UFRRJ

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO

Justificativas e argumentações no aprendizado de quadriláteros: uma intervenção com papel, lápis e dispositivos móveis

Bárbara Caroline Cardoso Chagas da Silva

2017

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

JUSTIFICATIVAS E ARGUMENTAÇÕES NO APRENDIZADO DE QUADRILÁTEROS: UMA INTERVENÇÃO COM PAPEL, LÁPIS E DISPOSITIVOS MÓVEIS

BÁRBARA CAROLINE CARDOSO CHAGAS DA SILVA

Sob a orientação do Professor Doutor
Marcelo Almeida Bairral

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação em Ciências e Matemática**, no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, área de concentração em processos de ensino-aprendizagem em Ciências e Matemática.

Seropédica, RJ
Abril de 2017

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada

com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Cj Cardoso Chagas da Silva, Bárbara Caroline , 1992-

JUSTIFICATIVAS E ARGUMENTAÇÕES NO APRENDIZADO DE QUADRILÁTEROS: UMA INTERVENÇÃO COM PAPEL, LÁPIS E DISPOSITIVOS MÓVEIS / Bárbara Caroline Cardoso Chagas da Silva. - 2017. 95 f.: il.

Orientador: Marcelo Almeida Bairral. Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, PPGEduCIMAT, 2017.

1. Geometria dinâmica em dispositivos com touchscreen. 2. Geometria plana. 3. Quadriláteros. 4. Formação inicial de professores. I. Almeida Bairral, Marcelo , 1969-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. PPGEduCIMAT III. Título.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador pela confiança, amizade, compreensão e ensinamentos.

Aos meus colegas do grupo GEPETICEM pelas parcerias e generosidade no compartilhamento de saberes.

A CAPES pela bolsa concedida no período de 2013 a 2014.

RESUMO

SILVA, B. C. C. C.2017. 96p. **Justificativas e argumentações no aprendizado de quadriláteros:** uma intervenção com papel, lápis e dispositivos móveis**.** 2017. 93 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2017.

Na formação inicial de professores a elaboração de uma demonstração matemática poder se tornar um processo árduo para os graduandos. Muitas vezes um único modelo de prova é apresentado ao futuro professor e, inclusive, pautado em observações de imagens estáticas, no papel ou lousa. O processo de construção e entendimento da demonstração às vezes fica em um segundo plano. Nesta pesquisa analisamos processos de elaboração de provas em atividades sobre quadriláteros. A intervenção ocorreu em uma Disciplina da Licenciatura em Matemática da UFRRJ, no segundo semestre de 2015, e usou recursos variados, dentre eles, dispositivos móveis. Os três *softwares* (*Sketchometry*, *FreeGeo* e *GeoGebra*) foram trabalhados em *smartphones* e *tablets*. Como forma de coleta de dados foram utilizados registro da pesquisadora, fotos, vídeos, registros dos graduandos (respostas). A investigação sublinha que processos de elaboração de provas devem potencializar diferentes argumentos e justificativas matemáticas. Eles devem ser vistos como formas conjuntivas de registro (diagramas e outros registros escritos, telas com construções em *software*, fala e outras expressões gestuais). Estas formas compõem o raciocínio do sujeito no seu processo de análise e de convencimento sobre conjecturas e propriedades geométricas. Como contribuições destacamos a construção dinâmica em telas, a mobilidade, o compartilhamento em rede e prática dialógica como características de uma prática que potencializam o processo argumentativo e de organização de uma prova. O movimento entres os domínios de manipulação em tela (construtivo e relacional) tem se mostrado favorável no processo de refinamento do raciocínio e de elaboração de uma prova. Finalmente, a dinâmica das aulas, o papel do professor e o desenho das atividades mostraram-se importantes na exploração de conceitos geométricos e nas interações entre dispositivos e sujeitos, pois, a partir da proposta provocativa da tarefa que o graduando é levado a explorar, questionar e verificar suas conjecturas.

Palavras-chave: Licenciatura em matemática. Elaboração de provas. Touchscreen. Sketchometry. FreeGeo. GeoGebra.

ABSTRACT

SILVA, B. C. C. C.2017. 96p. **Justifications and arguments in the learning of quadrilaterals:** an intervention with paper, pencil and mobile devices. 2017. 93 p. Dissertation (Master of Science in Education and Mathematics). Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2017.

In the initial teacher training the preparation of a mathematical demonstration could become an arduous process for undergraduates. Often a single model of proof is presented to the future teacher and even based on observations of static images, on paper or blackboard. The process of building and understanding the demonstration sometimes takes a backseat. In this research we analyse processes of elaboration of tests in activities on quadrilaterals. The intervention occurred in a Mathematics Degree in UFRRJ, in the second half of 2015, and used a variety of resources, among them, mobile devices. The three softwares (Sketchometry, FreeGeo and GeoGebra) were worked on smartphones and tablets. As a form of data collection were used the researcher's record, photos, videos, records of the students (answers). The research emphasizes that proof-making processes should potentiate different arguments and mathematical justifications. They should be seen as conjunctive forms of registration (diagrams and other written records, screens with software constructs, speech, and other gestural expressions). These forms compose the reasoning of the subject in his process of analysis and convincing about conjectures and geometric properties. As contributions we highlight the dynamic construction on screens, mobility, network sharing and dialogic practice as characteristics of a practice that potentiate the argumentative process and organization of a test. The movement between the domains of manipulation on canvas (constructive and relational) has been favourable in the process of refining reasoning and elaborating a proof. Finally, the dynamics of the classes, the role of the teacher and the design of the activities showed to be important in the exploration of geometric concepts and in the interactions between devices and subjects, because, from the provocative proposal of the task that the graduate is taken to explore, question and verify their conjectures.

Key-words: Degree in mathematics. Proof-making processes.Touchscreen. Sketchometry. FreeGeo. GeoGebra.

LISTA DE ABREVIAÇÕES E SIMBOLOS

AGDcT -	Ambiente de Geometria Dinâmica com Touchscreen
SK -	Sketchometry
GEO -	GeoGebra
FG -	FreeGeo
App -	Aplicativo
GC -	Geometric Constructer
GEPETICEM -	Grupo de Estudos e Pesquisas das Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática
iOs -	Sistema Operacional móvel da Apple
OBEDUC -	Observatório da Educação
CAPES -	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
EM -	Educação Matemática

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Prova por indução, prova por absurdo, direta ou contra positiva, diferentes nomes para um método que se resume em elencar dedutivamente argumentos lógicos que comprovam a veracidade de um teorema, por exemplo. Para além da área da matemática, o processo de argumentação constitui nós indivíduos enquanto sujeitos de nossa história. A capacidade de argumentar é fundamental para nossa vida na relação com o outro e com o mundo, por meio do argumento, aprendemos, nos expressamos, criamos e produzimos conhecimentos (PASIN; SCHEFFER, 2013).

Ao abordarmos especificamente nossa relação com o outro e com o mundo destacamos o papel das tecnologias digitais, mais precisamente, os dispositivos móveis que tomaram um espaço importante em nosso cotidiano. Na área da Educação Matemática (EM), por exemplo, podemos elencar uma série de pesquisas que ratificam a importância e as contribuições que o uso da tecnologia digital pode proporcionar ao processo de ensino e aprendizagem. Ao focalizarmos nos estudos que englobam *softwares* de geometria dinâmica, pontuamos a possibilidade de criar, explorar e manipular diagramas dinâmicos investigando relações a partir da interatividade constante como em um micromundo (HEALY; HOYLES, 2001).

Propomos em nossa pesquisa um experimento de ensino que permeie o processo de argumentação e justificativas matemáticas em ambientes de geometria dinâmica com *touchscreen* (AGDcT) utilizando dispositivos móveis. Vamos unir a importância do processo argumentativo com as potencialidades da tecnologia digital. Contudo, para que o leitor possa compreender a trajetória de nossa pesquisa discorreremos como iniciou nossa caminha nos parágrafos a seguir.

O interesse sobre a temática “processos de elaboração de prova em AGDcT” se iniciou em 2013 (BAIRRAL; ASSIS; SILVA, 2016) durante o desenvolvimento de um trabalho monográfico fruto da participação da pesquisadora no projeto de pesquisa do Observatório da Educação, o OBEDUC, financiado pela Capes e coordenado pelo professor Marcelo Bairral no Grupo de Estudos e Pesquisas das Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática – o Gepeticem –, onde teve a oportunidade de ingressar como bolsista de iniciação científica. O grupo de pesquisa Gepeticem tem como um de seus objetivos desenvolver pesquisas e trabalhos que consideram uma prática educativa que coloca o aluno como um elemento central na produção do seu conhecimento, prática essa que respeita os saberes do estudante percebendo-o como um sujeito autônomo que possui uma história, princípios e sonhos.

A incompatibilidade que existia entre as aulas direcionadas para a prática de ensino de matemática e as aulas de cálculo, álgebra e análise nos inquietavam. Questões como: Porque os professores de cálculo e álgebra (por exemplo) não usavam o *GeoGebra*, o *Wolfram Alpha*, calculadoras ou jogos nas suas aulas? Porque tínhamos que repetir centenas de exercícios e decorar demonstrações para em seguida esquecer de tudo e logo após a prova perceber que de fato não aprendemos quase nada? Esses questionamentos eram recorrentes. Nas leituras e nos estudos, encontramos a luz no fim do túnel e percebemos que o ensino de matemática geralmente repassado nas escolas e nas universidades compõe uma questão histórica e cultural.

No trabalho monográfico (SILVA, 2014), iniciamos uma pequena discussão sobre o uso do Ambiente de Geometria Dinâmica com *Touchscreen* (AGDcT) e o processo de argumentação e produção de provas. Observamos que o receio com relação à produção de demonstrações e as dificuldades não eram culpa dos alunos. Estudiosos como Villiers (2001), Cirillo e Herbst (2010), por exemplo, ratificam que a demonstração é vista, na maioria das vezes, como um meio de se comprovar a veracidade incontestável de uma proposição. O processo de construção de uma prova geralmente é deixado em segundo plano.

Na presente pesquisa, pretendemos retomar as discussões iniciadas neste trabalho monográfico propondo alguns desdobramentos, reflexões, atividades, uso de *softwares* e procedimentos que adotamos com um grupo de licenciandos da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ). Esta intervenção ocorreu durante o estágio docente da autora, enquanto estudante do programa de pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática da referida universidade, no segundo semestre de 2015.

Propomos investigar e buscar reflexões que respondam a seguinte questão de pesquisa: Que contribuições o uso da tecnologia *touchscreen* e de atividades com recursos variados podem proporcionar ao ensino de geometria, especificamente nos processos de argumentação sobre quadriláteros? Para orientar nossos estudos temos nos baseado nos seguintes objetivos:

Objetivo geral: Analisar processos de elaboração de provas a partir de atividades sobre quadriláteros, em uma disciplina da licenciatura em matemática, com dispositivos móveis.

Objetivos específicos:

- Analisar contribuições que o desenho da atividade pode proporcionar no processo de elaboração de provas matemáticas;
- Analisar contribuições que o AGDcT utilizado pode proporcionar na dinâmica proposta.

De forma a contemplar os objetivos anteriormente apresentados, a dissertação foi assim organizada. Iniciamos com uma revisão bibliográfica a respeito do uso da tecnologia *touchscreen* no ensino de matemática. Em seguida ainda no capítulo 1 trazemos elementos teóricos que nos ajudam a compreender que os gestos que realizamos na tela de um dispositivo *touchscreen* são manipulações previamente mapeadas pelo nosso cérebro, dotadas de emoção, significados e realizadas de modo conscientes; e que nossas experiências e interações como meio social são a base para a produção de imagens mentais, estas últimas por sua vez ganham cor à medida que se tornam significativas e compõe nossa consciência. Estudar esses aspectos nos ajuda a pensar e analisar a proposta pedagógica que desenvolvemos com os licenciandos.

No capítulo 2 iniciamos, novamente, com uma revisão bibliográfica, sobre a produção de provas e o uso de ambientes de geometria dinâmica. Destacamos alguns estudos que têm norteado e inspirado as atividades que implementamos nas aulas com os futuros professores de matemática. Além disso, esclarecemos que estamos adotando o conceito de processos de elaboração de prova como as diversas justificativas e representações que compõe a produção de argumentos e demonstrações matemáticas, incluindo os recursos tecnológicos digitais, a produção do aluno, sua fala e seus gestos.

No capítulo seguinte apresentamos a metodologia da pesquisa, buscamos esclarecer como se deu o processo de elaboração das atividades – respostas – atividades, ou seja, como se deu o processo cíclico que utilizamos para elaborar tarefas que emergiam das respostas e dificuldades dos próprios alunos. Embora tarefa e atividade tenham singularidades ao longo do trabalho utilizarei como sinônimo. Apresentamos brevemente as especificidades dos *softwares Sketchometry* (SK), *FreeGeo* (FG) e *GeoGebra* (GEO), que foram os aplicativos selecionados para a implementação das atividades. Além disso, é possível observar que a pesquisa se desenvolveu em cinco fases de implementação, neste capítulo, realizamos o detalhamento de cada fase.

A intervenção é analisada nos capítulos 4, 5 e 6. No capítulo 4 exemplificamos respostas da primeira fase, pois foi a partir desta fase que elaboramos as demais atividades.

No capítulo 5, selecionamos as respostas de apenas um aluno a fim de observar seu desenvolvimento no decorrer das tarefas. No capítulo 6, exemplificamos respostas dos grupos que participaram das implementações, também destacamos um grupo específico, devido aos dados coletados não terem sido todos coletados com sucesso, uma vez que tivemos imprevistos com alguns equipamentos na hora da gravação, comprometendo a coleta de dados.

Como contribuições à investigação, promovemos reflexões com um estudo teórico e metodológico que engloba o AGDcT e processos de elaboração de prova como uma realidade possível de se adotar na sala de aula e que favoreça a criatividade do futuro professor e a melhoria do conhecimento matemático. Além disso, apresentamos como produtos da presente pesquisa um portfólio eletrônico e uma sequência didática com as atividades implementadas com os licenciandos.

1 CORPO, COGNIÇÃO E TECNOLOGIAS DIGITAIS

No presente capítulo, discorreremos brevemente sobre pesquisas em Educação Matemática (EM) que possuem por objeto de estudo o uso de tecnologias digitais no ensino de matemática. Além disso, ilustraremos as concepções que estamos adotando com relação a gestos, cognição corporificada, cognição sensitiva e manipulações *touchscreen*, pois estes são construtos que compõem o espectro cognitivo na produção de provas em ambiente de geometria dinâmica (AGD) e nos são úteis na análise do conhecimento na ótica da neurociência e da cognição corporificada.

1.1 A tecnologia *touchscreen* no ensino de matemática

Ao investigar especificamente a inserção de dispositivos com tecnologia *touchscreen* no ensino de matemática, observamos que pesquisas nesta área ainda são escassas. Desde 2013, temos nos empenhado em constituir um panorama de estudos que contemplam o uso do AGDcT no ensino de matemática.

Bairral (2013) apresenta uma revisão de pesquisas direcionadas ao ensino de matemática utilizando aplicativos para dispositivos com tecnologia *touchscreen* o qual estudiosos como Arzarello e colaboradores (2013), Toennies e colaboradores (2011, apud Bairral, 2013), Pelton e Pelton (2012, apud BAIRRAL, 2013) e Iijima (2012, apud BAIRRAL, 2013) contribuem com dados que apontam para o engajamento do aluno no processo de sua aprendizagem e a importância da mediação docente no referido ambiente.

Dos estudos apresentados em Bairral e colaboradores (2015), destacamos as contribuições de Arzarello e colaboradores (2014), pois, estes pesquisadores direcionaram suas lentes para o modo como os estudantes aprendem no Ambiente de Geometria Dinâmica com *Touchscreen* (AGDcT) focalizando os tipos de manipulações *touchscreen* que são realizadas no decorrer de atividades que exploram o raciocínio geométrico com o uso de *software*.

Arzarello e colaboradores (2014) realizaram um experimento com alunos do ensino médio de uma escola italiana no qual analisaram os tipos de manipulação *touchscreen* durante o processo de resolução de problemas da geometria plana com o auxílio de um *software* de geometria dinâmica– *o Geometric Constructer* – em *tablets*. Nesta pesquisa, os autores ressaltam que os alunos estão cada vez mais familiarizados com a tecnologia multitoque e sua manipulação. Afirmam também, que esse tipo de pesquisa abre um novo campo para a aprendizagem da matemática, uma vez que permite que as pessoas trabalhem no que está se tornando uma forma mais natural, devido ao uso constante no cotidiano.

Quanto às manipulações *touchscreen*, Arzarello e colaboradores (2014) apontam dois domínios: o construtivo que envolve toques simples e específicos na tela (como duplos toques, por exemplo) e observações isoladas, geralmente, em momentos de construção de objetos matemáticos, ou verificação de uma observação pontual; e o relacional que abrange uma combinação e articulação de múltiplos toques mais rebuscados ou não, exemplo: o movimento de aproximar e arrastar simultaneamente, ou somente o aproximar. Neste último domínio a consideração de aspectos globais na observação do diagrama dinâmico é uma característica marcante. Além disso, a conjectura é um tipo de ação do pensamento específico do domínio relacional. A seguir (Quadro 1) ilustramos alguns exemplos de manipulações predominantes em cada domínio.

Quadro 1 - Exemplos de manipulações presentes nos domínios construtivo e relacional

Toques simples sem movimentos de arrasto típicos do domínio construtivo	
 Um único toque na tela.	 Dois toques seguidos na tela.
Toques rebuscados com movimentos de arrasto típicos do domínio relacional	
 Manipulação de arrasto para cima e para baixo sem retirar o dedo da tela.	 Manipulação de arrasto para a direita sem retirar o dedo da tela.

Fonte: Elaboração da autora.

Segundo Arzarello e colaboradores (2014), o domínio construtivo o olhar do aluno se volta a aspectos pontuais do conceito geométrico explorado no aplicativo, isto é, são momentos em que as manipulações realizadas na tela possuem a função de medir, construir, editar e nomear elementos, como o processo de criação de um objeto geométrico no AGDcT envolve a seleção de ferramentas específicas do App as manipulações de toques são mais frequentes. Contudo, Arzarello e colaboradores (2014) chamam a atenção para o raciocínio do aluno dentro deste domínio que está orientado para o olhar específico de um elemento do objeto explorado.

Com relação ao domínio relacional (ARZARELLO et al., 2014), as manipulações na tela passam a ter a função de deformar (ou não) a figura por meio do arrasto, aproximar o objeto a figuras familiares e aumentar ou diminuir a figura. Especificamente, sobre o raciocínio dos alunos, Arzarello e colaboradores (2014) destacam a emergência de conjecturas, hipóteses, observação de relações, questionamentos e refinamento, como elementos pertinentes do domínio relacional.

Ressaltamos o trabalho de Scott e Carpendale (2006) sobre a interação em mesas digitais (com tecnologia *touchscreen*, *tabletops*), apesar das referidas pesquisadoras não direcionarem sua pesquisa especificamente para o ensino de matemática, consideramos pertinentes os resultados apontados para o uso da tecnologia *touchscreen*, pois as mesmas destacam desafios que este ambiente provoca na elaboração de tarefas que precisam ser adequadas tanto às capacidades físicas do equipamento quanto à interação e compartilhamento das funções entre os vários usuários.

Podemos relacionar este último dado com as especificidades dos diferentes aparelhos que dispomos no mercado, cada *tablet* ou *smartphone* possui características distintas, logo a adequação da tarefa torna-se um elemento importante no planejamento docente. Outro elemento a considerar é que, para Scott e Carpendale (2006), as mesas digitais se diferenciam do computador habitual sobretudo por promover mudanças na perspectiva da interação humano-computador. Para estas pesquisadoras é preciso repensar o uso do computador como um ato solitário, os tipos de atividades em que as pessoas desenvolvem com esses instrumentos e os tipos de interações sociais que se estabelecem nesse meio e como a relação recíproca entre o digital e o social se desenvolvem nesse meio.

Chinellato e colaboradores (2013) propõem uma discussão sobre o uso de tecnologias em sala de aula e são apresentadas possibilidades e limitações do uso de *tablet* para a educação matemática, através de um minicurso realizado no XI Encontro Nacional de Educação Matemática (XI ENEM). Os autores apresentam cinco *softwares* matemáticos disponíveis na *internet: FluidMath*, *Grapher*, *WolframAlpha*, *Math Formulary* e o *Learn*

Algebra. A ideia era deixar os participantes livres para escolherem aplicativos dentre os apresentados ou outros disponíveis na internet e, em grupos (com um *tablet* por grupo), os participantes iriam compor uma proposta de aula utilizando um dos aplicativos escolhidos. Este trabalho apresentava apenas resultados esperados como: a promoção da discussão sobre o uso das tecnologias da informação e comunicação ouvindo os próprios participantes e suas concepções acerca do uso desses equipamentos, em especial o *tablet*, além de promover a motivação por parte dos docentes em utilizar essa tecnologia em sala.

A pesquisa de Oliveira e colaboradores (2012) apresenta resultados iniciais de um experimento realizado por alunos da Faculdade de Tecnologia de Ourinhos (FATEC), São Paulo. Os alunos utilizaram o *software GeoGebra* para *tablets*, o aplicativo *Splashtop* nos *tablets* e o uso do aplicativo *Splashtop Streamer* no computador ou *notebook*. Através da comunicação pela rede *Wi-fi* e pelos aplicativos *Splashtop* e *SplashtopStreamer*, é possível manipular a tela do computador no *tablet*, e assim utilizar o *software GeoGebra*, que deve estar instalado no computador (OLIVEIRA et al., 2012). Como resultados esperados os pesquisadores apontam que o uso do *tablet* facilitaria o acesso à informação e tornaria as aulas mais dinâmicas.

Araujo Jr. e Dias (2012) realizaram um trabalho com professores da Educação Básica de uma escola particular em São Paulo, que visava a capacitação dos mesmos para a inserção de *tablets* no ensino de matemática. Para a pesquisa, os autores utilizaram o *software mePlot Free*. Segundo os pesquisadores, o *mePlot Free* é um aplicativo livre que possui as seguintes funcionalidades: gráfico de funções, calculadora, solução algébrica de equações, além da possibilidade de compartilhar os resultados.

Após as etapas de preparação do docente para se trabalhar com os *tablets* em sala de aula, foram implementadas atividades sobre análise de geometria plana com alunos do segundo ano do ensino médio. Como um dos resultados, apresentados por Araujo Jr. e Dias (2012), destacamos que os estudantes compreendem a simplicidade e a praticidade da tecnologia móvel, por exemplo, *tablet*, e o seu potencial para interação e relacionamento com os pares.

Quadro 2- Síntese do quadro teórico

Pesquisadores	Sujeitos	Resultados da pesquisa
Arzarello et al (2014)	Estudantes ensino médio	- Domínio de manipulação e foco no raciocínio do aluno;
Scott e Carpendale (2006)	Área da saúde	- Tarefas adequadas as capacidades físicas dos dispositivos; - Olhar para as interações sociais no ambiente com mesas interativas, e como a relação entre o digital e o social se desenvolvem nesse meio.
Chinellato et al (2013)	Professores e futuros professores de matemática	- Discutir sobre o uso de tecnologias da informação e comunicação; - Motivação por meio do uso da tecnologia.
Oliveira et al (2012)	Graduandos	- Facilidade no acesso a informação; - Aulas mais dinâmicas.
Araujo e Dias (2012)	Professores e alunos do ensino médio	- Os alunos compreendem a praticidade da tecnologia móvel e o potencial para a interação e relacionamento com os pares.

Fonte: Elaboração da autora.

A partir desta breve revisão bibliográfica podemos observar que as pesquisas brasileiras aqui mencionadas estão centralizadas na implementação da tecnologia *touchscreen* como um elemento facilitador e motivador da aprendizagem. É importante ratificar que corroboramos com as pesquisas que se debruçam em olhar para como se aprende nesse ambiente e o que devemos repensar ou não quando utilizamos a tecnologia *touchscreen*, como podemos observar nos resultados apresentados por Arzarello e colaboradores (2014) e Scott e Carpendale (2006). Além desse olhar pedagógico, nossa pesquisa pretende trazer contribuições de cunho cognitivo sobre possibilidades de melhoria da produção de provas de matemática na Licenciatura.

Visando discutir um pouco mais as especificidades da tecnologia *touchscreen* ilustramos, na próxima seção, os estudos que nos embasam na compreensão da manipulação em tela e como a lente da cognição corporificada nos auxilia a pensar a aprendizagem e o ensino no ambiente mediado por esta tecnologia.

1.2 Manipulações *touchscreen* e cognição corporificada

Atualmente, ao abrir a página da *web* no *site YouTube*, não é difícil encontrar crianças muito pequenas, inclusive bebês, manipulando *smartphones, tablets* e outros equipamentos com destreza. Muitos ainda se espantam com tamanha agilidade dos pequenos, embora, se olharmos ao nosso redor, podemos observar como o uso de uma determinada tecnologia modifica nossos comportamentos e relacionamentos com o outro e com o mundo.

Quando interagimos com um objeto, seja este, uma pessoa, uma máquina ou um lugar, por exemplo, nosso cérebro mapeia nossas percepções produzindo imagens mentais (DAMÁSIO, 2011) que serão experienciadas por nós através de nossa consciência que, por sua vez, nos permite manipular essas imagens e aplicá-las (DAMÁSIO, 2011). Nesta perspectiva, as crianças de nossa geração atual interagem com determinados equipamentos tecnológicos com naturalidade, pois, estes instrumentos estão presentes em seu dia a dia, isto é, compõem suas experiências sociais.

Para Vigotski (2014), o homem possui a propriedade plástica que significa que o nosso cérebro conserva marcas de alterações que vivenciamos. Quando incorporamos uma determinada cultura, por exemplo, nosso cérebro irá conservar as características daquela transformação da experiência e reunir as marcas deixadas do que vivemos, facilitando uma futura reprodução. Contudo, o cérebro não apenas reproduz e conserva, ele é capaz de realizar combinações e reelaborar elementos da experiência vivida anteriormente, criando-se assim novas situações e até um novo comportamento (VIGOTSKI, 2014). A manipulação das crianças em *tablets* se constitui, por exemplo, uma reelaboração da experiência vivenciada.

Focalizando na tecnologia *touchscreen*, ao manipularmos uma tela sensível ao toque, nosso cérebro passa a construir imagens mentais dessa experiência que farão inclusive parte da consciência do nosso organismo, essas imagens são dotadas de significados e emoções que reconfiguram os processos cognitivos. Para Damásio (2012, p. 204):

> As representações que nosso cérebro cria para descrever uma situação e os movimentos formulados como resposta a essa situação dependem de interações mútuas cérebro-corpo. (...). Algumas dessas representações permanecem não conscientes, enquanto outras se tornam conscientes. Ao mesmo tempo, os sinais do cérebro continuam a fluir até o corpo, alguns de forma deliberada e outros de forma automática, a partir de zonas do cérebro cujas atividades nunca são representadas diretamente na consciência. Em resultado, o corpo volta a alterar-se em conformidade.

Quando interagimos com um objeto, nosso cérebro mapeia e constrói imagens desse objeto que podem ser evocadas de acordo com nossas experiências sociais e, a medida em que o organismo é modificado pelos estímulos do meio ambiente físico e sociocultural, isto é, das interações, reconfigura também a imagem que cria da representação do objeto (DAMÁSIO, 2012). Ainda em consonância com Damásio (2012), buscamos esclarecer que as imagens mentais são mapas instantâneos que o cérebro cria para tudo que de alguma forma entramos em contato seja um objeto, uma memória, um sentimento e o nosso próprio corpo. Texturas, sons, sabores e cheiros são alguns exemplos de imagens compreendidas como padrões mapeados por nós.

Compreendemos manipulações *touchscreen* como uma forma de expressão do desenvolvimento do pensamento matemático (BAIRRAL; ASSIS; SILVA; 2015). Uma vez que essas manipulações são vistas como ações humanas, contextualmente situadas e conscientes (BAIRRAL et al., 2015). Neste sentido, ratificamos que as tecnologias digitais recriam e modificam, por meio das interações, o modo como compartilhamos informações, nos relacionamos com o mundo e com o outro, assim como modificam a nossa subjetividade e os processos cognitivos que desenvolvemos em uma determinada aprendizagem.

Articulando com as ideias de Radford (2014), acrescentamos à discussão o conceito da cognição sensitiva trazida pelo autor que compreende a mente humana como uma característica da vida, do corpo material, caracterizada pela capacidade de responder sensações. De acordo com o pesquisador nossos sentidos individuais evoluem entrelaçados não somente com outros sentidos, mas também com a materialidade de objetos ao nosso redor. Esta materialidade dos objetos não está, contudo, reduzida a uma matéria inerte, mas sim, uma matéria dotada de sentido ou significado. Artefatos, na perspectiva de Radford (2014), são mais que mediadores, eles são uma parte constituintes do pensamento.

Quando um indivíduo manipula um dispositivo com tecnologia *touchscreen*, por exemplo, seu cérebro passa a construir imagens mentais dessa experiência que farão inclusive parte da consciência do organismo, essas imagens são dotadas de significados e emoções que reconfiguram os processos cognitivos. E o nosso corpo, por sua vez, constitui um meio pelo qual percebemos e nos expressamos com o outro e com o mundo, neste sentido, seguimos nossos estudos buscando compreender esta dimensão corporal no processo de aprendizagem. A seguir ilustraremos pesquisas que tratam dos gestos e da mediação semiótica corporificada, pois, a manipulação *touchscreen* é um gesto corporal que produzimos.

1.3 Movimento e gestos segundo Nilce F. Scheffer

Scheffer (2002), em seu trabalho com estudantes do Ensino Fundamental, estudou a relação entre os movimentos corporais que os alunos faziam utilizando sensores e as representações gráficas cartesianas desses movimentos. Para tal pesquisa, a autora abordou a concepção de movimento, de corpo e de expressão do corpo considerando fundamentalmente a obra de Merleau Ponty[1], que aborda estes aspectos sob a perspectiva da Fenomenologia da

---

[1] Maurice Merleau Ponty foi um filósofo francês que se dedicou ao estudo da fenomenologia. Segundo Merleau-Ponty, quando o ser humano se depara com algo que se apresenta diante de sua consciência, primeiro nota e percebe esse objeto em total harmonia com a sua forma, a partir de sua consciência perceptiva. Após

Percepção (SCHEFFER, 2002). Neste estudo Merleau Ponty (apud SCHEFFER, 2002), apresenta a sua visão da expressão corpo-próprio:

> (...) é o corpo com movimento intencional, é o corpo que percebe, que se presentifica na ação e na manifestação do percebido pela fala, é o corpo que se expõe, que é presença e se estende ao outro. (SCHEFFER, 2002, p.42)

Conforme Scheffer (2002), a concepção de movimento é tomada como o corpo sendo movimento, o corpo-próprio se move e está habitado no espaço e no tempo. Espaço e tempo são as experiências vividas pelo corpo-próprio e suas relações com o mundo. Assim, ainda em consonância com Scheffer (2002), o movimento é a maneira pela qual os indivíduos estabelecem suas relações com o mundo.

Ao discutir a linguagem do corpo e o movimento, Scheffer (2002) afirma que está considerando o gesto como um movimento corporal que expressa ideias e pensamento, juntamente com a fala. “A expressão do corpo-próprio manifesta a linguagem do corpo que se completa com a fala.” (SCHEFFER, 2002, p. 48). Assim, gestos possuem a intencionalidade comunicativa, na qual expressões corporais e fala estão interligados.

Nesse contexto, destaca-se a concepção de narrativas apresentada por Scheffer (2002), para a autora, a narrativa é uma manifestação oral de comunicação do corpo. “As narrativas expressam atitudes que possibilitam a palavra, expressam algo e descrevem uma ação, na medida em que apresentam uma sequência repleta de significados com ordem temporal.” (SCHEFFER, 2002, p. 13). A autora também afirma que as narrativas podem ser matemáticas quando alguém lhe atribui um significado matemático, é como um ato de significação manifestado com a fala ou com a escrita.

Para Merleau Ponty (apud SCHEFFER, 2002), os gestos não possuem um sentido dado, estes são compreendidos através da reciprocidade entre as intenções dos indivíduos envolvidos. Assim, como para Porto (1995, apud SCHEFFER, 2002), os gestos corporais, as posturas e as expressões faciais são criados, mantidos ou modificados, pois o homem é um ser social, que vive em um determinado contexto social. Desta forma, conclui-se que a significação dos gestos também depende do contexto em que as interações ocorrem. Ou seja, pode-se ter gestos parecidos com significados distintos, pois acontecem em espaços e tempos diferentes com intencionalidades que dependem dos envolvidos.

---

perceber o objeto, este entra em sua consciência e passa a ser um fenómeno. Para saber mais acesse: http://www.ufscar.br/~defmh/spqmh/bio_ponty.html.

1.4 Gestos sob a ótica de Autumn B. Hostetter e Martha W. Alibali

Na perspectiva da psicologia, Alibali e Hostetter (2008) falam dos gestos representacionais, ou seja, gestos que são realizados com o intuito de representar um determinado conteúdo do discurso, apontando um referente no ambiente físico (referente concreto ou não), descrição de um referente com o movimento com a forma das mãos, indicando a localização espacial de uma ideia abstrata. Gestos que não necessariamente objetivam transmitir um significado não são tratados pelos autores.

Em suma, a pesquisa de Alibali e Hostetter (2008), visa desenvolver um mecanismo que descreve como surgem os gestos. Eles não abordam a questão das funções dos gestos (por exemplo, na comunicação e na produção da fala). Assim, para Alibali e Hostetter (2008), os gestos surgem a partir de simulações motoras e perceptivas de um objeto ou símbolo, isto é, os gestos são como ações simuladas que representam os conteúdos do discurso. É uma forma de transparecer e materializar o pensamento no ato da comunicação para favorecer a interação com o mundo.

Cabe então ressaltar que, para Alibali e Hostetter (2008), a capacidade de perceber evolui a partir de uma necessidade de interagir com o mundo. "Percepção nos permite conhecer as características dos objetos em nosso meio ambiente e, portanto, permite guiar nossas ações de uma forma dirigida ao objetivo." (ALIBALI; HOSTETTER, 2008, p. 495). Outro termo que se destaca são as imagens mentais que, para os referidos pesquisadores, são uma analogia da representação da percepção do objeto ou do evento motor.

Alibali e Hostetter (2008) também ressaltam a concepção de cognição corporificada, para eles esta é ligada aos processos motores e perceptivos, ou seja, a capacidade de representar e manipular uma informação que não está presente perceptivamente, além de ser realizado por meio da ativação de processos sensório-motores. Portanto, Alibali e Hostetter (2008) acreditam, que pensar em gestos a partir de uma perspectiva corporificada é importante, pois a abordagem corporificada leva a reflexão sobre o surgimento dos gestos que representam pensamentos ativos do falante no momento da fala. Além disso, os gestos podem ser provas de que o pensamento se materializa e essas reivindicações são reforçadas por meio do relato, isto é, o discurso do falante.

1.5 Mediação semiótica corporificada: Galit Botzer e Michal Yerushalmy

Botzer e Yerushalmy (2008) desenvolvem um estudo que aborda relações entre ações corporais (mediadas por artefatos tecnológicos) e processos semióticos que estudantes experienciam enquanto produzem e interagem com movimentos de gráficos de duas dimensões no plano cartesiano. Neste trabalho os autores analisam uma dupla de estudantes do Ensino Médio. Eles propuseram aos alunos experiências envolvendo movimentos de gráficos em 2D a mão livre e movimentos sintetizados (feitos no computador).

Para essa análise, foram tomados como estudos a combinação de duas perspectivas: a abordagem corporificada à natureza do pensamento matemático e a noção de mediação semiótica vigotskiana (BOTZER; YERUSHALMY, 2008). A abordagem corporificada está relacionada aos nossos corpos e o sentido que eles desempenham, como um papel significativo no pensamento matemático. Já a noção vigotskiana de mediação semiótica, sustenta que o funcionamento cognitivo está intimamente ligado ao uso de sinais e ferramentas e é afetado por ele.

Ao falar sobre a natureza corporificada do pensamento matemático Botzer e Yerushalmy (2008) afirmam que é necessário levar em consideração a relação entre o corpo como um lugar para a constituição de significados matemáticos subjetivos do indivíduo, o sistema cultural historicamente constituído do significado transmitido pelos signos matemáticos e a existência das ações particulares do sujeito.

Neste caso no âmbito da ação corporificada a ideia é que atividades corporais podem envolver processos de conceitualização. Para exemplificar essa ideia, os autores destacam conceitos de cálculo como máximos e mínimos de uma função. Que muitas das vezes são abordados primeiramente seu aspecto gráfico associado a ideias de movimento através de gestos corporais para depois a introdução formal de definições e símbolos matemáticos.

A mediação semiótica de Vigotski é a mediação feita pelos signos e símbolos matemáticos - setas, gráficos, fórmulas etc (BOTZER; YERUSHALMY, 2008). Para os autores, esses signos são meios de comunicação e mediação de aprendizagem nas aulas tanto de matemática quanto da física. Além disso, Botzer e Yerushalmy (2008) afirmam que o processo de tomada de significado emoldurado por modos culturais de conhecimento incentiva e legitima uma forma particular de sinais e descarta outras. Entretanto, esses padrões de uso não são necessariamente claros aos olhos dos alunos. Portanto, para Botzer e

Yerushalmy (2008), o cenário mediado por tecnologia e atividades que envolvam mediações semióticas permite que os estudantes realizem gestos imaginando a função que os signos representam. Ou seja, os alunos refazem, através de gestos e simulações, as representações e os significados que os gráficos, as setas e outros signos representam em uma determinada atividade.

1.6 Reflexões sobre gestos, cognição e imagens mentais

A partir dos estudos elencados anteriormente, compreendemos que a manipulação *touchscreen* está ligada a concepção de cognição corporificada, pois envolve expressões corporais atreladas a narrativas matemáticas (SCHEFFER, 2002) na tentativa de explicar e representar elementos do discurso ou até mesmo signos elaborados no AGDcT (ALIBALI; HOSTETTER, 2008). Este processo de simulação motora de objetos - presentes ou não, abstratos ou concretos - auxilia na construção do significado matemático do aluno (BOTZER; YERUSHALMY, 2008), uma vez que, a percepção corporal foi primeiramente mapeada, a imagem mental é criada (DAMÁSIO, 2011) e, por fim, é externado de modo reelaborado. Corroborando com Vigotski (2014) a capacidade plástica de nosso cérebro nos permite reelaborarmos aquilo que já vivenciamos nos deixam marcas, por isto, dificilmente reproduzimos nossas experiências da mesma maneira. Apresentamos a seguir um quadro teórico que sintetiza algumas ideias discutidas anteriormente e que consideramos relevantes destacar.

Quadro 3 - Síntese: imagens mentais, gestos e manipulação *touchscreen*

Pesquisadores	Temática
Damásio (2011;2014)	Imagens mentais criadas a partir de percepções, estas imagens podem ser evocadas de acordo com nossas experiências sociais, e a medida em que o organismo é modificado pelos estímulos do meio ambiente físico e sociocultural, isto é, das interações, reconfigura também a imagem que cria da representação do objeto.
Vigotski (2014)	Cérebro possui propriedade plástica a qual a experiencia vivenciada deixa uma marca e não há somente reprodução e conservação ele é capaz de realizar combinações e reelaborar elementos da experiência vivida anteriormente.
Scheffer (2002)	Gestos são expressões corporais com significados que variam de acordo com o contexto social e de interação junto a fala.
Alibali e Hostetter (2008)	Gestos representacionais indicam elementos do discurso e surgem a partir de simulações motoras e perceptivas de um objeto ou símbolo.
Botzer e Yerushalmy, (2008)	O corpo é considerado como um lugar para a constituição de significados matemáticos subjetivos do indivíduo; o funcionamento cognitivo está intimamente ligado ao uso de sinais e ferramentas, e é afetado por ele.

Fonte: Elaboração da autora.

A partir do quadro anterior, concluímos que nossas vivencias, de modo geral, estão constantemente sendo mapeadas e evocadas por meio das imagens mentais (DAMÁSIO, 2011) de acordo com o contexto social que experienciamos. Por outro lado, externamos os significados das ações já vivenciadas por meio de expressões que podem incluir: fala, registros escritos ou pictóricos e, até mesmo, através de nossos gestos. Estes gestos como observamos anteriormente nos estudos aqui elencados, podem assumir uma natureza intencional, comunicativa e interativa.

Do ponto de vista pedagógico, o docente, ao se debruçar sobre os estudos apontados até aqui, poderá refletir sobre uma prática educativa que leve em consideração as diferentes formas de expressão dos discentes, além disso, poderá proporcionar propostas que contribuam para a constante análise de conceitos matemáticos, formulação de questionamentos e conjecturas. Pode contribuir para a formulação de um ambiente de aprendizagem que disponibilize experiências diversas favorecendo o processo de reelaboração de conceitos matemáticos. A dimensão dialógica também pode configurar um aspecto importante do processo de aprendizagem, visto que, a mediação entre os sujeitos (bem como pelos signos) é importante no processo de reelaboração das experiências, uma vez que o raciocínio também é afetado pelos artefatos mediadores (BOTZER; YERUSHALMY, 2008).

Em nossa pesquisa o uso de gestos, especificamente as manipulações em telas, assumem uma evidência do processo de aprendizagem no AGDcT. Neste sentindo, o presente referencial teórico torna-se importante para analisar o processo de elaboração de provas, pois nos ajuda a compreender que as experiências vivenciadas pelos graduandos atreladas à coordenação de diferentes recursos semióticos compõem o processo de aprendizagem do mesmo, uma vez que é por meio das vivencias que os indivíduos elaboram e reelaboram seus conhecimentos, sentimentos e relações com o outro. Diferentes signos são mapeados pelo cérebro e tornam-se imagens mentais dotadas de significados que podem ser evocados a medida em que confrontamos os sujeitos em um contexto que exija certos conhecimentos de modo a compor o processo de elaboração de argumentos, conjecturas, criação de hipóteses, verificação.

2 PROCESSOS DE PROVA EM AMBIENTES DE GEOMETRIA DINÂMICA

Neste capítulo refletiremos sobre o desenvolvimento de processos de prova em ambientes de geometria dinâmica (AGD). Elaboramos uma revisão de literatura com pesquisas que demonstram, em sua maioria, a concepção de demonstração matemática como meio de provar a veracidade absoluta de um resultado não tem sido a única preocupação dos pesquisadores da área. É importante destacar que matematicamente prova constitui uma justificativa ou fato que comprova a veracidade de um resultado e demonstração é um processo lógico, dedutivo e formal que justifica uma determinada prova, isto é, demonstração constitui uma sequência de axiomas. Contudo, utilizaremos os termos prova e demonstração como sinônimos.

A participação do aluno, a postura docente, bem como o planejamento e o desenho das tarefas propostas estão tomando cada vez mais espaço nos estudos que envolvem a temática da produção de provas na licenciatura. Destacaremos também a exploração das funções da demonstração (VILLIERS, 2001) e as diferentes representações que uma prova (CIRILLO; HERBST, 2010) pode assumir como elemento potencializador do raciocínio dedutivo na formação inicial de professores de matemática.

2.1 Provas matemáticas e o AGD

A produção de provas na formação inicial de matemática constitui, na maior parte dos casos, uma dificuldade para os futuros professores. Esse obstáculo, na visão de Cirillo e Herbst (2010), pode ser justificado pelos aspectos históricos e culturais que permeiam o ensino de matemática, ou seja, os autores afirmam que em geral tendemos a ensinar do mesmo modo como nos foi ensinado. Como um ciclo vicioso de um ensino pautado no rigor estático de verdades absolutas, não se questiona, não se produz provas diferentes dos clássicos formatos apresentados pelos livros textos, não se explora e não se investiga.

O uso de *softwares* matemáticos no ensino de demonstrações geométricas pode constituir um caminho em busca de uma aprendizagem significativa para nossos alunos. Destacamos alguns estudos que identificamos no decorrer de nossas pesquisas. É importante observar que nesta etapa de revisão literária não nos detemos a trabalhos que visassem apenas o uso de aparelhos que possuem a tecnologia *touchscreen*, pois encontramos poucos estudos nesta área com a temática demonstração ou processos de justificativas matemáticas.

Lasa e Wilhelmi (2013), por exemplo, em seu trabalho com professores da educação básica na Espanha, afirmam que a inserção do *software* de geometria dinâmica no ensino precisa ocorrer de modo gradativo, seguindo basicamente três momentos: exploração, ilustração e demonstração de uma propriedade geométrica. Essas etapas serão desenvolvidas pelo professor com o auxílio de uma lousa digital, de modo expositivo para os alunos. Os autores apontam que o uso do computador, por sua vez, pode ignorar as etapas de construção do raciocínio lógico que justifica a propriedade, pois o projeto de construção é determinado pela sequência de ferramentas do programa, neste caso, o GeoGebra.

Na ótica de Lasa e Wilhelmi (2013), as tarefas matemáticas destinadas a serem resolvidas por modelos dinâmicos devem contemplar duas fases. Na primeira etapa, um modelo ilustrativo dinâmico é usado para estudar os detalhes do problema. O processo indutivo realizado por modelos dinâmicos será essencial para analisar elementos individuais, mas a atividade em parte será inútil se nenhum esforço for feito para destacar a dualidade de classe elemento, ou seja, o modelo dinâmico tem que abrir um caminho de raciocínio para concluir formalmente a prova da propriedade. Em uma segunda fase, argumentos lógicos devem assumir um papel de liderança. Caso contrário, a propriedade "é vista", mas ainda não foi provada. Logo, observamos que a preocupação dos pesquisadores está centrada na apresentação final da demonstração e não no processo de sua descoberta e construção. Além disso, a participação passiva do aluno é um destaque neste trabalho, muda-se a tecnologia utilizada, mas não se altera a concepção de ensino.

Os pesquisadores Dalcín e Molfino (2012), em sua pesquisa na licenciatura em matemática e com o *software GeoGebra,* no Uruguai, propõem atividades que possibilitam a construção e a justificativa de propriedades de quadriláteros que emergem a partir da classificação desses polígonos realizada pelos próprios alunos. Nestas atividades os estudantes transitam entre o uso do computador, o papel e o lápis. Em sua pesquisa os autores apontam que inicialmente os quadriláteros notáveis são, em geral, os que mais se destacam nas respostas dos alunos, como se estes fossem os únicos tipos de polígonos com quatro lados.

Ao solicitarem que os estudantes definam alguns quadriláteros, emergem diversas respostas que implicam diferentes classes para um mesmo tipo de polígono. Além da dificuldade que os discentes apresentam em não discernir se uma definição é equivalente ou não a outra, assim como, ao desenharem tais quadriláteros, o modelo de figuras com lados paralelos as margens da folha são os mais frequentes (DALCÍN; MOLFINO, 2012). Com relação aos resultados deste trabalho, os pesquisadores destacam a originalidade nas classificações e justificativas que surgiram dos próprios estudantes no decorrer das implementações, os mesmos propõem classificações e definições diferentes inclusive das apresentadas nos livros textos. A construção dinâmica realizada no *GeoGebra* facilitou a observação das propriedades e a busca por argumentos dedutivos.

Em um contexto diferente do relatado anteriormente, Dalcín e Molfino (2012) apresentam o relato de um experimento realizado com docentes de matemática durante um curso de formação continuada o qual foram propostas atividades ora realizadas com o papel e o lápis ora com o ambiente dinâmico proporcionado pelo computador e o *software GeoGebra*. As atividades trabalhavam conceitos sobre polígonos regulares e a construção de mosaicos. Para os pesquisadores, essa experiência possibilitou aos professores, que em sua maioria demonstravam uma concepção da matemática como um produto acabado de resultados, axiomas, teoremas e algoritmos, vivenciassem a matemática como um processo de construção, do qual não se conhece todas as respostas de antemão e que é preciso formular conjecturas e buscar argumentos que as sustentem. O destaque para a complementação das tecnologias utilizadas nesse contexto constitui um dos resultados apontados pelos autores, pois estes afirmam que o uso do *software* auxiliou no avanço de algo difícil de se realizar com o papel, além disso, o professor se coloca no lugar do aluno enquanto aprendiz fazendo e criando matemática.

O estudo de Cirillo e Herbst (2010) aborda como problemas alternativos de demonstração geométrica e a diversidade nos modelos de provas podem auxiliar no ensino de demonstrações, especificamente em geometria. Mesmo esta pesquisa não estando diretamente ligada ao uso de AGD, observamos que as propostas de tarefas apresentadas constituem um campo fértil de exploração para o uso de *softwares* de geometria dinâmica. Baseado nos documentos padrões (*Reasoning & Proof and Geometry Standards*) produzido pelo *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM – Conselho Nacional de Educadores Matemáticos)*, os pesquisadores chamam a atenção para a ampliação do papel do aluno como um sujeito mais ativo nas demonstrações geométricas. A pesquisa de Cirillo e Herbst (2010) se divide em três tópicos: contexto histórico, aplicação dos problemas alternativos e as diferentes representações para demonstrações. Outro aspecto importante a se destacar é o fato de o trabalho dos autores ser direcionados a alunos do Ensino Médio.

Apresenta-se agora o trabalho de Bell e Villiers (2001) que elenca um estudo teórico no qual relaciona as diferentes funções que a demonstração matemática pode assumir e o uso de *software* de geometria dinâmica, especificamente o *Sketchpad*. As funções abordadas na pesquisa são: verificação, explicação, sistematização, descoberta, comunicação e desafio intelectual. Para Villiers (2001, p.31) “tradicionalmente a função da demonstração foi vista exclusivamente como dizendo respeito à verificação da correção das afirmações matemáticas.” Servindo apenas para remover dúvidas pessoais ou de cépticos. O trabalho aponta ainda o papel docente como um componente importante para desafiar do aluno a buscar, conjecturar, argumentar e explorar as diferentes funções que a demonstração matemática pode nos proporcionar.

Sinclair e Robutti (2013) apresentam um estudo teórico que relaciona duas áreas da educação matemática: o ensino e aprendizagem com o ambiente de geometria dinâmica e o ensino e aprendizagem de demonstrações matemáticas. Além de revisarem como esses temas estão sendo desenvolvidos ao longo das últimas décadas nas pesquisas acadêmicas, as autoras discutem a natureza epistemológica e cognitiva de algumas ferramentas dos AGD e suas relações com os processos de provas. Como um de seus resultados as pesquisadoras apontam que precisamos de novos modelos ou percursos de aprendizagem que possam dar conta do impacto da AGD no desenvolvimento do pensamento do aluno. Mais uma vez o papel docente é destacado como um elemento crucial neste contexto, pois o mesmo é responsável por enfatizar as relações entre os objetos, durante a tentativa de introduzir os alunos no mundo teórico da geometria. Para as autoras, é preciso aprofundar as investigações de como o professor pode subsidiar e lidar com as implicações cognitivas e epistemológicas das ferramentas nesse tipo de ambiente.

Ng e Sinclair (2015) relatam duas atividades que visam trabalhar com a ideia de cisalhamento de polígonos no AGD com toques em tela (AGDcT) com alunos do Ensino Médio. A partir do conceito de cisalhamento, as pesquisadoras almejam desviar a atenção dos alunos das fórmulas que os mesmos já memorizaram (nos anos anteriores de escolaridade) para observação e exploração da comparação e do raciocínio sobre as formas geométricas propostas. Os pesquisadores apontam estudos que revelam o conceito de área sendo tratado de forma resumida a exposição e memorização de fórmulas por parte dos professores. Em contrapartida a essa perspectiva, eles utilizam o *software Sketchpad Explorer* no dispositivo *iPad* no desenvolvimento das atividades propostas aos alunos.

O referencial teórico de Ng e Sinclair (2015) está pautado sob a perspectiva Vigostkiana, considerando que o processo de aprendizagem se desenvolve a medida em que o sujeito internaliza certos objetos de modo a produzir significados pessoais. Com relação aos resultados da pesquisa, os estudiosos apontam a mobilidade como um ponto positivo do uso do *iPad*, uma vez que facilitou o compartilhamento da tela além da circulação do aparelho pela sala entre os alunos. Produções de gestos, diagramas no papel e o próprio discurso dos alunos dão indícios da internalização dos artefatos semióticos construídos, explorados e manipulados na tela do dispositivo. A manipulação com mais de um toque na tela, nos casos estudados, foi pouco explorada, o lápis e o papel funcionaram como um suporte da resolução dos problemas propostos no momento inicial devido ao não conhecimento das ferramentas do *software*, o que foi se modificando a medida em que os alunos exploravam a atividade e se apropriaram do movimento de arrastar.

Segundo Healy e Hoyles (2001), *softwares* de geometria dinâmica são como micromundos que permitem aos usuários criarem, explorarem e manipularem objetos geométricos e suas relações a partir da constante interatividade. Nesta perspectiva, as autoras destacam a diferença entre um desenho e a construção de uma figura no AGD. O desenho é uma representação estática enquanto a figura no *software* envolve o usuário por meio de ferramentas que permitem manipular uma variedade de objetos geométricos preservando suas propriedades. A figura é uma representação interativa do campo teórico.

Relacionando AGD com o *Turtle Geometry* (*software* cuja a interação era mediada pela linguagem de programação e antecedeu os AGD), as pesquisadoras apontam uma preocupação recorrente na área da educação matemática no tocante ao processo de sistematização dos conceitos envolvidos em uma construção no AGD, pois no *Turtle* o usuário expressava suas estratégias de resolução por meio do texto da programação enquanto que no Cabri (*software* utilizado por Healy e Hoyles (2001)) temos o visual, mas não há uma linguagem formal escrita, para comunicar as ideias matemáticas ali envolvidas. Entretanto, as pesquisadoras ressaltam que, no decorrer da implementação das tarefas propostas aos alunos, eles explanavam suas estratégias e ideias para as construções geométricas realizadas no AGD. Nas atividades propostas na referente pesquisa, o desafio de desenvolver uma proposição e até mesmo uma prova matemática foi um dos objetivos principais.

Com relação aos resultados discutidos por Healy e Hoyles (2001), destacam-se o enriquecimento do processo de formulação de conjecturas e problematizações. As interações com o *software* forneceram, contudo, as autoras alertam para a dificuldade que os alunos têm em manusear ferramentas limitadas que o *software* disponibiliza. Uma possível alternativa para este problema seria a possibilidade de comunicar ao sistema novas entradas por meio da programação.

A partir do uso do *software Cabri- geometre* com alunos do ensino médio, orientada pela perspectiva teórica vigotskiana e com o objetivo de introduzir o pensamento teórico matemático em diferentes níveis de idade, Mariotti (2000), em seus estudos, se dedica a discutir sobre o processo de mediação semiótica relacionado ao surgimento do significado de prova.

O projeto de pesquisa de Mariotti (2000) ressalta a importância de a ferramenta arrastar que o *Cabri* disponibiliza, pois, uma vez que se a construção mantenha suas propriedades no movimento de arrasto, o resultado é verdadeiro, logo, a proposição pode ser provada a partir de uma prova geométrica, além disso, os procedimentos lógicos utilizados também precisam ser considerados e aceitos.

Para Mariotti (2000), os alunos possuem dificuldade em gerir a sistematização teórica do conhecimento indutivo, pois questionam o porquê de propriedades bem conhecidas devem ser postas a prova e longos argumentos são usados para apoiar a sua verdade, que é tão evidente. Esta dificuldade está atrelada ao ensino da geometria por meio de um conjunto de "definições" que descreve figuras geométricas e proposições indicando propriedades particulares que por sua vez a maioria dessas proposições tem um alto grau de evidência (MARIOTTI, 2000). Portanto, segundo Mariotti a abordagem dedutiva envolve dois aspectos entrelaçados: por um lado, a necessidade de justificação e, por outro lado, a ideia de um sistema teórico dentro do qual essa justificação pode se tornar uma prova.

Com relação aos resultados da pesquisa, Mariotti (2000) nos diz que a relação com o conhecimento geométrico é modificada através da mediação oferecida pelas peculiaridades do *software*. Esta modificação está estritamente relacionada com a passagem de uma geometria "intuitiva" como uma coleção de propriedades evidentes para uma geometria "dedutiva", como um sistema de relações entre afirmações, validado pela prova. Além disso, segundo Mariotti (2000, p. 49), o processo de internalização transforma os comandos disponíveis no menu de Cabri - sinais externos - em ferramentas psicológicas internas que controlam, organizam e dirigem o pensamento geométrico dos alunos, produzindo simultaneamente conjecturas e provas.

No decorrer desta revisão de literatura sobre os processos de prova em educação matemática, podemos observar que a concepção fechada de que as provas em matemática estão orientadas somente para a validação de determinado resultado tem se modificado nas pesquisas acadêmicas e, como os AGD, tem se constituído em um campo fértil para a exploração de diferentes aprendizagens.

2.2 A importância da argumentação e o uso de AGD

O trabalho realizado pelas pesquisadoras Pasin e Scheffer (2013) é direcionado para professores da formação inicial e continuada, oportunizando a eles a vivência da argumentação nas discussões matemáticas em oficinas com *softwares*. Para as pesquisadoras, é importante incentivar e valorizar a argumentação na discussão de conceitos matemáticos, pois o argumento permite ao aluno expressar seus pensamentos, aprender com os outros, criar e produzir em nível pessoal e coletivo. Estes últimos – pessoal e coletivo – as autoras afirmam que "(...) desenvolver a capacidade argumentativa faz parte da nossa vida, sendo fundamental, ainda, para as relações com o outro no plano da vida cotidiana e da vida profissional." (PASIN; SCHEFFER, 2013, p. 11). Ou seja, a argumentação é mais do que apenas se expressar, é preciso ter consciência do que se está inserido, participar e decidir tanto no ambiente escolar quanto na vida cotidiana e no meio social.

De acordo com Pasin e Scheffer (2013), é papel do professor valorizar e incentivar a argumentação através de discussões durante as aulas. Entretanto, é preciso que o docente tenha consciência da importância do argumento dos alunos. Deve-se valorizar a participação dos mesmos sem impor o conhecimento do professor, como se este fosse único e sempre correto. Para Pasin e Scheffer (2013), quando o professor impõe seus argumentos, ocorre a reprodução do que está sendo posto, isto é, o docente não dá espaço para os discentes exercitarem a argumentação que vem de dúvidas e questionamentos. Neste sentido, destacamos:

> Assim, a criação e a criatividade restringem-se e prevalece o espaço da repetição, da cópia e da reprodução. Por tanto, a capacidade de conhecer advém da capacidade de argumentar e, quando é restrito o espaço para questionar e argumentar, também é restrito o produto desse processo, ou seja, a aprendizagem. (PASIN; SCHEFFER, 2013, p.12.)

Portanto, corroborando com a afirmação anterior da qual pode-se concluir que é preciso promover em sala de aula um ambiente de igualdade. Onde professores e alunos dialoguem sem que haja a imposição de argumentos. Para que desta forma o educando também se torne responsável por sua aprendizagem.

Pasin e Scheffer (2013) destacam também que existem diversas formas de manifestação da argumentação que podem ocorrer através de registros de representação, forma de figuras, palavras e esquemas, por exemplo. Na educação matemática, essas manifestações aparecem através da representação semiótica e, desse modo, as variedades de representações constituem um papel importante na aprendizagem matemática, pois, exigem compreensão e coordenação dos diferentes registros (PASIN; SCHEFFER, 2013). Contudo, as autoras suscitam que raramente os professores levam isto em consideração, gerando dificuldades na aprendizagem dos alunos.

Desta forma, as autoras acreditam que quando o professor experimenta na prática, o mesmo compreende a importância de incentivar e valorizar o diálogo em sala de aula. Isto também vale para o uso das tecnologias, pois o docente precisa vivenciar o uso da tecnologia durante a construção do seu próprio conhecimento para compreender o potencial pedagógico do recurso (PASIN; SCHEFFER, 2013). Em suma, para Pasin e Scheffer (2013) um ambiente que valoriza e incentiva a argumentação vinculada às tecnologias da informação e comunicação conduz à experimentação, elaboração de ideias e conjecturas, aspectos fundamentais na construção de significados e nos processos de prova.

O ambiente de aprendizagem mediado por tecnologia digital promove a experimentação, favorecendo o processo de descoberta, a formulação de ideias e conjecturas que contribuem para a construção de significados matemáticos (PASIN; SCHEFFER, 2013). Em nossa pesquisa, temos observado que, no AGDcT, as manipulações *touchscreen*, a argumentação oral e escrita, os gestos e as construções dinâmicas contribuem para a ampliação dos recursos semióticos e a articulação desses diferentes recursos no processo de aprendizagem por parte do discente.

Na seção seguinte, ilustraremos um pouco mais sobre as funções da demonstração, as distintas formas de se provar uma proposição e a concepção de processos de elaboração de prova que iremos adotar na presente pesquisa.

2.3 Processos de elaboração de prova: funções e representações da demonstração matemática

Villiers (2001) salienta a importância da compreensão da função da demonstração, isto é, o seu significado, o seu objetivo e a sua utilidade para além da comprovação da veracidade de um resultado. Nesta perspectiva, ratificamos de acordo com Hershkowitz e colaboradores (1994) que provas e demonstrações matemáticas são compreendidas como um argumento dedutivo formal e processo de prova, no trabalho de Hershkowitz e colaboradores, como os vários tipos de justificativas para construir uma prova, neste caso na ótica da cognição.

Podemos observar uma concepção próxima do conceito destacado anteriormente no trabalho de Sinclair e Robutti (2013), para essas autoras o processo de prova em AGD possui duas fases que o compõe: a primeira é o momento de exploração, formulação de conjecturas e emergência de propriedades; a segunda está relacionada a ordenação da sequência lógica das propriedades emergentes na sistematização e formalização da demonstração matemática.

Relacionando a concepção de Sinclair e Robutti (2013) com o AGDcT destacamos Bairral, Assis e Silva (2015) que apresentam uma síntese esquemática da manipulação no âmbito da conjectura em processo de prova. Para estes autores, a manipulação *touchscreen* neste momento específico da elaboração de prova contribui para o refinamento e análise detalhada das hipóteses elencadas pelos alunos. "Nesse momento manipulativo é como se o usuário parasse para selecionar e organizar suas ideias de modo a estruturar mais uma linha argumentativa" (BAIRRAL; ASSIS; SILVA, 2015, p.107). Vejamos a figura a seguir que resume as ideias apresentadas pelos autores.

Figura 1 - Manipulação de aproximar no desenvolvimento do processo de prova
Fonte: BAIRRAL; ASSIS; SILVA 2015, p. 107

Consideraremos na presente pesquisa uma reformulação das ideias anteriores reconhecendo o processo de elaboração de prova como os diferentes argumentos, conjecturas, explorações, diagramas dinâmicos, gestos, linguagem oral e produção escrita de raciocínios dedutivos formais ou não, veja a Figura 1. Estamos nos baseando em estudos que apontam para a participação efetiva do aluno no processo de construção de seu conhecimento, seja por meio do reconhecimento das diferentes funções da demonstração ou pela oportunidade de vivenciar outros modos de realizar uma prova. Como já havíamos mencionado, segundo Cirillo e Herbst (2010), não podemos continuar a perpetuar um paradigma de ensino de séculos passados, pois a educação precisa acompanhar as demandas contemporâneas da sociedade, visto que também formamos para ela.

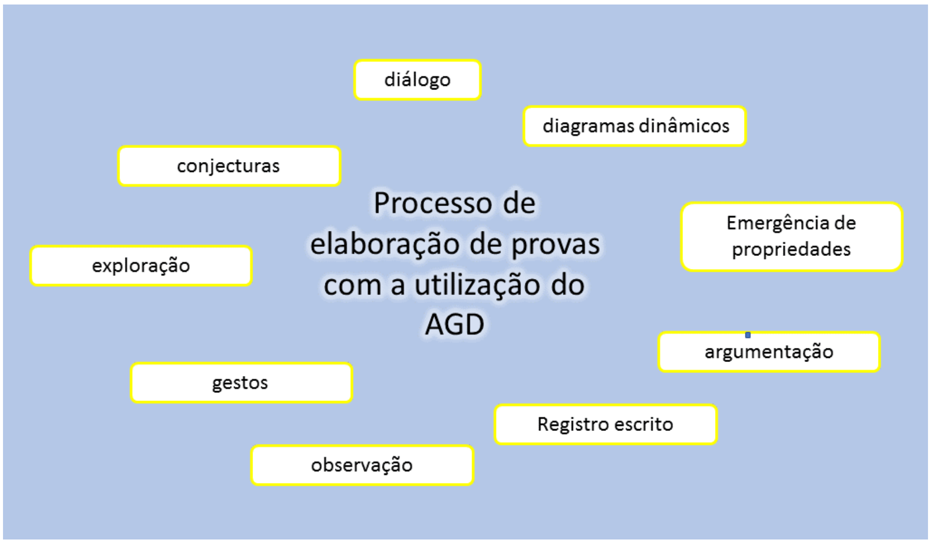


Figura 2 - Elementos que podem compor o processo de elaboração de provas no AGD
Fonte: Elaboração da autora.

Neste contexto, nos propomos discutir e apresentar atividades que permitam nossos discentes explorarem as mais diversas formas de expressão do seu raciocínio. Corroborando com Cirillo e Herbst (2010), entendemos que tarefas que apresentem diferentes formas de se desenvolver uma prova matemática constitui uma atividade distinta das tradicionais que permite ao aluno conjecturar, criar, analisar e desenvolver o seu raciocínio matemático. Além disso, os referidos pesquisadores contribuem para nossa discussão ao apresentarem uma breve discussão sobre o contexto histórico do papel do aluno no processo de ensino e aprendizagem de provas matemáticas.

Antes do século XX, os alunos demonstravam proposições que tinham sido dadas como registros conceituais e de âmbito mais geral (CIRILLO; HERBEST, 2010). Durante o século XX, o trabalho dos alunos foi se estreitando e diminuindo substancialmente, uma vez que começou a prevalecer a padronização de um modelo formal de demonstração em duas colunas e os alunos deveriam simplesmente construir afirmações e razões que provem uma determinada conclusão. Assim, refletindo sobre a expansão do papel do aluno no processo das demonstrações, Cirillo e Herbest (2010) questionam-se: Quais tipos de problemas poderiam ser colocados para aumentar a participação dos alunos nesta tarefa? Que tipos de suportes poderiam ser oferecidos aos alunos nesta tarefa?

Com relação à segunda questão levantada pelos autores, Cirillo e Herbst (2010) estabelecem quatro tipos de demonstrações que eles chamam de representação de prova, são elas: *árvore, fluxo, duas colunas e parágrafo.* A representação por prova árvore é um esboço da demonstração, como se fosse um diagrama, onde o aluno pode se questionar sobre o que ele precisa para demonstrar uma determinada proposição (CIRILLO; HERBST, 2010). O modelo prova fluxo utiliza afirmações ligadas por setas como se fossem duas colunas, uma desvantagem desta demonstração é que não exige dos alunos justificativas para suas afirmações (CIRILLO; HERBST, 2010).

A representação por prova duas colunas é a mais rigorosa dos modelos de demonstrações, organiza-se em duas colunas numeradas onde o lado esquerdo são colocadas as razões (ou explicações) para cada afirmação a direita, pode ser um pouco intimidadora para os alunos (CIRILLO; HERBST, 2010). Já a representação por prova parágrafo é descrita por argumentos lógicos através de sentenças, é menos intimidadora aos alunos, um pouco menos estruturada, porém mais sensata para demonstrações por absurdo (CIRILLO; HERBST, 2010).

Em suma os autores (CIRILLO; HERBST, 2010), acreditam que é importante ampliar o papel do aluno nas demonstrações matemáticas, assim como oferecer-lhes variedades nos tipos de demonstrações, pois impor uma única e exclusiva maneira de provar obstrui a criatividade e impede as chances bem-sucedidas dos alunos entenderem as consequências dos seus argumentos matemáticos. Relacionando os estudos dos pesquisadores Cirillo e Herbst com o trabalho desenvolvido por Villiers (2001), destacamos o desenho das diferentes representações de prova como uma forma de explorar as funções da demonstração matemática, especificamente no uso de AGD.

Vejamos a seguir um breve detalhamento das funções verificação, explicação, sistematização, descoberta, comunicação e desafio intelectual segundo Villiers (2001).

2.2.1 Funções da demonstração segundo Villiers

A demonstração como processo de verificação ou convencimento diz respeito à verdade da afirmação. Para Villiers (2001), a maioria dos professores de matemática parece acreditar que a demonstração fornece certeza absoluta e é a única forma de validar uma conjectura. Entretanto, a demonstração não é um requisito necessário para a convicção. Na verdade, a convicção é um pré-requisito para se procurar uma demonstração, pois ninguém ficaria horas ou meses procurando por uma prova de algo que não se tem certeza (VILLIERS, 2001).

Desta forma, o autor (VILLIERS, 2001) não pretende ignorar a importância da demonstração como um meio indispensável de verificação, mas sim dar a mesma uma perspectiva mais apropriada, que se opõe a uma idealização distorcida da demonstração como único e absoluto meio de verificação.

A demonstração como processo de explicação é quando a mesma fornece explicações quanto ao fato de ser verdadeira. Apesar de inúmeras verificações que os professores podem fazer de um resultado a ponto de torna a confiança cada vez mais alta, estes processos não fornecem em geral uma explicação satisfatória da razão pela qual pode ser verdadeira (VILLIERS, 2001). É neste momento em que a demonstração assume o papel de explicar generalizando um determinado resultado.

Uma a demonstração pode ser vista como um processo de descoberta ou invenção de novos resultados. Conforme Villiers (2001), é bastante improvável que novos resultados tenham sidos descobertos por mera intuição ou por meio de métodos quase empíricos. O pesquisador salienta, que existem exemplos na história da matemática de resultados descobertos a partir de processos puramente dedutivos. Ou seja, mesmo em contextos formais de axiomatização ou criação de definições, por exemplo, a demonstração pode levar a descoberta de novos resultados (VILLIERS, 2001).

Nesta perspectiva, o autor ainda destaca:

> Para o matemático profissional, a demonstração não é apenas um meio de verificação de um resultado já descoberto, mas também muitas vezes um processo de explorar, analisar, descobrir e inventar novos resultados (...). (VILLIERS, 2001, p. 33)

A função da demonstração como processo de descoberta também pode ser explorada em sala de aula. No exemplo utilizado pelo autor do papagaio feito em um *software* matemático, mostra como pode-se conjecturar a respeito de um objeto dado analisando dedutivamente as suas respectivas propriedades.

Com relação a demonstração como processo de sistematização, afirmamos que esta refere-se à organização dos vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas. Villiers (2001, p.34) afirma: “A demonstração é assim uma ferramenta indispensável para transformar num sistema dedutivo de axiomas, definições e teoremas, um conjunto de resultados conhecidos.” É importante destacar que para o pesquisador o objetivo principal deste processo de sistematização não é verificar a veracidade do resultado, mas sim organizar afirmações isoladas e não relacionadas logicamente em um todo unificado e coerente.

A função da demonstração como meio de comunicação é a transmissão do conhecimento matemático. “A demonstração é um modo único de comunicar resultados matemáticos entre matemáticos profissionais, entre professores e alunos, e entre os próprios estudantes.” (VILLIERS, 2001, p. 35). Neste sentido, a demonstração parece assumir a forma de um discurso que envolve interação humana baseada em significados partilhados, um modo de reconhecer o argumento matemático. Portanto, a função da demonstração passa ser o processo social de comunicar e disseminar o conhecimento matemático na sociedade.

A demonstração como desafio intelectual, refere-se à realização pessoal/gratificação resultantes da construção de uma demonstração. Nesta perspectiva, Villiers (2001, p. 35) afirma:

> Fazer demonstrações pode também ser comparado com o desafio físico de completar uma maratona ou o triatlo, e a satisfação que daí resulta. Neste sentido, a demonstração cumpre uma função gratificante e de realização própria.

Portanto, para o pesquisador este desafio é o que fornece energia intelectual aos matemáticos. É como se não fosse apenas a verdade do resultado que está em dúvida, mas sim em como serão capazes de demonstrá-las (VILLIERS, 2001). Em suma, as funções das demonstrações aqui apresentadas, segundo o trabalho de Villiers (2001), estão todas misturadas, apesar de suas características próprias. Às vezes, uma função sobressai mais que a outra ou se quer estão presentes. O estudioso também salienta que estas funções não são únicas e podem existir outras que não foram aqui mencionadas.

Sob a perspectiva prática da sala de aula, de acordo com Villiers (2001), o uso de *softwares* como *Sketchpad* pode fazer com que os alunos se sintam desmotivados para realizar uma demonstração, após eles terem investigado com cuidado uma conjectura geométrica por meio de uma variação contínua, neste tipo de ambiente. Entretanto, ao questionar os estudantes sobre porque razão pensam que um resultado específico é verdadeiro, isto é, ao desafiá-los a tentar explicar o resultado, os alunos percebem que a verificação indutiva apenas confirma o resultado, não dá nenhuma percepção satisfatória. Ou seja, não fornece uma compreensão sobre a forma como a conjectura é consequência de outros resultados conhecidos (VILLIERS, 2001). Neste sentido, discordamos com o autor devido a supervalorização da demonstração escrita, uma vez que o AGD oferece um suporte a construção do aluno, pois é pautado na teoria da geometria euclidiana. Corroborando com Mariotti (2000), a construção realizada no AGD, quando não se deforma e é realizada por meio dos princípios teóricos, precisa ser considerada como uma demonstração geométrica.

Para Villiers (2001), é preciso iniciar os alunos no ensino de demonstrações seguindo uma sequência não linear das funções da demonstração; acompanhando uma espécie de espiral, na qual as funções já introduzidas são retomadas e ampliadas, deve-se levar o aluno a explicar o que está sendo posto, descobrir o resultado a ser demonstrado, verificar sua veracidade, se sentir desafiado intelectualmente e, por fim, sistematizar suas conjecturas. Esta sequência proposta por Villiers se assemelha as fases do processo de prova apontados por Sinclair e Robutti (2013) que se move no sentido da exploração e da conjectura em direção a sistematização e organização dedutivo formal.

Apesar das fases do processo de prova no estudo de Sinclair e Robutti (2013) aparentaram um modo linearizado, as autoras esclarecem que movimentos de vai e volta entre o campo espacial gráfico e o teórico também compõem o processo de prova. Nesta perspectiva, esses movimentos contribuem para um cenário em que não se privilegia um único campo (espacial e teórico), ou coloca um em função do outro, mas, ao contrário, estimula o discente a coordenar diferentes recursos semióticos.

Ao focalizar os conceitos campo espacial gráfico e campo teórico Sinclair e Robutti (2013) esclarecem que: O campo espacial gráfico consiste no espaço geométrico e as possibilidades de exploração dos diagramas dinâmicos no software enquanto o campo teórico equivale as teorias matemáticas aplicáveis no espaço geométrico, ou seja, as propriedades e proposições que podem emergir durante o processo de prova. Nesta perspectiva é importante ressaltar que o diagrama dinâmico e o movimento de arrasto são apoios que subsidiam a transição do aluno entre o campo espacial e o teórico. De acordo com Sinclair e Robutti (2013, p. 576), os diagramas dinâmicos podem afetar fortemente o processo de provas, pois, mediam quais tipos de conjecturas serão feitas (primeira fase) e quais tipos de propriedades serão identificadas e organizadas (segunda fase). Ainda em consonância com as autoras citadas destacamos:

> (...) o diagrama construído em um AGD e os esquemas de uso ativados sobre ele pelos alunos podem ser considerados um mediador efetivo entre a primeira e a segunda fases, proporcionando assim continuidade - apesar (apesar da descontinuidade) da descontinuidade epistemológica - entre uma conjectura (afirmação hipotética) e a correspondente prova (sequência lógica dedutiva de enunciados). A internalização dos esquemas de uso do artefato e sua transformação em instrumento os auxilia na construção da prova como produto final. (SINCLAIR; ROBUTTI, 2013, p.576)

Em nossa pesquisa não defenderemos quais fases ou funções deverão ser adotadas no processo de ensino e aprendizagem de elaboração de prova com o uso de AGD, mas ratificamos a importância da presença de elementos essenciais a partir dos estudos elencados nesse capítulo, tais como:

- Proporcionar ao discente oportunidade de explorar, conjecturar, argumentar e criar de forma autêntica e original, valorizando sua produção por meio das mais diversas linguagens;
- O papel docente como agente questionador que promove atividades abertas de acordo com a dimensão tecnológica.
- Tarefas específicas para o AGDcT, isto é, inspirados no trabalho de Cirillo e Herbst (2011), proporemos atividades com abordagens que visem o uso do AGDcT de modo a potencializar o processo argumentativo e promover a vivência por parte dos graduandos de algumas funções da demonstração.

A seguir ilustraremos como nossa pesquisa foi organizada metodologicamente e posteriormente ilustraremos algumas análises que elucidam como o presente referencial se articula ao propósito da pesquisa.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Elucidar nossos passos é um dos objetivos principais desse capítulo. Discorreremos sobre os sujeitos de nossa pesquisa, as tarefas realizadas, assim como os *softwares* utilizados, o processo cíclico em que se desenvolveu a elaboração das atividades e as intervenções e revisões da pesquisa.

3.1 Visão geral: O contexto, a pesquisa e suas fases

O trabalho de campo foi desenvolvido com licenciandos do curso de matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), durante o segundo semestre de 2015. Ao todo foram 14 graduandos com idades variando entre 21 e 31 anos. O experimento ocorreu dentro de uma disciplina referente ao oitavo período do curso. Os graduandos participantes já haviam cursado as disciplinas de Tópicos de Geometria Espacial e Geometria Euclidiana Plana, em períodos anteriores.

A disciplina intitulada de Ensino de Matemática em que elaboramos e implementamos a intervenção pedagógica tem como um de seus objetivos promover aos licenciandos experiências de práticas de ensino que os levem a refletir sua futura docência e o aprendizado com tecnologias variadas. Neste sentido, elaboramos uma sequência de atividades relacionadas ao tema quadriláteros - as quais confrontávamos os licenciandos com algumas tarefas elaboradas a partir das respostas deles mesmos - para serem desenvolvidas com seus *smartphones* ou *tablets* (estes últimos disponibilizados pelo grupo de pesquisa).

A investigação possui uma natureza intervencionista, cujo foco principal é a aprendizagem de licenciandos em AGDcT que é analisada a partir dos ciclos de intervenção e revisão que realizamos por meio da análise das respostas coletadas e, posteriormente, são transformadas em novas atividades (Respostas – Atividades - Respostas), veja a figura 4. É importante ressaltar que, na figura 2, consideramos como um de nossos objetivos a proposição de uma sequência didática criada a partir da reformulação e análise das fases de implementação, não sendo aplicada com os licenciandos. Quanto aos instrumentos de coleta de dados utilizamos os registros escritos dos licenciandos (diários de aula e portfólios eletrônicos), registros dos pesquisadores, vídeos, fotos e respostas dos alunos.

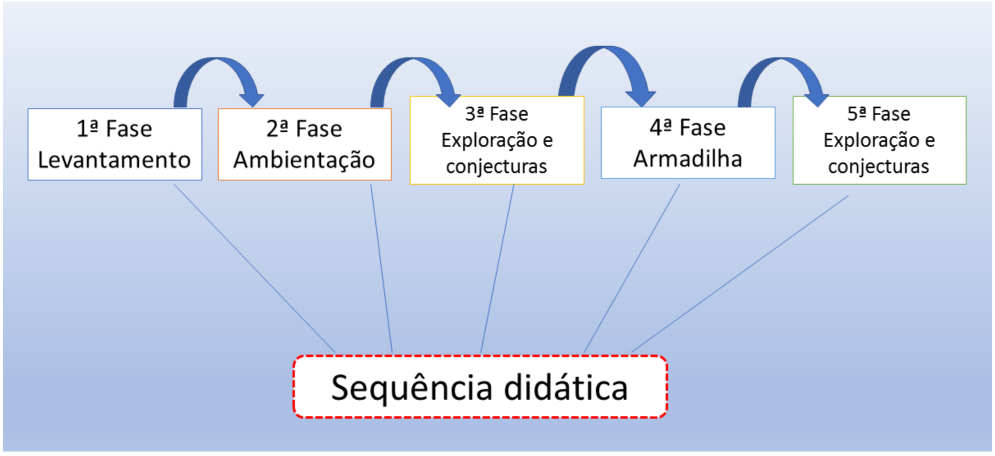


Figura 3 - Ciclo de intervenção e revisão
Fonte: Elaboração da autora.

Ao todo foram elaboradas e implementadas 14 atividades desenvolvidas em um total de 5 fases. Sintetizamos no quadro a seguir o período de implementação das atividades com o objetivo de ilustrar o tempo que cada atividade tomou, a quantidade de tarefas em cada fase, resumimos desta forma a organização do experimento de ensino que realizamos bem como dispomos uma visão geral de como ocorreram os ciclos de intervenção. Caso um docente venha se inspirar em nossa pesquisa, observará nossos passos considerando elementos como o tempo e a organização dos alunos para o seu planejamento.

Quadro 4 - Síntese das fases de implementação

Fases de implementação		**Quantidade de tarefas**	**Duração aproximada**	**Data**
1ª Fase Levantamento	Conhecimentos prévios	4 (individual)	20 min.	26/08/15
2ª Fase Ambientação	Conhecendo os softwares FreeGeo e Sketchometry	3 (individual)	30 min.	07/10/15
3ª Fase Exploração e Conjecturas	Repensando alguns conceitos e explorando quadriláteros	2 (individual)	30 – 40 min.	14/10/15
4ª Fase Armadilha	A armadilha pedagógica	1 (individual)	20 min.	20/10/15
5ª Fase Exploração e Conjecturas	Provas, argumentos e conjecturas	5 (sendo uma por grupo – total de 4 grupos e uma comum a todos os grupos)	1h e 30 min.	02/12/15

Fonte: Elaboração da autora.

É importante ressaltar que as implementações das atividades ocorreram em concomitância com leituras previamente planejadas da própria disciplina. O que contribui para o enriquecimento do processo de ensino e aprendizagem, uma vez que os discentes puderam observar estudos sobre o uso da tecnologia em sala de aula e vivenciar na prática o que liam nessas teorias. Destacamos a seguir as leituras realizadas durante a disciplina.

Quadro 5 - Leituras realizadas durante a disciplina

Textos	Data
Costa, R. C.; Santos, R. T.; Bairral, M. A. (2010). *Portfólios eletrônicos e avaliação em matemática*. Anais … **X ENEM.**	02/09/2015
Herskowitz, H. et al. **Boletim Gepem 32** – Aspectos psicológicos da aprendizagem da geometria.	07/10/2015
Mercado, L. P. L. (2008) - integração de mídias nos espaços de aprendizagem. **Em Aberto**.	21/10/2015
SANTOS, R. T.; BAIRRAL, M. A. (2015). Aspectos emergentes na construção do conceito de polígono por alunos do 6º ano de uma escola pública. **Vidya**.	04/11/2015

Fonte: Elaboração da autora.

No desenrolar de nossa implementação utilizamos um total de três *softwares* de geometria dinâmica no ambiente com *touchscreen*, foram eles: o *FreeGeo* (FG), o *Sketchometry* (SK) e o *GeoGebra* (GEO). Estes últimos SK e GEO foram utilizados com menos frequência, pois o SK foi uma alternativa utilizada por um único discente que possuía um iPhone (porque o FG não foi desenvolvido para o iOs), já o GEO foi utilizado na 5ª fase no *tablet* em um *applet* criado especificamente para uma de nossas atividades. Vejamos a seguir uma breve descrição de cada *software* selecionado.

3.2 *Softwares* utilizados

O *FreeGeo* é um *software* educacional orientado para o ensino de matemática. Este aplicativo possui uma versão gratuita e apresenta uma multiplataforma desenvolvida para o sistema *Android*. Permite que os usuários trabalhem conceitos de geometria, álgebra, estatística e análise. O FG compreende entradas de múltiplos toques, ou seja, é possível criar construções geométricas e movê-las ou girá-las com mais de um dedo simultaneamente. A ferramenta *freehand mode* (mão livre), é um diferencial que temos notado em alguns dos aplicativos desta natureza, consiste em identificar determinados *inputs* (entradas) inseridos na tela e responder com um objeto geométrico específico para aquela entrada, ou seja, se desenhamos um círculo com a ponta de nosso dedo na tela o dispositivo nos fornece uma circunferência.

Este aplicativo foi desenvolvido por Lennart Julian Kleinwort, um jovem estudante do Friedrich-Koenig-Gyumnasium, de Wutzburg, Alemanha. E atualmente está na versão 1.8.3 e está disponível para download no *Play Store* ou no *Google Play* por meio do link: https://play. google.com/store/apps/details?id=org.freegeof&hl=pt_BR.

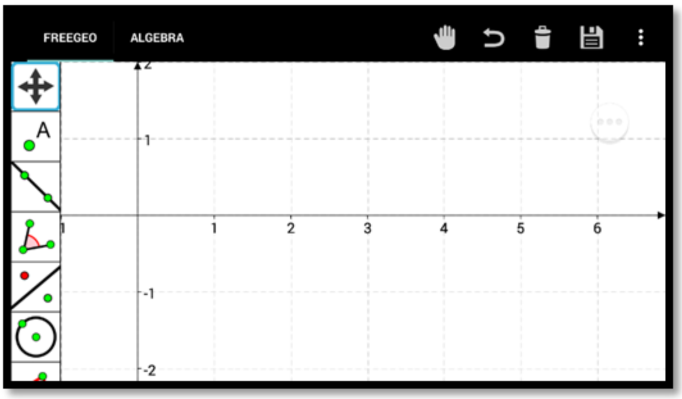


Figura 4 - Print screen da tela inicial do FG
Fonte: elaboração da autora.

O *Sketchometry* é um *software* matemático dinâmico e gratuito desenvolvido para trabalhar especificamente com geometria plana e construção de gráficos de funções. O mesmo pode ser utilizado tanto de modo *online* (na *internet*) ou *off-line,* uma vez realizado o *download*. Atualmente o programa está na versão 1.2.2. O SK foi criado por Alfred Wassermann pesquisador da Universidade de Bayreuth. Por ser implementado em *HTML5*, é possível utilizar o dispositivo em diversos equipamentos como celulares com sistema *android*, *iPads*, *iPhones, tablets android* e computadores. Entretanto, para a boa leitura do programa é necessário que os celulares e os *tablets*, por exemplo, possuam *android* versão superior a quatro (+4).

Este aplicativo possui algumas diferenças com relação aos demais, a mais evidente é o tipo de entrada que o mesmo precisa reconhecer na tela. Isto é, a maior parte dos aplicativos desta natureza reconhecem entradas a partir de um único toque em determinadas ferramentas, enquanto que, no SK, a maioria de suas funções necessitam de movimentos específicos para responder, assemelha-se a ferramenta *Free hand (mão livre)* do FG, entretanto, no FG, a ferramenta mão livre quando acionada constrói polígonos, segmentos de reta, semicírculos (os movimentos na tela não precisam ser previamente conhecidos pelo usuário), já o SK utiliza-se de movimentos distintos para a construção de diversos objetos matemáticos como, por exemplo, a bissetriz de um ângulo interno, ou retas paralelas veja a seguir nas figuras abaixo exemplos desses movimentos. Para conhecer mais sobre o aplicativo basta acessar o site: http://sketchometry.org/en/index.html.

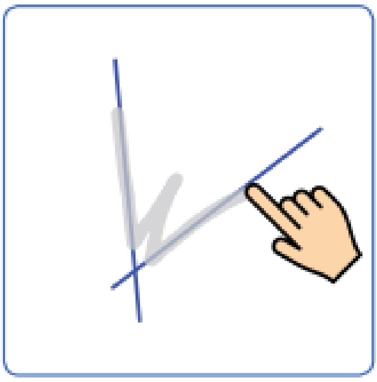


Figura 5 - Movimento em traço cinza para construir a bissetriz
Fonte: Printscreen do manual de gestos do SK disponivel em: https://sketchometry.org/en/download/gesture-overview.pdf

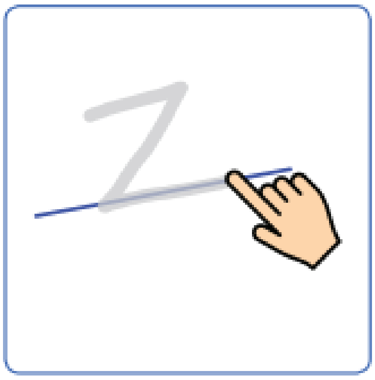


Figura 6 - Movimento em traço cinza para construir retas paralelas
Fonte: Printscreen do manual de gestos do SK disponivel em: https://sketchometry.org/en/download/gesture-overview.pdf

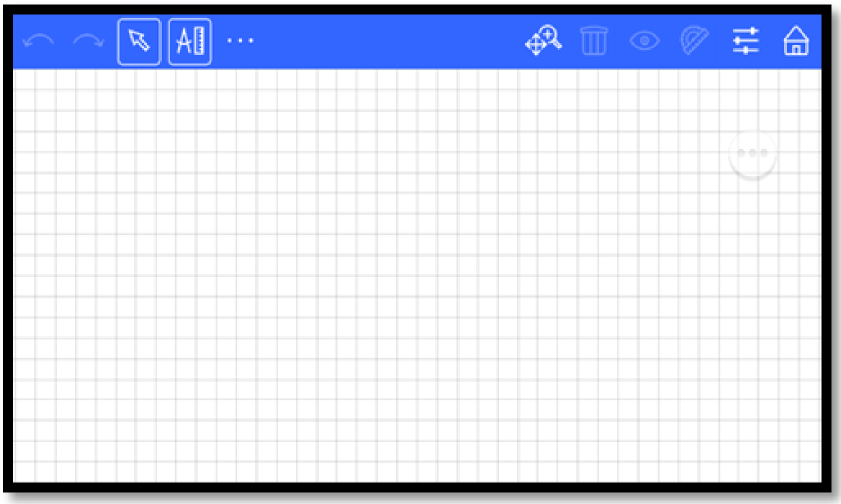


Figura 7 - Print screen da tela inicial do SK
Fonte: Elaboração da autora.

O GeoGebra é um *software* gratuito que possui uma multi-plataforma de matemática dinâmica que pode contemplar todos os níveis de ensino e agrega a geometria plana e espacial (quando utilizado no computador), álgebra, tabelas, gráficos, estatísticas e cálculo em um único ambiente. Foi desenvolvido por Markus Hohenwarter em 2001, na Universidade Salzburg. Atualmente é possível obter o aplicativo para *smartphones* com versão superior a 4.0. A última atualização do GEO foi realizada em maio de 2016.

O aplicativo é integrado ao GeoGebra tube, uma página de pesquisa sobre materiais e tutoriais do programa disponível na sua barra de ferramenta. Também possui a barra de entrada (bar input) para adição de funções e coordenadas assim como no GEO para computadores. Um destaque que podemos perceber é a ferramenta que permite o desenho livre sem identificar o movimento na tela como uma entrada específica e a ferramenta de construção de alguns polígonos por meio de toques específicos na tela, também muito semelhante ao *free hand* do FG. Ainda não é possível realizar construções em 3D na versão para smartphones. Podemos encontrar mais informações sobre o aplicativo na página: http://www.geogebra.org/.

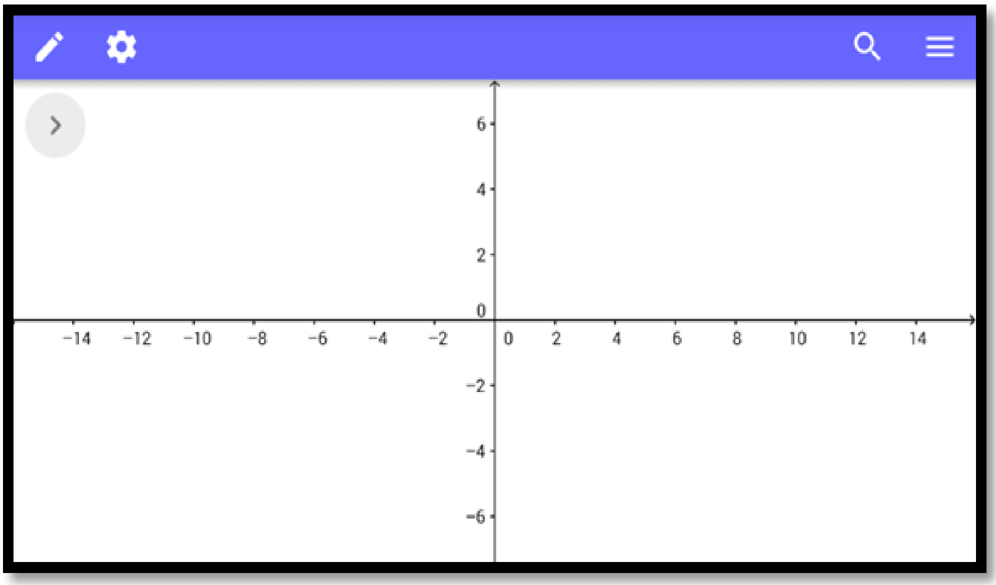


Figura 8 - Print screen da tela do GEO
Fonte: Elaboração da autora.

3.3 Atividades Implementadas

A seguir descrevemos as atividades, os objetivos e os recursos para coleta de dados utilizado nas implementações.

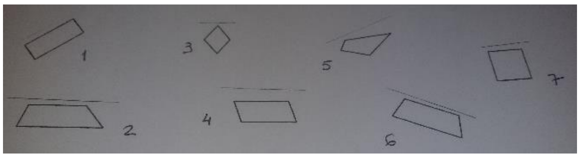
3.3.1 Primeira fase – Fichas: Conhecimentos Prévios

No dia 26 de agosto, após alguns esclarecimentos referentes a disciplina, foram distribuídas aos discentes três folhas[2] com quatro atividades ao todo. O objetivo da aplicação destas fichas é averiguar os saberes dos alunos com relação a alguns conceitos como, por exemplo, quadriláteros, segmento, ângulo, diferença entre conceito e definição entre outros. Veja no quadro as atividades distribuídas aos licenciandos:

---

[2] Chamaremos estas folhas de fichas.

Quadro 6 - Atividades da 1ª fase

Ficha 1	Objetivo(s)	Instrumentos de coleta/ recursos
Atividade 1 – Sejam aos polígonos: • quadrado • retângulo • trapézio • losango • paralelogramo Agora: Faça um desenho para cada um deles.	-Identificar a representação geométrica que os estudantes possuem com relação aos polígonos dados.	- Registro escrito dos alunos; - lápis e papel.
Atividade 2 - Escreva para cada um deles, pelo menos, uma observação, algo curioso, propriedade etc. • quadrado • retângulo • trapézio • losango • paralelogramo	- Identificar conceitos, propriedades ou definições que os estudantes possuem em relação aos polígonos dados.	- Registro escrito dos alunos; - lápis e papel.
Ficha 2		
Atividade 3 - Observe os polígonos:  Escreva para cada um (ou grupo) deles, pelo menos, uma observação, algo curioso, propriedade etc.	- Identificar as relações de classificação por inclusão que os estudantes possuem em relação aos quadriláteros notáveis.	- Registro escrito dos alunos; - lápis e papel.
Ficha 3		
Atividade 4 – O que você entende por... a) Polígono b) Propriedade c) Ângulo d) Segmento e) Conceito f) Definição	- Identificar os conceitos que os alunos possuem em relação aos elementos dados.	- Registro escrito dos alunos; - lápis e papel.

Fonte: Elaboração da autora.

3.3.2 Segunda Fase – Conhecendo os softwares FreeGeo e Sketchometry

No dia sete de outubro, iniciamos nossas implementações utilizando o *software FreeGeo* (FG) e o *Sketchometry (SK)*. Solicitamos previamente que os licenciando instalassem o aplicativo *FG* em seus *smartphones*. A princípio o FG seria o único utilizado, devido a performance do programa em celulares, entretanto, como este *app* foi desenvolvido para o sistema *android* um dos licenciandos utilizou o *SK*, visto que o mesmo possui um aparelho da Apple e precisava de um app que funcionasse em *iPhone*.

Para os estudantes que não tiveram acesso à *internet* ou, por algum outro motivo, não puderam realizar o *download* do *software* realizamos o compartilhamento via bluetooth por meio do aplicativo MyAppSharer[3]. Para este momento foi dedicado aproximadamente 30 minutos da aula, neste caso os minutos finais. A seguir ilustramos no quadro 7 com as atividades desta fase.

Quadro 7 - Atividades da 2ª fase

Atividade	Objetivos	Instrumentos de coleta/ recursos
1.Faça a construção dos quadriláteros listados abaixo, no app FreeGeo, e escreva pelo menos três observações para cada um. a) Quadrado b) Retângulo c) Trapézio d) Losango	Ambientação, exploração de recursos do *software.*	- Fotos, vídeos, registro escrito dos alunos. - *smartphone*, lápis e papel.
2.Manipule livremente e diga uma característica interessante entre: a) O quadrado e o losango b) O retângulo e o trapézio c) O trapézio e o quadrado	Observação das propriedades em comum.	- Fotos, vídeos, registro escrito dos alunos. - *Smartphone*, lápis e papel
3.Agrupe os quadriláteros de acordo com critérios estabelecidos por você.	Observação das propriedades e organização dos quadriláteros de acordo com os critérios estabelecidos pelos estudantes.	- Fotos, vídeos, registro dos alunos. - lápis e papel.

Fonte: Elaboração da autora.

3.3.3 Terceira fase – Repensando alguns conceitos e explorando quadriláteros

No dia 14 de outubro a aula foi dedicada totalmente a implementação de nossas atividades. Antes de distribuir as fichas que necessitavam mais do uso dos aplicativos, propusemos uma atividade de verdadeiro ou falso que foi elaborada com afirmativas coletadas dos próprios licenciandos na primeira fase de implementação.

[3]Software de compartilhamento de aplicativos, disponível em: https://play.google.com/store/apps/details?id=com.yschi.MyAppSharer&hl=pt-br.

Quadro 8 - Atividades da 3ª fase

Atividade	Objetivos	Instrumentos de coleta/ recursos
1 – Analise as afirmativas abaixo colocando (V) para as que forem verdadeiras e (F) para as falsas. Justifique as que forem falsas. a) Para ser trapézio precisa ter bases com tamanhos diferentes. b) No losango as diagonais são perpendiculares e se cortam no meio. c) No losango todos os lados são iguais. d) Todo retângulo possui duas medidas de lado. e) Todos os quadriláteros são convexos. f) O paralelogramo possui bases paralelas de mesmo tamanho ligado por dois segmentos. Ângulos iguais dois a dois (opostos), sendo dois agudos e dois obtusos. g) O Quadrado é um losango. h) O Quadrado é um caso particular do retângulo. i) O retângulo é um caso particular do paralelogramo. j) A figura a seguir é um trapézio irregular.	Confrontar os estudantes com afirmações realizadas por eles mesmos, afim de promover uma reflexão e debate sobre as afirmações apresentadas.	- Fotos, vídeos e registro dos alunos. - *Smartphone*, lápis e papel.
2 – [4]Construa quadriláteros que possuam as seguintes características: a) Sem lados iguais e sem ângulos iguais. b) Um único par de lados opostos iguais e um único par de ângulos opostos iguais. c) Um único par de lados consecutivos iguais e um único par de ângulos consecutivos iguais. É possível realizar as construções anteriores? Explique. Caso seja possível classifique os quadriláteros construídos.	Realizar construções no *software* e justificar suas observações.	- Fotos, vídeos e registro dos alunos. - *Smartphone*, lápis e papel.

Fonte: Elaboração da autora.

3.3.4 Quarta fase – A armadilha pedagógica

A atividade a seguir foi realizada na aula do dia vinte um de outubro, durou em média de 30 minutos. Esta atividade foi pensada para ser utilizada com o auxílio dos aplicativos. Entretanto, caímos em uma “armadilha pedagógica”, pois a atividade se mostrou simples de ser resolvida utilizando apenas o lápis e o papel. Os próprios estudantes relataram que não se sentiram motivados a resolver a tarefa com o aplicativo e esboçaram rapidamente um diagrama ao lado para resolver a atividade.

Quadro 9 - Atividade 4ª fase

Atividade	Objetivo (s)	Instrumentos de coleta/ recursos
Analise a seguinte proposição: “Se um paralelogramo é um retângulo, então as diagonais são congruentes” Complete o diagrama abaixo: (Utilize o FreeGeo caso necessite) (ver diagrama em apêndice)	Desenvolver uma prova do tipo diagrama.[5]	- Registro escrito dos alunos. - Lápis e papel.

Fonte: Elaboração da autora.

[4] Atividade baseada no trabalho de Dálcin e Molfino (2012).

[5] Esta atividade está baseada no trabalho de Cirillo e Herbst (2010).

3.3.5 Quinta fase – Provas, argumentos e conjecturas

As atividades implementadas nesta fase foram elaboradas com base nas respostas e dificuldades observadas no decorrer das fases anteriores. Os discentes foram divididos em quatro grupos, cada grupo recebeu uma ficha contendo duas atividades uma específica e outra comum a todos os graduandos. Esta implementação ocorreu no dia dois de dezembro, e os discentes levaram em média uma hora e trinta minutos para finalizar a tarefa. Neste momento os discentes utilizaram os *tablets* do nosso grupo de pesquisa. A seguir descrevemos com mais detalhes as atividades propostas.

Quadro 10 - Atividades da 5ª fase

Atividade	**Objetivo (s)**	**Instrumento de coleta/ recursos**
Questão comum a todos: A partir das leituras feitas na disciplina destaquem alguma ideia que a dinâmica vivenciada em Ensino II no trabalho com quadriláteros, contribui: 1. Para o aprendizado matemático. 2. Sobre a importância da tecnologia digital nessa dinâmica. Escolham pelo menos um dos textos para responder ao item 1 e um outro para o item 2.	Relacionar as leituras feitas com a vivência na disciplina, assim como observar a opinião dos estudantes quanto as atividades desenvolvidas.	- Vídeo da tela do tablet, áudio dos estudantes e registro escrito. - lápis e papel.
1 - Em uma aula sobre quadriláteros notáveis no momento de discussão surgiram duas proposições levantadas pelos alunos: 1. “Se um quadrilátero possui dois lados com medidas diferentes então é um trapézio”; 2. “Se um quadrilátero possui bases com medidas diferentes não é um trapézio.” Esta aula foi em uma turma do nono ano do ensino fundamental. Imagine que vocês conduziriam a discussão. Elaborem uma tarefa utilizando o aplicativo que trabalhamos em sala.	Promover uma discussão quanto a nomenclaturas e a definição de trapézio, refletir como a tecnologia pode auxiliar ou não neste caso.	- Vídeo da tela do tablet, áudio dos estudantes e registro escrito. - lápis, papel e *tablet.*
2 - (Abra o arquivo no app FreeGeo) a) Que tipo de quadrilátero foi construído no aplicativo? b) Qual a relação existente entre as diagonais do quadrilátero apresentado no aplicativo? c) Elabore uma proposição para esta relação e prove-a.	Explorar um diagrama dinâmico e formular conjecturas e provas a partir das observações emergentes.	- Vídeo da tela do tablet, áudio dos estudantes e registro escrito. - lápis e papel, *tablet.*
2 – a) O que vocês entendem por trapézio? b) Construam um trapézio qualquer e justifiquem os passos da construção. c) Ao movimentar sua construção o que acontece? Façam, pelo menos, três observações. d) Qual a relação existente entre os ângulos adjacentes do quadrilátero construído? Apresentem uma proposição (da forma condicional) para esta relação e justifiquem.	Construção de um diagrama dinâmico e formulação de conjecturas e provas.	- Vídeo da tela do tablet, áudio dos estudantes e registro escrito. - lápis e papel, *tablet.*
3 – A seguir vocês veem duas organizações esquemáticas sobre quadriláteros apresentadas por alunos do nono ano. A partir dos conhecimentos e das atividades trabalhadas em sala identifiquem a definição de quadriláteros implícita em cada esquema. Utilizem o *applets* no *GeoGebra* para construir um mapa conceitual e analise este tipo de atividade, com tecnologia, relacionando-a com as respostas dos alunos indicadas nos esquemas abaixo. (ver em apêndice os esquemas) *Link* do *applet*: http://www.geogebra.org/m/CnvpUayb?doneurl=%2Fsearch%2Fperform%2Fsearch%2Fquadril%25C3%25A1teros%2Fmaterials%2F%2Fpage%2F3%2Fr%2F0	Discutir sobre definições de quadriláteros e classificações. E propor um modelo diferenciado de mapa conceitual.	- Vídeo da tela do *tablet*, áudio dos estudantes e registro escrito. - lápis e papel, *tablet.*

Fonte: Elaboração da autora.

Na próxima seção iremos ilustrar algumas respostas de alunos no decorrer das implementações acima ilustradas.

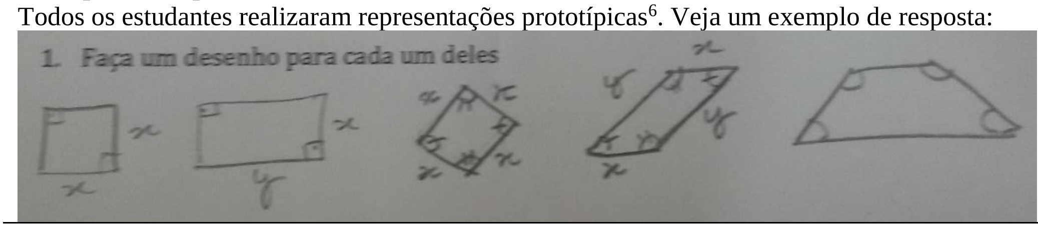
4 ANÁLISES E DISCUSSÕES: 1ª E 2ª FASES DE IMPLEMENTAÇÃO

Neste capítulo, analisaremos as respostas dos alunos coletadas no decorrer das implementações na 1ª e na 2ª fase. Na primeira fase, obtivemos respostas diversas que nos auxiliaram a dar o passo inicial na elaboração das demais atividades. A partir da segunda fase, ilustraremos um recorte das respostas de um aluno, pois, gostaríamos de ressaltar o processo de aprendizagem do mesmo no decorrer das implementações.

4.1 Primeira fase de implementação

Como já ilustramos no capítulo anterior, a primeira fase iniciou-se logo no primeiro dia da disciplina, após alguns esclarecimentos aos graduandos sobre a dinâmica que as aulas iriam se desenvolver. Vejamos a tabela a seguir:

Tabela 1 - Respostas da 1ª fase (continua)

Ficha 1
Atividade 1_Enunciado: Sejam aos polígonos: • quadrado • retângulo • trapézio • losango • paralelogramo Agora: Faça um desenho para cada um deles. **Exemplo de resposta:** Todos os estudantes realizaram representações prototípicas[6]. Veja um exemplo de resposta: 
Atividade 2_Enunciado: Escreva para cada um deles, pelo menos, uma observação, algo curioso, propriedade etc. • quadrado • retângulo • trapézio • losango • paralelogramo **Exemplo de respostas:** **Quadrado:** "lados iguais e diagonal mede $l\sqrt{2}$" "O quadrado é um losango" "O quadrado é um caso

[6] Segundo Hershkowitz et al (1994) prototípica(o) deriva da ideia de protótipo e é compreendido como um conjunto de exemplos (ou modelos) para determinados conceitos com fortes características visuais. Por exemplo, o triângulo retângulo é apresentado com o ângulo reto na vertical, o quadrado é o modelo mais usado para abordar quadriláteros com os lados paralelos as margens da folha ou lousa.

Tabela 1 - Respostas da 1ª fase (continua)

particular do retângulo”

Retângulo: “O retângulo é um caso particular de paralelogramo” “Todo retângulo possui duas medidas de lado”

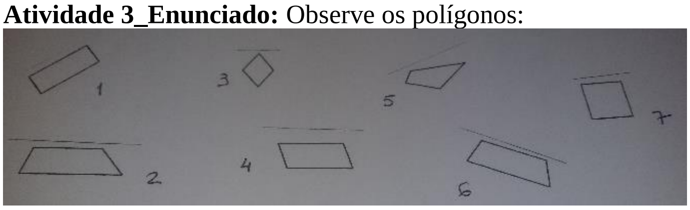
Trapézio: “Para ser trapézio precisa ter bases com tamanhos diferentes” “composto por duas bases paralelas, uma maior que a outra ligada por dois segmentos”

Losango: “se parece com o quadrado” “todos os lados são iguais” “forma de pipa ou balão” “as diagonais são perpendiculares e se cortam no meio”

Paralelogramo: “parece um quadrado” “se parece com um retângulo” “bases paralelas de mesmo tamanho ligado por dois segmentos, ângulos iguais dois a dois (opostos), dois agudos e dois obtusos”

Ficha 2

Atividade 3_Enunciado: Observe os polígonos:



Escreva para cada um (ou grupo) deles, pelo menos, uma observação, algo curioso, propriedade etc.

Exemplo de respostas: “6 – é um trapézio irregular” “todas as figuras acima são quadriláteros e a soma dos seus ângulos internos mede 360º . E que todas essas figuras são meras representações, e muitas delas estão apenas redimensionadas no espaço ”

Ficha 3

Atividade 4_Enunciado: O que você entende por...

a) Polígono
b) Propriedade
c) Ângulo
d) Segmento
e) Conceito
Definição

Exemplo de respostas:

a) Polígono: “Uma forma geométrica plana e fechada formada por mais de dois segmentos” “Figura geométrica plana construída a partir de segmentos de reta” “Uma figura geométrica” “figuras planas com determinado número de lados” “forma plana e fechada formada por mais de dois segmentos”

b) Propriedade: “Uma característica sólida para uma classe de objetos. Por exemplo, os números reais, funções ou mesmo algum material concreto” “Característica comum a um determinado grupo” “Atributos que um determinado polígono, teorema etc possui. A propriedade pode ser demonstrada”

c) Ângulo: “Medida formada entre dois segmentos de reta, planos ou objetos no espaço.” “O encontro de duas retas não paralelas formam o ângulo.” “é uma medida de inclinação entre duas retas que se cruzam” “mede dois segmentos”

d) **Segmento:** “É um pedaço limitado em comprimento de uma reta” “Uma reta que liga dois pontos distintos” “Pedaço limitado de um todo” “conjunto de pontos” “encontro de dois pontos no espaço” “pedaço de uma reta em um intervalo” “reta que liga dois pontos distintos”

e) **Conceito:** “significado dado a uma coisa” “Ter a ideia de algum determinado conteúdo, mas não formalmente” “Uma opinião”

f) Definição: “ Uma nomeação de um grupo de propriedade ou objetos” “O mesmo que conceito, mas agora formal” “Características e propriedades que determinam um objeto, ou um tema”

Fonte: Elaboração da autora.

Ao analisarmos as respostas dos estudantes, podemos observar aspectos da formação que estes vem recebendo. Na ficha 1 atividade 1, por exemplo, as respostas indicam representações restritas a um mesmo modelo, visto que, todos fizeram desenhos semelhantes aos dos livros textos que são apresentados a eles desde o início de sua trajetória escolar. A imagem conceitual que os alunos apresentaram nessa atividade é considerada exemplo de protótipos que implicam de modo intuitivo no julgamento que estes venham desenvolver em outras instâncias (HERSHKOWITZ et al., 1994).

Já na atividade 2 (ficha 1), notamos algumas dificuldades com relação ao conceito de alguns quadriláteros, vejamos: “Para ser trapézio precisa ter bases com tamanhos diferentes” “Todo retângulo possui duas medidas de lado”. Essas falas indicam que a conceitualização de trapézio e retângulo, exemplos dados, estão fortemente ligados a ideia de um único modelo de representação geométrica.

Interpretamos a fala: “bases com tamanhos diferentes” como o caso do trapézio isósceles cujos lados paralelos são em sua maioria representados em posição horizontal. No retângulo, “duas medidas de lado” nos indica os casos em que a imagem conceitual deste objeto é apresentada com duas medidas distintas para os lados paralelos, além disso, os lados de medidas “maiores” encontram-se em posição horizontal, como na figura a seguir.

Figura 9 - Exemplo de protótipo para retângulo
Fonte: Elaboração da autora

Estas representações são protótipos muito utilizados pelos livros textos. Em contrapartida, alguns licenciandos reconhecem relações de inclusão, por exemplo, ao afirmarem “o quadrado é um caso particular do retângulo”.

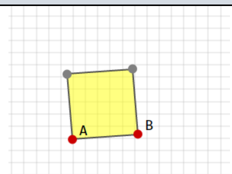
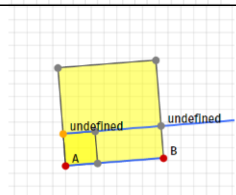
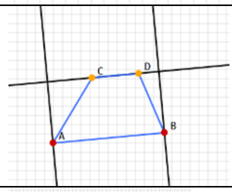
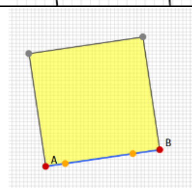
Nesta primeira fase, observamos a consonância com os estudos de Cirillo e Herbst (2010), pois as imagens conceituais (HERSHKOWITZ et al., 1994) presentes nas respostas dos alunos reforçam um único modelo para a representação de quadriláteros notáveis e nos indicam que a formação docente tem se perpetuado da mesma forma de geração em geração. Isto é, ensinamos da mesma forma como nossos professores foram ensinados.

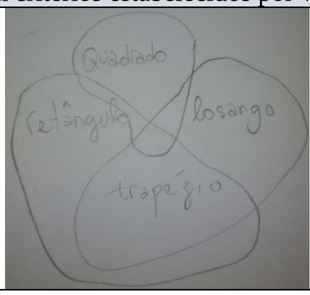
Deste modo, selecionamos algumas respostas com problemas de conceitualização, bem como respostas com conceitos corretos para a elaboração de atividades que envolvessem exploração, conjecturas e demonstração de propriedades dos quadriláteros.

4.2 Segunda fase de implementação

Nesta seção, apresentamos as respostas do aluno A que utilizou o app *Sketchometry*, pois este *software* permite o armazenamento e o compartilhamento das construções, o que facilitou a coleta dos dados das construções realizadas no aparelho do estudante.

Tabela 2 - Respostas da 2ª fase

Aluno A (usou o SK, 23 anos)		
1. Faça a construção dos quadriláteros listados abaixo, no App FreeGeo, e escreva pelo menos três observações para cada um.		
a) Quadrado	*"Fazemos o quadrado com a ferramenta de polígono regular. Precisamos apenas de dois pontos para fazê-lo. Movemos o quadrado apenas através de dois pontos."*	
b) Retângulo	*"É possível construir um com um quadrado menor dentro de um maior."*	
c) Trapézio	*"É possível construir um ligando dois pontos sobre duas retas paralelas"*	
d) Losango	*"É possível construir um com dois triângulos equiláteros"*	
1 . Manipule livremente e diga uma característica interessante entre:		
a) O quadrado e o losango	*"Ambos tem quatro lados iguais"*	
b) O retângulo e o trapézio	*"Ambos tem dois lados paralelos entre si"*	
c) O trapézio e o quadrado	*"Ambos tem dois lados paralelos entre si"*	
2 Agrupe os quadriláteros de acordo com critérios estabelecidos por você.		



Fonte: Elaboração da autora.

Ao observarmos as respostas anteriores, notamos que, na primeira atividade, o estudante se deteve em descrever observações do processo de construção, ainda assim é possível notar elementos dos conceitos que permeiam suas escolhas, por exemplo, no item b, é possível observar a representação do protótipo como um elemento emergente na sua construção. Ao dizer: "É possível construir um com um quadrado menor dentro de um maior." Notamos que a representação do retângulo se refere a exemplificada na figura 8 na 1ª fase (levantamento), neste momento, o estudante não considera o quadrado como um caso particular do retângulo, precisando construir um objeto que se assemelha ao protótipo dos livros textos (HERSHKOWITZ et al., 1994).

Ainda na atividade 1, no item d (o losango), quando o estudante diz “É possível construir um com dois triângulos equiláteros”, observamos que o mesmo compreende que o losango possui todos os seus lados iguais. Pois, seu registro nos indica que o graduando possui uma imagem formada sobre o conceito de triângulo equilátero (lados e ângulos congruentes) e esta imagem, por sua vez, é evocada e reelaborada, pois o aluno diz construir um novo objeto, o losango, a partir do triângulo equilátero (DAMÁSIO, 2014; VIGOTSKI, 2014). Percebemos que o estudante reelabora e estabelece relações entre aas imagens conceituais (HERSHKOWITZ et al., 1994) que formula a partir de suas experiências.

Outra observação importante é o fato de que neste ambiente o aluno não transita ora no campo espacial gráfico ora no campo teórico como no trabalho de Sinclair e Robutti (2013), esses campos se relacionam e se articulam no desenvolvimento do raciocínio geométrico do aluno. Não há como separar dizendo que: “agora o estudante está no campo teórico” ou “agora podemos observar que o campo espacial gráfico toma destaque”, pois são movimentos intrínsecos, o graduando utiliza seus conhecimentos teóricos e aplica no campo espacial. Como observado anteriormente, a imagem conceitual do triângulo equilátero emerge do campo teórico e implica diretamente no espacial.

A ideia da relação de inclusão entre alguns quadriláteros observamos nas tarefas 2 e 3, ao contrário de muitos livros textos, o discente traz uma classificação, ou melhor uma organização seguindo o critério do paralelismo entre os lados. Entretanto, suas respostas nos dão indícios de que as definições de alguns quadriláteros precisam de maior atenção, pois, quando o aluno inclui uma interseção entre o quadrado e o trapézio, por exemplo, é como se ele afirmasse que temos quadrados que também são trapézios e vice-versa. Vejamos novamente o seu diagrama:

Figura 10 - Diagrama elaborado pelo aluno A atividade 3.
Fonte: Elaboração da autora.

Podemos observar que o estudante inclui o trapézio no conjunto dos retângulos, que por sua vez, possui interseções com o conjunto dos quadrados e losangos assim como o trapézio também tem interseções com os demais conjuntos. Logo pressupomos que a definição adotada para trapézio seria o fato dos dois lados paralelos, assim como, no caso do retângulo, o critério utilizado foi o de ter os lados paralelos. A seguir, apresentamos uma possível reformulação para do diagrama apresentado pelo aluno:

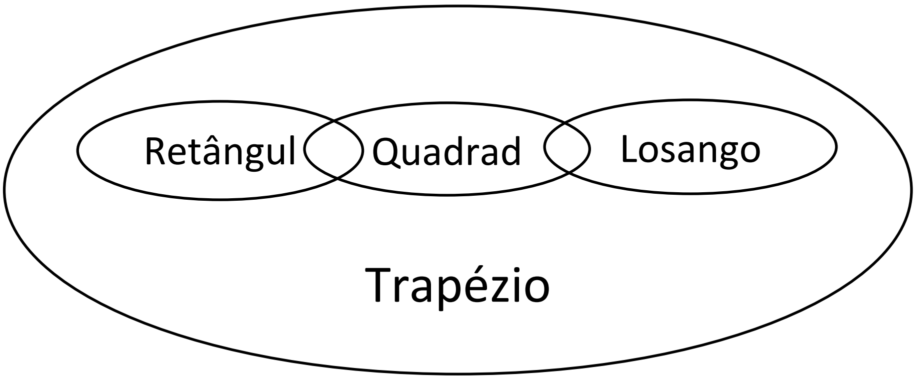


Figura 11 - Reformulação do diagrama apresentado pelo aluno A
Fonte: Elaboração da autora.

Somente os lados paralelos não garantem a existência do retângulo, pois, por definição, o retângulo precisa ter todos os ângulos iguais, neste caso, temos uma propriedade do retângulo sendo considerada como definição. Portanto, o retângulo pode ser considerado um caso particular de trapézio, mas o contrário não é verdadeiro. Neste sentido, procuramos desenvolver mais atividades que possibilitassem mais discussões acerca da definição de trapézio.

4.3 Discussões e reflexões

A partir da primeira fase de implementação de atividades, tivemos um parâmetro sobre como os graduandos compreendiam determinados conceitos acerca da temática quadriláteros. Neste sentido, ressaltamos a importância de averiguar os conhecimentos que os estudantes possuem sobre um determinado assunto, uma vez que podemos desenvolver um planejamento que vise a superação de dificuldades e o refinamento das ideias propostas.

Em nossa pesquisa, este primeiro momento foi essencial para a formulação das atividades posteriores, porque, as respostas dos graduandos acabam por nos indicar o caminho que precisávamos percorrer. Chamamos a atenção para a importância das respostas dos graduandos, pois os mesmos são alunos do curso de licenciatura em matemática no período final e apresentam conceitos que carecem de refinamento, para que no futuro, quando estes estiverem em sala de aula como professores regentes de uma turma, perpetuem uma matemática que valoriza o conhecimento do discente, que promove questionamentos, que cria e que se reinventa.

Na segunda fase de implementação, observamos que, apesar das imagens conceituais estarem atreladas a modelos de protótipos (HERSHKOWITZ et al., 1994), também temos indícios do conhecimento, por parte dos graduandos, de propriedades e definições pertinentes dos quadriláteros. Nesta perspectiva, esta segunda fase contribui para que as próximas atividades e discussões visassem o esclarecimento dessas propriedades, assim como, permitissem que os estudantes explorassem mais os recursos do app como um elemento que potencializa a aprendizagem e o discurso argumentativo.

Destacamos também a relevância da atividade 2 da segunda fase no sentido de proporcionar ao aluno classificações e organizações dos quadriláteros de modo original, pois permite que o graduando tenha liberdade na escolha dos critérios que deseja estabelecer para sua organização.

5 ANÁLISES E DISCUSSÕES: 3ª E 4ª FASES DE IMPLEMENTAÇÃO

Neste capítulo, focalizaremos nas respostas dos graduandos durante a 3ª e a 4ª fase de implementação. Daremos ênfase na terceira fase de implementação ilustrando as respostas de um único aluno devido a facilidade na coleta de dados deste graduando especificamente.

5.1 Terceira fase de implementação

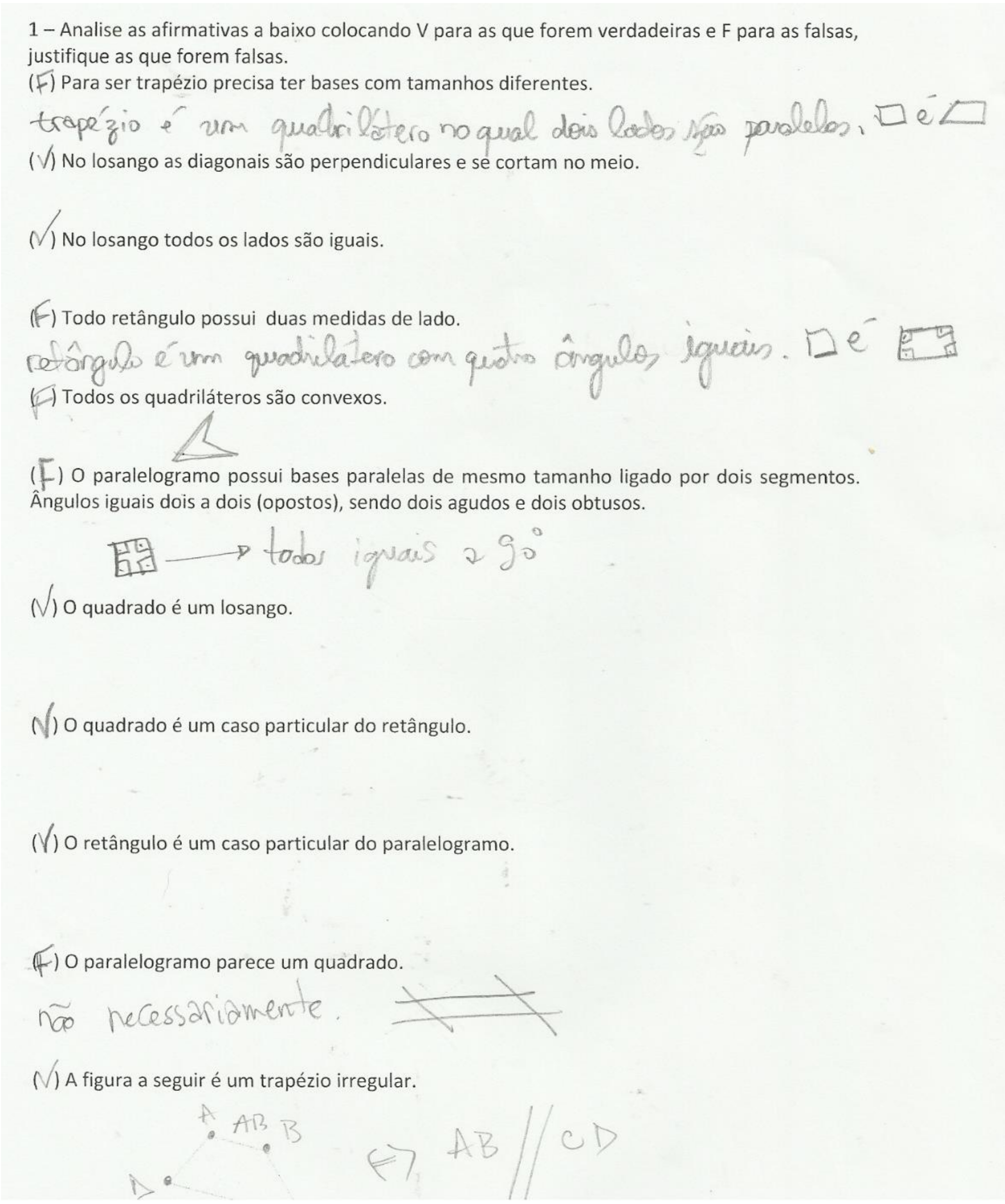
Na terceira fase, distribuímos inicialmente uma ficha de verdadeiro ou falso como ilustramos a seguir nas respostas do aluno A. Nesta fase, observamos que a definição para o trapézio que o mesmo tem se guiado: "O trapézio é um quadrilátero no qual dois lados são paralelos" começa a ficar mais evidente em suas respostas. O que antes (na fase dois, capítulo v), não estava muito claro, pois o trapézio aparecia como um subconjunto do retângulo, agora aparece de maneira explícita, consideramos isto um avanço no raciocínio do graduando.

Consideramos oportuno discutir com os licenciandos as possíveis definições para o quadrilátero trapézio, pois, além da definição dada pelo aluno A também emergiu em nossas discussões a definição de trapézio como sendo um quadrilátero que possui um único par de lados paralelos. A atividade de verdadeiro ou falso possibilitou que os estudantes observassem suas próprias dificuldades e promoveu novas discussões e avanços com relação a outras propriedades do trapézio, como veremos nas atividades da quinta fase no próximo capítulo.

Algumas dúvidas como o que seria um polígono regular surgiram, então conversamos rapidamente com a turma sobre este conceito. Destacamos também aos estudantes, a nomenclatura utilizada por eles de trapézio irregular (na última afirmativa do verdadeiro ou falso, figura 11). Discutimos que, neste caso específico, esse termo não possui relevância visto que só podemos considerar um polígono regular aqueles que possuem lados e ângulos congruentes, como no caso do trapézio isto só ocorre se consideramos a definição que abrange lados paralelos sem especificar um único par de lados paralelos, o termo não é relevante. Além disso, chamamos a atenção dos graduandos para o excesso de preocupação com nomenclaturas teóricas dos conceitos, ao invés da exploração dos mesmos. Observamos que esta atitude é uma marca histórica e cultural do ensino de matemática, a qual podemos amenizar a partir de práticas que envolvem a participação dos alunos de modo criativo e inovador no seu processo de aprendizagem.

Revelamos a eles que as afirmativas foram construídas por eles mesmos apenas no fim de todas as implementações para que não houvesse constrangimento por parte dos envolvidos ou receio no momento das discussões. Ao realizarem essa atividade, os licenciandos levaram em média 30 minutos. A medida que terminavam a atividade anterior, os estudantes recebiam uma nova ficha de atividade como ilustraremos a diante e por fim discutíamos sobre as atividades.

Vejamos a seguir as respostas do aluno A nesta atividade.


1 – Analise as afirmativas a baixo colocando V para as que forem verdadeiras e F para as falsas, justifique as que forem falsas.

(F) Para ser trapézio precisa ter bases com tamanhos diferentes.

trapézio é um quadrilátero no qual dois lados são paralelos. □ é ⏢

(√) No losango as diagonais são perpendiculares e se cortam no meio.

(√) No losango todos os lados são iguais.

(F) Todo retângulo possui duas medidas de lado.

retângulo é um quadrilatero com quatro ângulos iguais. □ é

(F) Todos os quadriláteros são convexos.

(F) O paralelogramo possui bases paralelas de mesmo tamanho ligado por dois segmentos. Ângulos iguais dois a dois (opostos), sendo dois agudos e dois obtusos.

→ todos iguais a 90°

(√) O quadrado é um losango.

(√) O quadrado é um caso particular do retângulo.

(√) O retângulo é um caso particular do paralelogramo.

(F) O paralelogramo parece um quadrado.

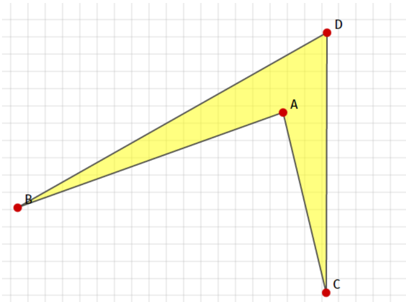
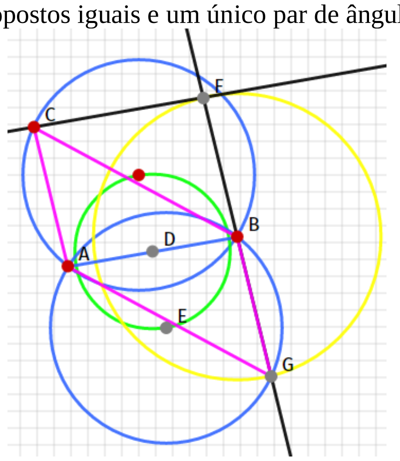
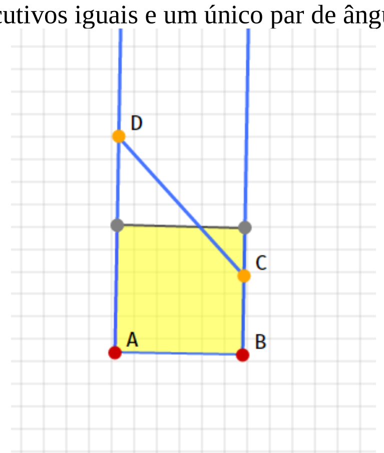
não necessariamente.

(√) A figura a seguir é um trapézio irregular.

Figura 12 - Respostas do aluno A
Fonte: Foto da ficha do aluno.

É importante ressaltar, mais uma vez, que a escolha de exemplificar as respostas do aluno A se deve a possibilidade que a tecnologia forneceu para a coleta de dados. Isto é, as construções que o estudante realizou no aplicativo foram compartilhadas com a pesquisadora via e-mail, o SK sempre salva as construções independente do usuário solicitar ou não e estas podem ser compartilhadas posteriormente.

Tabela 3 – Respostas Aluno A no software SK

Aluno A (SK)
Atividade 2: Construa quadriláteros que possuam as seguintes características:
a) Sem lados iguais e sem ângulos iguais.  É possível, exemplo o quadrilátero BDCA.
b) Um único par de lados opostos iguais e um único par de ângulos opostos iguais.  Não é possível, contraexemplo é a construção do paralelogramo em rosa ACBG.
c) Um único par de lados consecutivos iguais e um único par de ângulos consecutivos iguais.  É possível, exemplo a construção do trapézio ABCD.

Fonte: Elaboração da autora.

Podemos observar que, no item C, a construção do trapézio retângulo ABCD não está seguindo o modelo padrão que geralmente é apresentado pelos livros textos. Ressaltamos o desenho da atividade como um dos principais fatores para essa mudança na resposta do graduando. Quando solicitamos que o estudante representasse geometricamente o trapézio na fase de levantamento (1ª fase, capítulo IV) o mesmo desenhou no papel o trapézio em uma posição muito usual (lados paralelos horizontais as margens da folha) enquanto que agora, na construção dinâmica, os lados paralelos estão em uma posição vertical. Talvez se a atividade fosse apenas solicitando que o graduando construísse um trapézio retângulo, o mesmo não teria mudado sua resposta. Por isso, destacamos a importância do desenho da tarefa na exploração tanto das possibilidades que a tecnologia pode fornecer quanto das possibilidades de exploração das propriedades do conceito geométrico trabalhado.

Esta atividade foi o momento em que o estudante mais utilizou o aplicativo. Ressaltamos inclusive que o mesmo não se sentiu motivado a realizar uma demonstração por escrito para uma de suas conjecturas, pois ele explicou verbalmente seus argumentos junto ao diagrama dinâmico que construiu. A seguir ilustramos a transcrição de um vídeo que relata esse momento de construção, exploração e conjecturas especificamente sobre o item b.

Quadro 10 - Primeiro momento do vídeo

1.Aluno A
Silêncio e exploração.
(**Exploração:** 00:00:18 – 00:00:27)

2.Aluno A
Silêncio e observação, sem toques na tela
(**Observação:** 00:00:28 – 00:00:41)

3. Aluno A
Silêncio e construção
(**Construção:** 00:00:42 – 00:01:04)

Fonte: Elaboração da autora.

A resposta do aluno A referente ao item b, de acordo com os registros da pesquisadora: "não é possível construir um quadrilátero com um único par de lados opostos iguais e um único par de ângulos opostos iguais, pois, por construção o mesmo seria um paralelogramo". O tempo de duração é de dois minutos aproximadamente, dividimos a transcrição em dois momentos, o primeiro destacado no quadro 11, e o segundo momento segue no quadro 12.

Quadro 11 - Segundo momento do vídeo

Transcrição: Segundo momento: Justificativa (00:01:05 - 00:02:00)	Imagens do vídeo
1.Pesquisadora: Essa construção toda é para construir um retângulo? É? 4.Aluno A: Não. 5.Aluno A: É o seguinte: dois arcos capazes 2.Pesquisadora: Hum. 5.Aluno A: Aí, se eu ligar dois pontos aqui, se eu ligar esses dois pontos aqui a um terceiro ponto aqui e um outro ponto aqui. Eu tenho certeza que o ângulo que eu vou ter aqui vai ser o mesmo que eu vou ter aqui. 3.Pesquisadora: Certo. 6.Aluno A: Então com isso eu construí dois pares de ângulos opostos iguais. Certo? (aponta para o item b da folha de atividades) 4.Pesquisadora: Hum, certo. 7.Aluno A: Agora eu quero dois lados iguais, para isso eu pego, eu defini um lado, o AC, tá vendo o AC ali? (movimenta, pesquisadora responde positivamente: “Humhum”) Então agora eu quero pegar uma paralela ao AC.	

Fonte: Elaboração da autora.

Analisando a transcrição anterior, observamos movimentos de vai e vem entre os domínios de manipulação. No primeiro momento (quadro 11), o aluno A utiliza toques de arrasto e de aproximação - movimentos predominantes do domínio relacional (ARZARELLO et al., 2014) - para observar sua construção, em seguida para de manipular a tela, permanece em silêncio e retoma realizando novas construções com toques simples e arrastos típicos do domínio construtivo (ARZARELLO et al., 2014). Acreditamos que esses movimentos entre os domínios de manipulação contribuem para o desenvolvimento do raciocínio geométrico e da argumentação, uma vez que oportuniza os discentes averiguarem e construírem a composição lógica dos elementos geométricos que compõe uma determinada proposição.

No momento que permanece em silêncio, o aluno manipula a tela, cessa, observa e manipula novamente, nos demonstrando um ar intrigado ao mesmo tempo que parece procurar por alguma alternativa que faça com que suas conclusões estejam equivocadas, isto é, ele procura por uma falha. Quando a pesquisadora interrompe questionando sobre o que ele estava construindo o discente já concluiu seu raciocínio, tanto que explica passo a passo sua construção, explicando inclusive os conceitos utilizados que validam dedutivamente seu argumento, isto é, uma prova geométrica quando analisado da perspectiva de Mariotti (2000). As manipulações de arrasto realizadas na tela do aparelho comprovam que a sua construção preserva as propriedades de um paralelogramo, de acordo com o discutido no capítulo II pela autora citada.

Este primeiro momento, quando observado pela ótica de Sinclair e Robutti (2013), compõe a primeira fase do processo de prova, pois é possível perceber a exploração do diagrama dinâmico construído. Já o segundo momento (quadro 12), quando o aluno inicia a justificativa de sua construção, o mesmo demonstra o conhecimento de propriedades que dão subsídios a sua argumentação, por exemplo, construção de arcos capazes, construção de retas paralelas. Interpretamos o segundo momento como a segunda fase indicada por Sinclair e Robutti (2013), por ser possível perceber um desencadeamento de argumentos lógicos e dedutivos de uma demonstração, mesmo que na linguagem oral. Para uma melhor compreensão e acompanhamento da estratégia utilizada pelo discente, discorreremos abaixo o detalhamento do raciocínio usado por ele.

Tabela 4 - Descrição do raciocínio do aluno A

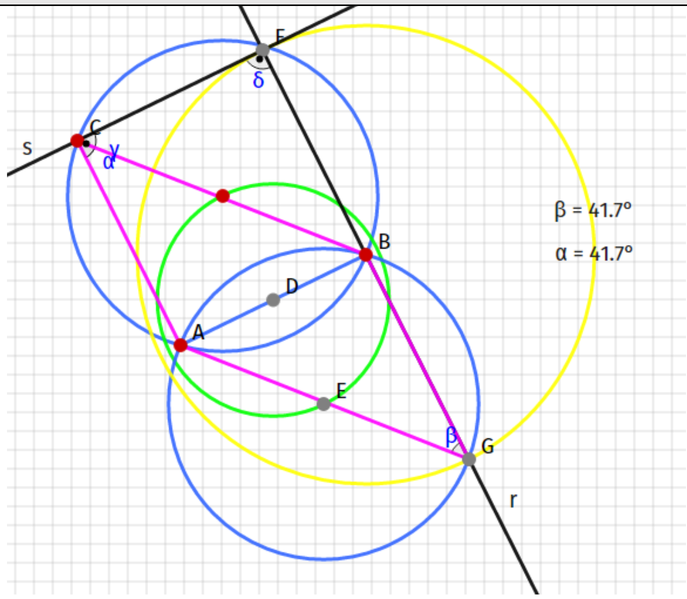
<table>
<tr><th>Descrição do raciocínio elaborada pela pesquisadora</th><th>Construção do aluno</th></tr>
<tr><td>

1º passo - construção de um par de arcos capazes circunferências em azul no diagrama. Esta estratégia garante que quaisquer ângulos selecionados nas circunferências em azul serão iguais o que garante uma das hipóteses da atividade (um par de ângulos opostos iguais);

2º passo - Garantir um par de lados opostos iguais. Para isso o discente traça retas perpendiculares que passam pelo ponto C (reta s) e pelo ponto B (reta r), pois, desta forma obtém uma reta r a qual qualquer ponto selecionado no segmento AC será equidistante a reta r, logo a reta r é paralela ao segmento AC. Como r contém o segmento BG então BG é paralelo a AC.

Conclusão: O quadrilátero ACBG é um paralelogramo, pois, possui um par de ângulos opostos iguais e um par lados opostos iguais, duas propriedades específicas do paralelogramo. Logo a proposição da atividade não é possível de ser construída.

</td><td>



Observação: Como a construção foi compartilhada com a pesquisadora, tomamos a liberdade de deixar a mostra alguns ângulos e nomear as retas, afim de facilitar a explicação dos elementos geométricos contidos na construção.

</td></tr>
</table>

Fonte: Elaboração da autora.

Outra observação importante a ser destacada é a articulação entre a observação da tela, a exploração, a construção e a justificativa de modo simultâneo, pois ao expor sua argumentação, o aluno A demonstra que sua construção foi realizada em sintonia com conceitos e propriedades geométricas que juntos desempenham um processo dedutivo formal no campo espacial gráfico (SINCLAIR; ROBUTTI, 2013). Ressaltamos também que devido a problemas técnicos o vídeo foi interrompido, por este motivo realizamos a descrição anterior afim de facilitar a compreensão do leitor sobre o que o estudante explicou neste momento de diálogo, isto foi possível devido aos registros escritos realizados pela pesquisadora.

5.2 Quarta fase de implementação

Na quarta fase de implementação, realizamos uma atividade inspirada no trabalho de Cirillo e Herbst (2010), cujo um dos objetivos era propor um problema de construção de uma demonstração de modo diferenciado do ensino tradicional. Combinando as ideias de Cirillo e Herbst ao uso do AGDcT, contudo, não teve uma implementação bem sucedida no sentido dwnão contemplar as potencialidades da tecnologia *touchscreen*, pois os estudantes realizaram rapidamente a atividade sem precisar dos aplicativos propostos.

É possível observar o desenho realizado pelo estudante no canto direito superior da folha ilustrada na figura 12, o mesmo relatou a nós que não se sentiu motivado a usar o aplicativo, pois a questão foi fácil de visualizar no papel. Nesta perspectiva, na próxima fase de implementação, buscamos elaborar uma atividade que envolvesse a tecnologia *touchscreen e* a ideia de Cirillo e Herbst (2010) de propor atividades que explorem os conceitos como um mapa conceitual ou, como os próprios autores nomeiam, por fluxo. Vejamos a seguir a resposta do aluno A nesta atividade.

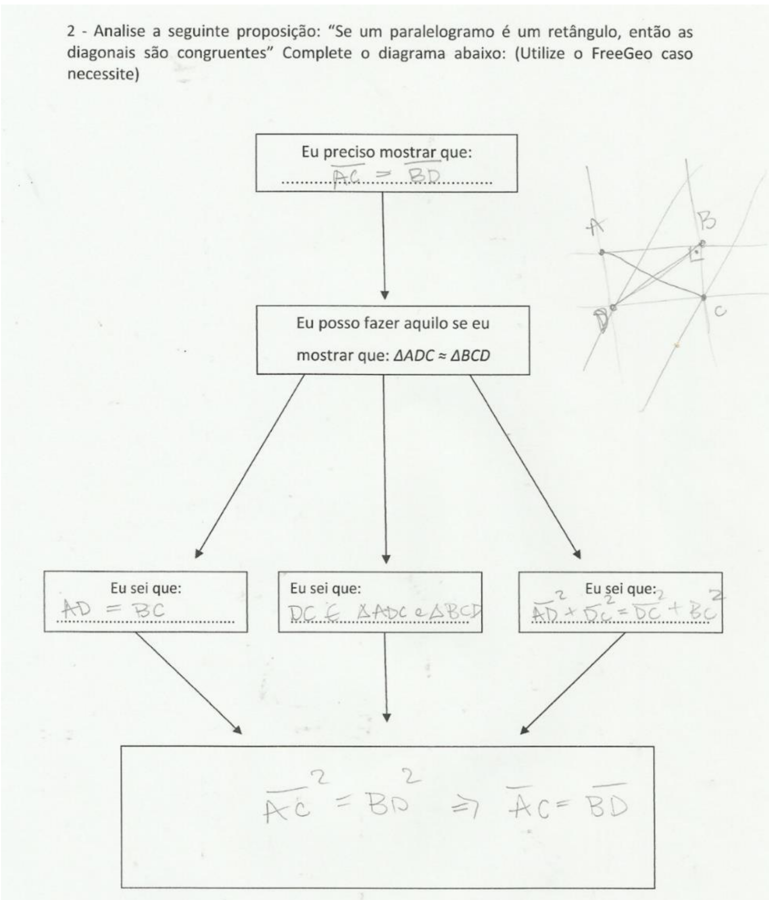


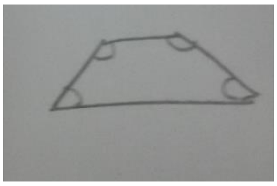
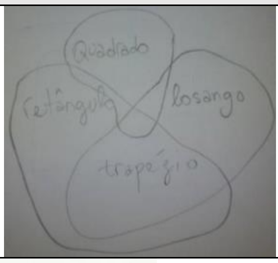
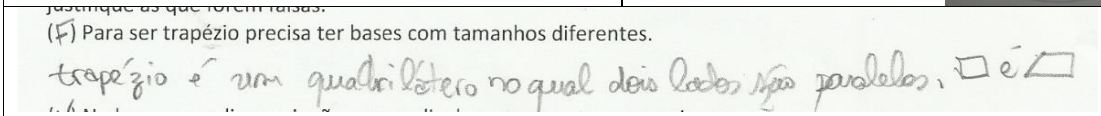
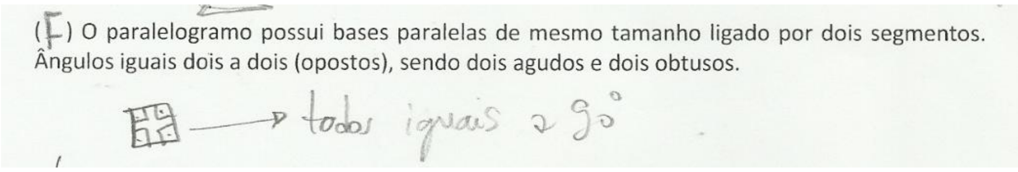
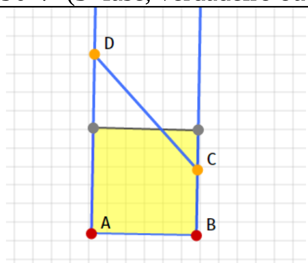
Figura 13 - Resposta do aluno A quarta fase de implementação

Fonte: Elaboração da autora.

5.3 Discussões e reflexões

Na terceira fase de implementação podemos observar como o desenho das atividades pode contribuir para a exploração dos quadriláteros a partir de suas propriedades diferentemente da perspectiva tradicional de se expor um único modelo como o obtido no lápis e o papel. Neste sentido, foi possível destacar as mudanças nas respostas do aluno A. Uma contribuição, que talvez sem a exploração do aplicativo não seria possível. Vejamos uma síntese no quadro abaixo de como o conceito de trapézio começa a ser refinado.

Quadro 12 - Respostas do aluno A (Trapézio)

<table>
<tr><th colspan="4">Respostas do aluno A referente ao conceito de trapézio</th></tr>
<tr><td>Trapézio desenhado na primeira atividade ficha 1 (capítulo IV, 1ª fase)</td><td></td><td>Trapézio como subconjunto do retângulo. (Capítulo IV, 2ª fase de implementação)</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="4">
(F) Para ser trapézio precisa ter bases com tamanhos diferentes.
trapézio é um quadrilátero no qual dois lados são paralelos.
Definição mais explícita do trapézio: “Quadrilátero com dois lados paralelos.” (3ª Fase, verdadeiro ou falso)

(F) O paralelogramo possui bases paralelas de mesmo tamanho ligado por dois segmentos. Ângulos iguais dois a dois (opostos), sendo dois agudos e dois obtusos.
→ todos iguais a 90°
Definição mais explícita do retângulo: “Quadrilátero com ângulos iguais a 90º .” (3ª fase, verdadeiro ou falso)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Trapézio retângulo construído no item c. (3ª fase)</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Elaboração da autora.

Outro aspecto importante a ser destacado na 3ª fase é a argumentação do graduando enquanto cria e explora sua construção no AGDcT. Na transcrição do vídeo e na descrição de seu raciocínio, temos indícios de sua conjectura e de sua argumentação com elementos dedutivos e lógicos do ponto de vista matemático. Valorizar a argumentação do aluno e as manifestações de seu aprendizado que emergem por meio das representações semióticas é importante no processo de ensino e aprendizagem (PASIN; SCHEFFER, 2013). Além disso, reconhecemos que as variedades de representações manipuladas no AGDcT exigem compreensão e coordenação dos registros (PASIN; SCHEFFER, 2013). Neste sentido, os domínios de manipulação evidenciam os diferentes trajetos do raciocínio do aluno enquanto interage com o app, uma vez que podemos observar os movimentos de vai e vem que ocorrem enquanto o aluno manipula a tela. Vejamos a figura a seguir:

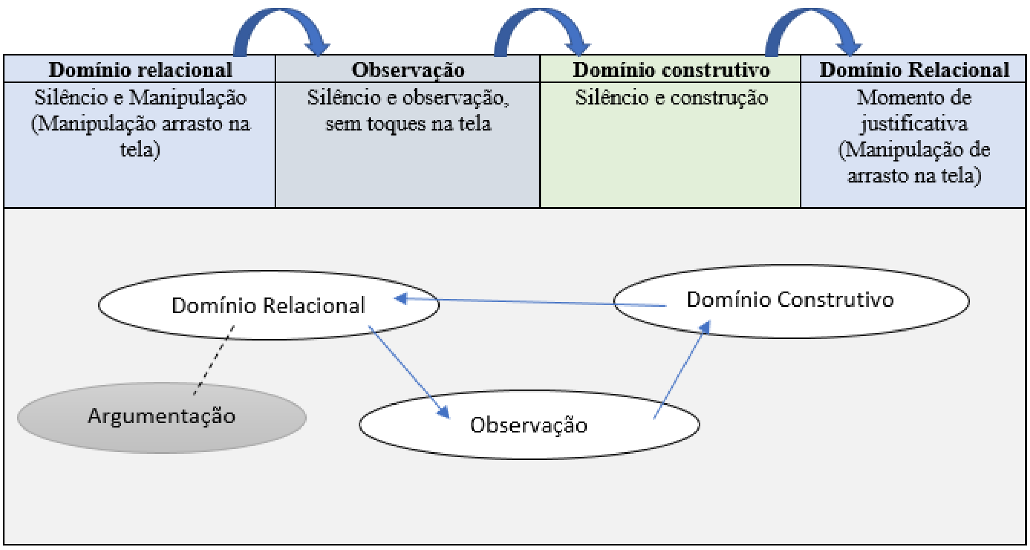


Figura 14 - Síntese movimentos entre os domínios de manipulação
Fonte: Elaboração da autora.

A figura anterior sintetiza os movimentos entre os domínios de manipulação realizados pelo aluno A no decorrer da atividade item b. Enquanto o graduando permanece no domínio relacional, ele analisa, observa, conjectura, fazendo aproximações com o diagrama na tela. O momento de observação pode ser interpretado como uma pausa para a retomada dos próximos passos, ou uma dúvida, por exemplo, neste caso específico o graduando procura por uma falha e verifica sua hipótese de construção. Passa então para o domínio construtivo e finaliza a construção no app, retorna ao domínio relacional justificando seus passos, agora além das aproximações na tela a fala entra em cena compondo um cenário argumentativo com duas interações simultâneas: a linguagem oral (argumentação) e a manipulação na tela.

Com relação a 4ª fase, esta contribuiu para que observássemos que a tecnologia não foi contemplada como gostaríamos, o que é natural nessa dinâmica de analisar e propor as tarefas a partir das respostas dos alunos, faz parte do nosso aprendizado enquanto professores e pesquisadores. Nem sempre quando planejamos tudo ocorre como desejamos. Por este motivo, ratificamos mais uma vez a importância de se atentar ao desenho da atividade e ao recurso tecnológico utilizado.

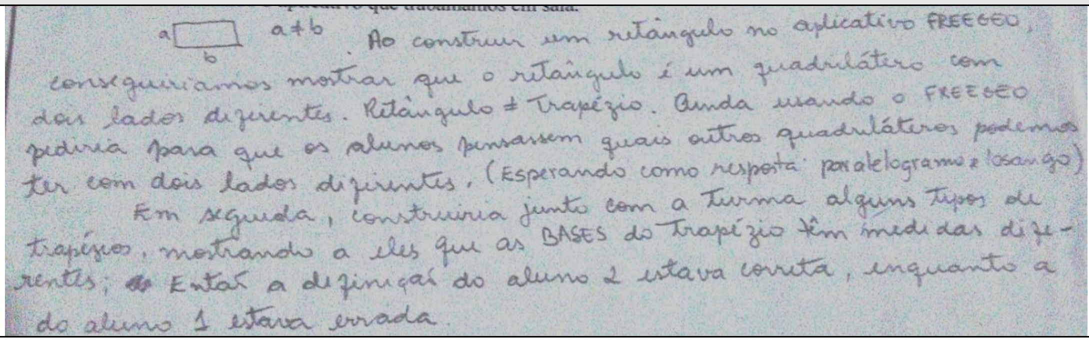
6 ÚLTIMA FASE DE IMPLEMENTAÇÃO: ZOOM ANALÍTICO

Neste capítulo iremos focalizar as atividades desenvolvidas na quinta fase de implementação. Destacaremos a segunda atividade, realizada pelo grupo 2, pois, de todas as tarefas propostas, esta foi a que conseguimos observar o uso do App de modo potencializador à aprendizagem dos alunos. Na tarefa dois, obtivemos o vídeo completo dos graduandos, ou seja, todo o momento de discussão e desenvolvimento da atividade foram salvos.

6.1 A quinta fase de implementação

Como já referido anteriormente (no capítulo 3) as atividades propostas nesta fase foram elaboradas com base nas respostas e dificuldades observadas no decorrer das fases anteriores. A organização, desta vez, se deu em forma de grupos de no máximo 3 alunos e com fichas com duas atividades, sendo uma tarefa comum a todos os grupos e as demais diferentes. Vejamos a seguir os quadros com as respostas dos grupos, ao todo tivemos os dados coletados de 4 grupos e um total de 11 alunos. Ressaltamos, novamente, que além das fichas cada grupo recebeu um *tablet* para a realização das tarefas.

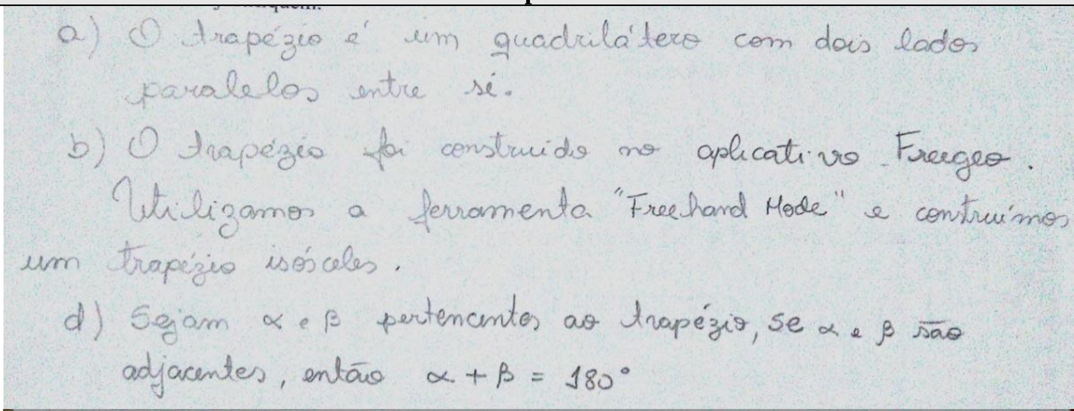
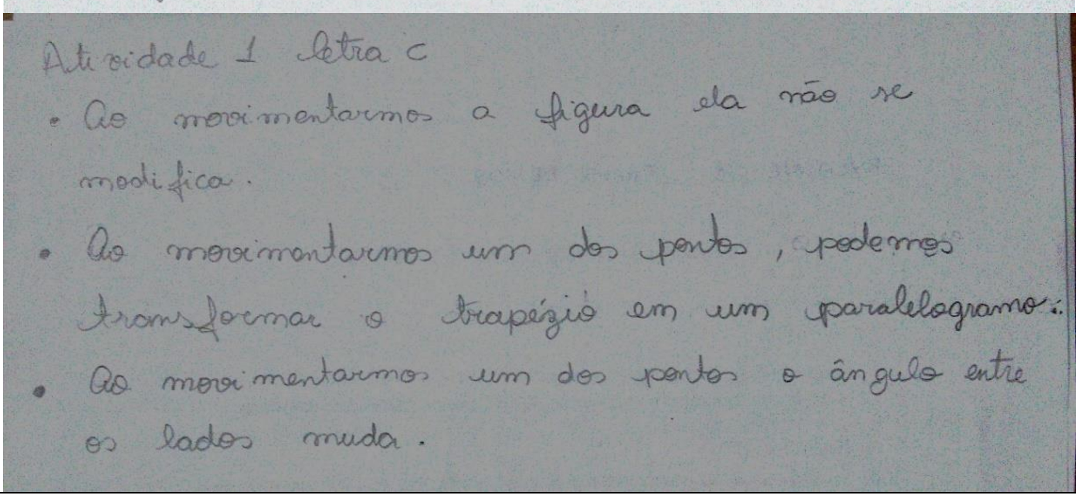
Quadro 13 - Atividade 1: Grupo 1

Atividade 1 detalhada – Grupo 1
Em uma aula sobre quadriláteros notáveis no momento de discussão surgiram duas proposições levantadas pelos alunos: 1. “Se um quadrilátero possui dois lados com medidas diferentes então é um trapézio”; 2. “Se um quadrilátero possui bases com medidas diferentes não é um trapézio. ” Esta aula foi em uma turma do nono ano do ensino fundamental. Imagine que vocês conduziriam a discussão. Elaborem uma tarefa utilizando o aplicativo que trabalhamos em sala.
Resposta dos estudantes
 a b $a \neq b$. Ao construir um retângulo no aplicativo FREEGEO, conseguiríamos mostrar que o retângulo é um quadrilátero com dois lados diferentes. Retângulo ≠ Trapézio. Ainda usando o FREEGEO pediria para que os alunos pensassem quais outros quadriláteros podemos ter com dois lados diferentes. (Esperando como resposta: paralelogramo e losango) Em seguida, construiria junto com a turma alguns tipos de trapézios, mostrando a eles que as BASES do trapézio têm medidas diferentes; Então a definição do aluno 2 estava correta, enquanto a do aluno 1 estava errada.

Fonte: Elaboração da autora.

O grupo 1 era composto por três discentes, não foi possível obter o vídeo a partir do *tablet* que estava com eles por falhas técnicas, contudo, os discentes afirmaram não ter utilizado o aplicativo nesta atividade. Analisando a resposta dada ao grupo, podemos observar que a imagem conceitual do protótipo (HERSHKOWITZ et al., 1994) ainda é recorrente, além do desenho realizado no canto superior esquerdo da imagem, a fala “o retângulo é um quadrilátero com dois lados diferentes” apoia nossa constatação. Vamos analisar a seguir o grupo 3. Deixaremos a análise do grupo 2 para a próxima seção.

Quadro 14 - Atividade 3: Grupo 3

Atividade 3 detalhada – Grupo 3
3 - a) O que vocês entendem por trapézio? b) Construam um trapézio qualquer e justifiquem os passos da construção. c) Ao movimentar sua construção o que acontece? Façam, pelo menos, três observações. d) Qual a relação existente entre os ângulos adjacentes do quadrilátero construído? Apresentem uma proposição (da forma condicional) para esta relação e justifiquem.
Respostas
 a) O trapézio é um quadrilátero com dois lados paralelos entre si. b) O trapézio foi construído no aplicativo Freegeo. Utilizamos a ferramenta "Freehand Mode" e construímos um trapézio isósceles. d) Sejam α e β pertencentes ao trapézio, se α e β são adjacentes, então $\alpha + \beta = 180°$  Atividade 1 letra c • Ao movimentarmos a figura ela não se modifica. • Ao movimentarmos um dos pontos, podemos transformar o trapézio em um paralelogramo. • Ao movimentarmos um dos pontos o ângulo entre os lados muda.

Fonte: Elaboração da autora.

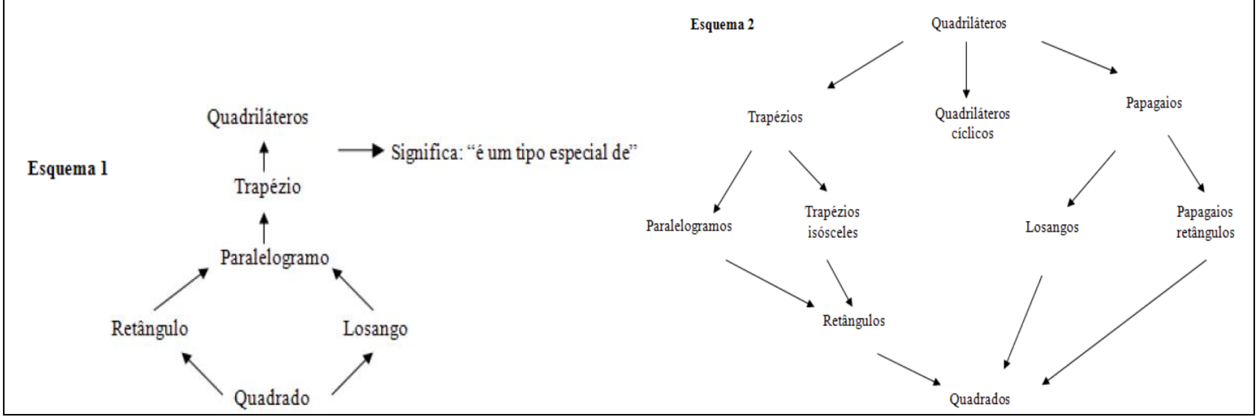
Nesta atividade observamos que a tecnologia serviu apenas como um recurso diferente do papel e do lápis para rascunhar um trapézio. O grupo afirmou ter utilizado a ferramenta mão livre (ícone *Freehand*) e, pelo observado no vídeo, notamos que os discentes desenharam com a ponta dos dedos a figura na tela do dispositivo, esta foi a primeira tentativa de construção. Como a figura deformava com os movimentos de arrasto, o grupo passou a fixar os segmentos por meio de outra ferramenta, entretanto, a segunda tentativa de construção do trapézio também não funcionou como os discentes esperavam, visto que a figura continuava a se deformar.

Podemos observar a contradição do grupo em suas respostas no item c: “Ao movimentarmos a figura ela não se deforma” e depois “Ao movimentarmos um dos pontos, podemos transformar o trapézio em um paralelogramo”, mas a construção não era um trapézio isósceles? Como pode se transformar em um paralelogramo se não deformava a figura? Pelo observado nos vídeos, a resposta a essas indagações é o fato da tecnologia atrapalhar ao invés de ajudar, complicou a exploração do polígono uma vez que a figura não fora construída com base nas suas propriedades, mas sim com base na imagem conceitual (HERSHKOWITZ et al., 1994) que o grupo apresentava sobre trapézio. Apesar dos graduandos não terem utilizado as propriedades do trapézio na elaboração do referido polígono podemos perceber que compreendem algumas propriedades e a definição de trapézio, basta observarmos a resposta do item a e do item d. Portanto, apesar do cuidado que tentamos ter no processo de elaboração desta atividade, a tecnologia utilizada não estava adequada.

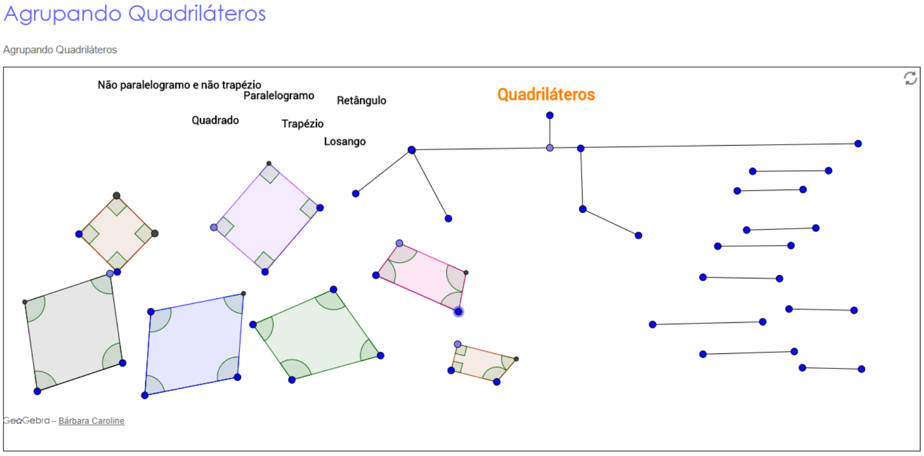
A resposta ao item d da atividade não foi descoberta a partir da exploração da figura construída no aplicativo, um dos discentes do grupo se recordou da propriedade e a transcreveu na folha. E não houve nenhuma tentativa de justificativa para a propriedade. Ilustramos a seguir a atividade 4:

Quadro 15 - Atividade 4: Grupo 4

Atividade 4 detalhada – Grupo 4
A seguir vocês veem duas organizações esquemáticas sobre quadriláteros apresentadas por alunos do nono ano. A partir dos conhecimentos e das atividades trabalhadas em sala identifiquem a definição de quadriláteros implícita em cada esquema. Utilizem o applet no GeoGebra para construir um mapa conceitual e analise este tipo de atividade, com tecnologia, relacionando-a com as respostas dos alunos indicadas nos esquemas abaixo.

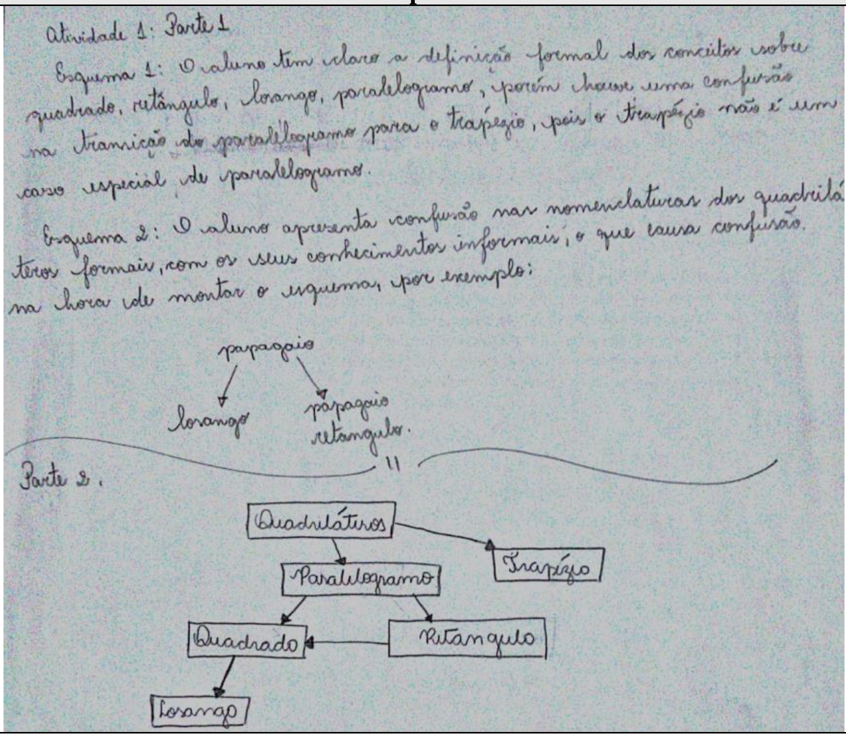


Quadro 15 - Atividade 4: Grupo 4



Applet construído pela autora no repositório do GeoGebra

Respostas



Fonte: Elaboração da autora.

Nesta atividade também não foi possível obter o vídeo, por questões técnicas houve muitas falhas na gravação. Além disso, o applet planejado para esta atividade também não pode ser utilizado, uma vez que não conseguimos estabilidade com a conexão da internet. Contudo, no diagrama construído pelo grupo, podemos observar avanços nas respostas quanto a classificação dos quadriláteros, pois o trapézio, apesar de não ter nenhuma ligação com o paralelogramo, já não é colocado mais como um subconjunto do retângulo como em atividades anteriores a essa fase.

Ilustraremos no quadro seguinte as respostas dos alunos para a atividade comum a todos os grupos.

Quadro 16 - Atividade comum a todos os grupos

Atividade comum a todos os grupos
A partir das leituras feitas na disciplina destaquem alguma ideia que a dinâmica vivenciada em Ensino II no trabalho com quadriláteros, contribui: 1. Para o aprendizado matemático. 2. Sobre a importância da tecnologia digital nessa dinâmica. Escolham pelo menos um dos textos para responder ao item 1 e um outro para o item 2.
Respostas
Grupo 1: *"Texto sobre Van Hiele. Boletim Gepem 32 – 1994, pág. 6A teoria de Van Hiele distingue níveis sequenciais do pensamento geométrico.* *1º nível fala do reconhecimento ou visualização; 2º nível a análise; 3º nível a ordem; 4º nível a dedução; 5º nível o rigor (...)"*
Grupo 2:*"Em consonância com Santos e Bairral (2015), o uso dos recursos manipulativos, como por exemplo, o aplicativo FreeGeo, auxilia no ensino e aprendizagem da geometria devido aos recursos visuais e as opções de manipulação que esse tipo de ferramenta oferece. Todavia, esses aplicativos não excluem a exploração dos conceitos da geometria. Concordamos com Mercado (2008), quanto a inserção do material de apoio nas aulas de geometria, pois oferecem múltiplas informações melhorando ações que resultarão em conhecimentos adquiridos pelos alunos. "*
Grupo 3: *"1 e 2 . Reconhecer características dos quadriláteros, classificando-os em relação a lados e ângulos, aprendendo sobre suas propriedades através das atividades realizadas em sala, com o uso de softwares, entre outros.* *A utilização de técnicas lúdicas: como jogos, direcionados pedagogicamente em sala de aula estimulam a construção do pensamento lógico, matemático de forma significativa. Utilizamos os textos da BNCC e o outro foi jogar e desenvolver competências matemáticas"*
Grupo 4: *"1 – Baseado no texto Santos e Bairral, o ideal para melhor desenvolvimento das aulas, devemos partir do conhecimento do aluno, para assim aos poucos introduzir os conhecimentos formais e ao final realizar um feedback.* *2 – Baseado no texto Bairral e Settimy, a tecnologia pode auxiliar na visualização dos quadriláteros, que por muitas vezes o que dificulta a aprendizagem são os desenhos por muitas vezes sem riquezas de detalhes"*

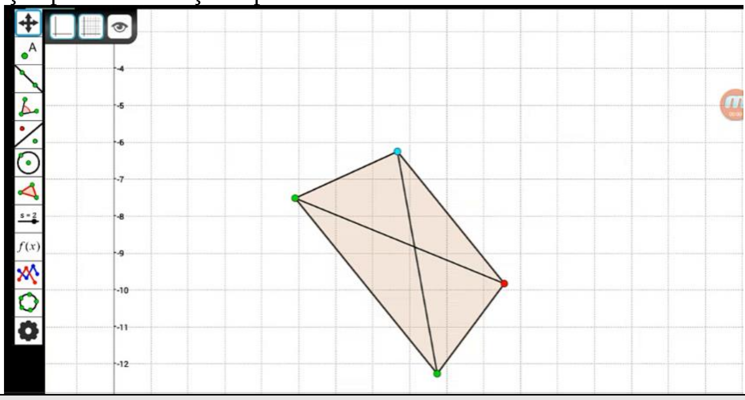
Fonte: Elaboração da autora.

Analisando as respostas no quadro anterior observamos que a tecnologia digital nesse contexto possui um espaço importante, uma vez que os estudantes reconhecem pontos positivos na sua utilização como "oferecem múltiplas informações" (Grupo 2), "auxiliar na visualização"(grupo 4). É interessante observar que na dinâmica vivenciada a formação do futuro professor não fica pautada apenas em estudos específicos da teoria matemática, mas proporciona a vivência de uma proposta diferenciada e atrelada a estudos teóricos da área da educação matemática.

6.2 Análise: atividade 2

A tarefa a seguir foi realizada por três graduandos. Vejamos o quadro a seguir com o detalhamento da atividade e a resposta escrita dos alunos:

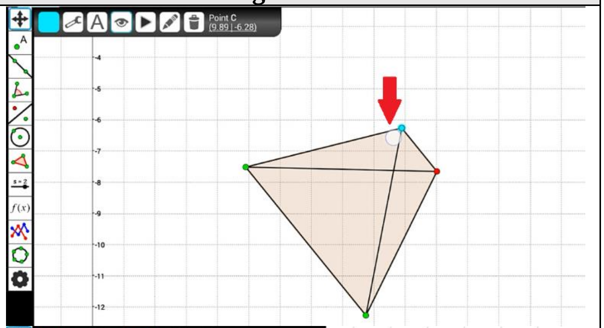
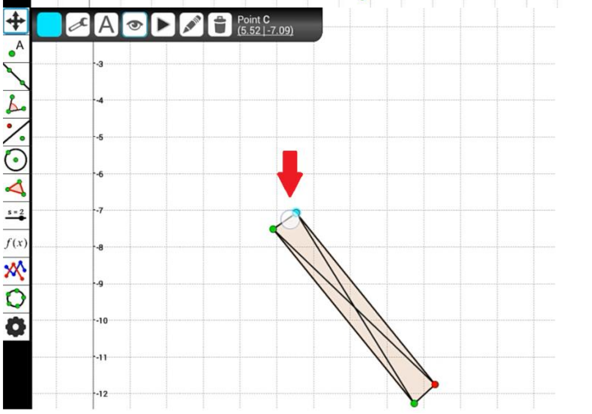
Quadro 17 - Atividade 2: Grupo 2 (continua)

Atividade 2 detalhada – Grupo 2
2 - (Abra o arquivo no app FreeGeo) Que tipo de quadrilátero foi construído no aplicativo? Qual a relação existente entre as diagonais do quadrilátero apresentado no aplicativo? Elabore uma proposição para esta relação e prove-a. 
Respostas
(Abra o arquivo no *app FreeGeo*) a) Que tipo de quadrilátero foi construído no aplicativo? UM TRAPÉZIO ISÓSCELES. b) Qual a relação existente entre as diagonais do quadriilátero apresentado no aplicativo? SÃO CONGRUENTES, c) Elaborem uma proposição para esta relação e prove-a. SEJA O QUADRILÁTERO ABCD UM TRAPÉZIO ISÓSCELES ENTÃO PODEMOS AFIRMAR QUE AS DIAGONAIS AC E BD SÃO CONGRUENTES. -Prova. COMO POR HIPÓTESE O TRAPEZIO É ISOSCELES, ENTÃO OS LADOS NÃO PARALELOS, CHAMAREMOS DE AB e CD SÃO CONGRUENTES. PODEMOS ENTÃO CONSTRUIR OS TRIÂNGULOS ABC e DCB, QUE SÃO SEMELHANTE POIS, OS ÂNGULOS $\hat{B}$ E $\hat{C}$ SÃO CONGRUENTES E O LADO BC É COMUM, PORTANTO IGUAL. COMO TEMOS AB = CD, ENTÃO, POR SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS TEMOS QUE AS DIAGONAIS AC E BD SÃO CONGRUENTES. Atividade 2.

Fonte: Elaboração da autora.

Para a elaboração desta atividade, consideramos a ideia de Cirillo e Herbst (2010) no sentido de propor aos alunos caminhos inversos para se chegar a elaboração de uma prova matemática. Ou seja, tradicionalmente apresentaríamos a proposição e solicitaríamos que os discentes a provassem, mas, inspirados na pesquisa de Cirillo e Herbst (2010), iniciamos a atividade por meio da exploração de um diagrama no AGDcT previamente elaborado pela pesquisadora. Além disso, a temática da tarefa emergiu das dificuldades dos alunos, como observamos que a definição e as propriedades do trapézio pareciam confusas em algumas fases de implementações, realizadas anteriormente, investimos um pouco mais nesse assunto. Vejamos um fragmento de vídeo sobre essa atividade abaixo, ressaltamos que os índices A1, A2 e A3 são referências as falas dos alunos, enquanto P indica a fala da pesquisadora, assim como as setas em vermelho indicam o local do toque do aluno na tela.

Quadro 18 - Diálogo sobre a atividade 2 do grupo 2 (Parte 1)

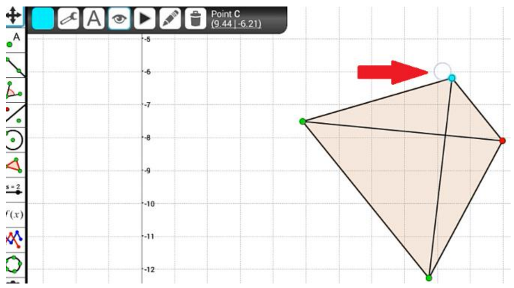
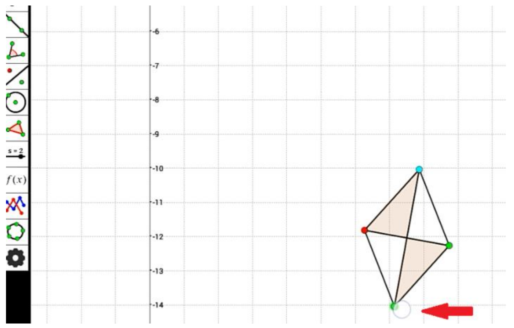
Transcrição: 00:00:08 – 00:00:57	Imagens da tela
A1: Ó a gente tá mexendo aqui e a gente percebeu que pode se transformar em outro tipo de quadrilátero. *(fala simultânea a manipulação)* Ó pode ser um retângulo...isso é um retângulo?*(tom muito baixo)* **P:** Mas que tipo de quadrilátero é esse? **A1:** Que tipo... **P:** É você falou assim: “pode transformar em outro tipo” **A2:** É transformar em outro formato. **A1:** É! Ó aqui é um retângulo. **A3:** Não. É um trapézio. **A1** Um trapézio ainda? **A3**: Ainda é um trapézio. **A1:** Sempre vai ser um trapézio? **A3:** Sim. **A1:** Parece um retângulo. **A3:** Não é. É um trapézio. **A1:** Por que? **A2:** Porque essas daqui... não são fixas *(tom muito baixo).* Por causa do ângulo, não é de noventa graus, não é? *(parece apontar para algo no diagrama e questiona A3, mas não temos a gravação do grupo somente da tela do tablet e o áudio)* **A3:** É. Elas não são paralelas. **A1:** Entendi. Então, vai ser sempre um trapézio!	 

Fonte: Elaboração da autora.

Nesta atividade o domínio relacional de manipulação foi o mais utilizado pelos graduandos (ARZARELLO et al., 2014), pois, como mencionamos anteriormente, o objeto a ser explorado já estava construído. A manipulação de arrasto na tela foi utilizada com muita frequência, mesmo quando não havia momentos de diálogos entre os estudantes, um deles continuava a manipular a tela em silêncio. O domínio construtivo ganha destaque nas manipulações dos alunos nos momentos de verificação de hipóteses, quando os estudantes utilizam toques simples e pontuais a procura da ferramenta que possibilita a medição dos lados do polígono. Destacamos também o tempo de resposta simultâneo ao reconhecimento da entrada do toque diferente do ato de clicar com um mouse.

No fragmento de vídeo anterior, observamos as inferências que podem ocorrer no domínio relacional de manipulação não necessariamente serão levantadas pelo aluno que manipula a tela, ou seja, num contexto de trabalho em grupo, os integrantes que não possuem o controle momentâneo também observam a tela e colocam suas conclusões com base na observação da manipulação do outro. Podemos observar isso nas falas: “**A1:** É! Ó aqui é um retângulo.” “**A3:** Não. É um trapézio.” “**A2:** Porque essas daqui... não são fixas (tom muito baixo). Por causa do ângulo, não é de noventa graus, não é?” supomos que quem estava manipulando era o aluno 1 (A1) (porque, foi este aluno que iniciou a conversa com a pesquisadora), mas os outros dois integrantes do grupo (A2 e A3) estavam com a atenção voltada para as variantes do objeto arrastado por A1, tanto que explicaram e alertaram A1 para observar que sua suposição de ser retângulo estava equivocada. A seguir apresentamos mais um fragmento de vídeo referente a atividade 2:

Quadro 19 - Diálogo sobre a atividade 2 do grupo 2 (Parte 2)

Transcrição: 00:01:44 - *00:03:09*	**Imagens da tela**
A1: Elas são iguais! *(afirmativa após ler o enunciado do item b)* **A3:** Por que? Prova aí! **A1:** Não sei provar, mas elas são iguais - *muitas vozes ao fundo –* **A3:** Como que não sabe provar? **A1:** Elabore uma proposição, também. **A3:** Então, proposição 1: Diagonais de todos os trapézios são iguais...são congruentes...Diagonais de um trapézio *(muitos movimentos de arrasto na tela)*, mas esse trapézio parece isósceles. Como é que eu coloco a medida? Esqueci...Aí ela vem e estraga o trapézio, ai pronto! *(a figura é deformada)* **A2:** Isso aqui é um trapézio? **A3:** Não mais, você estragou. Não é mais nenhum polígono. Cadê? Volta! - *Neste momento eles começam a procurar pelas ferramentas no menu do aplicativo por uma solução que permita que eles meçam os segmento do polígono explorado* **A3:** Eu quero a medida, se lembra como conseguir a medida? **A1:** É aqui, ah não, aqui é coordenada do ponto. **A3:** Esse aqui dá a medida a mãozinha... Aqui dá. Oito ponto quarenta e oito, oito ponto cinco, oito ponto cinco, cinco sete quatro, cinco sete quatro (5.74). É isósceles! (*A3 parece assumir a manipulação na tela e encontra a ferramenta que estava procurando)*	 

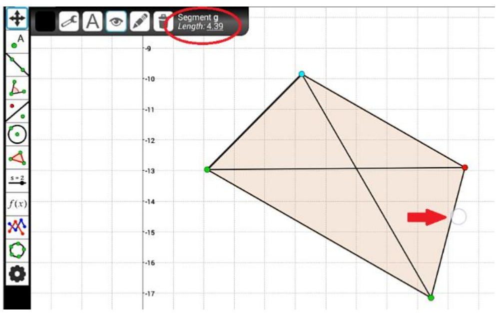
Fonte: Elaboração da autora.

Observando o trecho de vídeo no quadro acima, ratificamos que o diagrama dinâmico no AGDcT, neste tipo de atividade, contribuiu para a exploração do polígono e investigação de hipóteses, uma vez que os discentes tiveram que utilizar ferramentas para averiguar suas suposições, podemos observar este fato na fala: “**A3:** Esse aqui dá a medida a mãozinha... Aqui dá. Oito ponto quarenta e oito, oito ponto cinco, oito ponto cinco, cinco sete quatro, cinco sete quatro (5.74). É isósceles!”. Este tipo de investigação não seria possível com o papel e o lápis, como na proposta de Cirillo e Herbst (2010), uma vez que as informações precisariam ser dadas previamente já que no papel não há a possibilidade de movimentar o desenho. Além disso, a figura no aplicativo permitiu que os discentes observassem uma classe de trapézios e não somente uma única representação, isto é, um único protótipo (HERSHKOWITZ et al., 1994).

Chamamos atenção também para a deformação da figura, segundo Mariotti (2000), a não deformação da figura garante geometricamente a demonstração da proposição, contudo, neste tipo de *software*, destacamos que a deformação da figura nem sempre significa que a construção não foi realizada com base nas propriedades do conceito explorado, pois a construção geométrica feita para gerar o trapézio, por exemplo, também possui o caráter dinâmico, o que implica nas variações de objetos que teremos ao realizarmos a manipulação de arrasto.

Outro aspecto importante a ser ressaltado é que os discentes exploraram a função da descoberta e da explicação que a demonstração pode assumir, assim como Villiers (2001) aborda. O processo de investigação e organização dos enunciados lógicos é um processo de descoberta para os discentes (VILLIERS, 2001), além disso, a demonstração que eles construíram no fim da atividade justifica a proposição que os mesmos elaboraram. Neste sentido, notamos que a demonstração foi realizada primeiro a fim de justificar e verificar a hipótese tida como proposição. Vejamos a fala que confirma nossa hipótese: "**A1:**Vamos primeiro elaborar a proposição. Não melhor a gente provar primeiro." (Quadro 21)

Quadro 20 - Diálogo sobre a atividade 2 do grupo 2 (Parte 3)

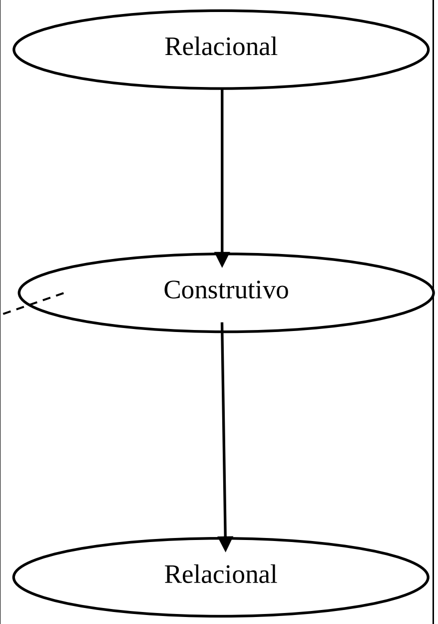
Transcrição: 00:04:14 – 00: 05:18	Imagens da tela
A1: Elas são congruentes. **A2:** Elas se cortam ao meio? **A1:** Não. Ao meio não. Só o quadrado que se corta no meio. **A3:** O quadrado e o losango também. **A1**: É verdade. **A3:** Mas tu mexeu de novo! Agora elas não são mais iguais. *(manipulações de arrastos na tela)* **A1:** São sim cara. Do jeito que ela construiu elas são sempre iguais... Ih! Não. **A3:** Não são. *(Apesar dos estudantes pensarem que os segmentos não paralelos do polígono que arrastaram possuem medidas diferentes, o que ocorreu na verdade foi que quando eles tocaram nos segmentos eles arrastaram a figura tão sutilmente que não notaram que a medida não variou de um segmento para o outro, eles quem mexeram novamente na figura ao tentar medir)* **A1:** São congruentes. **A3:** É são congruentes. **A1** começa lendo o enunciado do item b e diz: Puts grila! Vamos primeiro elaborar a proposição. Não melhor a gente provar primeiro. **A2:** É! **A3:** Ó sei que essas duas são paralelas e essas (...). *(neste momento do vídeo não há manipulações na tela)*	

Fonte: Elaboração da autora.

Um ponto negativo que notamos no quadro acima é a fragilidade do movimento na construção devido a sensibilidade ao toque na tela do dispositivo quando realizado manipulações tão sutis ao ponto de confundir as suposições dos estudantes. Como verificado nas falas: "**A1:** São sim cara. Do jeito que ela construiu elas são sempre iguais...Ih! Não. "**A3:** Não são.". Além disso, a característica do aplicativo de não selecionar por meio do toque direto no objeto que se deseja é um aspecto de reclamação recorrente nas implementações.

Com relação a construção da argumentação no AGDcT, sintetizamos no quadro a seguir falas do raciocínio dos alunos que nos dão indícios do desenvolvimento desse processo.

Quadro 21 - Síntese da argumentação do grupo

Recortes da transcrição	Manipulação (domínios)
A1: *Ó* ***pode ser um*** *retângulo...****isso é*** *um retângulo?* ***A3:Não. É um*** *trapézio.* ***A1:Sempre vai ser um*** *trapézio?* ***A3:*** *Sim.* ***A1:Entendi. Então, vai ser sempre*** *um trapézio!(...)* ***A1:*** *Elas são iguais!* ***A3:*** *Por que? Prova aí!* ***A1:Não sei provar, mas elas são iguais*** ***A3:*** *Então, proposição 1:* ***Diagonais de todos os trapézios são iguais****...são congruentes...Diagonais de um trapézio(...)* ***A3:Esse aqui dá a medida*** *a mãozinha... Aqui dá. Oito ponto quarenta e oito, oito ponto cinco, oito ponto cinco, cinco sete quatro, cinco sete quatro (5.74).* ***É isósceles!****(...)* ***A1:*** *São congruentes.* ***A3:É são*** *congruentes(...)* ***A1:*** *Vamos primeiro* ***elaborar a proposição****. Não melhor a gente* ***provar primeiro****.* ***A2:*** *É!* ***A3:*** *Ó sei que essas duas são paralelas e essas (...).*	

Fonte: Elaboração da autora.

No quadro anterior, podemos observar a importância do diálogo do grupo e da exploração do *software* na construção do raciocínio coletivo e na elaboração da prova matemática. As palavras grifadas no quadro 22 nos indicam, de forma resumida, o caminho percorrido pelo grupo, vejamos: as palavras ***"pode ser um""isso é ...?"*** nos indicam as primeiras hipóteses juntamente com a manipulação de arrasto. Em seguida, as palavras "***Sempre vai ser um...?"*** nos mostra uma mudança, o que antes era uma dúvida começa a ser esclarecido com o incremento de conhecimentos matemáticos relacionados ao tema. Chegam a uma conclusão como destacamos com as palavras: ***"Entendi. Então, vai ser sempre"***. Formulam uma nova hipótese, pautada em conhecimentos já observado em outra situação, como nos indicam as falas: "***Não sei provar, mas elas são iguais"***, ***"Diagonais de todos os***

trapézios são iguais”. Neste momento, pausam a formulação da proposição para verificar outra hipótese (se o trapézio era isósceles): “***Esse aqui dá a medida”***,***“ É isósceles!”*** (manipulação toque simples, domínio construtivo),concluem seu raciocínio: ***“É são.”*** Retomam a elaboração da proposição, mas começam pela prova, como podemos notar nas falas: ***“elaborar a proposição”*** em seguida ***“ provar primeiro”***.

6.3 Discussões e reflexões

Portanto, esta última fase de implementação contribuiu em diversos aspectos para a dinâmica proposta, vejamos:

- Observamos que a proposta de algumas atividades ainda não estava adequada para a tecnologia utilizada (no caso da atividade 3);
- Contornar imprevisto relacionados ao âmbito informático (falha na conexão da internet, app direcionado ao sistema operacional da smartphone)
- Investir na discussão com relação a imagem conceitual que alguns alunos possuem sobre quadriláteros, uma vez que esta imagem continua a interferir nos julgamentos e analises elaboradas pelos estudantes nas tarefas propostas; (Ressaltamos que depois dessa fase de implementação ocorreu um momento de discussão com os estudantes sobre as respostas das atividades vivenciadas nesse momento.);
- Ratificar que a transição entre os domínios de manipulação (relaciona – construtivo - relacional) foi um processo emergente na exploração e elaboração de conjecturas neste tipo de atividade. (Por exemplo, na atividade 2.);
- Ressaltar que a dinâmica dialógica com o AGDcT foi um elemento potencializador do processo de argumentação e elaboração de provas autorais.

Na próxima seção discutiremos os resultados que a presente pesquisa corroborou para a temática de processo de elaboração de provas com o uso de AGDcT e em uma dinâmica de aula que oportunizou aos licenciandos outras formas de interação e de registro de suas ideias matemáticas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, vimos que o trabalho de exploração dos processos de elaboração de provas no AGDcT constitui um campo fértil para observarmos as contribuições que os dispositivos móveis podem proporcionar ao ensino de matemática particularmente e ao ensino em geral. Além disso, a constante revisão das atividades e das respostas dos graduandos corroboraram para a reflexão do papel docente na elaboração de tarefas. Para responder nossa questão inicial de pesquisa (Que contribuições o uso da tecnologia *touchscreen* e de atividades com recursos variados podem proporcionar ao ensino de geometria, especificamente nos processos de argumentação sobre quadriláteros?) pontuamos a seguir nossas reflexões a partir de nossos objetivos específicos:

Objetivo 1: Analisar contribuições que o desenho das atividades pode proporcionar no processo de elaboração de provas matemáticas.

O desenho das atividades propostas na presente pesquisa ganhou forma a partir de movimentos de idas e vindas nas respostas e dificuldades dos graduandos. Nesta dinâmica de elaborar tarefas que emergem dos desafios da sala de aula, acabamos por cair em algumas armadilhas nas quais a tecnologia digital não se fez necessária. As atividades que não contemplaram o uso da tecnologia digital nos orientaram na elaboração de tarefas que realmente estimulem a exploração, a experimentação e a elaboração de conjecturas com o uso do AGDcT.

Conhecer as dificuldades dos graduandos nos auxiliou na elaboração de uma proposta que visou o refinamento de ideias e a quebra do paradigma das representações prototípicas, uma vez que observamos que as imagens conceituais (HERSHKOWITZ et al., 1994) que os graduandos possuem sobre os quadriláteros interferem em seus julgamentos e consequentemente na elaboração de seus argumentos. No capítulo 5, por exemplo, (terceira fase de implementação) ilustramos a resposta de um graduando na primeira fase de implementação baseada em um modelo prototípico que foi modificada devido a proposta da atividade de solicitar a construção de um quadrilátero a partir de uma propriedade, neste momento, o licenciando cria um diagrama diferente da imagem conceitual inicialmente apresentada e apresenta seu argumento baseado em uma sequência lógica e dedutiva por meio de uma prova geométrica.

Em sintonia com as ideias de Cirillo e Herbst (2010), Villiers (2001), Sinclair e Robutti (2013), procuramos compor um cenário para o desenvolvimento dos processos de ensino e aprendizagem que contribuísse para a valorização das diferentes funções da demonstração, a proposição de problemas que tratam de maneiras distintas um mesmo conceito, a valorização dos conhecimentos trazidos pelos alunos assim como a superação das dificuldades. Diferentemente da pesquisa de Cirillo e Herbst (2010), em nossas implementações, além de propor problemas que fogem da apresentação da proposição da forma condicional (e que solicita imediatamente a demonstração), incrementamos com o uso do AGDcT. Neste sentido, apresentamos problemas que contemplassem:

1. Exploração do diagrama pronto e elaboração da propriedade e prova;
2. Construção do diagrama a partir de propriedades e prova;

No item 1, Cirillo e Herbst (2001) propunham um diagrama dando algumas informações e os alunos deveriam formular a proposição e provar, na nossa pesquisa também disponibilizamos o diagrama, entretanto, como este era apresentado no AGDcT, os graduandos tiverem que explorar para descobrir as relações existentes entre os elementos que compõe o quadrilátero (veja a atividade 2, quinta fase de implementação). O item 2, nos inspiramos na proposição de Cirillo e Herbst (2001) em que os estudantes deveriam desenhar o diagrama (usando lápis e papel) dadas algumas informações da demonstração ou a demonstração completa. Em nossa pesquisa, partimos da propriedade como um desafio - atividade de Dalcin e Molfino (2012) – no qual o graduando deveria descobrir se era possível construir, no AGDcT, um quadrilátero a partir das informações dadas ou não e justificar (veja segunda atividade capítulo 5).

A atividade dois, apresentada no capítulo 6, constitui um exemplo importante da contribuição do desenho da atividade, uma vez que a proposta da tarefa possibilitou explorar a função da demonstração para além da comprovação da veracidade da propriedade. Isto é, os estudantes investigam o quadrilátero por meio da manipulação na tela e descobrem a sequência lógica dedutiva que precisam compor para validar o resultado também elencado por eles, a demonstração passa a ter a função de descoberta (uma descoberta não necessariamente do novo, mas, sim do refinamento do raciocínio matemático para uma determinada proposição). Além disso, contribui didaticamente para um ensino de produção de provas matemáticas com a autenticidade dos alunos, uma vez que não há uma preocupação em seguir um modelo ou uma sequência típica de demonstrações matemáticas, geralmente realizada apenas pelo docente.

Em suma, o desenho da atividade contribui na constituição de provas, classificações e argumentos autorais dos graduandos, enriqueceu a dinâmica dialógica entre os próprios graduandos (quinta fase de implementação atividade em grupo), possibilitou a criação e exploração de objetos geométricos diferentes dos modelos padrões e estáticos dos livros textos. Embora, não tenhamos analisado aspectos específicos (didáticos, curriculares, do conhecimento dos licenciandos) da pesquisa para a Formação Inicial em Matemática, a investigação traz contribuições, principalmente, didáticas (com a implementação de uma dinâmica interativa e de análise compartilhada de respostas pelo próprio coletivo) e cognitivas (com a promoção e reflexão de novas formas de justificar e de gerar processos de provas na licenciatura) mediante recursos e estratégias variadas de expressão do discurso.

Objetivo 2: Analisar contribuições que o AGDcT utilizado pode proporcionar na dinâmica proposta

Destacamos a característica da mobilidade e as redes de compartilhamentos como elementos essenciais para a realização do trabalho. O desenho leve, prático e fácil de se transportar dos dispositivos móveis como *smartphones* e *tablets* torna qualquer sala de aula digital colocando de lado o uso dos laboratórios de informática. Claro que concordamos que cada tecnologia possui suas potencialidades, não desejamos aqui comparar celulares com computadores, mas sim destacar os pontos positivos que esta tecnologia proporcionou ao desenvolvimento da pesquisa.

O primeiro aspecto que gostaríamos de ressaltar foi o uso de diferentes aplicativos, pois, tivemos logo de início que superar o fato de um dos aparelhos dos discentes não ser compatível com o aplicativo inicialmente planejado para as atividades. Este problema foi contornado graças ao compartilhamento do aplicativo via *bluetooth* do dispositivo da pesquisadora para o estudante. Essa forma de compartilhar também auxiliou na falta de conexão estável com a internet, as atividades não deixaram de acontecer devido a impossibilidade de *download*, pois um outro aplicativo foi compartilhado no momento da aula de modo rápido. Destacamos também, que a seleção dos app e o conhecimento sobre compatibilidade com o aparelho estão ligadas ao levantamento de app que realizamos em Assis, Bairral e Silva (2013). Neste sentido, o perfil de professor pesquisador foi um elemento diferencial na resolução deste imprevisto.

Os domínios de manipulação, relacional e construtivo dos estudos de Arzarello e colaboradores (2014) evidenciam aspectos importantes no processo de elaboração de provas como observação, exploração, verificação e formulação de hipótese. Ou seja, no domínio relacional, por exemplo, notamos que o refinamento de conjecturas torna-se mais presente, pois os movimentos de arrastos realizados na tela geralmente visam a aproximação do objeto para algo conhecido pelo estudante, nestes momentos o olhar do graduando para a variação dinâmica do diagrama na tela contempla observação de relações e propriedades. Enquanto que no domínio construtivo aspectos pontuais de verificação, por exemplo, tomam destaque.

Em um contexto de grupo, os domínios de manipulação influenciam de modo importante o raciocínio de todos os envolvidos e não somente daquele que manipula, pois o graduando que observa sem manipular a tela também realiza inferências. A dinâmica dialógica entre os graduandos é potencializada pela manipulação *touchscreen* no AGDcT. Na atividade dois, na quinta fase de implementação, destacamos as interações e o diálogo entre os graduandos que foi possível observar, por meio da transcrição de vídeo, o envolvimento de todos do grupo enquanto um deles manipula a tela.

A articulação entre o uso do lápis e papel, o aplicativo no *smartphone* (ou *tablet*), a oralidade, a interação entre os sujeitos e os gestos contribui para a diversidade de recursos semióticos coordenados pelo graduando, constituindo desta forma parte do pensamento de nosso aluno (RADFORD, 2014), pois nossas vivências são mapeadas e reelaboradas a medida em que somos confrontados com situações que nos impulsionam a criar ou evocar imagens de conceitos, sentimentos e sensações, constituindo assim o que somos enquanto seres humanos pensantes e sujeitos de nossa própria história.

Concluindo, destacamos que o AGDcT contribuiu com a característica da mobilidade que permitiu o contorno de imprevistos no momento das implementações, a possibilidade de trabalhar com diferentes app afim de atender as especificidades dos dispositivos de cada graduando, a manipulação *touchscreen* de arrasto realizada pelos licenciandos no domínio relacional como um processo importante na elaboração de conjecturas e refinamento de ideias, pois, este momento específico do domínio relacional indica um marco de análise, observação e busca de justificativas e argumentos por parte do graduando. A coordenação e exploração no ambiente *touchscreen* de diferentes signos enriquecem o processo argumentativo, pois as experiências vivenciadas irão compor o raciocínio dos graduandos permitindo que eles reelaborem os conceitos geométricos manipulados. O desenho dos aplicativos selecionados foi de suma importância para o desenvolvimento da proposta, pois disponibilizou ao usuário um ambiente que permite criar e explorar conceitos geométricos, ou seja, possuem uma natureza aberta pautada na teoria da geometria euclidiana plana.

Além da vivência prática por meio das implementações, buscamos relacionar ao longo da disciplina estudos teóricos que abordassem o uso da tecnologia digital no ensino. Ou seja, as atividades elaboradas foram pensadas em sintonia com perspectivas da matemática para o ensino. Desta forma, almejamos contribuir para a reflexão de nossos futuros docentes com relação a prática pedagógica que estes venham desenvolver. Nas respostas da quinta fase de implementação no capítulo 6, observamos que os graduandos compreendem a importância de inserir o uso da tecnologia digital na prática educativa.

Com relação a relevância e a contribuição da presente pesquisa, destacamos o papel docente de instigar e possibilitar tarefas que permitam a exploração, a observação, a criação de diferentes justificativas, a conjetura e a argumentação no âmbito das demonstrações matemáticas. Pois entendemos, assim como Villiers (2001), que as provas matemáticas podem constituir um campo fértil para trabalhar o pensar matemático dos alunos, desmistificando o conceito de prova como uma ferramenta que somente certifica um determinado resultado.

Como possíveis desdobramentos de pesquisa, indicamos a possibilidade de analisar o processo reflexivo dos graduandos a partir do experimento realizado, ou seja, até que ponto a proposta que implementamos implicará na prática educativa desses futuros docentes; analisar a narrativa que os mesmos construíram no decorrer das aulas, ou seja, os diários de aulas solicitados durante a disciplina podem constituir um campo fértil de investigação e observação do desenvolvimento da aprendizagem. Observar a argumentação com recursos variados incluindo, inclusive, o toque como parte desse processo argumentativo. Um desafio para a pesquisa seria analisar como ocorrem esses processos com a utilização de dispositivos móveis com *touchscreen* no ensino de formas geométricas planas na alfabetização de crianças.

REFERÊNCIAS

ARAUJO Jr., C.F.; DIAS, E.J. *Mobile learning no ensino de matemática:* um framework conceitual para uso dos tablets na educação básica. In: ENCONTRO DE PRODUÇÃO DISCENTE, 2012, Cruzeiro do Sul/ SP. **Anais** ... São Paulo: PUC, 2012. p. 1-13. 2012.

ARZARELLO, F. et.al. Moving from dragging to touchscreen: geometrical learning with Geometric dynamic software. **Teaching Mathematics and Its Applications**: Oxford Journals, v, 33, p.39-51, mar. 2014. Disponível em: <http://teamat.oxfordjournals.org/search?fulltext=moving+from+dragging+to+touchscreen&submit=yes&x=13&y=4>. Acesso em: ago. 2014.

ARZARELLO, F.; BAIRRAL, M.; DANÉ, C.; IIJIMA, Y. Ways of manipulation touchscreen in one geometrical dynamic software. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TECHNOLOGY IN MATHEMATICS TEACHING, 11.,, 2013, Bari **Anais.** Bari, 2013.

ALIBALI, M. W.; HOSTETTER, A. B. Visible embodiment: Gestures as simulated action. **Psychonomic Bulletin and Review**, p. 495–514, 2008.

BAIRRAL, M. A.; ASSIS, A. R.; SILVA, B. C.C. **Mãos em ação em dispositivos touchscreen na educação matemática**. (eBook). 1 ed. Seropédica: Edur. 2016. (Série InovaComTic; v. 7).

BAIRRAL, M. A.;ASSIS, A. R.; SILVA, B. C.C. **Mãos em ação em dispositivos touchscreen na educação matemática**. Seropédica: Edur. 2015. (Série InovaComTic; v. 7).

BAIRRAL, M. A. Do clique ao touchscreen: Novas formas de interação e de aprendizado matemático. In: REUNIÃO NACIONAL DA ANPED, 36., 2013, Goiânia. **Anais** ... Goiânia, 2013.

BAIRRAL, M. A.; ASSIS, A. R.; SILVA, B. C.C.C. Toques para ampliar interações e manipulações touchscreen na aprendizagem em geometria. In: SIPEM, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais.** Pirenópolis, 2015.

BOTZER, G.; YERUSHALMY, M. Embodied Semiotic Activities and Their Role in the Construction of Mathematical Meaning of Motion Graphs. **The International Journal for Computers in Mathematical learning**, p. 111-134, 2008.

CHINELLATO, T. G.; DOMINGUES, N. S.; HEITMANN, F. P. Tecnologias em sala de aula: explorando as possibilidades do tablet na educação. In: Encontro Nacional de Educação Matemática11.; ENEM, 11., 2013, Curitiba. **Anais**... Curitiba, PR. 2013.

CIRILLO, M.; HERBST, P. Moving toward more authentic proof practices in geometry**. Research Paper Retrieved from**. 2010. Disponível em: <http://deepblue.lib.umich.edu/handle/2027.42/78169>. Acesso em: nov. de 2013.

DALCÍN, M.; MOLFINO, V. Clasificación particional de cuadriláteros como fuente de demostraciones y construcciones en la formación inicial de profesores. **Instituto GeoGebra São Paulo**, São Paulo, v. 1, n. 1. 2012. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/

IGISP/issue/view/557/showToc>. Acesso em: 4 set. 2015.

________. Conjeturas y demostraciones a partir del embaldosado con polígonos regulares. **Instituto GeoGebra São Paulo**, São Paulo, v. 1, n. 1. 2012. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8934>. Acesso em: 4 set. 2015.

DAMÁSIO, A. **O cérebro criou o homem**. Trad. Laura Teixeira Motta. São Paulo: Companhia das letras. 2011.

DAMÁSIO, A. R. **O erro de Descartes**: emoção, razão e o cérebro humano. Trad. portuguesa Dora Vicente e Georgina Segurado. São Paulo: Companhia das Letras, 2014.

HEALY, L; HOYLES, C. Softwares tools for geometrical problem solving: potentials and pitfalls. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 6, p. 235-256, 2001.

IIJIMA, Y. GC/HTML5: Dynamic geometry software which can be used with Ipad and PC - Feature of software and some lessons with it ICME 12. **Anais**... ICMI. Seoul (Korea), ICMI, 2012.

LASA, A.; WILHELMI, M.R. Use of GeoGebra in explorative, illustrative and demonstrative moments. **Instituto GeoGebra São Paulo**, São Paulo, v. 2, n. 1, p.52-64. 2013. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/15160/12279> Acesso em: 4 set. 2015.

MARIOTTI, A. M. Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. **Educational Studies in Mathematics**, v. 44, p. 25-53. 2000.

NG, O; SINCLAIR, Nr. Area Without Numbers: Using Touchscreen Dynamic Geometry to Reason About Shape. **Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education**, p. 84-101, 2015.

OLIVEIRA, J. B. et. al. O uso de tablets e o GeoGebra como ferramentas auxiliadoras no ensino da matemática. In: CONFERÊNCIA LATINO AMERICANA DE GEOGEBRA, 2012, Uruguai. **Anais**... Uruguai, 2012. p. 405-413.

PELTON, T.; PELTON, L. F. 7 Strategies for iPads and iPods in the (Math) Classroom. **The Journal**, 2012. Disponível em: <http://thejournal.com/Articles/2012/07/11/7-Strategies-for-iPads-and-iPods-in-the-Math-Classroom.aspx?m=2//&p=1>

RADFORD, L. Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. **ZDM Mathematics Education**, v. 46, n. 3, p. 349-361. 2014.

SCHEFFER, N. F. **Corpo – Tecnologias – Matemática**: uma interação possível no ensino fundamental. Erechim: EdiFapes, 2002.

SCHEFFER, N. F.; PASIN, P. A argumentação de professores de matemática suscitada pelo uso de softwares dinâmicos: construindo significados. **Vidya**, v. 33, n. 1, p. 9-17, 2013.

SCOTT, S. D.; CARPENDALE, S. Interacting with digital tabletops. **IEEE Computer**

Graphics and Applications, Set/out. 2006. Disponível em: <http://www.eng.uwaterloo.ca/~s9scott/wiki/uploads/Main/scott_cga2006.pdf> Acesso

SINCLAIR, N.; ROBUTTI, O.Technology and the Role of Proof: The Case of Dynamic Geometry. In CLEMENTS, M. A. K.; BISHOP, A. J.; KEITEL, C.; KILPATRICK, J.; LEUNG, F. K. S. (Eds.), **Third International Handbook of Mathematics Education** (pp. 571-596). New York: Springer. 2013.

TOENNIES, J. L. et al. Toward Haptic/Aural Touchscreen Display of Graphical Mathematics for the Education of Blind Students. In: IEEE WORLD HAPTICS CONFERENCE, 2011. **Anais** ... Istanbul, Turquia, 2011. p. 373-378

VIGOTSKI, L. S. **Imaginação e criação na infância:** ensaio psicológico. In: VIGOTSKI, Lev Semionovich; Livro para professores. São Paulo: Ática, 135p. 2009.

VILLIERS, M. Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. **Educação e Matemática**, n. 62, p. 31-36, 2001.

APÊNDICE A - Produtos gerados pela pesquisa

Elaboramos para o nosso produto final um portfólio eletrônico o qual deixaremos a disposição do público geral vídeos, *applet* e *links* dos aplicativos usados na pesquisa, alguns tutoriais sobre o uso de alguns dos app e atividades desenvolvidas no decorrer da pesquisa (a sequência didática). A página foi criada pelo construtor de sites *Wix* (http://pt.wix.com/) em sua versão de edição *online* e gratuita. Disponibilizamos o acesso por meio do link: http://barbarasc.wixsite.com/mat-tablets

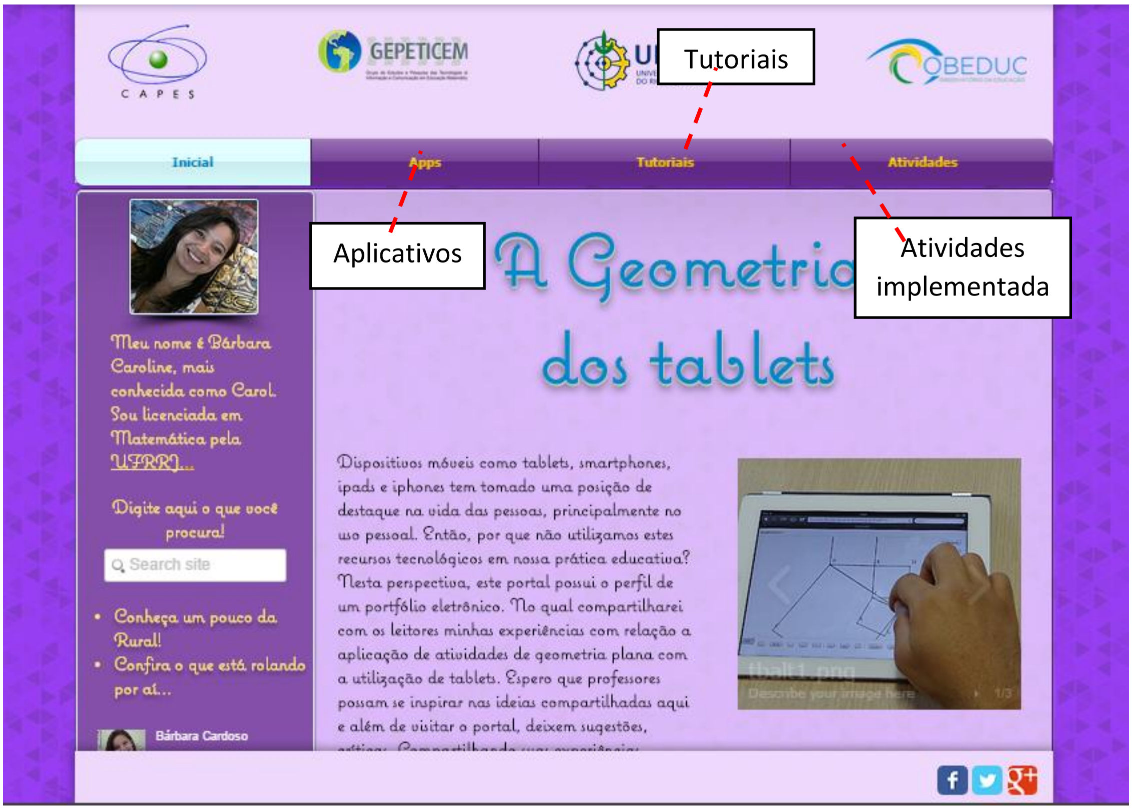
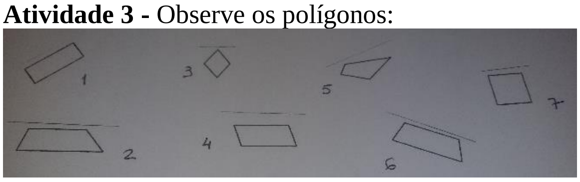


Figura 15 – Tela inicial do portfólio eletrônico
Fonte: Elaboração da autora.

A seguir ilustramos de forma resumida as atividades que apresentaremos na sequência didática, ressaltando a utilização dos aplicativos. Para que o leitor possa se inspirar e observar quando a tecnologia foi realmente utilizada de modo a contribuir para o processo de ensino e aprendizagem e os momentos em constituiu apenas uma interface diferente do lápis e o papel.

Quadro 22 - A sequência didática

Atividade	Utilização de app	Sem uso do app
Atividade 1 – Sejam aos polígonos: • quadrado • retângulo • trapézio • losango • paralelogramo Agora: Faça um desenho para cada um deles.		X
Atividade 2 - Escreva para cada um deles, pelo menos, uma observação, algo curioso, propriedade etc. • quadrado • retângulo • trapézio • losango • paralelogramo		X
Atividade 3 - Observe os polígonos:  Escreva para cada um (ou grupo) deles, pelo menos, uma observação, algo curioso, propriedade etc.		X
Atividade 4 – O que você entende por... g) Polígono h) Propriedade i) Ângulo j) Segmento k) Conceito Definição		X
Atividade 5 – Faça a construção dos quadriláteros listados abaixo, no app FreeGeo, e escreva pelo menos três observações para cada um. e) Quadrado f) Retângulo g) Trapézio h) Losango	X	
Atividade 6 – .Manipule livremente e diga uma característica interessante entre: a) O quadrado e o losango b) O retângulo e o trapézio c) O trapézio e o quadrado	X (utilização não é essencial)	
Atividade 7 – Agrupe os quadriláteros de acordo com critérios estabelecidos por você.		X
Atividade 8 – Analise as afirmativas abaixo colocando (V) para as que forem verdadeiras e (F) para as falsas. Justifique as que forem falsas. k) Para ser trapézio precisa ter bases com tamanhos diferentes. l) No losango as diagonais são perpendiculares e se cortam no meio. m) No losango todos os lados são iguais. n) Todo retângulo possui duas medidas de lado. o) Todos os quadriláteros são convexos. p) O paralelogramo possui bases paralelas de mesmo tamanho ligado por dois segmentos. Ângulos iguais dois a dois (opostos), sendo dois agudos e dois obtusos. q) O Quadrado é um losango. r) O Quadrado é um caso particular do retângulo.		X

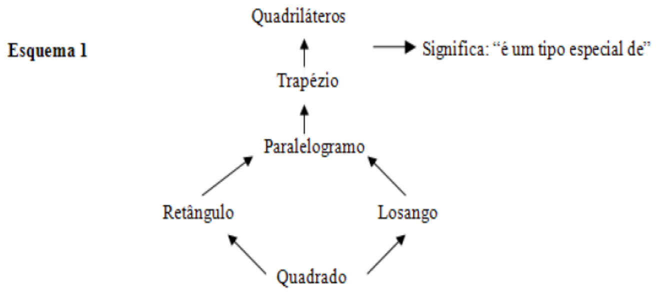
s) O retângulo é um caso particular do paralelogramo. t) A figura a seguir é um trapézio irregular.		
Atividade 9 – Construa quadriláteros que possuam as seguintes características: d) Sem lados iguais e sem ângulos iguais. e) Um único par de lados opostos iguais e um único par de ângulos opostos iguais. f) Um único par de lados consecutivos iguais e um único par de ângulos consecutivos iguais. É possível realizar as construções anteriores? Explique. Caso seja possível classifique os quadriláteros construídos.	X (utilização neste caso é essencial)	
Atividade 10 – Analise a seguinte proposição: “Se um paralelogramo é um retângulo, então as diagonais são congruentes” Complete o diagrama abaixo: (Utilize o FreeGeo caso necessite)		X
Atividade 11 – Em uma aula sobre quadriláteros notáveis no momento de discussão surgiram duas proposições levantadas pelos alunos: 1. “Se um quadrilátero possui dois lados com medidas diferentes então é um trapézio”; 2. “Se um quadrilátero possui bases com medidas diferentes não é um trapézio.” Esta aula foi em uma turma do nono ano do ensino fundamental. Imagine que vocês conduziriam a discussão. Elaborem uma tarefa utilizando o aplicativo que trabalhamos em sala.		X
Atividade 12 – (Abra o arquivo no app FreeGeo) Que tipo de quadrilátero foi construído no aplicativo? Qual a relação existente entre as diagonais do quadrilátero apresentado no aplicativo? Elabore uma proposição para esta relação e prove-a.	X (utilização neste caso é essencial)	
Atividade 13 a) O que vocês entendem por trapézio? b) Construam um trapézio qualquer e justifiquem os passos da construção. c) Ao movimentar sua construção o que acontece? Façam, pelo menos, três observações. d) Qual a relação existente entre os ângulos adjacentes do quadrilátero construído? Apresentem uma proposição (da forma condicional) para esta relação e justifiquem.		X (apesar de solicitarmos que a construção fosse realizada no app, a mesma não contemplou as potencialidades da tecnologia)
Atividade 14 – A seguir vocês veem duas organizações esquemáticas sobre quadriláteros apresentadas por alunos do nono ano. A partir dos conhecimentos e das atividades trabalhadas em sala identifiquem a definição de quadriláteros implícita em cada esquema. Utilizem o *applets* no *GeoGebra* para construir um mapa conceitual e analise este tipo de atividade, com tecnologia, relacionando-a com as respostas dos alunos indicadas nos esquemas abaixo.	X (não foi utilizado devido a problemas de conexão com a internet)	

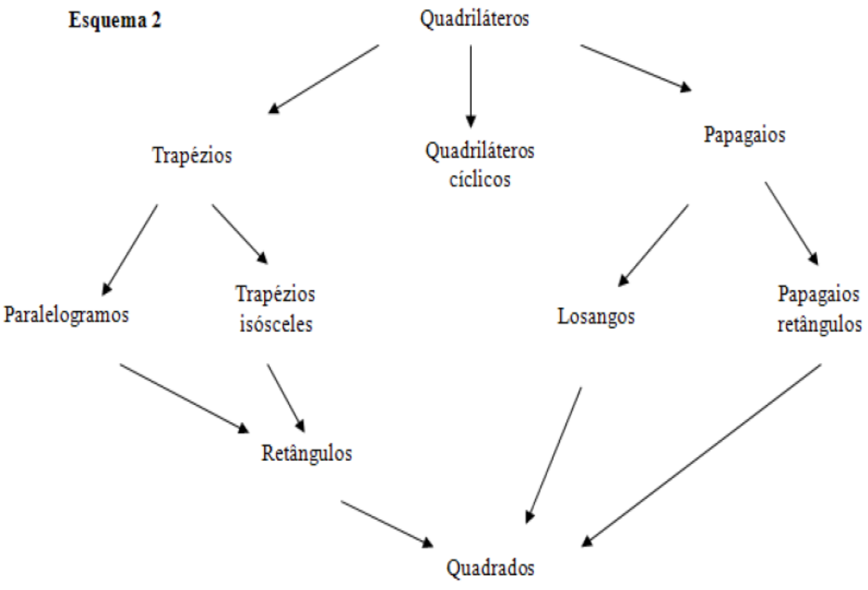
Fonte: Elaboração da autora.

APÊNDICE B – Atividade implementada na 5ª fase

Atividade

A seguir você vê duas organizações esquemáticas sobre quadriláteros apresentadas por alunos do 9º ano. Identifique a definição de quadrilátero implícita em cada esquema. A partir dos seus conhecimentos e das atividades trabalhadas em sala.





APÊNDICE C – Transcrição de vídeo completa (capítulo IV)

00:00:00 – 00: 05:18
A1: Ó a gente tá mexendo aqui e a gente percebeu que pode se transformar em outro tipo de quadrilátero. *(fala simultânea a manipulação)* Ó pode ser um retângulo...isso é um retângulo?*(tom muito baixo)* **P:** Mas que tipo de quadrilátero é esse? **A1:** Que tipo... **P:** É você falou assim: “pode transformar em outro tipo” **A2:** É transformar em outro formato. **A1:** É! Ó aqui é um retângulo. **A3:** Não. É um trapézio. **A1** Um trapézio ainda? **A3**: Ainda é um trapézio. **A1:** Sempre vai ser um trapézio? **A3:** Sim. **A1:** Parece um retângulo. **A3:** Não é. É um trapézio. **A1:** Por que? **A2:** Porque essas daqui... não são fixas *(tom muito baixo).* Por causa do ângulo, não é de noventa graus, não é? *(parece apontar para algo no diagrama e questiona A3, mas não temos a gravação do grupo somente da tela do tablet e o áudio)* **A3:** É. Elas não são paralelas. **A1:** Entendi. Então, vai ser sempre um trapézio! **A1:** Elas são iguais! *(afirmativa após ler o enunciado do item b)* **A3:** Por que? Prova aí! **A1:** Não sei provar, mas elas são iguais *- muitas vozes ao fundo –* **A3:** Como que não sabe provar? **A1:** Elabore uma proposição, também. **A3:** Então, proposição 1: Diagonais de todos os trapézios são iguais...são congruentes...Diagonais de um trapézio *(muitos movimentos de arrasto na tela),* mas esse trapézio parece isósceles. Como é que eu coloco a medida? Esqueci...Aí ela vem e estraga o trapézio, ai pronto! *(a figura é deformada)* **A2:** Isso aqui é um trapézio? **A3:** Não mais, você estragou. Não é mais nenhum polígono. Cadê? Volta! *- Neste momento eles começam a procurar pelas ferramentas no menu do aplicativo por uma solução que permita que eles meçam os segmento do polígono explorado –* **A3:** Eu quero a medida, se lembra como conseguir a medida? **A1:** É aqui, ah não, aqui é coordenada do ponto. **A3:** Esse aqui dá a medida a mãozinha... Aqui dá. Oito ponto quarenta e oito, oito ponto cinco, oito ponto cinco, cinco sete quatro, cinco sete quatro (5.74). É isósceles! (*A3 parece assumir a manipulação na tela e encontra a ferramenta que estava procurando)* **A1:** Elas são congruentes. **A2:** Elas se cortam ao meio? **A1:** Não. Ao meio não. Só o quadrado que se corta no meio. **A3:** O quadrado e o losango também. **A1**: É verdade. **A3:** Mas tu mexeu de novo! Agora elas não são mais iguais. *(manipulações de arrastos na tela)* **A1:** São sim cara. Do jeito que ela construiu elas são sempre iguais...Ih! Não. **A3:** Não são. *(Apesar dos estudantes pensarem que os segmentos não paralelos do polígono que arrastaram possuem medidas diferentes, o que ocorreu na verdade foi que quando eles tocaram nos segmentos eles arrastaram a figura tão sutilmente que não notaram que a medida não variou de um segmento para o outro, eles quem mexeram novamente na figura ao tentar medir)* **A1:** São congruentes. **A3:** É são congruentes. **A1** começa lendo o enunciado do item b e diz: Puts grila! Vamos primeiro elaborar a proposição. Não melhor a gente provar primeiro. **A2:** É! **A3:** Ó sei que essas duas são paralelas e essas (...).