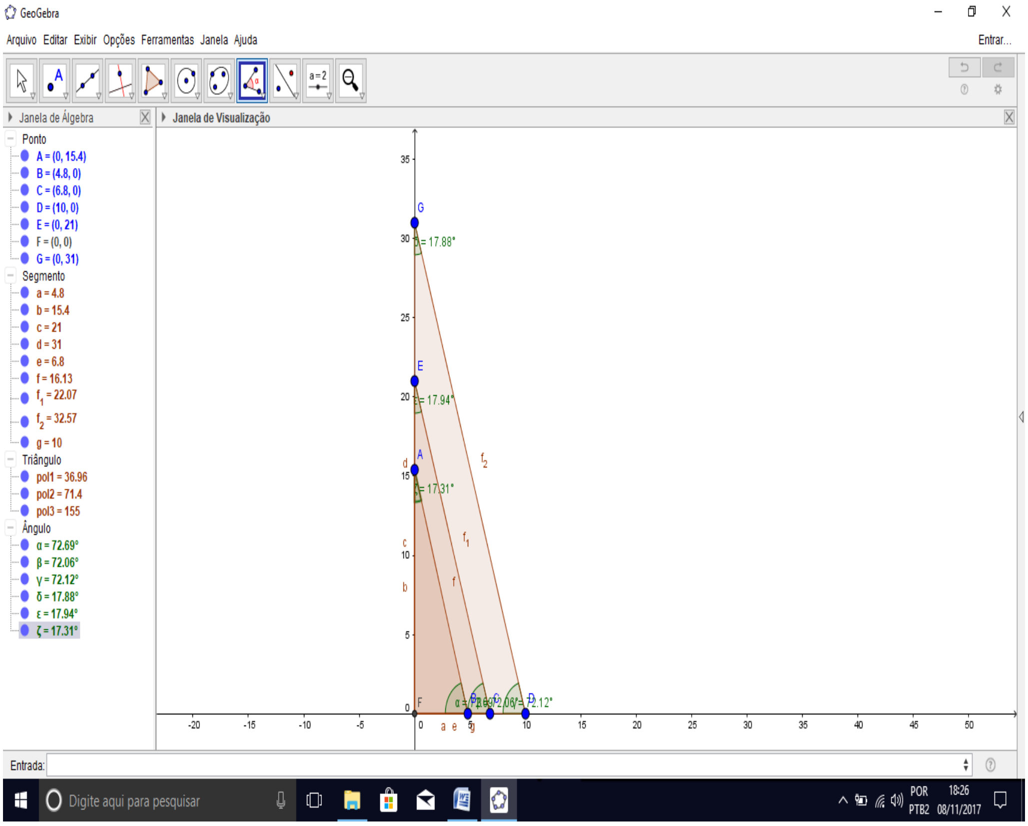
*G5- Utilizamos Pitágoras e não encontramos valores próximos à pi.*

**Figura 18- G5/ aula 5**




Fonte: Produção do grupo

**Figura 19- Reconstrução do gráfico aula5/G 5**




Fonte: Produção dos estudantes/ reprodução própria

O G5 descreveu muito pouco suas estratégias, no entanto a produção do gráfico também nos remete as mesmas observações e conclusões dos demais grupos.

- Texto final- O Que Foi Possível Perceber Sobre O Número Pi?

G1- *Que estabelecer uma relação através desse método precisa de ferramentas mais precisas e um número maior de casos para aproximar os valores de pi.*

G2- *Com o número pi observamos através de um plano cartesiano a relação trigonométrica entre os três triângulos retângulos que conseguimos representar.*

G3- *Que esse método usual relata que pi é a razão entre diâmetro e circunferência e é equivocado, podemos chegar às aproximações, mas não ao pi exato.*

G4- *Apesar da relação entre circunferência e diâmetro, nem todos os métodos darão precisão de valor estimado pelos livros didáticos para pi. É interessante a relação entre circunferência e o diâmetro com o cálculo trigonométrico no triângulo retângulo.*

G5- *Além de ser irracional, existem meios de ser encontrado, mas não precisamente, apenas aproximado.*

Foi possível perceber que os objetivos da tarefa foram alcançados, pois todos os grupos relatam a quebra de um conceito que antes aparentava estar consolidado. Os termos *aproximar*, *precisão* e *meios de ser encontrado* remetem a uma nova estruturação conceitual sobre o número π e consequentemente sobre os números irracionais.

*Similaridades na aplicação das tarefas*

Primeiramente, é necessário justificar a não aplicação da tarefa seis, prevista para o segundo ciclo de pesquisa. A tarefa foi planejada e o material referente a ela produzido. No entanto, no dia previsto para a aplicação da mesma (último disponível no calendário acadêmico), os alunos não compareceram por conta de uma informação equivocada sobre suspensão da aula. A mesma encontra-se pronta para aplicação em um momento oportuno e certamente produzirá resultados a serem divulgados em uma futura oportunidade.

Um dos pontos em comum na aplicação das cinco tarefas foi a percepção destacada por Nacarato e Lopes (2009) ao afirmarem que, quando um aluno tem de formular uma resposta cognitiva para uma tarefa, começa por construir uma representação da própria tarefa, dos conhecimentos que julga ser necessários e da sua finalidade. Foi possível notar que este processo se repetiu em todas as propostas de tarefas, um comportamento onde os estudantes tentam prever o objetivo do professor (no caso pesquisador) na aplicação da tarefa. A proposta de investigação matemática tem como um de seus objetivos desconstruir, mesmo que parcialmente, este paradigma de hierarquia do processo de aprendizagem, e este objetivo foi alcançado durante a aplicação das tarefas elaboradas para essa pesquisa.

Outra característica presente de forma homogênea no comportamento dos grupos foi o formato de cooperação descrito por Teodoro, Cabral e Queiroz (2015). Os autores afirmam que os alunos trabalham em grupos cooperativos, sendo que o trabalho que cada aluno realiza é essencial para a concretização do trabalho final do grupo e a sua sistemática de funcionamento assemelha-se a de um quebra-cabeça, que somente está concluído quando todas as peças estão encaixadas. As etapas de cada tarefa geralmente eram discutidas de forma coletiva, em seguida os estudantes tomavam funções diferentes em busca da melhor estratégia, na conclusão era elaborada uma posição consensual que era expressa através das respostas dissertativas e do texto final.

Refletindo sobre os objetivos desta pesquisa e o alcance dos mesmos, é possível afirmar que foram investigadas propostas de materiais e estratégias, e que as mesmas viabilizaram a aprendizagem do conceito de número irracional; Os estudantes puderam refletir sobre o conceito de incomensurabilidade através da releitura do processo histórico da construção dos números irracionais; A reflexão sobre a existência do conjunto dos números irracionais foi realizada através da observação das representações numérica, geométrica e também através de estratégias algébricas e de posicionamento na reta Real. O objetivo relacionado à produção do produto educacional também foi alcançado e será apresentado a diante.

No capítulo seguinte serão descritos com detalhes os resultados da pesquisa, iniciando por uma apresentação do aproveitamento da pesquisa teórica, assim como da utilização da metodologia selecionada. Em seguida serão abordados, um por um, os Parâmetros fundamentais para a construção do conceito de número irracional, destacando seu surgimento durante a realização das tarefas.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

De forma geral, todos os temas e aspectos teóricos pesquisados e abordados neste trabalho colaboraram para produção, aplicação e análise da proposta. Nos próximos parágrafos serão destacados e comentados aqueles que foram indispensáveis para a pesquisa.

Considerando o que foi pesquisado e aqui exposto sobre Investigação matemática, cabe ressaltar a afirmação dos pesquisadores da área quando apontam que ensinar e investigar são duas atividades contraditórias, que não se conseguem fazer em simultâneo sem comprometer a qualidade de uma ou outra. Tanto a própria posição de professor/investigador quanto os momentos de orientação aos estudantes para a realização das tarefas provocaram uma reflexão sobre a contradição entre os dois eixos. Foi perceptível que o ponto de equilíbrio entre os atos de ensinar e promover a investigação não é de fácil localização, no entanto a dificuldade não desmerece o esforço. Foi possível constatar que o ato de investigar deve estar intrincado ao de pensar, sem a investigação o conceito de ensino se torna uma receita pronta e definitiva.

Os pontos de destaque em relação ao trabalho em grupo e as práticas colaborativas entre os estudantes foram, primeiramente, o vislumbre de uma prática em educação matemática crítica, implicando que as pequenas sociedades nas salas de aulas de matemática puderam mostrar aspectos democráticos que se expandem para além dos portões da universidade. Foi possível promover a desestruturação organizacional tradicional, principalmente em relação à hierarquia didática. Também foi trabalhada a habilidade de argumentação que é uma das realizações mais importantes para a educação científica. Surgiu em diversos momentos a possibilidade de mobilizar uma série de competências, para além daquelas que têm a ver com os saberes programáticos, como as competências sociais, ou seja, de relação com o próximo, que nas aulas tradicionais nem sempre são estimuladas.

A proposta de produção de respostas dissertativas durante as tarefas proporcionou a constatação de pesquisas relacionadas ao universo da linguagem matemática onde o uso da escrita é apresentado como ferramenta que influencia a aprendizagem matemática e contribui para a análise da cognição. De fato foi possível observar que a escrita potencializou o alcance dos objetivos e é um veículo importante na compreensão do processo de ensino e aprendizagem. Durante o trabalho os alunos puderam refletir criticamente sobre suas experiências e através do uso da prosa conseguiram vislumbrar e compreender diversas situações matemáticas.

Foi possível, na aplicação das tarefas, propor situações que garantiram aos estudantes a possibilidade de pensar por si. Para tanto foi preciso estimulá-los a operar com ideias, a analisar os fatos e a discuti-los para que, na troca e no diálogo com o outro, construíssem o seu ponto de regulação para um pensar competente. Este aspecto em especial foi ao encontro das considerações e percepções a cerca do trabalho colaborativo e cooperativo, bem como dos benefícios relacionados ao trabalho investigativo em matemática. Os atos de investigação, discussão e posterior internalização constituíram etapa fundamental apara a construção dos conceitos e a regulação da aprendizagem.

A aplicação da DBR como metodologia científica resultou em resultados positivos dentro da proposta, visto que a possibilidade de avaliação e adequação das tarefas e dinâmicas, prevista no ideal cíclico deste tipo de pesquisa, se adéqua de forma eficaz ao contexto educacional. Além disso, a união entre a pesquisa de design e a metodologia didática de investigação matemática culminou em dinâmicas positivas do ponto de vista didático, pois foi possível dar voz aos estudantes durante todo o processo. As adaptações nas estruturas das tarefas e na abordagem dos conceitos, previstas no contexto da DBR foram benéficas tanto do ponto de vista da pesquisa quanto dentro dos objetivos previstos para o enriquecimento conceitual dos licenciandos.

Em relação às dinâmicas adotadas durante o processo de pesquisa, é importante salientar as dificuldades encontradas na estrutura dos cursos de graduação no turno noturno, pois existe a dificuldade na realização de um trabalho de excelência dentro dos parâmetros de adaptação da carga horária (bastante restrita) e das dificuldades relacionadas ao perfil dos estudantes (geralmente já inseridos no mercado de trabalho e com dificuldades relacionadas a isto). Certamente os cursos noturnos de formação de professores devem permanecer crescendo e se difundindo para que as oportunidades de formação se ampliem, no entanto há de se refletir sobre uma estrutura que forneça ao licenciando uma formação mais adequada às necessidades dos futuros professores.

Porém, apesar das dificuldades, foi possível elencar tarefas e experiências bastante eficientes e capazes de amenizar as demandas apresentadas pelas pesquisas analisadas. Os licenciandos tiveram contato com propostas que viabilizaram o contato com diversas imagens conceituais dos números irracionais, também puderam refletir sobre sua formação na educação básica, sobre as falhas em relação à abordagem do conceito de irracionalidade e sobre suas expectativas como professores de matemática.

Apropriando-se de uma reflexão voltada para a reaplicação das estratégias, é possível afirmar que as propostas e métodos didáticos descritos nesta pesquisa são perfeitamente reaplicáveis tanto no contexto da educação básica quanto no Ensino Superior. Ressaltando-se também a flexibilidade de todo processo, podendo ser adaptado às faixas etárias e níveis diferentes.

A proposta de exploração/investigação matemática se mostrou bastante eficiente para as expectativas de construção conceitual crítica, a partir dela foi possível ampliar os conceitos previamente construídos, romper com definições equivocadas e promover a elaboração de conjecturas embasadas.

Em relação às ideias observadas durante o processo de pesquisa, destacam-se tanto pontos relacionados à construção numérica e seu processo de aprendizagem, quanto fatores relacionados ao contexto de formação do professor de matemática. Um dos pontos de destaque é a coerência das pesquisas sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de conceitos matemáticos em nível de graduação (limites, continuidade, teoria dos números), decorrentes da falta de compreensão de propriedades do conjunto dos números reais. Muitos estudantes apontaram essa questão como um grande empecilho para a construção de saberes matemáticos necessários para a conclusão do curso, outros apontam que o método operacional (paradigma do exercício) continua sobrepondo-se às práticas direcionadas à construção do conhecimento através da experimentação.

Também foi possível conjecturar que, para além das práticas de demonstração de teoremas, a discussão e verificação das características dos números irracionais, com a construção de hipóteses e teste das mesmas foram benéficas para os estudantes. Esta verificação se deu em alguns comentários e nos próprios resultados apresentados em cada tarefa.

A partir daqui buscaremos destacar o alcance dos *parâmetros conceituais* recolhidos das pesquisas sobre o tema, enfatizando os aspectos centrais da análise:

Parâmetros fundamentais para construção do conceito de números irracionais:

1. Aspectos de indispensabilidade e fundamentação histórica. Incomensurabilidade;
2. Eixos constitutivos: Finito/infinito, exato/aproximado e discreto/contínuo;
3. Representação e construção geométrica;
4. Representação decimal, infinita e não periódica/pertinência na reta numérica.

Esta análise foi realizada sobre a luz dos benefícios específicos de cada instrumento didático-metodológico selecionado e destacado nesta pesquisa (Investigação matemática, Cooperação/colaboração, Linguagem escrita matemática). Para tal, ressaltaremos o surgimento de tais instrumentos durante o processo de ensino e aprendizagem da matemática.

*Aspectos de indispensabilidade e fundamentação histórica. Incomensurabilidade.*

Na aula 1, os licenciandos precisaram analisar e discutir o valor da diagonal do quadrado de lado igual a uma unidade e representar este valor com o auxílio das peças da escala Cuisinaire. Nesta oportunidade de investigação muitos diálogos representaram a percepção do conflito sobre a representação de uma medida incomensurável.

No G1, logo no início do diálogo, a aluna B denominou a medida encontrada com a frase “Duas e um pedacinho”, afirmando que nem a menor das peças era capaz de representar o comprimento restante.

Na mesma tarefa o G2 exibiu importante desempenho investigativo ao buscar alternativas matemáticas variadas para representação das medidas incomensuráveis da diagonal. Na primeira etapa do diálogo depararam-se com o problema e em seguida iniciam o processo de análise das possibilidades e construção de hipóteses. A estratégia melhor aceita pelo grupo foi o percurso de largada algébrica com posterior comparação geométrica, optaram por calcular a lateral do quadrado com as peças de Cuisinaire e em seguida calcularam o valor da diagonal utilizando teorema de Pitágoras para, posteriormente, buscar a representação geométrica do resultado decimal encontrado. A percepção da dificuldade de medição percebida pelos Gregos antigos ficou bastante explícita no trabalho deste grupo, pois ao se depararem com a impossibilidade de utilizar medidas racionais para a representação do resultado apropriado iniciaram a construção de hipóteses que correspondessem aos resultados esperados.

O G3 também confirmou a dificuldade de compor a medida da diagonal com a utilização das unidades disponíveis. Neste caso, mesmo não encontrando alternativas para a resolução do problema, o grupo admite a dificuldade de encontrar um valor preciso.

O G5 também ressaltou a dificuldade de encontrar medidas precisas para o cálculo da diagonal. “Esse aqui é 1 + 1/3. Não nos mínimos detalhes, estamos colocando assim, grosseiramente.”. Esta fala apresenta que a alternativa encontrada pelo grupo é a aproximação ou estimativa de medidas racionais.

O segundo momento onde o conceito de incomensurabilidade foi discutido foi na aula 4, onde os estudantes foram estimulados a selecionar 7 afirmações falsas. Esta proposta continha duas situações onde o conceito de incomensurável era discutido. A primeira ilustrava a diagonal do quadrado de lado igual a um e afirmava que esse problema representou a origem histórica da construção do conjunto dos números irracionais. A segunda apresentava um retângulo com sua diagonal traçada e afirmava que a mesma era incomensurável, uma afirmação falsa.

Nesta aula dois grupos registraram suas respostas. O G2 se destacou por ainda apresentar certa confusão em relação ao conceito de incomensurável. Aparentemente não conjugam a definição de incomensurável com o conceito de irracional. Esta impressão se fortifica ao percebermos que o mesmo grupo afirma que a diagonal de um retângulo é comensurável porque é uma medida passível de ser calculada. Concluímos que este grupo atrela o sentido de incomensurável com *aquilo que não se pode medir,* ou seja, este conceito não tão bem construído. No entanto durante as discussões gerais sobre o tema e nas orientações para as tarefas este conceito passou a ser melhor compreendido.

*Eixos constitutivos: Finito/infinito, exato/aproximado e discreto/contínuo*

Os eixos constitutivos de finito/infinito e exato/aproximado foram bem trabalhados durante esta primeira aplicação das tarefas. Na aula 1 o G2 já lança mão da estratégia de aproximação ao não encontrar uma representação geométrica adequada ao valor numérico encontrado através dos cálculos. O Aluno B sugere “Então é aproximadamente... escreve ai: a diagonal do quadrado é aproximadamente tanto.”. Na mesma discussão ao sugerir que uma incógnita fosse usada para representar a ausência de exatidão o conceito de aproximação é considerado.

Na mesma tarefa o G3 afirma não ter encontrado um valor exato para a diagonal do quadrado, no entanto em seus registros descreve que sua medida é igual a 1+2/3, que na forma decimal é 1, 66666667 o que é uma aproximação.

O G5 discute em relação ao que seria considerado exato ou não. “Foi possível encontrar uma valor exato?”, “Clara que não!”, “Claro que sim!”, “Vocês estão metendo um monte de frações, então foi aproximado.”.

Na aula 2, ao calcular o valor das raízes irracionais, os grupo se deparam com as dificuldades de interpretação dos valores obtidos nas calculadoras, principalmente pela ausência de percepção dos valores infinitos. Discutiram sobre algoritmos, tecnologia, aproximação, valor real e apropriado, casas decimais a serem consideradas...

Na tarefa da aula 3 denominada *calculadora quebrada* os eixos constitutivos foram novamente discutidos, pois os dois grupos necessitaram calcular manualmente os valores aproximados para as raízes.

Na aula 5, ao calcular aproximações para o valor de PI, as mesmas questões vieram à tona e exigiram a sugestão de propostas capazes de auxiliar na representação desta constante. Ao perceber a dificuldade de precisão de medição com o uso de barbante o grupo 3 decidiu utilizar tiras de papel e encontraram valores bem mais próximos. Também nesta tarefa os grupos que decidiram utilizar média aritmética para representar um valor único para as aproximações também demonstraram o entendimento sobre a não exatidão desta constante. O G5 sugeriu ainda uma ampliação dos dados de pesquisa aplicando assim um conceito de estatística muito relevante.

*Representação e construção geométrica*

Este conceito surgiu de forma mais explícita nas aulas 1, 4 e 5.

Na aula 1, enquanto alguns grupos decidiram representar a medida da diagonal com a ilustração geométrica e o apoio das peças para em seguida refletir os resultados numericamente, o grupo 2 optou pelo caminho inverso. Em ambos os casos foi necessário observar e analisar as duas representações e encontrar alternativas de comparação.

Na aula 4, a representação geométrica foi amplamente trabalhada ao sugerir a construção das medidas das raízes irracionais do plano cartesiano. Inclusive a produção do grupo 1 foi de extrema relevância, pois o mesmo, através de um processo investigativo livre, alcançou a construção da espiral Pitagórica utilizando o mesmo processo citado por historiadores matemáticos. Nesta tarefa o potencial geométrico foi enfatizado e a comparação entre representação geométrica e decimal pôde ser observada.

Na aula 5, ao calcular as medidas de cada objeto circular e buscar a razão entre elas o potencial comparativo entre representação numérica e decimal foi exposto de forma positiva. Os primeiros questionamentos suscitaram hipóteses relacionadas à precisão das medidas: “Utilização de instrumentos mais precisos.” Foi um dos aspectos mais repetidos durante a aplicação e análise desta tarefa. No segundo momento, a tarefa de investigação livre com a exploração do gráfico e construção de triângulos retângulos resultou em observações variadas sobre o aspecto geométrico. Surgiram conceitos relacionados às relações trigonométricas no triângulo retângulo, proporcionalidade, Teorema de Pitágoras e cálculo de medidas incomensuráveis.

*Representação decimal, infinita e não periódica/pertinência na reta numérica.*

Neste caso podemos avaliar os dois eixos de forma diferenciada. O conhecimento prévio dos licenciandos em relação à definição usual dos números irracionais se apresentava estruturado, foi comum ouvir e ler a frase “Número decimal, infinito e não periódico” durante toda a aplicação das tarefas, com algumas exceções, afinal foi possível perceber que alguns estudantes confundem os conceitos de periódico e não periódico. No entanto o posicionamento e pertinência dos números irracionais na reta real apresentaram mais inconsistências por parte dos estudantes.

Esta percepção se tornou mais clara durante a aplicação da primeira tarefa da aula 3, onde um grupo de alunos não apresentava compreensão entre a diferença de raízes irracionais e raízes racionais. Foi possível notar certa surpresa ao serem apresentados à resultados decimais e racionais para o cálculo de raízes com frações como radicando. Durante esta mesma aplicação uma das alunas afirmou que reconhecia o conjunto dos números racionais como subconjunto dos irracionais.

Durante a realização da proposta de jogo dos 7 erros esta dificuldade também foi detectada, ao apresentar as imagens de diagramas dos conjuntos numéricos, um dos grupos demonstrou dúvida quanto o posicionamento do conjunto dos números irracionais diante dos reais. No entanto não foram levantados questionamentos referentes à sua dimensão em relação aos demais conjuntos. Nesta mesma tarefa os estudantes foram unânimes em julgar erradas as imagens que determinavam os valores de raiz de 2 e PI sem o uso de reticências, confirmando a percepção de número infinito.

Por fim, na aula 5, ao se depararem com uma provocação relacionada à representação do número PI como constante resultante da razão entre medida da circunferência e diâmetro. Apesar de encontrarem valores infinitos, reforçaram a não irracionalidade dos mesmos.

Neste ponto cabe a realização de uma reflexão sobre a questão norteadora desta pesquisa e os resultados da mesma. Partindo da interrogação: Sobre a ótica de vivências interativas, quais caminhos são percorridos para a construção do conceito de número irracional? Podem se atrelar diversos processos que mediaram a relação entre a experimentação e o conhecimento: colaboração, investigação, exploração, registro, consenso, produção. Possivelmente, a aplicação de apenas uma destas tarefas descritas em outra circunstância não seria suficiente para esmiuçar um conceito tão amplo quanto o da irracionalidade numérica. Também não se pode afirmar que a aplicação das cinco surtiria efeito de excelência e completude no alcance desse conceito. Bem se pode afirmar que a vivência de todos esses processos diferenciados, de forma concomitante com outras experiências e práticas, será capaz de proporcionar um contato bastante consolidado com os aspectos que permeiam o conceito de número irracional. Dessa forma, é bem provável que os estudantes poderão, a partir destas experiências, vislumbrar e usufruir de um caminho bastante estruturado para o entendimento da construção dos números reais.

## *CONCLUSÕES*

Para alcançar objetivos é necessário analisar com atenção cada passo. Pensar e repensar decisões e controvérsias faz parte do processo de aprendizagem. Neste ponto do trabalho cabe uma reflexão sobre os passos precisos e também tropeços, e a partir de então almejar que as propostas aqui apresentadas sirvam de norteamento ou inspiração para os professores de matemática que prestigiarem este trabalho.

Abordagens conceituais diversas sobre os números irracionais foram trabalhadas, algumas de forma bem sólida, outras esbarraram nas dificuldades relatadas que representaram, ao mesmo tempo, um imprevisto e uma motivação. Foi possível perceber o desenvolvimento investigativo por parte dos licenciandos, o que por si só já representa uma vitória para educação matemática.

Quanto à flexibilização desta proposta sugeri-se que aplicá-la com melhores condições de tempo e espaço surtiriam efeito positivo e resultados ainda mais relevantes. Grupos fixos, encontros com datas mais próximas, o uso de tecnologia de informação e comunicação, exploração de materiais ainda mais diversos e ampliação das oportunidades de contato e socialização de ideias entre integrantes são algumas das sugestões para futuras aplicações.

Quanto à sugestão para futuras pesquisas, a partir dessas tarefas e do produto produzido a partir delas, é possível investir na busca por resultados visíveis em outras etapas de ensino. É bem possível que alunos do Ensino Fundamental e Médio apresentem reações e conflitos bem diferentes dos licenciandos envolvidos nesta pesquisa. Também é viável investigar relações de outras relações em relação ao conceito de número irracional como, por exemplo, a transcendência e suas relações com o ensino de álgebra. Outro foco tão interessante quanto seria o paralelo entre o ensino de Análise Real nos cursos de licenciatura e sua relação direta com a construção numérica na educação básica.

Podemos a partir daqui apresentar aquele que consta como um dos objetivos de um mestrado profissional em educação, o produto educacional. Tendo em vista a divulgação da pesquisa e de seus benefícios para a educação matemática, culminando com a possibilidade de vislumbrar as tarefas aplicadas em outro contexto, talvez mais adequado em relação ao tempo e à estrutura, surgiu como ideal a elaboração de um curso de formação continuada para professores de matemática. Esta sugestão de curso se apresenta com uma carga horária de 60 horas, constituindo-se assim como curso de extensão, e será formado por conteúdos teóricos (textos de cunho metodológico e didático) e conteúdo prático (tarefas, discussão em grupo, avaliação).

Faz-se imprescindível então concluir este texto destacando a imensa satisfação em vislumbrar possibilidades viáveis para implementação desta proposta e poder, mesmo que em longo prazo, testemunhar sua colaboração para o desenvolvimento da educação matemática.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, José Joelson Pimentel de. **Gêneros do discurso como forma de produção de significados em aulas de matemática.** Campina Grande: Eduepb, 2016. 392 p.

AQUINO, João Paulo Gondim de. **FRAÇÕES: uma abordagem pedagógica**. 2013. 58 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática, Ufersa, Mossoró, 2013. Disponívelem<http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/699/2011_00469_JOAO_PAULO_GONDIM_DE_AQUINO.pdf?sequence=1>. Acesso em: 12 out. 2016.

ASSIS, Adriana; FRADE, Cristina; GODINO, Juan D.. Influência dos Padrões de Interação Didática no Desenvolvimento da Aprendizagem Matemática: análise de uma atividade exploratório-investigativa sobre sequências. **Bolema,** Rio Claro, v. 27, n. 47, p.733-758, dez. 2013.

BANCHI, H.; BELL, R. The many levels of inquiry. Science and Children, Virginia, v.

BAROLLI, E. Reflexões sobre o trabalho dos estudantes no laboratório didático.

BOYER, Carl B. **História da matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgar Bluncher, 1996. 496 p.

BROWN, J. S.; COLLINS, A.; DUGUID, P. Situated cognition and the culture of learning.

CANAVARRO, Ana Paula. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafi os. **Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa,** Évora, v. 2, n. 13, p.11-18, dez. 2011.

CASTRO, Monica Rabello de; FRANT, Janete Bolite. **Modelo da Estratégia Argumentativa.** Curitiba: Ufpr, 2011. 176 p.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Educação matemática: Da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus Editora, 1932. 110 p.

DIAS, Raimundo Helion Lima; NASCIMENTO, Dalila de Menezes; FIALHO, Lia Machado Fiuza. A aprendizagem cooperativa no processo de ensino-aprendizagem: pespectivas do grupo de estudo do curso de licenciatura em geografia da ufc. In: xvi encontro nacional de geógrafos, 16., 2010, Porto Alegre. **A APRENDIZAGEM COOPERATIVA NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM: PESPECTIVAS DO GRUPO DE ESTUDO DO CURSO DE LICENCIATURA EM GEOGRAFIA DA UFC..** Porto Alegre: Agb, 2010. v. 1, p. 21 - 28.

DUSCHL, R.; GITOMER, D. Epistemological perspectives on conceptual change: education. Science & Education. Vol. 1: 273-299, 1992.

EVES, Howard. Introdução à História da Matemática. Tradução de Hygino H. Domingues. 2ª edição, Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1997.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** 4. ed. Campinas: Unicamp, 2004. 843 p.

FERES, Solange Aparecida de Camargo; NACARATO, Adair Mendes. O Pensamento Matemático Revelado no Discurso. In: EMBRAPEM, 1., 2008, São Paulo. Anais... . São Paulo: Unesp, 2008. v. 1, p. 1 - 15. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/146-1-A-

gt11_feres_ta.pdf>. Acesso em: 17 jan. 2016.

FREITAS, L., & Freitas, C. (2002). Aprendizagem cooperativa. Lisboa: Edições ASA.

FREITAS, Maria Teresa Menezes; FIORENTINI, Dario. Desafios e potencialidades da escrita na formação docente em matemática. Revista Brasileira de Educação, Uberlândia, v. 13, n. 37, p.138-189, abr. 2008. Anual. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbedu/v13n37/12.pdf>. Acesso em: 17 jan. 2017.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. São Paulo: Atlas, 1994.

GIL-PÉREZ, D. Contribución de la historia y de la filosofia de las ciencias al

GUZZO, Sandro Marcos. **O número "pi"**. Revista Eletrônica de Matemática, Jataí, v. 1, n. 2, p.1-16, 2010. Disponível em: <http://matematicajatai.com/rematFiles/2-2010/pi.pdf>. Acesso em: 12 out. 2016.

HADJI, C. A avaliação regras do jogo: das intenções aos instrumentos. 4. ed. Portugal: Porto Editora, 1994.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de matemática elementar conjuntos e funções. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005. 374 p. implications for educational practice. Journal Of Research In Science Teaching, 28

KINDEL, Dora Soraia. **DISCUTINDO OS RACIONAIS NA 7ª SÉRIE VISANDO A NOÇÃO DE DENSIDADE.** 1998. 196 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Santa Úrsula Mestrado em Educação Matemática, Rio de Janeiro, 1998.

KINDEL, Dora Soraia. **UM AMBIENTE COLABORATIVO A DISTÂNCIA: LICENCIANDOS DIALOGANDO SOBRE OS INFINITOS.** 2012. 280 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação Matemática, Universidade Bandeirante de SÃo Paulo, São Paulo, 2012.

KIRSCHNER, P. A. Epistemology, practical work and academic skills in science learning. Educational researcher, 1 (1): 32-42, 1989.

LIVIO, M.: Razão Áurea - **A História do Número Fi, um Número Surpreendente**. Tradução de Matsuama, S., 6a Edição, Rio de Janeiro, Editora Record, 2011.

LUVISON, Cidinéia da Costa. Gêneros Textuais Na Leitura E Escrita De Resolução De Problemas Em Matemática. In: UFLA, 1., 2000, Lavras. Anais... . Lavras: Ufla, 2000. p. 1 - 17. Disponível em: <http://www.eventos.ufla.br/iiiselem/index.php/component/phocadownload/category/3-i-selem?download=90:generos-textuais-na-leitura-e-escrita-de-resolucao-de-problemas-em-matematica>. Acesso em: 17 jan. 2017.

MAFFI, Caroline; FRAGA, Francieli Bandeira de; MATOS, Diego de Vargas. O ensino de Matemática em uma perspectiva investigativa: a construção de alguns números irracionais. **Remat,** Caxias do Sul, v. 2, n. 1, p.1-9, dez. 2015. Mensal. Disponível em: <file:///C:/Users/Rute/Downloads/1246-2658-1-PB (1).pdf>. Acesso em: 29 jun. 2016.

MATTA, Alfredo Eurico Rodrigues; SILVA, Francisca de Paula Santos da; BOAVENTURA, Edivaldo Machado. DESIGN-BASED RESEARCH OU PESQUISA DE DESENVOLVIMENTO: METODOLOGIA PARA PESQUISA APLICADA DE INOVAÇÃO EM EDUCAÇÃO DO SÉCULO XXI. Revista da Faeeba, Salvador, v. 23, n. 42, p.23-37, jul. 2014.

MATTA, Alfredo Eurico Rodrigues. Metacognição: Construindo Conhecimento Sobre A Metodologia Design-Based Research-Dbr E Sua Utilização Na Educação A Distância. Ufba, Salvador, v. 16, n. 8, p.8-16, maio 2016.

MENDES, SÔnia Cristina da Cruz. **Práticas Pedagógicas Para O Ensino Dos Números Irracionais.** 2012. 113 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2012.

MESQUITA, Carla Gonçalves Rodrigues de. A escrita matemática: espaço para aprendizagens que fabricam significados e produzem sentidos. In: ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais... . Pelotas: Ufpel, 2001. p. 200 - 2014.

NACARATO, Adair Mendes; LOPES, Celi Espasandim. **Escritas e Leituras na Educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2009. 192 p.

NIVEN, Ivan. Números: Racionais e Irracionais. Rio de Janeiro: Sbm, 2012. 167 p.

NÓVOA, A. (2002). Os professores e o "novo" espaço público da educação. In A. Nóvoa (Ed.), Formação de professores e trabalho pedagógico (pp. 9-29). Lisboa: Educa.

PIETRIPAOLO, Ruy Cesar; CORBO, Olga; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. Os números Irracionais e seu ensino delineando a imagem conceitual de um grupo de professores. In: Congreso De Educaci"N Matemática De América Central Y El Caribe, 1., 2013, Santo Domingo, República Dominicana. **Anais... .** Santo Domingo, República Dominicana: Cemacyc, 2013. p. 15 - 30.

PÓLYA, G. (1945). How to solve it: A new aspect of mathematical method. Princeton: Princeton University Press.

POMMER, Wagner Marcelo. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico**. 2012. 246 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ciências e Matemática, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

PONTE, J. P., & Matos, J. F. (1992). Cognitive processes and social interaction in mathematical investigations. In J. P. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos, & D.

PONTE, João Pedro da. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal. **Grupo de Investigação Dif – Didáctica e Forma: Investigação em educação,** Lisboa, v. 2, n. 2, p.93-169, 1994.

PONTE, João Pedro Mendes da. Investigar, ensinar e aprende. **Actas do Profmat,** Lisboa, v. 3, n. 2, p.25-39, 2003.

PONTE, João Pedro da. Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal1. Investigar em Educação, Lisboa, v. 2, p.93-169, 2008.

PONTE, João Pedro da; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na Sala de Aula.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015. 159 p. (Tendências em Educação matemática).

POWELL, Arthur; BAIRRAL, Marcelo. A escrita e o pensamento matemático. São Paulo: Papirus Editora, 2006. 111 p.

RIPOLL, C. C. (2004). A construção dos números reais nos Ensinos Fundamental e Médio. In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Salvador.

ROONEY, Anne. **A história da matemática:** Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M.books, 2012. 216 p.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 512 p.

SANTOS, Gilberto Vieira dos. **Explorando a Matemática do Número Φ, o Número de Ouro.** 2013. 73 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2013. Disponível em: <http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/92414/santos_gv_me_rcla.pdf?sequence=1>. Acesso em: 12 out. 2016.

SILVA JUNIOR, Orlando da. Cálculo no Ensino Médio: Números Reais. 2014. 87 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matem´atica em Rede Nacional, Matemática, Profmat - Sbm - Impa, Rio de Janeiro, 2014.

SILVA, Benedito Antonio da; PENTEADO, Cristina Berndt. **Fundamentos dos números reais: concepções de professores e viabilidade de início do estudo da densidade no ensino médio.** Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v. 11, n. 2, p.351-371, 2009. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/1860/1808>. Acesso em: 11 out. 2016.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema,** Dinamarca, v. 14, n. 14, p.66-91, 2000.

STEINER, Lars. Organizational dilemmas as barriers to learning. The Learning

STEWART, Ian. **O fantástico mundo dos números**. Londres: Profile Books, 2015. 382 p.

TEODORO, Daniel Lino; CABRAL, PatrÍcia Fernanda de Oliveira; QUEIROZ, Salete Linhares. Atividade Cooperativa no Formato Jigsaw: Um Estudo no Ensino Superior de Química. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,** São Carlos, v. 1, p.21-51, maio 2015.

VIGOTSKY, Lev S. A formação social da mente. São Paulo: Martins Fontes, 1989. Pensamento e linguagem. São Paulo: Martins Fontes, 1987.

VIGOTSKI, L. S. (2009c). A Construção do Pensamento e da Linguagem (P. Bezerra, Trad.). São Paulo: Editora WMF Martins Fontes. (Original publicado em 1934).

WEICK, Karl. The social psychology of organizing. Reading, Mass: Addison-Wesley, 1979.

WENDPAP, Bruna Gabriela; BASTIAN, Fernanda de; GUZZO, Sandro Marcos. Uma abordagem histórico-matemática do número pi (π). In: XXII SEMANA ACADÊMICA DA MATEMÁTICA, 22., 2008, Cascavél. Anais.... Ascavél: Unioeste, 2008. v. 1, p. 6 - 122. Disponível em: <http://projetos.unioeste.br/cursos/cascavel/matematica/xxiisam/artigos/19.pdf>. Acesso em: 30 jan. 2017.

## APÊNDICES

### APÊNDICE A- QUESTIONÁRIO DE PERFIL E SONDAGEM

**<u>Questionário de sondagem individual</u>**

Nome:___________________________________________________
Ano de início do curso:_____________________________________
Período em curso:_________________________________________

1- Assinale as disciplinas já cursadas:

() cálculo I
( )cálculo II
( )cálculo III
( )Cálculo IV
( )Álgebra I
( )Álgebra II
( ) Álgebra III
( ) Análise Real
( ) Ensino de matemática I
( ) Ensino de matemática II
( ) História da matemática

**2-** Já leciona? Em qual nível escolar?
_________________________________________________________________
___

3- Participa de algum programa de iniciação científica ou é bolsista do PIBID? Em caso afirmativo, quem é seu orientador?

_________________________________________________________________
___

4- Qual é o seu entendimento sobre a metodologia investigativa na educação matemática?
_________________________________________________________________
_____________________________________________________________________
_____________________________________________________________________
______

*Vamos falar do conjunto numérico dos números irracionais e do estudo matemático em geral e o que ficou realmente interiorizado durante os anos de estudo que possui a respeito deste assunto.*

5- No seu modo de entender, para que servem os números irracionais? Qual é a sua origem?

_______________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________

6- Como você define o conjunto dos números irracionais? Em que posição, em relação aos outros conjuntos numéricos, os irracionais estão?

_______________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________

7- Em sua opinião, de que forma é apresentado o conjunto dos números irracionais na educação básica? Você acredita na eficácia desta proposta?

_______________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________

8- De um exemplo de atividade que envolva a compreensão do conjuntos dos números irracionais, dentro do contexto da educação básica. Detalhe o nível escolar da turma em questão.

____________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________________

## APÊNDICE B- TERMO DE CONSENTIMENTO

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ______________________________________________________________, portador do CPF ______________________________, estou sendo convidado a participar de um estudo denominado: ***Construção dos números irracionais: uma proposta didático-investigativa para o processo ensino-aprendizagem***, cujos objetivos e justificativas são: Contribuir para uma prática pedagógica produtiva, que possibilite aos professores em formação inicial perceberem as especificidades do conjunto dos números irracionais, bem como suas representações e aplicações; Investigar propostas de materiais e estratégias, com abordagem investigativa, que proporcionem a aprendizagem estruturada destes conceitos. Elaborar um produto a partir desta pesquisa e torná-lo acessível aos demais interessados.

A minha participação no referido estudo será no sentido de colaborar com a ***execução das atividades em grupo; elaboração de registro escrito e relatório sucinto dos progressos e particularidades das atividades; autorização de gravação, em áudio, dos diálogos provenientes das considerações em grupo e da turma.***

Fui alertado de que, da pesquisa a se realizar, posso esperar alguns benefícios, tais como: *Evolução de conhecimentos, experimentação de atividade científica e oportunidade de aprendizagem coletiva.*

Estou ciente de que minha privacidade será respeitada, ou seja, meu nome ou qualquer outro dado ou elemento que possa, de qualquer forma, me identificar, será mantido em sigilo.

Também fui informado de que posso me recusar a participar do estudo, ou retirar meu consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar.

Os pesquisadores envolvidos com o referido projeto são Rute Ribeiro Meireles Rocha (mestranda) e Dora Soraia Kindel (Docente/orientadora) e com eles poderei manter contato pelo e-mail *rutermrocha@hotmail.com.*

Enfim, tendo sido orientado quanto ao teor de todo o aqui mencionado e compreendido a natureza e o objetivo do já referido estudo, manifesto meu livre consentimento em participar, estando totalmente ciente de que não há nenhum valor econômico, a receber ou a pagar, por minha participação.

## APÊNDICE C- ROTEIRO DA AULA 1

**Roteiro-Tarefa 01- Incomensurabilidade**

Por bastante tempo os números racionais foram o máximo alcançado sobre o conceito de número. Mas, segundo Stewart (2015), os gregos antigos provaram que o quadrado de uma fração nunca poderia ser exatamente igual a 2. De forma intuitiva já era possível perceber que os racionais não eram suficientes, pois pelo Teorema de Pitágoras, tentavam numerar o comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 e, no entanto, esta notação ainda não existia. "A prova grega da irracionalidade de emprega um processo geométrico que agora chamamos de algoritmo de Euclides. É um modo sistemático de descobrir se dois comprimentos dados *a* e *b* são comensuráveis." (Stewart, 2015, p.196). Mais formalmente, dois segmentos A e B dizem-se *comensuráveis* se são múltiplos de um segmento comum. Em outros termos, A e B são comensuráveis se existir um segmento C de medida u, escolhido como unidade de medida, e se existirem inteiros positivos m e n tais que A= mC e B= nC, então A e B são múltiplos do segmento comum C, e assim se dizem *comensuráveis*. "Número", na linguagem pitagórica, era sinônimo de harmonia. Para Stewart (2015) a comprovação da não-racionalidade levou os geômetras gregos a focar em comprimentos geométricos e a ignorar números, no entanto a possibilidade de reforçar o sistema numérico de modo a poder lidar com questões como essas se tornaram uma alternativa melhor.

- <u>Etapa 1:</u> a Partir dos recursos ofertados meça o lado dos quadrados e defina qual deles representará a unidade de medida. Registre.

- <u>Etapa 2</u>:

A partir desta definição de unidade meça os lados dos demais quadrados e suas respectivas diagonais. Registre da forma mais conveniente e clara.

- Etapa 3:

Procure uma forma de representar os registros de medida de forma numérica e registre essas relações.

.

Foi possível encontrar um valor exato? Quais foram as dificuldades?

___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
_________________________________

- <u>Etapa 4</u>:

Produza um texto sobre as observações realizadas hoje, inclua percepções comparativas entre a visão de estudante e a de futuro professor.

**APÊNDICE D- ROTEIRO DA AULA 2**

Roteiro: Atividades 02

•<u>Etapa 1</u>: Definição do conceito de número irracional.

Individualmente, calcule utilizando a calculadora de seu celular, o valor decimal dos números irracionais. Registre e compare com o grupo.

| | **X** | $\boldsymbol{x^2}$ ou $\boldsymbol{x^3}$ |
|---|---|---|
| $\sqrt{2}$ | | |
| | | |
| | | |
| $\sqrt{3}$ | | |
| | | |
| | | |
| $\sqrt{5}$ | | |
| | | |
| | | |
| $\sqrt{7}$ | | |
| | | |
| | | |
| $2\sqrt{2}$ | | |
| | | |
| | | |
| $\sqrt{8}$ | | |
| | | |
| | | |
| | | |

Os valores encontrados individualmente apresentaram alguma diferença

Por que isso aconteceu?

______________________________________________________________________________
______________________________________________________________________________
____________________________________________________________________________

______________________________________________________________

O valor decimal encontrado para $\sqrt{8}$ é o mesmo valor ao calcularmos $2\sqrt{2}$ na calculadora? Por quê?

-
______________________________________________________________________________
_____________________________________

_________________________________________________________________________
___________________________________________

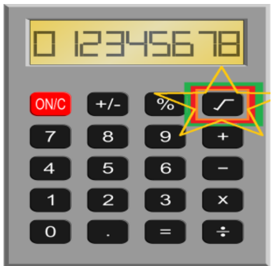
Texto final:

Procedimentos do grupo. Passo-a-passo

Percepções sobre características dos números analisados.

Considerações finais. Críticas e sugestões.

**APÊNDICE E- ROTEIRO DA AULA 3**




Aula 3- Sua calculadora quebrou.

A tecla de com símbolo de raiz não está funcionando. Calcule estas raízes irracionais. Registre, ***com detalhes***, o procedimento que decidiu realizar.

| | |
|---|---|
| $\sqrt{2}$ | |
| $\sqrt{3}$ | |
| $\sqrt{6}$ | |
| | |

| | |
|---|---|
| $\sqrt{7}$ | |
| $\sqrt{11}$ | |

Quais foram as maiores dificuldades encontradas?

Foi possível encontrar o valor exato de todas as raízes irracionais? Por quê?

Quais conceitos o aluno pode perceber ou aprender com esta atividade?

**Produza um Relatório da aula no verso.**

## APÊNDICE F- ROTEIRO DA AULA 4

Roteiro: Atividades 04

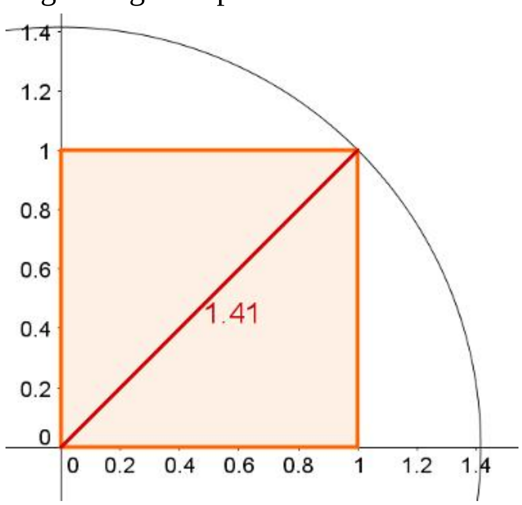
**Representações dos números irracionais**

Somente no século XVII, com a criação da Geometria Analítica (Fermat e Descartes), se estabelece a simbiose do geométrico com o algébrico, favorecendo o tratamento aritmético do comensurável e do incomensurável. Newton (1642-1727) define pela primeira vez "número", tanto racional como irracional.

.1- Escolha 6 raízes irracionais e posicione suas localizações na reta real, utilize o papel quadriculado.

2- Agora, Observe o processo geométrico para a localização de raízes irracionais e repita-o com as raízes selecionadas na tarefa 2.

Siga o seguinte processo:




1- Os pontos (representação decimal) marcados anteriormente coincidiram com os encontrados? Houve diferença? Por quê?

______________________________________________________________________

____________________________________________________________________________

____________________________________________________________________________

______________________________________________

2- Se você precisasse escolher a forma mais precisa de realizar este processo, qual das duas maneiras escolheria? Por quê?

____________________________________________________________________

__________________________________________________________________________

____________________________

3- Esta tarefa colaboraria par a aprendizagem do conceito de números irracionais na educação básica? Por quê?

________________________________________________________________

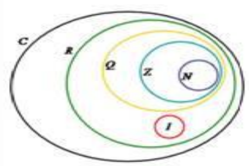
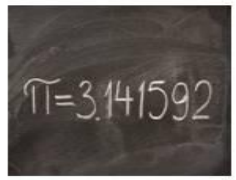
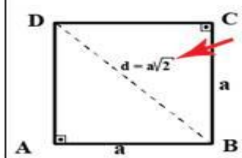
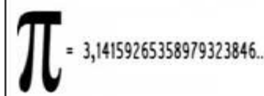
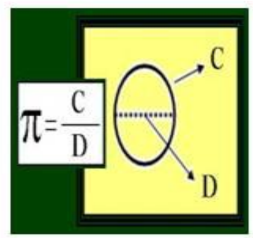
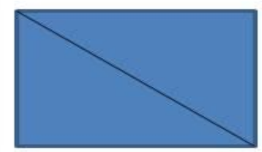
__________________________________________________________________________

__________________________________________________________________________

_____________________________________

## Jogo dos 7 erros

Analise estas 10 afirmativas e julgue-as. Destaque as 7 que apresentam algum erro ou

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1**   | **2**   | **3-** **Origem da representação dos irracionais**   | **4**   | **5** **É um número irracional:** **3, 265432654326453 26....** |
| **6**   | **7** $\sqrt{2}$ **= 1,14** | **8**   | **9** **Medidas:** **4cm x 3cm** **Diagonal incomensurável**  | **10**   |

imprecisão.______________________________________________________________

**APÊNDICE G- ROTEIRO DA AULA 5**

Roteiro: Tarefas 05- **Sequência didática construção do número Pi.**

*De forma geral π é definido como a razão entre a circunferência de um círculo qualquer e seu diâmetro, no entanto este cálculo não representa um valor tão próximo por se tratar de um número que não pode ser representado através de uma razão. Os matemáticos dedicaram-se ao cálculo de pi, buscando um período para verificar se pi era racional. Hoje, os computadores calculam este valor com 100, 1000, 10 000, milhões de casas decimais. Sabe-se que pi é irracional.*

**Utilizaremos um método muito comum, no entanto o analisaremos mais a fundo.**

1- Meça, com ajuda do barbante, o diâmetro e a circunferência das formas fornecidas. Calcule as medidas com a régua.

2- Calcule a razão entre circunferência e diâmetro e registre aqui

| | CIRCUNFERÊNCIA | DIÂMETRO | RAZÃO. C/D |
|---|---|---|---|
| LATA | | | |
| BORDA DO COPO GRANDE | | | |
| BORDA DO COPO PEQUENO | | | |

**Este método não é bem avaliado por diversos pesquisadores. Acreditam que ele apresenta uma visão equivocada sobre a irracionalidade de π. Explique o motivo.**

___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
___________

Que estratégia poderia ser usada para contornar o problema e chegar a um valor mais apurado?

-
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________
___________________________________________________________________________

4-Utilize o papel quadriculado e Registre no plano cartesiano as medidas de circunferência e diâmetro.

Experimente:

(0,d) e (c,0) *ou* (d,0) e (0,c) *ou* (d,c) e (c,d)

*d=diâmetro

*c= circunferência

**É possível analisar o valor de π através de relações trigonométricas? Registre o procedimento com detalhes.**

Texto final

- Quais foram os procedimentos trabalhados pelo grupo? Relate.
- Estas tarefas seriam aplicáveis em quais níveis escolares?
- O que foi possível observar sobre o número π?

## APÊNDICE H- ROTEIRO DA AULA 6

Roteiro: Atividades 06- **Sequência de Fibonacci e número áureo**

"O número $\varphi$ surgiu inicialmente na matemática em conexão coma geometria do polígono regular, seguindo a prática padrão da época foi interpretado geometricamente, não numericamente". (Stewart, 2015)

Uma das referências mais antigas ao número $\Phi$ ou ao número de ouro aparece no livro Os Elementos VI, de Euclides. Em seu livro, Euclides trata do problema de cortar (ou seccionar) um segmento em extrema e média razão. Euclides chama esse de Cortar a reta finita dada em extrema e média razão.

Segundo Santos (2013) ambos os valores obtidos para a razão AB/ AC são irracionais, e ainda se tem $\phi$ =conjugado de $\Phi$ e $\Phi$ + conjugado de $\Phi$=1, isto é, $\Phi$ e seu conjugado tem soma constante igual a 1. Com ferramentas computacionais é possível calcular $\Phi$ com um grandioso número de algarismos decimais.

Há inúmeros problemas matemáticos em que aparece o número $\Phi$. Segundo (Livio, 2011) é possível ainda encontrar na literatura científica, diversos autores que sustentam a associação do número $\Phi$ com fenômenos biológicos e aplicações do mesmo na arte, arquitetura e em proporções de medidas humanas e de outros seres.

1- Examine as peças, que conceitos matemáticos podem ser trabalhados a partir delas?

**Monte um retângulo utilizando todas as peças fornecidas, ilustre-o a seguir:**

2- Partindo do quadrado menor e considerando-o como unidade, calcule as medidas dos lados de cada quadrado e registre a sequência formada.

Quais seriam os 10 valores seguintes? Qual relação matemática pode ser construída a partir deste raciocínio?

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | |

2- A partir desta sequência, calcule a razão entre o número e seu antecessor. Registre todos os valores.

3- Agora troque o numerador pelo denominador e calcule o novo valor.

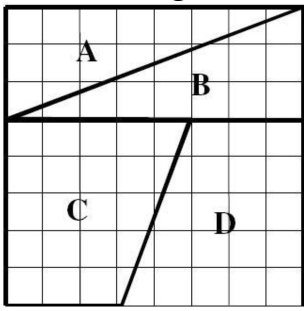
Compare os resultados decimais das questões 2 e 3. É possível perceber alguma relação? Explique.

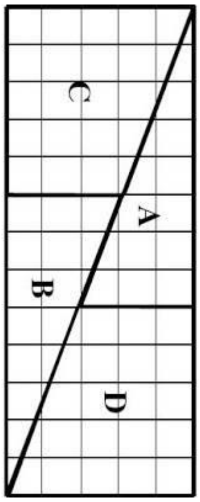
____**Registro dissertativo da tarefa e seus resultados.**

## APÊNDICE H- ROTEIRO – DESAFIO DO SOFISMA

<u>Desafio</u>

Este sofisma matemático apresenta um quadrado de área igual a 64 unidades se tornando um retângulo com área igual a 65 unidades.




Onde está a falha na comparação entre as figuras?

É possível encontrar medidas incomensuráveis nas figuras?

Disserte sobre a solução do sofisma e suas possíveis relações com o conceito de incomensurabilidade.

**APÊNDICE I- ROTEIRO – PRODUTO**

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO**
**INSTITUTO DE EDUCAÇÃO / INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR**

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**

# SENSIBILIZAÇÃO PARA EXISTÊNCIA E DOS NÚMEROS IRRACIONAIS:

**Uma proposta para formação de professores**

***RUTE RIBEIRO MEIRELES ROCHA***

*Sob a orientação da Professora Doutora*

**DORA SORAIA KINDEL**

## APRESENTAÇÃO

A presente proposta de curso de extensão é produto da dissertação de mestrado defendida na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro e foi construída sobre o alicerce didático das metodologias interativas e de investigação matemática. Esperamos proporcionar aos professores envolvidos um contato diferenciado com os conceitos em torno dos números irracionais. E, além disso, oferecer uma faísca de inspiração para novas aplicações e experimentações no campo da educação matemática assim como o uso das tarefas investigativas e situações exploratórias em sala de aula de matemática do Ensino Básico.

## PÚBLICO ALVO

Professores que ensinam matemática que desejem atualizar sua prática e vivenciar abordagens didáticas diferenciadas para a construção numérica, em particular a do conjunto dos números irracionais.

## OBJETIVOS

Contribuir para uma prática pedagógica que possibilite a percepção da construção do conjunto dos números irracionais, bem como suas representações, propriedades e operações.

## CARGA HORÁRIA E ESTRUTURA:

Para a realização do curso prevemos uma carga horária de 60 h, sendo 45h em regime presencial e 15 h. em regime de atividades extraclasse.

## MÓDULOS E ENCONTROS

Os números irracionais: Abordagens e desafios.
Incomensurabilidade: a história e sua contribuição.
É irracional? Representação decimal/geométrica e significado.
Número $\pi$. Duas abordagens.
Número $\varphi$. Curiosidades fundamentais
Avaliação e construção.

## ORGANIZAÇÃO

Este curso está organizado da seguinte forma. Na primeira parte estão apresentadas todas as tarefas separadas por módulos e na segunda parte, são apresentados os objetivos, o resumo e orientações e intervenções e por ultimo as referencias de cada capitulo, as referencias que embasaram a proposta teórica do curso e sugestões bibliográficas para aprofundamento.

PARTE 1
Nesta seção são apresentadas as tarefas dos seis módulos

## MÓDULO 1- OS NÚMEROS IRRACIONAIS: ABORDAGENS E DESAFIOS.

Este módulo consta da leitura de três textos e de quatro tarefas sobre os mesmos. Os textos foram disponibilizados por email e que deverão ser discutidos no grupo. São eles:

1) “Os números Irracionais e seu ensino: Delineando a imagem conceitual de um grupo de professores” (Pietropaolo, Corbo e Campos, 2013);

2) “A construção de significados dos números irracionais no ensino básico.” (Pommer, 2012);

3) “A construção dos números reais nos Ensinos Fundamental e Médio” (Ripoll, 204).

Tarefa 1

De acordo com o texto 1, os dados coletados revelaram inconsistências nos conhecimentos dos participantes, quanto à ampliação dos campos numéricos, ressaltando fragilidades que poderiam levar alunos a ideias equivocadas sobre esse assunto. Na perspectiva do autor, existem falhas na formação dos professores, expondo a necessidade de colocar em discussão a relevância desses números nos currículos de Matemática. Você concorda com os autores? Justifique sua resposta.

Tarefa 2

Selecione uma das propostas de abordagem sugerida no texto 2 e justifique a sua escolha apontando pontos positivos e negativos.

Tarefa 3

Sobre o desenvolvimento da atividade descrita no item II, elabore um pequeno texto respondendo as seguintes perguntas:

Quais aspectos de aprendizagem podem ser explorados com as tarefas propostas?

Dentre as tarefas propostas, você se identifica com uma em particular? Justifique sua resposta.

Tarefa 4

Sobre o texto “A construção dos números reais nos Ensinos Fundamental e Médio” (Ripoll, 204), você deve elaborar um resumo seguindo os seguintes pontos:

Para fazer uma síntese sobre o que trata o texto (no máximo 10 linhas) contemplando os seguintes aspectos:

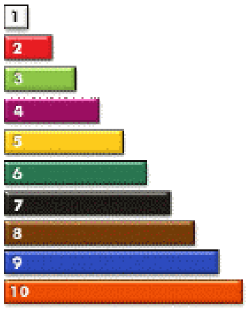
**Identificar o Foco**: Qual é o campo do texto? Tente ser especifico

**Destacar a Importância**: Qual a importância do texto para você, como professor, e para a sociedade?

**Verificar o Suporte do texto**: Quais as principais informações prévias fundamentais para a compreensão do texto?

MÓDULO 2- INCOMENSURABILIDADE: A HISTÓRIA E SUA CONTRIBUIÇÃO.

Roteiro de tarefa- Incomensurabilidade- Módulo 2




<u>Etapa 1:</u> A partir dos recursos ofertados defina a unidade a ser utilizada e meça o lado dos quadrados dados. Registre.

<u>Etapa 2</u>: Considerando a unidade utilizada no item anterior, meça os lados dos demais quadrados e suas respectivas diagonais. Registre.

Foi possível encontrar um valor exato? Explique.

MÓDULO 3- É IRRACIONAL? REPRESENTAÇÃO DECIMAL E SIGNIFICADO.

Tarefa 1: A calculadora quebrada

Imagine que sua calculadora tenha caído no chão e a tecla com o símbolo (√) de raiz quadrada tenha parado de funcionar. Como você faria para determinar as raízes quadradas dos números a seguir? Registre, ***com detalhes***, o procedimento que decidiu realizar.

| | |
|---|---|
| √ | |
| √ | |
| √ | |
| √ | |
| √ | |
| √ | |
| $2\sqrt{2}$ | |

Quais foram as maiores dificuldades encontradas?

Foi possível encontrar o valor exato de todas as raízes irracionais? Por quê?

Quais conceitos o aluno pode perceber ou aprender com esta atividade?

Tarefa 2: Representação decimal do número irracional

Individualmente, utilizando a calculadora, encontre o valor decimal que expressa cada um dos números irracionais. Registre a resposta lida no visor de sua calculadora.

| | |
|---|---|
| $\sqrt{2}$ | |
| $\sqrt{3}$ | |
| $\sqrt{5}$ | |
| $\sqrt{7}$ | |
| $\sqrt{11}$ | |
| $\sqrt{8}$ | |
| $2\sqrt{2}$ | |

Compare os resultados que você encontrou com os resultados encontrados pelos seus colegas. O que observou?

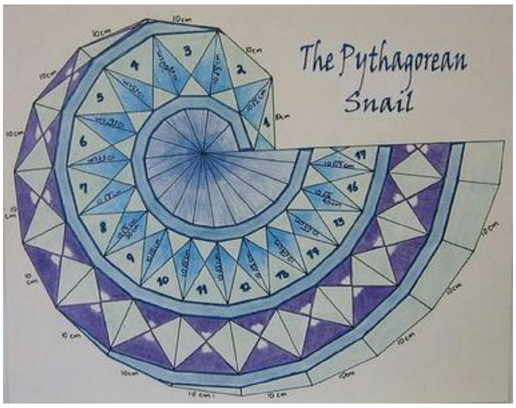
Caso tenha encontrado valores diferentes, tente explicar o motivo.

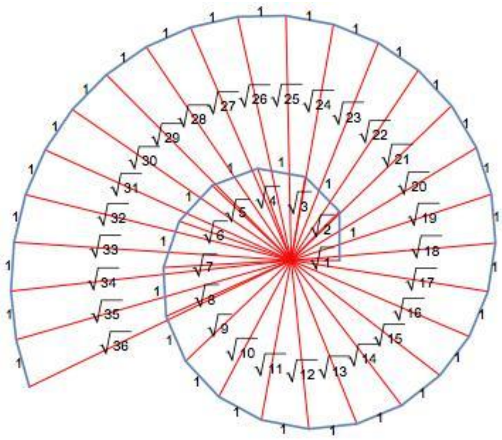
O valor decimal encontrado para raiz de oito é o mesmo valor encontrado quando se calcula a raiz de 2 multiplicada por 2 na calculadora? Por quê?

Marque os pontos na reta numérica.

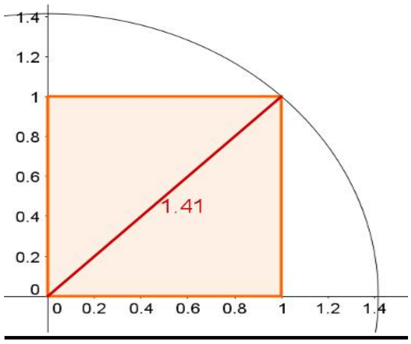
Tarefa 3: Espiral Pitagórica e Representação geométrica do número irracional

Observe as figuras a seguir. Ambas representam uma sequencia de números irracionais em que o radicando é um número natural.



Com base no procedimento “transporte de segmento” é possível localizar todos estes números irracionais na reta. Dado um quadrado cujos lados meçam uma unidade de comprimento 1 u.c. traça-se a diagonal e com o compasso rebate o seu comprimento sobre a reta apoio.




Observe o processo geométrico para a localização de raízes irracionais e repita-o para encontrar a localização dos números irracionais da tarefa anterior na reta. Ou seja, localize na reta os números {$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ ; $\sqrt{5}$ ; $\sqrt{7}$; $\sqrt{11}$ ; $\sqrt{8}$ ; $2\sqrt{2}$ } usando o procedimento descrito, conforme esquema.

Agora responda:

Os pontos (representação decimal) marcados anteriormente coincidiram com os encontrados? Houve diferença? Por quê?

Se você precisasse escolher a forma mais precisa para representar os números irracionais na reta, qual das duas maneiras escolheria? Por quê?

Esta tarefa contribui para a aprendizagem do conceito de números irracionais na educação básica? Por quê?

MÓDULO 4: O NÚMERO $\pi$

**Tarefa 1: Medindo objetos**

Você recebeu diferentes linhas e objetos e uma régua.

Escreva, na primeira coluna, o nome dos objetos que irá medir.

Em seguida meça, com ajuda dos recursos disponíveis, o diâmetro e a circunferência das formas fornecidas e complete a tabela.

Calcule a razão entre circunferência e diâmetro e registre o resultado na ultima coluna, c/d.

| **Objeto a ser medido** | **Circunferência** | **Diâmetro** | **Razão c/d** |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Este método não é bem avaliado por diversos pesquisadores. Acreditam que ele apresenta uma visão equivocada sobre a irracionalidade de π. Explique o motivo.

**Tarefa 2: Desenhando e medindo círculos**

Desenhe circunferências cujos raios meçam

R = 2 cm

R= 3 cm

R = 4 cm

R = 5 cm

R = 8 cm

Em seguida meça a circunferência de cada uma delas usando três tipos de fios diferentes e monte uma tabela com os seus dados. O que observou? Explique suas respostas.

Tarefa 3: Número π(continuação)

1) Com base nos dados da última tarefa e utilizando o papel quadriculado, registre no plano cartesiano as medidas de circunferência e diâmetro. Escolha uma das três formas dadas para registrar as medidas dos raios e diâmetros.

*a) (0, d) e (c, 0)*

*d = diâmetro e
*c = circunferência

*b) (d, 0) e (0, c)*

*c) (d, c) e (c, d)*

2) Ligue os pontos referentes a cada uma das circunferências. É possível OBSERVAR o valor de π neste tipo de registro? Explique sua resposta.

MÓDULO 5- NÚMERO Φ. CURIOSIDADES.

**Tarefa 1: Montando quebra-cabeça**

Você recebeu um envelope com “peças” recortadas em cartolina.

1-Monte um retângulo utilizando todas as peças fornecidas. Desenhe a solução.

**Tarefa 2: Refletindo sobre a construção do quebra-cabeça**

Partindo do quadrado menor e considerando-o como unidade, calcule as medidas dos lados de cada quadrado e registre a sequência formada.

Quais seriam os 10 valores seguintes?

Quais conceitos matemáticos podem ser observados a partir deste raciocínio?

A partir desta sequência, calcule a razão entre cada número e seu antecessor. Registre todos os valores.

Agora troque o numerador pelo denominador de cada razão e calcule o novo valor.

Compare os resultados decimais das questões *d* e *e*. É possível perceber alguma relação? Explique.

**Tarefa 3: Observando aplicações do número PHI em obras do homem e da natureza**

Nas imagens a seguir temos três situações em que é possível identificar a razão áurea Nas primeiras temos duas logomarcas, depois duas construções e por fim, dois representantes da natureza.

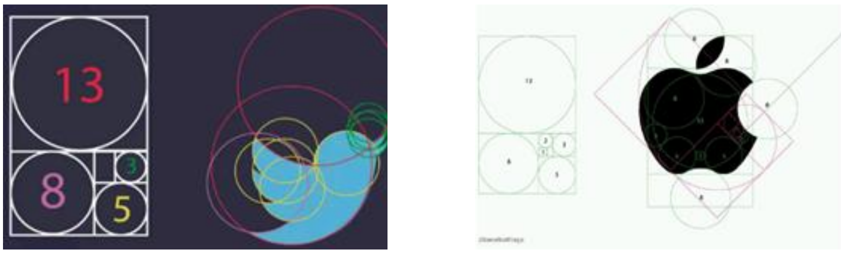


*Figura 1: Logo do Twiter e logo da Apple*


*Figura 2: na Arquitetura*[3]


*Figura 3: Na Natureza*[4]

Procure outros exemplos nos sites da internet.

[3] Imgens disponíveis em https://www.google.com.br/search?q=proporcao+aurea+na+arquitetura&tbm

MÓDULO 6- AVALIAÇÃO, CONSTRUÇÃO E SOCIALIZAÇÃO.

**Tarefa 1: Criar uma tarefa sobre o tema**

**Tarefa 2: Roda de avaliação**

Escrever ou relatar oralmente uma avaliação sobre todo o processo vivido

**PARTE 2:**

Nesta seção apresentamos os objetivos de cada módulo, um resumo sobre o módulo e nas orientações e observações trazemos algumas reflexões que possam contribuir na implementação das tarefas e acompanhamento sobre os possíveis caminhos percorridos pelos participantes durante a realização das mesmas. Estes caminhos são frutos das análises feitas na implementação das tarefas junto a um grupo de professores durante a realização da pesquisa de mestrado.

MÓDULO 1:

Objetivos

Refletir sobre as dificuldades dos alunos sobre os números irracionais

Conhecer algumas abordagens didático-pedagógicas desenvolvidas em salas de aula de matemática.

Promover debates sobre as diferentes estratégias usadas em sala de aula para ensinar os números irracionais.

## Resumo

Os artigos apresentados neste módulo tratam das questões que se fazem presentes nos contextos de pesquisas sobre os processos de ensino e aprendizagem dos números irracionais.

**Observação e intervenção**

Neste módulo o participante é convidado a conhecer algumas pesquisas relacionadas ao tema números irracionais, destinado á localização do professor participante no tema e nas propostas didáticas. À primeira vista pode parecer exageradamente teórico, mas é fundamental apresentar ao cursista uma visão panorâmica da proposta. Para tal, é necessário promover uma discussão ampla sobre o tema e os textos, comparando experiências e ouvindo as opiniões.

As sugestões para esse módulo são:

Disponibilizar os textos antes do encontro presencial.

Explorar o conceito de investigação matemática a partir de exemplos práticos. Os textos incluídos nesta proposta trazem uma apresentação bastante ampla, no entanto, a visualização de tarefas aplicadas e analisadas produz um efeito maior de familiaridade;

Ouvir as experiências dos professores em relação à abordagem dos números irracionais, tanto em sua vida profissional quanto em seu desenvolvimento enquanto estudante;

Conduzir este primeiro momento valorizando o trabalho em grupo e a socialização dos conhecimentos, justificando sua importância no decorrer do curso.

Na tarefa 1 Procuramos identificar relações entre a formação de professores portugueses e a formação dos professores brasileiros.

Na tarefa 2, trata-se de um convite à reflexão. O participante poderá atuar como modificador atuante.

A tarefa 3 busca focar o aprendiz, ou seja, construir a reflexão sobre o processo de aprendizagem.

Na tarefa 4 o estudante terá a oportunidade de conhecer uma estruturação para resumo de textos acadêmicos, assim como também de refletir em sua prática.

MÓDULO 2:

Objetivos

Ambientar o participante sobre o desenvolvimento histórico dos números irracionais

Perceber a incomensurabilidade entre a comparação de algumas medidas

## Resumo

As tarefas apresentam o contexto histórico e da indispensabilidade do conjunto dos números irracionais. Sugestiona-se apresentar as versões históricas para a construção do conjunto dos números irracionais e da incomensurabilidade de medidas.

**Observação e intervenção**

A expectativa principal na aplicação desta tarefa é a percepção, mesmo que experimental, de que existem empecilhos para a medição exata da diagonal de qualquer quadrado com a utilização de uma unidade e suas frações.

A verificação das medidas incomensuráveis é crucial para a compreensão da origem histórica e da gênese da construção do conjunto dos números irracionais.

As tarefas contidas no módulo fogem do paradigma do exercício, e por este motivo necessitam de estímulo por parte do professor. Não existe uma resposta ideal para o problema da medição da diagonal do quadrado partindo de unidades, e este paradoxo pode provocar diversos comportamentos nos estudantes: desde o desnorteamento até a simplificação exagerada. Em todos os casos é importante manter o diálogo vivo e aberto durante a aplicação, socializando as dúvidas e descobertas, justificando os questionamentos e direcionando para a exploração do tema em si.

As sugestões para esse módulo são:

Aplicar a tarefa "incomensurabilidade" antes da apresentação do conteúdo histórico teórico. Essa experiência poderá provocar uma compreensão mais ampla sobre o conceito e sobre o paradigma que o fez surgir.

Condensar as versões históricas sem permitir que as referências se percam. Existem versões diferenciadas para o surgimento dos irracionais, é importante que sejam apresentadas, mas não existe a necessidade de esmiuçar cada uma delas.

Durante a realização das tarefas, é possível que os estudantes encontrem estratégias distintas para encontrar a melhor unidade, tais como: partir da maior peça; partir da menor peça; utilizar unidades diferentes.

Partindo da maior peça é possível que os estudantes pensem em medir o lado em função da diagonal ao invés da diagonal em função da medida do lado (como é convencionalmente ensinado visto que definimos a diagonal como sendo d= $l\sqrt{2}$. Nesta busca por uma melhor unidade e na dificuldade em encontrá-la, é possível identificar que o grupo também procure se distanciar das frações. Esta impossibilidade de encontrar uma unidade que meça simultaneamente o lado e a diagonal crie um impacto. Impacto esse da existência da incomensurabilidade.

Os estudantes podem identificar frações associadas à peça escolhida. Muitas vezes busca adequar à unidade ao calculo algébrico. Ou seja, adequar a unidade ao resultado encontrado algebricamente pelo teorema de Pitágoras. No caso, em que buscam a menor peça, é perceptível a fuga das respostas fracionárias.

Outra possibilidade é a de utilizar unidades diferentes. Neste caso, os estudantes podem buscar as peças que mais se aproximam da medida dada fazendo combinações usando mais de uma peça.

De forma geral, é possível perceber que a relação entre medida e contagem pode surgir como referência na maioria das estratégias, ou seja, os estudantes trabalham o conceito de medida (quanto mede?) atrelado ao de número natural (quantos?) e ao se depararem com o desafio de transcender essa percepção, encontram o que chamam de "complexidade".

Para maiores detalhes veja página 64 da dissertação de mestrado.

MÓDULO 3:

Objetivos

Proporcionar a experimentação de tarefas que desenvolvam a percepção da irracionalidade numérica.

Resumo

Neste módulo apresentam-se tarefas que proporcionem a construção conceitual do número irracional e sua representação numérica. Neste módulo o foco é a Visualização e a comparação das possíveis representações para os números irracionais. Uma das constatações da pesquisa que concebeu este curso é a importância da conscientização das diferentes formas de se visualizar a irracionalidade numérica (forma decimal, reta real, representações geométricas) e também das possibilidades para abordagem das mesmas.

Sugestões para esse módulo:

Este módulo demanda recursos específicos: calculadora, papel quadriculado e material para desenho geométrico. Sendo assim estes recursos poderão ser disponibilizados de acordo com demanda da turma. Caso não seja possível disponibilizar os materiais, é importante informar a necessidade de que cada um traga no dia do encontro presencial;

Estão disponibilizadas três tarefas, a realização de todas é pode proporcionar muitas oportunidades de construção conceitual sobre irracionalidade, principalmente ao final da realização de todas, onde os resultados poderão ser socializados e discutidos. Portanto é importante administrar bem o tempo disponível para aproveitar o máximo das oportunidades.

Como o módulo é dividido em dois encontros é fundamental que haja uma retomada das discussões no segundo encontro, pois a sobreposição das experiências de cada tarefa tem grande potencial, que não deve ser desperdiçado.

**Observação e intervenção**

Sugere-se que estas tarefas sejam trabalhadas em grupo para que os estudantes possam confrontar os diferentes resultados obtidos em suas calculadoras em função do tipo de programação, números de algarismos do visor.

É possível que os participantes se surpreendam com os resultados diferenciados que aparecem nos visores das calculadoras ao calcular a raiz quadrada de um número qualquer. Uma que merece destaque é o fato de que nem sempre os resultados para $2\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$, são iguais, contrariando o senso comum. Esta surpresa pode ser resultado de uma imagem determinística tanto das operações com raízes quanto da definição de número irracional, fruto do ensino baseado na repetição de exercícios que reforçam tal igualdade incondicional, desconsiderando o fator da aproximação da representação decimal de um número irracional.

Outro ponto que merece destaque são os resultados obtidos ao se elevar o resultado das raízes ao quadrado e não encontrar exatamente o radicando, isto é, o número que deu origem ao resultado da raiz quadrada.

Outra abordagem com princípios semelhantes seria a utilização do software Geogebra para verificar as relações entre os seguimentos de medidas irracionais e a construção da reta real com inclusão das raízes irracionais. Dessa forma as relações entre visualização geométrica e representação decimal podem também serem comparadas.

MÓDULO 4:

Objetivos

Medir o comprimento e o diâmetro de diferentes objetos “redondos”

Encontrar a razão entre as medidas encontradas

Desenhar circunferências e medir os seus comprimentos e os respectivos diâmetros usando três tipos de linhas distintas

Comparar as medidas encontradas de um mesmo círculo usando cada uma das linhas

Representar as medidas em um plano cartesiano e compará-las.

**Resumo**

Este módulo é composto de experiências sobre o número π. Estas experiências foram selecionadas a fim de que sejam analisadas as características deste número, mas também questionar seu conceito e sua representação.

Sugestões para esse módulo:

As tarefas apresentadas neste módulo não possuem um fim em si. Tanto na primeira etapa quanto na segunda é possível incluir recursos e discussões para além das apresentadas aqui.

Na primeira etapa é possível utilizar instrumentos de medição variados (fita métrica, fios de diferentes espessuras, objetos de diferentes dimensões...), cabe ao aplicador avaliar estas possibilidades e adequá-las ao grupo de estudantes e ao tempo disponível.

Na segunda etapa, além da possibilidade do uso de softwares de representação geométrica, também é possível variar a utilização de instrumentos (compasso, transferidor...)

Assim como no módulo 3, a sobreposição das verificações de cada tarefa apresenta grande potencial de construção conceitual, assim como a socialização geral entre os grupos. Principalmente se forem utilizados recursos diferentes em cada grupo.

**Observação e intervenção**

Na tarefa 1, medindo diferentes objetos é comum os estudantes encontrarem medidas muito diferentes. Estas diferenças estão relacionadas às dificuldades que existe em se colocar a linha exatamente em volta dos objetos e de encontrar o centro para então medir o diâmetro. Outro fator que contribui para as discrepâncias entre as medidas é a espessura e maleabilidade das linhas usadas.

De um modo geral os estudantes se surpreendem em não encontrar exatamente o valor 3,14 quando comparam as medidas do comprimento com o diâmetro. Assim como não percebem que este valor é aproximado visto que não existe uma unidade que possa ser usada exatamente para medir a circunferência.

Na tarefa 2, quando solicitamos medir as circunferências usando diferentes tipos de linhas, o objetivo é evidenciar a incomensurabilidade das medidas, mas que quanto mais maleável e fino for a linha mais próximo do resultado esperado assim como quanto maior o raio, mais fácil se torna medir o comprimento. Isto acontece pois, se o raio for maior a curvatura do circulo é menor e mais retificada ela se torna facilitando assim o processo de colocar a linha sobre a linha desenhada.

Na tarefa 3, quando o estudante escolhe um dos eixos para marcar as medidas dos raios/diâmetro e o outro para marcar a circunferência, é possível perceber que o ângulo de inclinação dos triângulos é o mesmo, contribuindo para identificar a unicidade desta razão visto que as medidas encontradas (diâmetro e circunferência) representam os catetos de triângulos e ao traçarem a hipotenusa, é possível visualizar triângulos retângulos semelhantes.

Assim como esperado neste contexto investigativo, cada grupo realizou uma construção diferente, traçando triângulos que se complementam no gráfico, como extensões. Em uma destas construções a semelhança entre os ângulos se torna ainda mais visível, sempre variando, um entre 11° e 13° e o outro entre 77° e 79º. Além desta observação, realizaram a comparação do valor das tangentes dos ângulos internos e encontraram em um dos casos valores muito próximos a π, o que caracteriza uma maneira diferenciada de abordar seu conceito.

*Tg1= 0, 3123*

*Tg2= 0.3066*

*Tg3= 0, 3012*

Estas semelhanças nos levam a crer que a representação dos valores obtidos na medição dos objetos circulares nos gráficos através da construção de triângulos sempre nos trará dados interessantes, pois ao compararmos cada um dos triângulos sempre será possível observar semelhanças que nos farão refletir sobre a constância existente nas relações de medida dos objetos circulares.

MÓDULO 5

Objetivos

Montar um retângulo com as peças de um quebra-cabeça

Medir os lados dos diferentes retângulos tomando como unidade o lado do menor quadrado

Identificar a razão entre as medidas dos lados e determinar outros termos da sequência

Identificar os conceitos matemáticos presentes nesta atividade

Identificar a sequencia de Fibonacci na medida dos lados dos retângulos

Verificar aplicações em diferentes contextos do dia a dia

### Resumo

Neste módulo é apresentado o Número φ a partir da verificação de propriedades da sequência de Fibonacci. Neste módulo trabalhamos a partir da montagem de um quebra-cabeça plano. Mas outras situações podem ser exploradas para inserir o tema em sala de aula.

O número φ, a proporção áurea e sequência de Fibonacci se fazem presentes em diversos estudos e compõe uma extensão aplicabilidade. Por isso o foco é a apresentação de uma das facetas destes conceitos e a relação entre eles.

**Observação e intervenção**

É importante estar atento ao tempo de realização de cada tarefa deste módulo, pois a extensa aplicabilidade e as diversas curiosidades podem provocar certo desvio dos objetivos das tarefas. Essas discussões geralmente são muito motivadoras e positivas, mas é importante gerir cada etapa para aproveitar o máximo de cada uma.

Na tarefa 1, um quebra-cabeça e sugerido para montar um retângulo em que as peças apresentam a razão áurea entre as medidas dos lados. Trata-se de um desafio para os estudantes perceberem onde e que posição colocar cada peça, visto que elas saem do contexto comum dos quebra-cabeças convencionais.

Na tarefa 2, os estudantes são convidados a perceber a razão entre as medidas das peças dadas para montar o quebra-cabeça. Esta etapa é fundamental ser feita em sala de aula, visto que ela estabelece uma conexão entre a prática e a teoria. Prática essa associada à montagem do quebra-cabeça e a reflexão sobre a ação de montagem trazendo à luz do conhecimento as razoes entre as medidas percebidas visualmente.

Para o calculo da razão áurea a calculadora será um dos recursos utilizado, Cabe ressaltar que existem diferentes tipos de calculadora, deste modo é preciso ficar atento e analisar a melhor estratégia, ou seja, padronizar ou não as calculadoras, pois a utilização de equipamentos diferentes certamente apresentará divergências quanto à aproximação decimal dos resultados. Ambas as estratégias são interessantes do ponto de vista investigativo e didático, no entanto a decisão deve ser planejada com antecedência.

Na tarefa 3, apresentamos três contextos em que a razão áurea existe ou é aplicada pelo homem nas artes e na arquitetura.

MÓDULO 6:

Objetivos

Socializar tarefas relacionadas aos trabalhos vivenciados

avaliar os resultados da experiência.

Resumo

Para este módulo são reservados 2 encontros: no primeiro os grupos deverão se organizar para elaborar uma nova tarefa sobre o tema e no segundo, os grupos apresentarão suas propostas e tarefas e também suas considerações sobre a experiência vivenciada.

A proposta deste módulo é promover uma reflexão sobre o trabalho realizado no curso, visto que as tarefas apresentam uma abordagem diferenciada. Assim, este módulo é a culminância das ações e discussões presentes no curso.

Espera-se que neste estágio de desenvolvimento das idéias trabalhadas, os participantes estejam preparados para produzir outras tarefas voltadas para o tema ou mesmo aplicar as tarefas no Ensino Básico.

O trabalho realizado até aqui não esgotou a riqueza da proposta. Daí a importância de sugerir um tempo de pesquisa para os participantes elaborarem novas propostas.

Só para exemplificar, além das tarefas apresentadas até aqui, o professor pode explorar situações envolvendo o sofisma e a incomensurabilidade. Como exemplo, sugere-se trabalhar o quebra-cabeça plano em que ao montar o quadrado á área total mede 64 u.a e quando se monta o retângulo a área encontrada mede 65 u.a.

Outro exemplo a ser explorado é usar o tangram e medir os comprimentos dos lados de cada uma das peças tomando como unidade de medida o menor lado da menor peça.

**Observação e intervenção**

O planejamento das tarefas é muito importante e pode demandar orientações não presenciais, para tal o curso tem disponível 15 horas para estudos à distância.

Um processo de auto-avaliarão dos estudantes e avaliações do curso podem constar nesse último módulo.

PARTE 3

Nesta seção são apresentadas as referências dos módulos, as bibliografias que fundamentaram a proposta e algumas sugestões de leitura complementar.

REFERÊNCIAS TEÓRICAS DO MÓDULO 1:

PIETRIPAOLO, Ruy Cesar; CORBO, Olga; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. Os números Irracionais e seu ensino delineando a imagem conceitual de um grupo de professores. In: Congreso De Educaci”N Matemática De América Central Y El Caribe, 1., 2013, Santo Domingo, República Dominicana. **Anais... .** Santo Domingo, República Dominicana: Cemacyc, 2013. p. 15 - 30.

POMMER, Wagner Marcelo. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico**. 2012. 246 f. Tese (Doutorado) - Curso de Ciências e Matemática, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

RIPOLL, C. C. (2004). A construção dos números reais nos Ensinos Fundamental e Médio. In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Salvador.

REFERÊNCIAS TEÓRICAS DO MÓDULO 2:

BOYER, Carl B. **História da matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgar Bluncher, 1996. 496 p.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução de Hygino H.Domingues. 2ª edição, Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1997.

ROONEY, Anne. **A história da matemática:** Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M.books, 2012. 216 p.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 512 p.

STEWART, Ian. **O fantástico mundo dos números**. Londres: Profile Books, 2015. 382 p

**REFERÊNCIAS HISTÓRICAS GERAIS:**

BOYER, Carl B. **História da matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgar Bluncher, 1996. 496 p.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. 2ª edição, Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1997.

ROONEY, Anne. **A história da matemática:** Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito. São Paulo: M.books, 2012. 216 p.

ROQUE, Tatiana. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. 3. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 512 p.

TEXTOS COMPLEMENTARES

CANAVARRO, Ana Paula. Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Évora, v. 2, n. 13, p.11-18, dez. 2011

KINDEL, Dora Soraia. DISCUTINDO OS RACIONAIS NA 7ª SÉRIE VISANDO A NOÇÃO DE DENSIDADE. 1998. 196 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Santa Úrsula Mestrado em Educação Matemática, Rio de Janeiro, 1998.

KINDEL, Dora Soraia. UM AMBIENTE COLABORATIVO A DISTÂNCIA: LICENCIANDOS DIALOGANDO SOBRE OS INFINITOS. 2012. 280 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação Matemática, Universidade Bandeirante de SÃo Paulo, São Paulo, 2012.

LIVIO, M.: Razão Áurea - A História do Número Fi, um Número Surpreendente. Tradução de Matsuama, S., 6a Edição, Rio de Janeiro, Editora Record, 2011

MAFFI, Caroline; FRAGA, Francieli Bandeira de; MATOS, Diego de Vargas. O ensino de Matemática em uma perspectiva investigativa: a construção de alguns números irracionais. Remat, Caxias do Sul, v. 2, n. 1, p.1-9, dez. 2015. Mensal. Disponível em: <file:///C:/Users/Rute/Downloads/1246-2658-1-PB (1).pdf>. Acesso em: 29 jun. 2016.

MENDES, Sônia Cristina da Cruz. Práticas Pedagógicas Para O Ensino Dos Números Irracionais. 2012. 113 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2012.

NIVEN, Ivan. Números: Racionais e Irracionais. Rio de Janeiro: Sbm, 2012. 167 p.

SANTOS, Gilberto Vieira dos. Explorando a Matemática do Número Φ, o Número de Ouro. 2013. 73 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Profmat, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2013. Disponível em: <http://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/92414/santos_gv_me_rcla.pdf?sequence=1>. Acesso em: 12 out. 2016.