UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO / INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ESTUDANTES DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL EXPLORAM SITUAÇÕES COM OS NÚMEROS IRRACIONAIS π E φ

FERNANDO DA ROCHA DA SILVA

2019

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO / INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ESTUDANTES DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL EXPLORAM SITUAÇÕES COM OS NÚMEROS IRRACIONAIS π E φ

FERNANDO DA ROCHA DA SILVA

Sob a orientação da Professora Doutora

DORA SORAIA KINDEL

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação em Ciências e Matemática**, no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática.

Seropédica - RJ
Março de 2019

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

SILVA, FERNANDO DA ROCHA DA, 1986-
S617e ESTUDANTES DO 9° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL EXPLORAM SITUAÇÕES COM OS NÚMEROS IRRACIONAIS Pi E Fi / FERNANDO DA ROCHA DA SILVA. - 2019.
205 f.: il.

Orientadora: DORA SORAIA KINDEL.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, PPGEduCIMAT, 2019.

1. Tarefas exploratórias. 2. Construção numérica. 3. Escrita matemática. I. KINDEL, DORA SORAIA, 1958-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. PPGEduCIMAT III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO / INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FERNANDO DA ROCHA DA SILVA

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação em Ciências e Matemática**, no Curso de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, área de Concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 27/ 03/ 2019

Prof. Dr. Agnaldo da Conceição Esquincalha-UFRJ

Profª. Dra. Ana Cristina Souza dos Santos-UFRRJ

Profª. Dra. Dora Soraia Kindel-UFRRJ
Orientadora

Dedico este trabalho as mulheres da minha vida e que sempre acreditaram em mim: minha esposa Vanessa Lima e minha filha Rafaele Rocha, pelo amor e carinho durante esse processo e também a minha mãe Clareci da Silva, que me ensinou que sonhos existem para serem alcançados.

AGRADECIMENTOS

Aos Professores do PPGEduCIMAT – UFRRJ por todo aprendizado, trocas de experiências e amizade.

A minha orientadora Dora Soraia Kindel por acreditar nas potencialidades desta pesquisa, por sua disponibilidade e carinho.

A banca formada por Dora Soraia Kindel, Ana Cristina Souza dos Santos e Agnaldo da Conceição Esquincalha pelas contribuições significativas para esta pesquisa.

A minha esposa Vanessa Lima e minha filha Rafaele Rocha pelo carinho e compreensão referentes às ausências.

A minha mãe, irmãos, cunhados e sobrinhos pelo apoio constante.

Aos meus colegas de classe do programa pelo apoio e pelas belas discussões que muito somaram para esta pesquisa.

Ao amigo e colega de profissão Ricardo Marinho pelo apoio e contribuição antecedente e ao longo dessa jornada.

A Isabela Alcantara, Rute Rocha, Neiva Alves e Tiago Campos pela parceria ao longo da pesquisa e pelas ricas e valiosas discussões.

Aos meus queridos alunos que se disponibilizaram para participar desta pesquisa e, também, a querida diretora Iussinara de Freitas Nogueira, por abrir carinhosamente as portas da unidade escolar a qual é gestora para a realização dessa pesquisa.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 - *This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001*.

RESUMO

SILVA, Fernando da Rocha da. **Estudantes do 9º ano do ensino fundamental exploram situações com os números irracionais π e φ.** 2019. 205 p. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação / Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2019.

A abordagem didática dos números irracionais nos livros didáticos sempre se apresenta a partir de alguns exemplos sem, no entanto, discutir as características específicas e que os diferenciam dos demais números trabalhados até então. Esta pesquisa teve o intuito de abordar dois números irracionais em particular, os números φ (fi) e π (pi), para tanto foram elaboradas tarefas em que os estudantes necessitaram comparar medidas e calcular seu valor por aproximações e comparações entre diferentes medidas. Neste sentido, esta pesquisa visa discutir e analisar as produções dialogadas e escritas de estudantes do Ensino Fundamental (segundo segmento) acerca da construção desses números em um contexto de atividades exploratórias. Seu foco está voltado na construção do conceito de estudantes da Educação Básica e tem como meta subsidiar o trabalho dos professores que queiram seguir uma proposta alternativa de ensino de matemática e estimulá-los a perceber a relevância do tema. A metodologia da pesquisa se apoia na DBR (Design Based Research) partindo do levantamento bibliográfico que consiste em: dois documentos oficiais, os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Nacional Comum Curricular, artigos que tratam o tema e de um levantamento em livros didáticos usados na escola em que a pesquisa foi desenvolvida. Em seguida elaboramos as tarefas que seriam implementadas para um grupo de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública. Após a elaboração da primeira versão das tarefas, estas foram aplicadas e suas respostas analisadas de forma a verificar se as mesmas necessitariam serem revistas ou não. A coleta de dados foi realizada por meio do diário de campo do pesquisador, de folhas de atividades e áudio e vídeo gravados dos trabalhos em grupo. A análise está orientada na construção do conceito de números irracionais e considerou o encaminhamento dado pelo grupo e as estratégias usadas pelos estudantes para resolverem os problemas. A pesquisa prevê dois importantes momentos: o primeiro, em que se buscou compreender o perfil dos estudantes a partir de uma tarefa introdutória a respeito do que estudantes pensam sobre número e a reelaboração das tarefas pensadas numa primeira versão, a segunda prevê, a partir da análise, um guia didático, para os professores. Com relação aos resultados, observamos que os roteiros preparados para as tarefas contribuíram para uma aprendizagem significativa sobre os números irracionais, com ênfase em φ e π. De toda sorte, esta pesquisa pretende resgatar, independentemente dos erros e acertos, o prazer ao estudo e o estímulo da curiosidade dos adolescentes para o estudo de matemática.

Palavras – chave: tarefas exploratórias; construção numérica; escrita matemática.

ABSTRACT

SILVA, Fernando da Rocha da. **Students from the 9th grade of middle school education explore situations with the irrational numbers π e φ.** 2019. 205 p. Master Thesis (Masters degree in Science and Mathematics Education). Instituto de Educação / Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2019.

The didactic method of irrational numbers in textbooks always presents itself from some examples without, however, discussing the specific characteristics and differentiating them from the other numbers worked till then. This research aimed to address two irrational numbers in particular, the numbers φ (fi) e π (pi), therefore, tasks were developed by which students needed to compare measures and calculate their value by approximations and comparisons between different measures. In this sense, this research aims to discuss and analyze the dialogues and written productions from Middle school students (Junior High school) about the construction of these numbers in a context of exploratory activities. Its focus is on the construction of the concept of students of Basic Education and aims to subsidize the work of teachers who want to follow an alternative proposal of teaching mathematics and stimulate them to perceive the relevance of the theme. The research methodology is based on the Design Based Research (DBR), based on a bibliographical survey consisting of two official documents: the National Curricular Parameters and the National Curricular Common Base, articles that deal with the theme and a survey in textbooks used in school where the research was developed. Then, we elaborate the tasks that would be implemented for a group of students from the 9th grade of the Elementary School in a public school. After the elaboration of the first version of the tasks, these were applied and their answers analyzed in order to verify if they needed to be revised or not. The Data collection was done through the researcher's field diary, worksheets and audio and video recorded from the work group. The analysis is oriented in the construction of the concept of irrational numbers and considered the forwarded data given by the group and the strategies used by the students to solve the problems. The research predicts two important moments: the first one, which the students' profile was understood by an introductory task regarding what students think about number and the redo of the tasks thought in a first version, the second predicts, from the analysis, a didactic guide for teachers. Regarding the results, we observed that the scripts of the tasks contributed to a significant learning about the irrational numbers, with emphasis on φ and π. In any case, this research aims to recover, independently of errors and correctness, pleasure to study and stimulate the teenagers' curiosity to study mathematics.

Key words: exploratory tasks; numerical construction; mathematical writing.

LISTA DE ABREVIAÇÕES

a.C – Antes de Cristo

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

d. C – Depois de Cristo

DBR - Design Based Research

EBRAPEM – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática

f – Função

LDB – Lei de Diretrizes e Bases

lim – Limite

m.d.c – Máximo Divisor Comum

MEC – Ministério da Educação

MP3 – MPEG Layer 3

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PNE - Plano Nacional de Educação

PPGEduCIMAT - Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática

TIC - Tecnologias da Informação e Comunicação

UFRRJ - Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

LISTA DE SÍMBOLOS

Q – Conjunto dos Números racionais

R – Conjunto dos Números Reais

I – Conjunto dos Números Irracionais

$\overline{\varphi}$ - Conjugado de Fi

N – Conjunto dos Números Naturais

U – Operação União entre conjuntos

Z – Conjunto dos Números Inteiros

π - Número Irracional Pi

φ - Número Irracional Fi

ϵ – Pertinência

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta dissertação apresenta reflexões a partir da produção de significados de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental através de uma abordagem investigativa e experimental. Buscamos elaborar e implementar tarefas sobre os números irracionais, enfatizando os números irracionais Pi (π) e Fi (φ), a fim de propiciar a aprendizagem estruturada desses números. A dinâmica do trabalho ocorreu mediante encontros presenciais em diferentes contextos no próprio ambiente escolar, onde a ideia de medida destaca-se como atributo colaborativo para essa pesquisa.

Este trabalho se insere na linha de pesquisa 2: Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática do Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (PPGEduCIMAT - UFRRJ).

A escolha do tema de pesquisa surge a partir da minha experiência como professor de matemática da Educação Básica e das lacunas apresentadas nos livros didáticos de matemática. Nessa caminhada percebo o quanto é complexo para os alunos conceituarem a ideia dos números irracionais π e φ e, se dependerem dos livros didáticos de matemática, essa compreensão provavelmente ficará vaga.

Quando estudei os números irracionais pela primeira vez na 7ª série do Ensino Fundamental (atual 8º ano do Ensino Fundamental), me recordo do cálculo de raízes não exatas e da apresentação de maneira "pronta e acabada" do número π, onde o mesmo, por algum motivo, assumia o valor 3,14. Não participei de experimentos que me propiciasse processos construtivos para a conceituação desses números. Minhas experiências com o número φ somente iniciaram no nível superior, na graduação Licenciatura em Matemática, na disciplina de geometria euclidiana. Também me recordo que os livros didáticos que estudei ao longo dos Ensinos Fundamental e Médio não citavam o número irracional φ.

Segundo Pommer (2012) o ensino direcionado aos aspectos operatórios, exatos, determinísticos e finitos consiste numa tendência que encobre características importantes e significativas envolvendo a aprendizagem de números. Concordando com Pommer, Rocha (2018) afirma que a abordagem didática das características e peculiaridades dos conjuntos dos números irracionais nem sempre correspondem às necessidades reais de aprendizagem dos alunos, tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio.

Temos interesse nesse tema, pois o mesmo representa um dos pontos críticos e chave no estudo dos números reais na Educação Básica, podendo contribuir de maneira significativa para a aprendizagem desses números. Acreditamos que este trabalho possa ser uma ponte para o estudo dos números reais de maneira reflexiva, iniciada no Ensino Fundamental, perpassando e transitando em diferentes níveis da matemática escolar, pois relaciona aspectos dos conjuntos numéricos, tais como: racional/irracional, finito/infinito; limitado/ilimitado; análise das representações decimais de números como exato/aproximado, periódico/não periódico e cardinalidade de conjuntos.

De acordo com Silva (2009) as dificuldades dos alunos na aprendizagem de limite e continuidade de funções, por exemplo, são decorrentes da falta de compreensão de propriedades do conjunto dos números reais. Essa noção de números reais se faz presente em muitos conteúdos matemáticos, mas, pesquisas destacam que o ensino destes números ainda apresentam lacunas.

Diante de tal perspectiva, apresentamos a problemática da pesquisa: dificuldades de alunos do 9º ano do Ensino Fundamental em compreenderem as ideias dos números irracionais π e φ. Como pergunta para a pesquisa, temos: O que pensam estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental quanto aos números irracionais π e φ?

A hipótese é a de que a análise dos multidiálogos entre os participantes sobre os números irracionais π e φ em um ambiente de discussão colaborativo possa contribuir para o melhor aprendizado desses números por parte dos estudantes envolvidos.

O objetivo dessa pesquisa é investigar e analisar os procedimentos utilizados pelos estudantes do 9º ano do Ensino fundamental enquanto discutem situações envolvendo a noção dos números irracionais π e φ, em um ambiente colaborativo para a aprendizagem na sala de aula de matemática. Para tal, buscamos:

- Verificar de que forma os estudantes se posicionam frente às questões sobre números;
- Verificar de que forma as tarefas envolvendo medições de "corpos redondos" contribuem para a compreensão do número irracional π;
- Verificar de que forma os estudantes se posicionam frente às diferentes situações envolvendo comparação entre medidas cuja razão é o número irracional φ ou uma aproximação de φ.

ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A presente dissertação está organizada em cinco capítulos. Na introdução, temos a apresentação, justificativa, problema, objetivos e estrutura da pesquisa.

O primeiro capítulo desta dissertação traz a fundamentação teórica referente ao objeto matemático que, por sua vez, destaca a história e conceito dos números com ênfase aos números irracionais π e φ.

O segundo capítulo enfatiza o currículo e os números irracionais, onde abordamos os PCNs e a BNCC a fim de refletirmos sobre suas sugestões e orientações, além de analisarmos as contribuições de Ripol acerca dos livros didáticos de matemática utilizados na Educação Básica. Aqui, também procuramos verificar o panorama geral dos processos de ensino de números irracionais na sala de aula.

O terceiro capítulo destaca o objeto didático – investigação, linguagem e escrita matemática. No que tange a investigação matemática, os nossos referenciais foram Ponte – processos de uma investigação matemática e Skovsmose – espaços colaborativos e cenários para investigação. Buscamos os aportes teóricos em José de Almeida e Antonio Damásio no que diz respeito à linguagem e também a Powell e Bairral e Nacarato e Lopes quanto à escrita matemática.

O quarto capítulo destaca a metodologia, desde a apresentação da DBR - Design Based Research, os sujeitos da pesquisa, os recursos utilizados para coleta e análise de dados, as tarefas e os ciclos iterativos.

No quinto capítulo desta dissertação será apresentado toda a descrição da pesquisa de campo e seus resultados, assim como análise dos mesmos.

Fechando este trabalho, temos as considerações finais, as referências, os apêndices, os anexos e o produto.

1 UM BREVE HISTÓRICO SOBRE OS IRRACIONAIS E A IDEIA DE MEDIDA

De um modo geral estudantes do Ensino Fundamental e Médio não aceitam os irracionais como números e sim como símbolos ou como a quinta operação, a radiciação. Em função do exposto, optamos por desenvolver um trabalho que pudesse trazer significado senão para todos, pelo menos para dois deles o número π e o número φ. Mas antes, elaboramos um estudo sobre conjuntos numéricos, em particular sobre os racionais e os irracionais e que será apresentado neste capítulo. Ou seja, neste capítulo, apresentamos um estudo acerca dos números irracionais, dando ênfase aos números irracionais π *e* φ, destacando a sua história, conceito e aplicações.

1.1 Números Racionais

Não poderíamos realizar um estudo sobre Números Irracionais sem citar a importância e um breve relato sobre os Números Racionais no que diz respeito à evolução matemática dos números e seus significados ao longo dos anos.

Atualmente tem se discutido muito acerca do senso numérico e o aprimoramento do conceito de número que, por sua vez, desenvolveu-se ao longo dos séculos através de leigos e estudiosos das áreas de filosofia e matemática, conforme as necessidades cotidianas. Ao longo dessa caminhada, surgiram alguns conjuntos numéricos como, por exemplo: os números naturais, os números inteiros, os números racionais, os números irracionais e os números reais.

De acordo com Pommer (2012), o surgimento destes conjuntos numéricos não foi linearmente construído ao longo do percurso sócio-histórico cultural. O desenrolar do conhecimento matemático revela imbricações ou conexões entre estes conjuntos numéricos, originadas e orientadas ora pelas atividades de subsistência do ser humano, ora pelas atividades de natureza intelectual, presente em civilizações, como o antigo povo grego.

Segundo Boyer (2012), nada pode-se afirmar sobre a origem da matemática, seja aritmética, seja da geometria, afinal, seu princípio é mais antigo do que a arte de escrever.

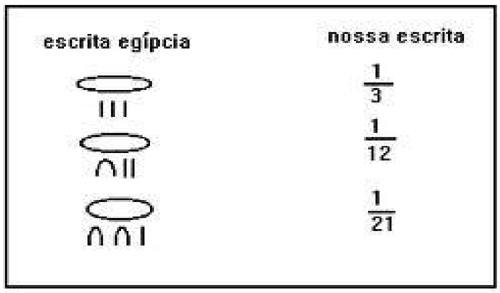
Desde o homem primitivo, já era possível identificar a necessidade dos povos de organizar seus grupos, caracterizando a ideia de que os primeiros indícios da existência de numerar, contar e registrar já existia. Durante o período da idade da pedra, o homem dessa geração era caçador e não agricultor, o que os tornavam nômades, pois não podiam ter muitos objetos em seu poder, alem dos que fossem realmente necessários, assim sendo não os possibilitava grandes avanços científicos e culturais.

No entanto, registros em ossos com marcações em forma de bastões nos sugerem ser a primeira ideia de quantificar, por exemplo, quantas pessoas havia em cada grupo. Logo, surgem as perguntas que não querem calar: Quem inventou os números? Sempre existiu?

Ao passar dos anos os números foram evoluindo e alguns povos e pessoas específicas contribuíram consideravelmente para essa evolução. Os Números Racionais surgem a partir do momento em que os números naturais não são mais suficientes para atribuir valores a grandezas, sendo necessário a evolução numérica para tal.

O povo egípcio foi um desses povos importantes para a evolução dos números, por volta de 3000 a.C. desenvolveram a agricultura e a administração territorial, fazendo surgir assim a necessidade de calcular e registrar através da escrita, denominada hieróglifos. Segundo Guelli (1998), o faraó Sesóstris repartiu o solo do Egito, às margens do rio Nilo, entre seus habitantes, mas, uma vez por ano, as águas do Nilo subiam muitos metros além de seu leito normal e quando voltavam a baixar as marcações de divisão das terras estavam perdidas. Então os funcionários do governo traçavam novamente os limites do terreno de cada habitante e para fazer a medição eles esticavam uma corda, com uma unidade de medida já assinalada, e verificavam quantas vezes aquela unidade cabia nos lados do terreno. No entanto, dificilmente aquela unidade de medida escolhida cabia um número inteiro de vezes nos lados do terreno e foi por esta razão que os egípcios criaram um novo tipo de número: o número fracionário. Nesta época, os egípcios interpretavam a fração somente como uma parte da unidade. Por isso, utilizavam apenas as frações unitárias, isto é, com numerador igual a 1. Para escrever as frações unitárias, colocavam um sinal oval alongado sobre o denominador. As outras frações eram expressas através de uma soma de frações de numerador 1. Os egípcios não colocavam o sinal de adição (+) entre as frações porque os símbolos das operações ainda não existiam.

Figura 1 - Representação das frações egípcias



(Fonte: Blog Prof. Inês Reynaud)

Segundo Stewart (2015) os egípcios representavam frações de três maneiras diferentes: hieróglifos especiais para $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, o olho de Hórus para representar frações unitárias com denominadores iguais às primeiras seis potências de 2 e símbolos para frações unitárias com denominadores de um modo geral.

Na Mesopotâmia as frações também eram conhecidas. De acordo com Contador (2012), os babilônios, por volta do ano 2000 a.C., já usavam frações basicamente da mesma maneira que as frações decimais de hoje. A diferença é que eles faziam a conversão de frações usando apenas denominadores iguais às potências de 60, já que eles utilizavam o sistema sexagesimal. Os romanos também utilizavam frações e tinham um sistema fracionário bem particular.

Utilizando um sistema decimal e posicional, os chineses desenvolveram uma representação fracionária bem parecida com a nossa. De acordo com Berlingoff e Gouvêa (2010) a obra chinesa *Nine Chapters on the Mathematical Art*, que remonta de aproximadamente 100 a.C., contém uma notação para frações que é muito parecida com a nossa. A única diferença é que os chineses evitavam usar "frações impróprias" como $\frac{9}{2}$; eles escreviam $4\frac{1}{2}$ em vez disso.

Os números fracionários abordados pelos hindus eram bem parecidos com os abordados pelos chineses, já que ambos utilizavam o sistema decimal e posicional. Os hindus tinham por costume escrever frações com um número sobre o outro, o que se tornou bastante comum alguns anos mais tarde na Europa. De acordo com Contador (2012) foi por volta do ano 1.000 que os árabes inseriram a barra na notação das frações. Alguns anos mais tarde os termos "*denominador*" e "*numerador*" foram criados pelo matemático francês Nicole Oresme (1323 – 1382).

A fim de definirmos o conjunto dos números racionais de maneira sistemática, é viável destacarmos a ideia de axiomas para tal conclusão. Axiomas são proposições aceitas como verdadeiras sem demonstração e que servem de base para o desenvolvimento de uma teoria.

De acordo com Silveira (2015), números que podem ser escritos na forma de fração, com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero, são chamados **números racionais**. O conjunto dos números racionais é representado pela letra Q. Utilizando a linguagem matemática, podemos representar os números racionais da seguinte maneira:

$$\mathrm{Q} = \left\{\frac{a}{b} / a, b \in Z, b \neq 0\right\}$$

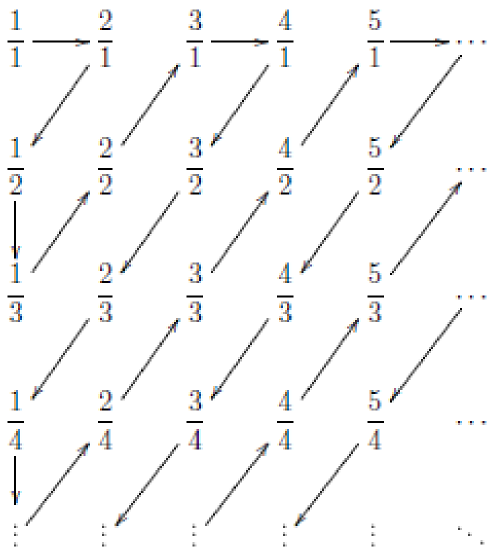
Atualmente os Números Racionais podem ser representados por:

- frações;
- números mistos;
- números decimais com finitas casas decimais;
- números decimais com infinitas casas decimais e periódicas (dízimas).

Quanto às formas dos Números Racionais para as operações matemáticas básicas utilizam-se, geralmente, as frações e os números decimais com finitas casas decimais. Uma outra característica nem tão elementar desse conjunto numérico está relacionada a sua enumerabilidade. O conjunto dos Números Racionais é *enumerável,* ou seja, seus elementos podem ser postos em correspondência biunívoca com os números naturais – N = {1, 2, 3, ...}. Mais precisamente, Q é enumerável se existir uma função bijetiva f: N → Q. Georg Cantor, matemático alemão nascido no Império Russo, foi o responsável por esta descoberta, utilizando para tal o método conhecido como a diagonal de Cantor.

Na construção abaixo mostraremos, primeiramente, que o conjunto dos números racionais positivos (Q^+) é enumerável.

Figura 2 – Diagrama de flechas de G. Cantor.



(Fonte FIGUEIREDO, 2011, p. 21)

De maneira análoga, podemos mostrar que o conjunto dos números racionais negativos (Q^-) também é enumerável. Como $Q = Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$, garantimos que Q é *enumerável.*

1.2 Números Irracionais

Por muitos anos os Números Racionais foram suficientes para solucionar os problemas matemáticos cotidianos, mas algumas descobertas e necessidades estavam por vir. Segundo Baldino (2000), os pitagóricos acreditavam que tudo em geometria e mesmo situações cotidianas poderiam ser explicados com os números. Não se sabe ao certo quando a escola pitagórica tomou conhecimento da existência de grandezas que não poderiam ser comparadas por meio de números inteiros.

Pitágoras afirmava que alguns comprimentos não poderiam ser representados por um número inteiro. Essa descoberta se deu ao fato de Pitágoras associar figuras geométricas aos números.

> Os pitagóricos chamaram tais comprimentos de *alogon*, "não racionais", que hoje traduzimos como "irracional". Todavia a palavra *alogon* tinha duplo sentido: significava também "não deve ser falado". (MLODINOW 2010, p. 37)

É creditado ao pitagórico Hipasus de Metapontum tal descoberta. Esta causou uma crise nos fundamentos da matemática grega e na escola pitagórica, pois todo conhecimento até então era unicamente ligado aos números inteiros.

Em Cajori (2007), a teoria dos números irracionais é creditada aos pitagóricos Eudemo e Hipaso, este último teria sido o primeiro a revelar a descoberta dos irracionais que os pitagóricos aparentemente mantinham em segredo. Segundo este autor, a descoberta da existência de grandezas incomensuráveis é a mais importante contribuição matemática pitagórica. Eles provaram que a razão entre o lado e a diagonal de um quadrado não pode ser a razão de quaisquer dois números inteiros, sendo chamados segmentos dessa espécie de incomensuráveis e de irracional a razão desses segmentos.

Segundo Rooney (2012), Pitágoras não conseguia provar que os números irracionais não existiam, mas quando Hipaso de Metaponto demonstrou que a raiz quadrada de 2 é irracional e argumentou sobre sua existência, diz a lenda que Pitágoras o afogou. Tal demonstração teria sido feita a bordo de um navio.

Em Garbi, encontramos o seguinte relato:

> Um dia, estudando qual deveria ser a medida da diagonal do quadrado e supondo que ela pudesse ser expressa pela relação entre dois inteiros, chegou-se a um absurdo. Imagine-se então que $\sqrt{2}$ fosse um número do tipo $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros, já despidos de seus fatores comuns (ou seja, primos entre si). Então, $p^2 = 2q^2$. Logo, o quadrado de p seria um número par e, consequentemente, p também seria par, ou seja, p = 2m, com m inteiro. Assim, $(2m)^2 = 2q^2$ ou $q^2 = 2m^2$ e, pelo mesmo raciocínio, q também seria par. Mas isto é um absurdo porque supusemos que p e q são primos entre si e não podem ser ambos divisíveis por 2. Logo, a raiz quadrada de 2 não pode ser expressa como a razão, ou quociente, entre dois inteiros. Estavam

> descobertos os irracionais, ou seja, números que não são expressos pela razão entre dois inteiros. (GARBI, 2006, p.32)

O que nos parece é que a falta de registro ou mesmo o fato de que não era necessário a existência desses números para a produção do conhecimento matemático nos deixa com esta sensação de vazio, pois são muitos os vícios quando se procura encontrar o surgimento dos números irracionais. O que se pode constatar é que os números irracionais foram surgindo em diferentes momentos por diferentes razões.

> "Ninguém, suficientemente instruído em matemática poderia ficar impressionado com a existência da incomensurabilidade. Além disso, a conexão entre esse problema e a filosofia pitagórica é duvidosa. Não se tem certeza nem mesmo da relação entre a descoberta dos incomensuráveis e a aplicação do teorema de "Pitágoras" (que nos permitiria concluir que há um lado de um triângulo cuja medida é raiz de 2, uma vez que os chineses já conheciam o teorema e nem por isso concluíram pela irracionalidade do lado." (ROQUE, 2012, p. 125)

Para Roque (2012), a descoberta da incomensurabilidade pelo pitagórico Hipaso de Metaponto e da possibilidade de um conjunto de números não-racionais não estão necessariamente relacionadas ao mesmo período histórico. Existe a possibilidade da descoberta da incomensurabilidade ter surgido na geometria (entre 430 e 410 a.C.) no problema da diagonal de um quadrado.

Há uma corrente de autores, Boyer (1974) e Cerri (2006), que relatam em suas obras a possibilidade dos números irracionais serem oriundos do pentágono regular.

> [...] acreditam que esse foi o primeiro par de segmentos incomensuráveis descoberto. Existe uma vertente que defende a tese de que a descoberta dos incomensuráveis está relacionada ao pentagrama, que é o símbolo dos pitagóricos, pois a razão do lado de um pentágono regular com sua diagonal resulta na razão áurea que é dada pelo número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (CERRI, 2006, p. 4).

De acordo com Boyer (1974) a $\sqrt{5}$ que revelou a existência de grandezas incomensuráveis (a solução da equação $\frac{a}{x} = \frac{a}{a-x}$ leva a $\sqrt{5}$ - $\frac{1}{2}$ como a razão entre um lado e a diagonal de um pentágono regular). Vale ressaltar que é sobre a diagonal do pentágono regular que nasce a equação do 2º grau que, possui como uma das raízes $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é aproximadamente 1,618. Esse Número Irracional é conhecido como número de ouro ou número áureo.

Tão curioso quanto o número de ouro, o número π também apresenta uma longa história. A sua construção possui registros de milhares de anos atrás, incluindo a Bíblia Sagrada, os egípcios e os babilônios. Arquimedes (século III a.C.) também tem grande contribuição para essa construção. Ele utilizava polígonos regulares inscritos e circunscritos a circunferências.

Neste trabalho, destacaremos o número de ouro (φ) e o número π, pois representam o objeto de estudo para a pesquisa. No decorrer da pesquisa daremos um tratamento específico a esses dois números, desde suas histórias, construções de seus respectivos conceitos e aplicações cotidianas.

Definição

Por se tratar de um conjunto com características particulares e peculiares, o conjunto dos Números Irracionais levou milhares de anos para assumirem uma definição. Esse fato se deve a complexidade para o entendimento da incomensurabilidade, assunto até então desconhecido pelos povos milenares. A definição a seguir é apresentada em um livro didático de matemática da Educação Básica. “Números que têm infinitas casas decimais e não são periódicos são chamados de **Números Irracionais**.” (SILVEIRA, 2015, p. 20)

Quanto à enumerabilidade, o conjunto dos Números Irracionais é *não enumerável,* ou seja, seus elementos não podem ser postos em correspondência biunívoca com os números naturais – N = {1, 2, 3, 4, ...}. Por ser não enumerável, o Conjunto dos Números Irracionais, representado simbolicamente por I, **se apresenta em maior quantidade de elementos que o Conjunto dos Números Racionais** na reta real. Isso reforça a teoria de que existem infinitos maiores que outros infinitos. O Conjunto dos Números Reais é formado pela união dos Conjuntos dos Números Racionais e Irracionais.

$$R = Q \cup I$$

A reta Real é um tema de estudo matemático de alta complexidade, permeando as graduações e pós-graduações nos cursos de matemática, sendo objeto de discussão quanto ao seu ensino na Educação Básica. Acreditamos que as pesquisas em torno dos Números Irracionais e das suas aplicações possam enriquecer essas discussões, além de contribuir para o processo de ensino aprendizagem desses números nos mais variados níveis escolares e acadêmicos.

Para entendermos melhor a natureza dos Números Irracionais apresentaremos, a seguir, as duas famílias em que esses Números se enquadram.

1.3 Números Algébricos e Números Transcendentes

Os Números Irracionais podem ser classificados de acordo com a forma ao qual são obtidos: em algébricos ou transcendentes. Abaixo segue um estudo apresentando um exemplar de cada tipo: o número φ e o número π.

Segundo Figueiredo (2011), qualquer solução de uma equação polinomial da forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, em que os coeficientes a_i's são inteiros, é chamado um *número algébrico.* Observemos alguns exemplos:

i) o número 5 é algébrico, pois é solução da equação $x^2 - 10x + 25 = 0$.

ii) o número $\sqrt{5}$ é algébrico, pois é solução da equação $x^2 - 5 = 0$.

iii) o número $\sqrt[3]{2}$ é algébrico, pois é solução da equação $x^3 - 2 = 0$.

iv) O número de ouro $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é algébrico, pois é solução da equação $x^2 - x - 1 = 0$.

É importante ressaltar que todo número racional é algébrico, pois m é solução da equação $x - m = 0$.

De acordo com Figueiredo (2011), um número que não seja algébrico é chamado *número transcendente.* Neste caso podemos citar, por exemplo:

- o número Pi, em que $\pi = 3{,}141592653\ldots$;
- o número de Euler, em que *e* = 2,718281828... ;
- a constante de Liouville, em que
  L = $\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0{,}110001000000000000000001\ldots$.

A constante de Liouville foi o primeiro número transcendente historicamente reconhecido como tal. A sensação que temos ao lermos a definição de números transcendentes e os livros didáticos de matemática da Educação Básica é que os números transcendentes são finitos, e formados apenas por dois elemento: π e *e*. Geralmente, no Ensino Fundamental é apresentado o π e, no Ensino Médio, é apresentado *e* (número de Euler).

Sobre a infinitude dos Números Irracionais transcendentes, temos:

> A descoberta dos números transcendentais não provocou o mesmo choque intelectual que os números irracionais tinham causado, dois mil e quinhentos anos antes, mas suas consequências foram igualmente significativas. Ela mostrou que, por trás da aparente simplicidade do sistema de números reais, oculta-se muitas sutilezas que não podem ser notadas simplesmente olhando-se a expressão decimal de um número. Mas a maior surpresa ainda estava por vir. Em 1874 o matemático alemão George Cantor (1845- 1918) fez a espantosa descoberta de que existem mais números irracionais, e mais números transcendentais do que algébricos. Em outras palavras, longe de serem excentricidades, a maioria dos números reais é irracional e, entre os números irracionais, a maioria é transcendental! (MAOR, 2008, p. 251)

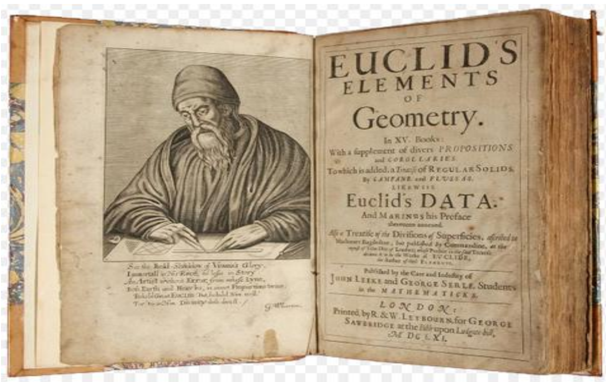
Essa lacuna apresentada na Educação Básica é capaz de colaborar para a criação de conceitos errôneos acerca dos Números Reais e, consequentemente, poderá acarretar dificuldades em estudos mais aprofundados da reta Real, haja visto que torna-se complexo estudar um conjunto sem saber ou conhecer a maioria de seus elementos e suas respectivas características.

1.4. O Número de Ouro

O número de ouro, ou número algébrico Fi (φ), também chamado de número áureo, é um dos números que mais despertam a curiosidade de matemáticos e estudiosos ao longo da história. A letra φ somente começou a ser utilizada no século XX pelo matemático Norte-americano Mark Barr, em homenagem a Phídias (470 – 425 a.C.), o mais importante escultor e arquiteto grego da civilização helênica. De acordo com Livio (2011), ele representa uma joia preciosa. “A geometria possui dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras; o outro a Proporção Áurea. Podemos comparar o primeiro a uma porção de ouro e o segundo a uma joia preciosa” (LIVIO, 2011, p. 79).

Segundo Stewart (2015), em um primeiro momento, o número φ surgiu na matemática a partir do polígono regular, e seguindo a prática padrão e conhecimento técnico da época foi interpretado de forma geométrica, não numericamente.

Figura 3 – Livro “Os Elementos”.



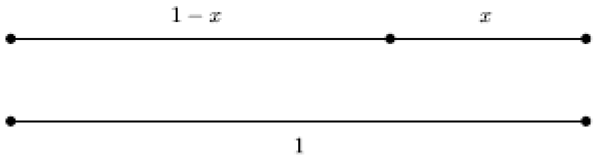
(Fonte: https://alguimaraes.wordpress.com/2013/08/13/os-postulados-de-euclides-ideias-geniais-02/)

No livro *Os Elementos* de Euclides aparecem os primeiros registros sobre o número de ouro. Segundo Belini (2015), Euclides define a “divisão de um segmento em média e extrema razão” como a divisão de um segmento em duas partes não iguais com uma propriedade particular: o quociente entre o segmento inteiro e a parte maior é igual ao quociente do segmento maior pelo segmento menor.

Segundo Contador (2008) esta é uma proporção geométrica que contém dois termos historicamente chamada pelos antigos de proporção áurea, sendo esta proporção apenas possível quando o termo menor está para o termo maior e vice-versa.

Segue a demonstração referente a proporção supracitada:

Na figura abaixo, considere que o segmento meça 1 unidade de comprimento.



Definido no livro *Os Elementos* de Euclides, encontramos o número de ouro do seguinte modo:

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1-x}{x} = \varphi$$

Pela igualdade, podemos afirmar que $\varphi = \frac{1}{1-x}$ e $\varphi = \frac{1-x}{x}$.

Daí, adicionamos ao numerador do 2º membro da equação $\varphi = \frac{1}{1-x}$ a expressão

$-x + x$, obtendo $\varphi = \frac{1+(-x+x)}{1-x}$. Arrumando a equação, temos $\varphi = \frac{1-x+x}{1-x}$.

Reescrevendo a equação $\varphi = \frac{1-x+x}{1-x}$ com dois termos fracionários de mesmo denominador no 2º membro, temos $\varphi = \frac{1-x}{1-x} + \frac{x}{1-x}$.

Como $\frac{1-x}{1-x} = 1$, com $x \neq 1$, então podemos escrever $\varphi = 1 + \frac{x}{1-x}$.

Repare o segundo termo da equação no 2º membro$\left(\frac{x}{1-x}\right)$. Ele é o inverso de

$\frac{1-x}{x} = \varphi$. Logo, podemos dizer que $\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$. Igualando os denominadores no 2º membro da equação, obtemos $\varphi = \frac{\varphi+1}{\varphi}$,

Aplicando a proporção na igualdade acima, teremos $\varphi^2 = \varphi + 1$. Escrevendo a equação do segundo grau em sua forma normal, encontraremos a equação abaixo:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau acima encontraremos a solução $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Vale lembrar que a outra raiz dessa equação é o número negativo $\varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ que, por sua vez, não atende as condições para ser solução do problema, pois este se refere à medida de um segmento de reta.

Entretanto, Santos (2013) afirma que ambos os valores obtidos como solução da equação para a razão $\frac{AB}{AC}$ são irracionais $\overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, sendo $\overline{\varphi}$ o conjugado de φ. Desse modo, $\varphi + \overline{\varphi} = 1$, ou seja, φ e seu conjugado tem soma constante igual a 1. Com o auxílio tecnológico é possível calcular o valor de φ com uma grande quantidade de algarismos decimais. Nos exemplos a seguir, o número φ e seu conjugado são apresentados com mais de 40 casas decimais.

- φ = 1, 6180339887498948482045868343656381177203091...
- $\overline{\varphi}$= − 0, 6180339887498948482045868343656381177203091...

Comparando os números acima, percebemos que φ e seu conjugado tem os mesmos algarismos decimais e o que os diferencia é o sinal. Vale ressaltar que tal característica não é um caso particular do número de ouro, pois outros números apresentam exatamente essa mesma propriedade.

1.4.1. A irracionalidade de Fi

No texto acima apresentamos o número φ como sendo um número irracional, porém sem provar tal irracionalidade. Faremos a seguir a demonstração da irracionalidade de φ.

Para tal, é importante lembrar que todo número racional pode ser escrito na forma de fração irredutível, ou seja, $\frac{a}{b}$, onde $a, b \in Z, com\ b \neq 0\ e\ m.d.c\ (a, b) = 1$. Supondo que φ seja um número racional, tentaremos encontrar uma contradição ou mostrar que esta hipótese é absurda.

Seja $\varphi = \frac{a}{b}$ por hipótese, vamos substituir este valor na equação $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ e obtemos $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$

Aplicando a propriedade potência de um quociente em $\left(\frac{a}{b}\right)^2$, obtemos $\frac{a^2}{b^2}$. Daí,

$$\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

Somando 1 a ambos os membros da equação, temos $\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} - 1 + 1 = 0 + 1$. Logo, $\frac{a^2}{b^2} - \frac{a}{b} = 1$.

Igualando os denominadores no 1º membro da equação acima, obtemos

$$\frac{a^2 - ab}{b^2} = 1$$

Aplicando a proporção na equação acima temos $a^2 - ab = b^2$. Fatorando o 1º membro da equação teremos

$$a(a - b) = b^2$$

Daqui temos que $a - b = \frac{b}{a} . b$. Como $(a - b)$ é um número inteiro, então a divide b^2. Logo a divide b e, concluímos, que a e b possuem um fator comum diferente de 1, ou seja, o m.d.c $(a, b) \neq 1$, contrariando a hipótese. Desse modo, provamos que φ é irracional.

1.4.2. O Número Divino

Em algumas situações cotidianas e em meio à natureza, encontramos um número que se aproxima com bastante propriedade do número de ouro, oriundo das diagonais do pentágono regular. Por coincidência ou não, essa característica tendencial faz com que o numero φ também seja conhecido por "número de Deus. Essa aproximação é encontrada em determinadas situações cotidianas em que, algumas, serão descritas a seguir.

A Sequência de Fibonacci e o Número Áureo

Nascido na cidade de Pisa, na Itália, Leonardo de Pisa (1170 - 1250) foi um matemático que viveu um tempo com seu pai Bonaccio, um funcionário do comércio na cidade de Bugia, norte de África.

Segundo Livio (2011), o codinome Fibonacci (do latim filius Bonacci, filho da família Bonacci, ou "filho da boa natureza") foi provavelmente introduzido pelo historiador de matemática Guillaume Libri numa nota de rodapé em seu livro *Histoire des Sciences Mathematique en Italie* (História das ciências matemáticas na Itália, de 1838, embora alguns pesquisadores atribuam o primeiro uso do nome Fibonacci a matemáticos italianos do século XVIII.

Figura 4 – Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci

(Fonte: https://br.pinterest.com/pin/570760952748713159/)

Educado no norte da África, onde conheceu o sistema indo-arábico de escrita de números, Fibonacci retornou em 1202 a Itália, onde publicou a sua obra chamada *Liber Abacci,* livro que trazia grande parte do conhecimento da teoria dos números e da álgebra na época. Segundo Santos (2013, p. 30), “essa obra foi à precursora da introdução do sistema de numeração indo-arábico na Europa e pelo posterior desenvolvimento da álgebra e da aritmética no mundo ocidental, sendo assim, uma grande influência para o desenvolvimento da Matemática no Ocidente”.

Em sua obra encontramos o mais famoso dos problemas propostos e resolvidos por Fibonacci. Tal problema aparece no capítulo 12 de sua obra e é conhecida como “problema dos coelhos de Fibonacci”. Abaixo segue o problema:

Um homem pôs um par de coelhos num lugar cercado por todos os lados por um muro. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá à luz um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?

A solução apresentada na obra *Liber Abacci* pelo autor é a seguinte: no começo (mês um) há apenas um casal não fértil. No mês dois há ainda um casal (agora fértil); no mês três há um casal mais o novo casal de filhotes, totalizando 2 casais. No mês quatro há o casal inicial, mais o casal nascido no mês anterior e mais um novo casal, completando três casais. E assim em diante. Na tabela abaixo veremos como se desenvolveu o processo acima.

Mês	Nº de casais do mês anterior	Nº de casais recém-nascidos	Nº total de casais no cercado
1	0	1	1
2	1	0	1
3	1	1	2
4	2	1	3
5	3	2	5
6	5	3	8
7	8	5	13
8	13	8	21
9	21	13	34
10	34	21	55
11	55	34	89

Tabela 1 - Problema dos coelhos de Fibonacci

Ao analisar a tabela, observamos que os dados da coluna Nº total de casais no cercado forma a sequência numérica 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 e 89 . Assim, ao final de 11 meses haverá 89 casais no cercado. A sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... é conhecida como sequência de Fibonacci.

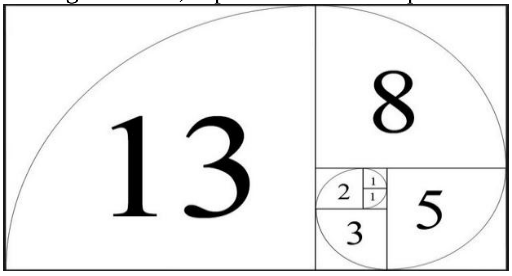
Generalizando a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ..., obtemos o número de Fibonacci de ordem *n* através da função $f : N \rightarrow N$ dada por:

$$f_n = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ f_{n-1} + f_{n-2}, & n \geq 3 \end{cases}$$

De acordo com Stewart (2015), o número de ouro está minuciosamente ligado aos números pertencentes à sequência de Fibonacci. Na geometria podemos verificar essa intimidade através do retângulo áureo. Chama-se *retângulo áureo* todo retângulo em que a razão comprimento/largura é aproximadamente φ. Além de apresentar harmonia, o retângulo áureo esteticamente é bastante agradável, sendo assim uma ferramenta com grande potencialidade para as arquiteturas, artes e designers.

Segundo Santos (2013), tomando-se um retângulo áureo como na Figura 5, é possível obter uma curva que se assemelha a uma espiral logarítmica. Para isso, em cada quadrado traçamos um quarto de circunferência de raio igual à medida do lado do quadrado e o centro é um dos vértices do quadrado correspondente. Nesse caso, o centro da espiral é o ponto de encontro das diagonais - O Olho de Deus - e a espiral obtida será chamada espiral áurea.

Figura 5– Retângulo áureo, espiral áurea e a sequência de Fibonacci.



(Fonte: https://fibonacciresearch.wordpress.com/2012/12/03/veza-izmedu-fibonacijeve-spirale-i-niza/golden-spiral-fibonacci-squares-uxjsey/)

De acordo com Livio (2011), Fibonacci teve uma grande importância na difusão da razão áurea.

> O papel de Fibonacci na história da Razão Áurea é realmente fascinante. Por um lado, nos problemas em que usava conscientemente a Razão Áurea, foi responsável por um progresso significativo mas não espetacular. Por outro, simplesmente formulando um problema que, em princípio, nada tinha a ver com a Razão Áurea, ele expandiu drasticamente o escopo da razão Áurea e de suas aplicações. (LIVIO, 2011, p. 115)

Segundo Rocha (2018), uma das relações entre os números de Fibonacci e o número áureo, e talvez a mais simples de se notar, é o resultado sucessivo da razão entre os números da sequência.

Observe a tabela abaixo:

n	f_n	$\frac{f_n}{f_{n-1}}$
1	1	
2	1	$\frac{1}{1} = 1$
3	2	$\frac{2}{1} = 2$
4	3	$\frac{3}{2} = 1,5$
5	5	$\frac{5}{3} = 1,666 \ldots$
6	8	$\frac{8}{5} = 1,6$

7	13	$\frac{13}{8} = 1{,}625$
8	21	$\frac{21}{13} = 1{,}6153846154$
9	34	$\frac{34}{21} = 1{,}619047619$
10	55	$\frac{55}{34} = 1{,}6176470588$
11	89	$\frac{89}{55} = 1{,}6181818 \ldots$
12	144	$\frac{144}{89} = 1{,}6179775281$
13	233	$\frac{233}{144} = 1{,}6180555 \ldots$
14	377	$\frac{377}{233} = 1{,}6180257511$

Tabela 2. Continuação – Razão entre um número da sequência de Fibonacci e seu antecessor.

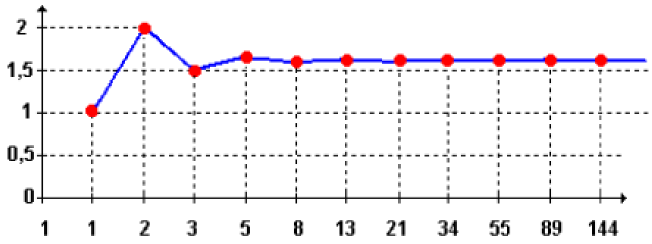
Neste caso, nos referimos à razão de um elemento da sequência e o seu antecessor. Ao observar o resultado de tais razões, é possível notar que existe uma constante aproximação com a representação numérica de φ, ou seja, 1,618034...

Analisando os valores tabelados, é possível observar o quanto estes resultados vão se aproximando do valor de φ à medida que usamos valores cada vez maiores da sequência, ou seja, se aproxima de φ = 1, 6180339887498948482045868343656381177203091... . Segundo Belini (2015), o célebre astônomo Johannes Kepler, em 1611, já havia observado que a divisão entre um número da sequência de Fibonacci e seu antecessor levava a este número. Podemos então dizer que $\frac{f_n}{f_{n-1}}$ tende para φ quando *n* tende para infinito.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \varphi$$

Belini (2015) apresenta a tabela acima graficamente. Desta forma, é possível observar que a partir de um ponto de vista geométrico, o quanto tais valores se aproximam de φ.

Gráfico 1 – Representação gráfica da tabela.



(Fonte: BELINI, 2015, p. 39)

Segundo Livio (2011), a equação matemática que liga diretamente o número φ à sequência de Fibonacci, supostamente já era conhecida por Leonard Euler (1707-1783) e também pelo matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754). No entanto, foi reescrita pelo matemático Francês Jacques Phillipe Marie Binet (1786-1856), ficando, assim, conhecida como *fórmula de Binet para a sequência de Fibonacci*.

$$f_n = \frac{\varphi^n - (-1)^n \varphi^{-n}}{\sqrt{5}}$$

A seguir, apresentaremos situações e elementos da natureza presentes no mundo físico enfatizando a sua geometria áurea e a aproximação matemática conectada com o número φ.

A Natureza e o Número Áureo

A natureza é bela e imprevisível, mas ela é também um mundo físico altamente organizado e com aproximações que usam as leis da matemática, nos fazendo refletir e melhor entendê-la. Não é muito comum percebermos a proporção áurea na natureza, desde o reino animal ao reino vegetal, mas ela se faz presente e com propriedade. Na natureza, ela aparece em toda a parte e cria formas extraordinárias, agradando aos olhos de quem vê através da harmonia geométrica. Neste item, queremos tratar a matemática como nossa reflexão sobre a natureza.

Há diversos problemas matemáticos em que o número φ aparece de maneira explícita ou implícita. Segundo Livio (2011) diversos autores sustentam, na literatura científica, uma íntima relação do número φ com fenômenos biológicos, assim como aplicações do mesmo na arte, arquitetura e em proporções de medidas do corpo humano e de outros seres vivos.

Figura 6: Teia de aranha com a forma de uma espiral áurea.

(Fonte: www.luispellegrini.com.br/o-numero-de-ouro-como-a-proporcao-aurea-se-manifesta-na-natureza/)

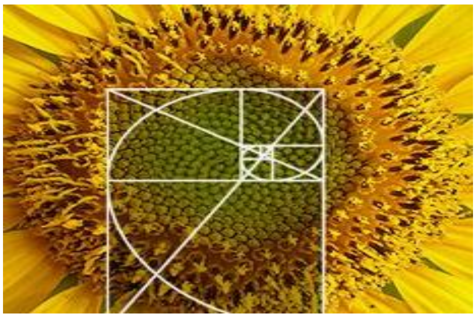
A espiral logarítmica se faz presente na formação de galáxias, furacões, redemoinhos, plantas, animais e em outras variadas situações cotidianas. Na figura 7 vemos a foto de uma gigantesca espiral logarítmica.

Figura 7 – Furacão Isabel em 2003

(Fonte: NASA)

Nos girassóis, as sementes se organizam em dois grupos de espirais, sendo um direcionado para a direita e outro direcionado para a esquerda. O número de cada um destes grupos de espirais são números consecutivos da sequência de Fibonacci.

Figura 8 – Girassol



(Fonte: https://br.pinterest.com/pin/343751384044662954/)

Nas margaridas, geralmente encontramos 34, 55 ou 89 pétalas. Coincidência ou não todos estes números fazem parte da sucessão de Fibonacci. Esse mesmo fato curioso também ocorre com certos tipos de cactus.

Figura 9 – Margarida

(Fonte: http://fazendoartedmc.blogspot.com.br/2012/10/arte-ciencia-uma-razao-sensivel.html)

Na Concha Nautilus, a espiral se apresenta de maneira harmoniosa ao longo do corpo. Em biologia são frequentes as estruturas aproximadamente iguais à espiral logarítmica. Por exemplo, as teias de aranhas (ver figura 6) e as conchas de moluscos.

Figura 10 – Concha Nautilus

Fonte: https://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/MONOGRAFIAS/Fabiana_M1_FM_2013.pdf)

No próximo item continuaremos abordando o número áureo, porém do ponto de vista artificial presente em nosso cotidiano.

A arquitetura e o Número Áureo

A milhares de anos a arquitetura nos surpreende com a suavidade das formas geométricas, utilizando recursos matemáticos para inovar e desafiar as tendências arquitetônicas.

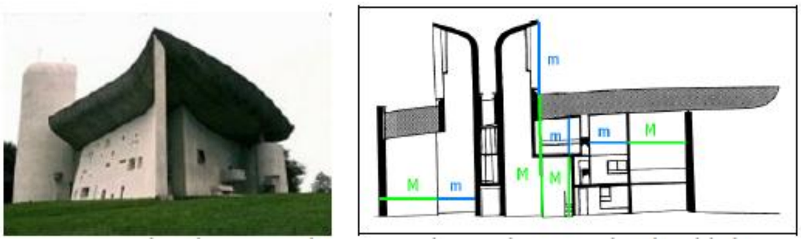
O Partenon foi construído a cerca de 2500 anos atrás e o arquiteto responsável por tal foi Phídeas, um dos mais importantes arquitetos da Grécia Antiga. O templo é dedicado à deusa Athena Parthenos e, para a sua construção, Phídeas usou o número de ouro como base para arquitetar a fachada do mesmo. Suas colunas são distribuídas harmonicamente entre si.

Figura 11 – Partenon e o retângulo áureo em sua fachada

(Fonte: http://pre.univesp.br/o-numero-de-ouro-e-a-divina-proporcao#.WxwjBvXNLIU)

Mas recentemente, Le Corbusier como era conhecido o arquiteto Charles Edouard Jeanneret (1887 - 1965) aplicou a razão áurea em suas construções. Ficou conhecido na Grécia por aplicar a razão áurea em suas construções baseadas na medida harmônica em escala do homem grego. Segundo Possebon (2004), Le Corbusier criou um sistema baseado nas medições médias do corpo humano, o modulor, usando a razão de ouro através do retângulo áureo e a seqüência de Fibonacci.

Figura 12 - A Chapelle de Notre Dame du Haut, construída a partir do sistema modulor de medidas harmônicas de Le Corbusier. Ao lado, temos um esquema da aplicação da razão áurea em sua obra.



(Fonte: FERRER, 2005, p. 11)

Na figura 12, temos a representação das medidas da capela de Notre Dame Du Haut, onde a razão áurea se faz presente na fachada do monumento proporcionando harmonia e beleza para quem o vê. Matematicamente, justificamos a razão áurea, neste caso, através das razões abaixo:

$$\frac{M+m}{M} = \frac{M}{m} = 1{,}618$$

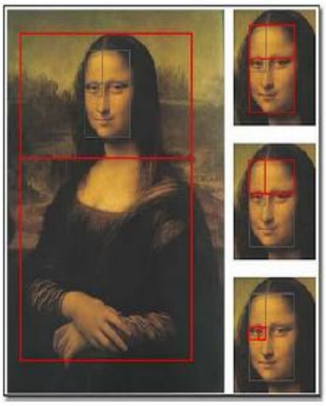
A seguir apresentaremos algumas obras em que o retângulo áureo se faz presente de maneira técnica.

A Arte e o Número Áureo

Em busca da beleza e harmonia em suas obras, alguns artistas renomados como Cândido Portinari, Leonardo da Vinci, Michelangelo, Piet Mondrian, Salvador Dalí, entre outros, utilizaram o número áureo para aperfeiçoar as suas obras através do retângulo de ouro.

Na obra *Mona Lisa*, de Leonardo da Vinci e retratada entre os anos 1503 e 1506, apresenta o retângulo áureo em múltiplos locais.

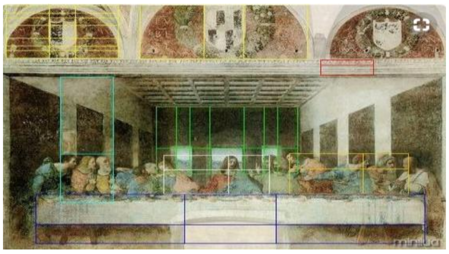
Figura 13 - A pintura *Mona Lisa*, de Leonardo da Vinci, e algumas representações da aplicação de retângulos áureos.



. (Fonte: HTTP://matematicadaelenise.blogspot.com./2009/10/leonardo-da-vinci-e-o-retangulo-aureo.html.)

Em sua obra “A última Ceia”, Leonardo da Vinci faz o uso significativo de retângulos áureos a fim de buscar beleza, harmonia e perfeição.

Figura 14 – A última ceia, de Leonardo da Vinci, e algumas representações da aplicação de retângulos áureos.



(Fonte: https://br.pinterest.com/pin/324611085622356294/)

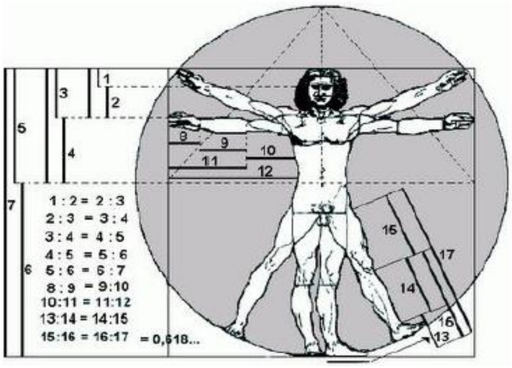
No item abaixo destacamos o homem vitruviano e o corpo humano a partir da ideia de medida e comparação.

O Corpo Humano e o Número Áureo

A obra Homem Vitruviano é um desenho singular feito por Leonardo da Vinci (1452 - 1519)**,** e representa o equilíbrio, a beleza, a harmonia e a perfeição das proporções matemáticas do corpo humano. Ela representa um homem completamente nu, de braços e pernas abertas em diferentes posições, sempre de modo simétrico.

> Leonardo Da Vinci disse que a arte deveria manifestar por ela própria um movimento contínuo, harmonioso e beleza e, assim, utilizou o retângulo de ouro em suas obras. No quadro Mona Lisa, utilizou o número Fi na relação entre o tronco e a cabeça e entre os elementos que compõem o seu rosto, a própria moldura já um retângulo de ouro. Ao criar o Homem Vitruviano, ele ilustrou, de maneira clara e didática, a grande parte das ocorrências do número de ouro no corpo humano. Esse desenho é considerado um símbolo da simetria básica do corpo humano, extensivo para o universo como um todo. (OLIVEIRA; FERREIRA, 2010, p. 65)

Figura 15 – Homem Vitruviano.



(Fonte: http://artenarede.com.br/blog/index.php/o-homem-vitruviano-e-o-numero-phi-a-matematica-da-beleza/)

Segundo Santos (2013), a primeira pessoa a usar o recurso da proporção humana como argumento racional para determinar formas que devem ser sentidas como bela foi Marcus Vitruvius Pollio, arquiteto e engenheiro romano. Ele viveu no século 1 a. C. e mostrou a perfeição humana através do *homo vitruvianus,* onde observou-se a razão áurea de maneira harmoniosa nas diversas medidas do corpo humano.

Por vários motivos, como o supracitado, o número áureo é popularmente conhecido como número de Deus ou número divino.

Design e o Número Áureo

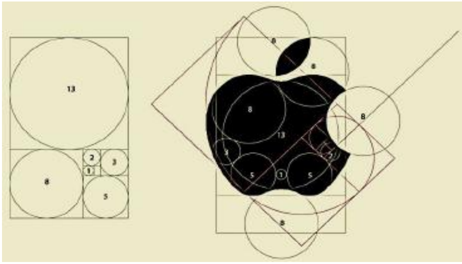
No design, a busca por um visual atrativo faz com que designers despertem atenção para elementos geométricos capazes de atrair a curiosidade do público. Nesse sentido, Oliveira e Ferreira (2010) relatam em detalhes como o número de ouro influenciou artistas e arquitetos de variadas épocas. Segundo esses autores, a busca pelo “belo” é um dos temas que desde os primórdios mais chamam a atenção da humanidade.

Essa base geométrica é utilizada tanto em produtos (Iphone 4, Macbook, entre outros) quanto em logotipos de empresas na atualidade. O mundo do design tem utilizado o retângulo áureo em seus audaciosos projetos e logotipos, proporcionando beleza e harmonia para os mesmos.

> A manutenção da tradição do formato geométrico em grande parte das marcas gráficas permitiu também a continuidade da aplicação dos recursos geométricos

relacionados com a proporção áurea na composição gráfica das marcas institucionais e comerciais. (ARAÚJO, 2015, p. 74)

Figura 16 – Marca da Apple. Estudo gráfico-geométrico.



(Fonte: ARAÚJO, 2015, p. 83)

Muitos produtos, ícones e marcas da Apple, por exemplo, são baseados no retângulo áureo. Além disso, a espiral de Fibonacci se destaca no interior do retângulo juntamente com as circunferências formando o contorno do logotipo.

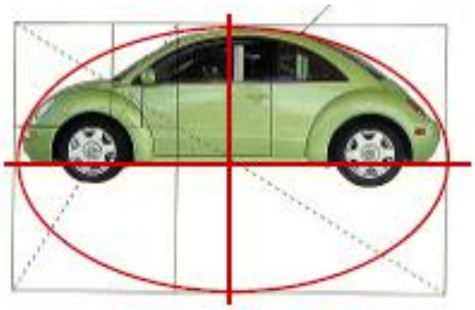
Figura 17 – Portfólio elaborado pela empresa PortilloDesign.

(Fonte: https://velhobit.com.br/design/o-numero-de-ouro-e-sua-aplicacao-em-design.html)

Segundo Garofalo (2017), entende-se que a Proporção Áurea está presente na concepção do que se considera “belo”, portanto, bonito e desejável. Por este motivo grandes marcas e artistas gráficos estudam e utilizam este conceito de forma assertiva, fazendo com que suas peças e produtos fiquem mais harmoniosos e belos, e consequentemente, melhor aceitos pela população.

No ramo automobilístico, o design utilizando a geometria e o número áureo se faz presente, trazendo linhas harmonias e inovadoras para os automóveis. Pensando em um público apaixonado por carros, engenheiros e designers fazem da geometria uma aliada para a construção e acabamento dos mesmos.

Figura 18 – Volkswagem New Beetle e o retângulo áureo.



(Fonte:VISCONTI, 2002, p.82)

Segundo Visconti (2002), O Volkswagem New Beetle é menos um veículo do que uma peça de escultura cinética à medida que se move pelas ruas. Distintamente diferente dos demais carros, ele exibe a ideia visual de coesão de forma. Seu corpo é, ao mesmo tempo, atrasado e futurista, uma fusão de geometria e nostalgia. O corpo adapta-se na metade superior de uma elipse áurea. As janelas laterais repetem a forma da elipse áurea, com as portas repousando num quadrado de um retângulo áureo.

A seguir, trataremos do número Pi considerando a sua história e conceito.

1.5. O Número Pi.

Neste capítulo trataremos do número transcendente π, desde suas possíveis origens até a contemporaneidade. Simbolicamente, ele é expresso pela letra grega π e é obtido através da razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro.

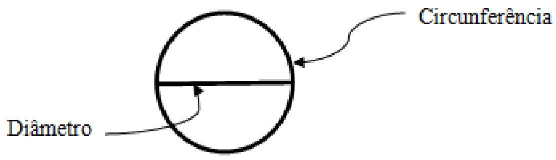


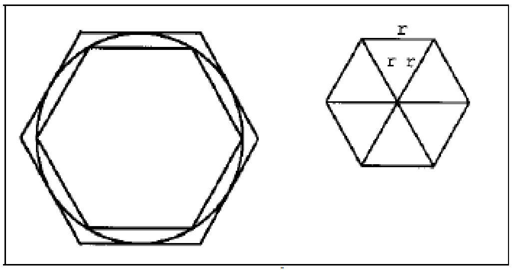
Figura 19 – Circunferência e seu respectivo diâmetro

De acordo com Oliveira (2013), o número π tem uma história bela e fascinante, que teve início a milênios atrás. No velho testamento (Primeiro Livro dos Reis 7 : 23) está escrito: “Depois Hirão fez um tanque redondo de bronze, com quatro metros e meio de diâmetro, dois metros e vinte e cinco centímetros de altura e treze metros e vinte e cinco centímetros de circunferência”. Este mesmo verso aparece também em II Crônicas 4 : 2. Esta passagem está inclusa em uma lista de especificações para a construção do grande templo de Salomão. A circunferência era, aproximadamente, seis vezes o raio ou, aproximadamente, três vezes o diâmetro. Podemos dizer, então, que os antigos Hebreus atribuíram para π o valor 3.

Segundo Contador (2008), o Papiro de Rhind (1650 a.C.) relata um procedimento para calcular a área de um círculo que usava a constante $4.\left(\frac{8}{9}\right)^2$, o papiro não dá o valor de π, mas fornece uma regra para calcular a área de um corpo circular e ainda mostra problemas envolvendo áreas de círculo no qual o valor utilizado para π é de 3,16.

Segundo Boyer (1974), por muitos anos o método de Arquimedes, conhecido como o método clássico para o cálculo de π, foi o melhor caminho para encontrar este número até que no século III d.C. Para Bongiovanni e Watanabe (1991), Arquimedes recorreu a um processo geométrico que consistia em inscrever e circunscrever circunferência em polígonos regulares de 6, 12, 24, 48 e 96 lados.

Figura 20 – Processo utilizado por Arquimedes para calcular π.



(Fonte: http://pubol.ipbeja.pt/Artigos/NúmeroPi/pi.htm.)

Nesse processo, o perímetro da circunferência está compreendido entre os perímetros dos polígonos inscrito e circunscrito a ela. Arquimedes observou que, conforme duplicava o número de lados dos polígonos, acabava obtendo um limite superior e um limite inferior cada vez mais próximo de π. Dessa maneira, o matemático obteve $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ que, na forma decimal, representa $3{,}140845 < \pi < 3{,}142857$. O matemático chinês Liu Hui, recorrendo a um polígono regular de 3072 lados, obteve aproximação para $\pi = 3{,}14159$.

No século V, o chinês Tsu Chung-Chi (430 - 501) chegou a uma aproximação mais exata $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$. Também no final desse século, o astrônomo hindu Aryabhata encontrou um valor surpreendentemente aproximado: $\pi = \frac{3927}{1250} = 3{,}1416$.

Somente em 1765 foi demonstrado que π é um número irracional, ou seja, até então poderia se pensar na possibilidade desse número ser racional. Segundo Eves (1997), essa questão está ligada ao problema da quadratura do círculo. Daí a preocupação de calcular π com cada vez mais casas decimais, procurando uma lei que resultasse numa dízima que teimosamente não se conseguia encontrar.

As descobertas em torno da construção de um valor exato para π ao longo da história apresentam consideráveis variações de valores que se aproximam, de fato, de π e, outros valores que menos se aproximam de π. Por exemplo, no 240 a.C temos a aproximação de 3,142857 por Arquimedes e, 220 anos depois, temos a aproximação de 3,125 por Vitruvius. No ano 480 d.C. temos a aproximação de 3,1415926 por Tsu Chung-Chi e, 740 anos mais tarde temos a aproximação de Fibonacci para 3,141818. Observamos que essas variações para se chegar a um valor ideal para π teve seus altos e baixos no que diz respeito a real aproximação desse número.

Com o auxílio tecnológico dos computadores é possível calcular o valor de π com uma grande quantidade de algarismos decimais. No exemplo a seguir, o número π é apresentado com mais de 100 casas decimais.

π=3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664 7...

No ano de 2011, os engenheiros Alexander Yee e Shigeru Kondo, americano e japonês respectivamente, calcularam os dez primeiros trilhões de casas decimais de π. O computador deles levou aproximadamente um ano para completar o feito. Para se ter uma ideia da dimensão do número encontrado, se eles escrevessem a sequência dos 12 bilhões de casas decimais encontrado com fonte Times New Roman de tamanho 12, o papel necessário para todos os números daria, aproximadamente, 60 voltas em torno da Terra.

Segundo Berlingoff e Gouvêa (2008), somente em 1706, William Jones, um matemático britânico, foi o primeiro a usar uma letra grega π como o nome desse número. O símbolo foi adotado pelo grande matemático suíço Leonard Euler em suas publicações nas décadas de 1730 e 1740 e, pelo final do século, ela se tornara o nome comum dessa constante.

Para Bigode (1994, p. 32), "o símbolo usado para designar a constante obtida pela razão entre a medida do contorno de uma circunferência e seu diâmetro é a letra grega π, inicial da palavra contorno, escrita em grego: περιμετροξ."

Em 1765 o matemático alemão Johann Lambert demonstrou que π é um número irracional, ou seja, não pode ser escrito na forma de fração com numerador e denominador inteiros. Um pouco mais tarde, em 1882, Ferdinand Lindemann mostrou que o π é um número transcendente, ou seja, não pode ser raiz de nenhuma equação algébrica cujos coeficientes sejam inteiros.

Embora o estudo do π já ocorra a alguns milhares de anos, foi no século XVIII que se provou a sua irracionalidade. A demonstração da irracionalidade de π, que daremos a seguir, é devida ao matemático canadense Ivan Niven, em artigo publicado no Bulletin of the American Mathematical Society em 1947, utilizando o método desenvolvido por Hermite para provar a transcendência do número *e*.

1.5.1 A Irracionalidade de Pi.

A demonstração que apresentaremos abaixo é baseada na obra "Números Irracionais e Transcendentes" de Djairo de Guedes de Figueiredo, da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, ano 2011.

Considere a função $f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$, onde n é um número inteiro positivo.

Lema 1.1. $D^k f(0)$é um número inteiro pra qualquer $k = 0, 1, 2, \ldots$, onde $D^k f$ representa a k – ésima derivada de f, e $D^0 f = f$.

Prova: Utilizaremos abaixo a fórmula de Leibnitz para as derivadas de um produto de duas funções, g e h:

$$D^k(gh) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} = D^j g . D^{k-j} h \qquad (1.1)$$

Aplicando (1.1) à função f, temos:

$$D^k f = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j x^n D^{k-j} (1-x)^n. \qquad (1.2)$$

Agora, observe que

$$D^j x^n \Big|_{x=0} = \begin{Bmatrix} 0, se\ j < n \\ n!, se\ j = n \\ 0, se\ j > n \end{Bmatrix} \qquad (1.3)$$

Onde a barra com $x = 0$ quer dizer que a derivada é calculada no ponto $x = 0$. Logo, de (1.2) e (1.3) concluímos

$$D^k f(0) = 0 \text{ se } k < n \qquad (1.4)$$

e

$$D^k f(0) = \frac{1}{n!} \binom{k}{n} n!\, D^{k-n} (1-x)^n \Big|_{x=0}, \text{ se } k \geq n. \qquad (1.5)$$

Como os coeficientes binomiais são inteiros, segue-se que a expressão no segundo membro de (1.5) é um inteiro. Assim, (1.4) e (1.5) dão o que se queria provar.

Lema 1.2. $D^k f(1)$ é um número inteiro para qualquer k = 0, 1, 2, ...

Prova: Segue-se diretamente do lema anterior e da observação de que $f(1-x) = f(x)$.

Para dar continuidade, suponhamos que $\pi^2 = \frac{p}{q}$, onde $\frac{p}{q}$ é uma fração irredutível, e chegar a um absurdo, mostrando assim que π^2 não é racional. Por consequência, π não poderá ser racional, pois o quadrado de um racional também é um racional.

Defina a função

$$F(x) = q^n\{\pi^{2n}f(x) - \pi^{2n-2}D^2f(x) + \cdots + (-1)^n D^{2n}f(x)\} \qquad (1.6)$$

Como consequência dos Lemas 1.1 e 1.2, e da hipótese $\pi^2 = \frac{p}{q}$, temos

$F(0)$ e $F(1)$ são números inteiros (1.7)

A seguir observe que

$$\{F'(x)sen\,\pi x - \pi F(x)\cos\pi x\}' = F''(x)sen\,\pi x + \pi^2 F(x) sen\,\pi x, \qquad (1.8)$$

Onde a' representa a derivada.

Calculando a derivada segunda de F temos

$$\{F'(x)sen\,\pi x - \pi F(x)\cos\pi x\}' = p^n\pi^2 f(x) sen\,\pi x. \qquad (1.9)$$

Agora, aplicamos o teorema fundamental do cálculo integral que diz: "Se g : [0,1] → R é uma função continuamente derivável em [0,1], então $\int_0^1 g'(x)dx = g(1) - g(0)$". Use esse teorema para a função $g(x) = F'(x) sen\,\pi x - \pi F(x)\cos\pi x$. Em virtude de (1.9), obtemos

$$p^n\pi^2 \int_0^1 f(x) sen\,\pi x\, dx = \pi F(1) + \pi F(0),$$

Ou seja,

$$\pi p^n \int_0^1 f(x) sen\,\pi x\, dx = F(1) + F(0). \qquad (1.10)$$

Para finalizarmos a demonstração, pensaremos no seguinte: o lado direito de (1.10) é inteiro em virtude de (1.7); portanto, se mostrarmos que para um $n \epsilon N$ conveniente, o lado esquerdo (1.10) é um número positivo estritamente menor que 1, teremos os tal absurdo. É claro que para $0 < x < 1$, temos

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!} \qquad (1.11)$$

Usando a desigualdade (1.11) em (1.10) temos

$$0 < \pi p^n \int_0^1 f(x) sen\, \pi x\, dx < \pi \frac{p^n}{n!} \int_0^1 sen\, \pi x\, dx = \frac{2p^n}{n!},$$

onde a última igualdade foi obtida fazendo a integração indicada. Como $\lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{n!} = 0$,

vemos que podemos tomar um $n \epsilon N$ tal que $\frac{2p^n}{n!} < 1$, e o nosso objetivo está atingido.

1.5.2. A Transcendência de Pi.

No capítulo anterior vimos que π é um número irracional, isto é, não pode ser escrito através da razão entre dois números inteiros. Neste capítulo, veremos que π é transcendente, ou seja, não é raiz de um polinômio não nulo de coeficientes inteiros. Para tal, iremos sugerir uma obra para que você, leitor, possa apreciar com mais detalhes essa demonstração rica em propriedades matemáticas.

Existem várias iniciativas para a demonstração da transcendência do número π. Em 1882, Lindermann demonstrou a transcendência de π utilizando o método usado por Hermite para demonstrar a transcendência de *e*. Segundo Figueiredo (2011), como consequência desse fato, fica provado que o problema da quadratura do círculo tem resposta negativa. O problema é conhecido desde a antiguidade e consiste em saber se é possível, com régua e compasso, construir um quadrado cuja área seja igual a de um círculo dado.

Para tal demonstração sugerimos a leitura do livro *"Números Irracionais e Transcendentes" de Djairo Guedes de Figueiredo, coleção iniciação científica, editora SBM, ano 2011, páginas 47-58.*

De acordo com Figueiredo (2011), a demonstração da transcendência de π dada na obra supracitada, é baseada na demonstração feita por R. Moritz, em Annals of Mathematics, vol. 2 (1901), páginas 57-59, a qual, por sua vez, foi inspirada na prova de Hurwitz para a transcendência de e. A mesma demonstração da transcendência de π dada por Moritz foi dada por Ivan Niven, em American Mathematical Monthly, vol. 46 (1939), páginas 469-471. Ainda segundo Figueiredo (2011), há uma incorreção na demonstração de Moritz no momento em que aplica o teorema do valor médio para polinômios complexos. De maneira elementar e bastante cuidadosa, *Djairo Guedes de Figueiredo* demonstra na obra sugerida o teorema do valor médio para funções complexas.

1.5.3 Arquitetura, Design e Formas Circulares

Abordaremos neste item alguns projetos arquitetônicos com formatos circulares, desde milhares de anos atrás aos dias atuais. Também destacaremos o design circular no ramo automobilístico.

Arquitetura circular

As formas circulares são apreciadas por arquitetos, engenheiros e escultores a muitos anos. As suas características geométricas “arredondadas” favorecem a uma arquitetura diferenciada fugindo dos espaços perdidos em cômodos de construções retangulares.

Segundo Lapa (2015), os túmulos com formatos circulares tinham o caráter escultórico dos menires, estas edificações já compreendiam uma tectônica de maior complexidade. Alguns túmulos de pedra do Neolítico eram já concebidos com base num conjunto cujos elementos circunscrevem um espaço coberto, criando um mais acentuado nível de interioridade.

Figura 21- Túmulos de terra que recobrem as sepulturas megalíticas, Newgrange, Irlanda 3250 a.C.

(Fonte: LAPA, 2015, p.22)

O Mausoléu de Augusto é um grande túmulo, onde a estrutura tem uma planta circular e é formada por diversos anéis concêntricos de terra e tijolos revestidos por travertino e com um jardim de ciprestes no topo.

Figura 22 – Mausoléu de Augusto.

(Fonte: LAPA, 2015, p. 65)

Localizado em Brasília, o Congresso Nacional é uma das obras de Oscar Niemeyer, arquiteto brasileiro, então convidado pelo presidente Juscelino Kubitschek para traçar e erguer os edifícios governamentais em Brasília. Começou em 1956 com o Catetinho, a residência provisória do presidente da República, e seguiu, já em 1957, com o Palácio da Alvorada, o Congresso Nacional, o Teatro Nacional, o Supremo Tribunal Federal, o Palácio do Planalto, a Praça dos Três Poderes e a Catedral de Brasília. As formas circulares dos monumentos se destacam em meio à arquitetura tradicional retangular dos edifícios.

Figura 23 – Congresso Nacional.

(Fonte: https://vamosporai.com/viagens-pelo-brasil/centro-oeste/distrito-federal/pontos-turisticos-de-brasilia/)

Também arquitetado por Oscar Niemeyer, o Museu de Arte Contemporânea em Niterói abriga curvas sinuosas e uma beleza arquitetônica singular. Neste projeto, percebemos que Oscar Niemeyer utilizou bem com propriedade as circunferências concêntricas em seu projeto.

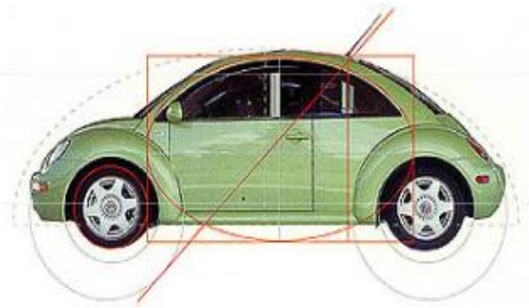
Figura 24 – Museu de Arte Contemporânea em Niterói.

(Fonte: https://oglobo.globo.com/rio/bairros/museu-de-arte-contemporanea-de-niteroi-fecha-as-portas-por-tres-meses-para-reforma-15479239)

Design circular

As formas circulares também estão presentes no ramo automobilístico. No caso do Volkswagem New Beetle, podemos citar a circunferência que forma o logotipo da marca, as circunferências concêntricas das rodas e suas respectivas caixas de rodas (para-lamas). A elipse é outra forma geométrica que se destaca neste projeto.

Figura 25- Volkswagem New Beetle e a geometria circular.



(Fonte:VISCONTI, 2002, p.83)

De acordo com Visconti (2002), a geometria do corpo do carro apresenta, ainda, outros detalhes; os faróis dianteiros e traseiros são elípticos, mas como repousam sobre curvas, aparentam ser circulares. O ângulo da antena é tangente ao círculo do para-lama da roda da frente e a posição da sua base alinha-se com o para-lama da roda traseira.

No próximo capítulo destacaremos o currículo e as considerações de Ripol (2004) quanto aos livros didáticos de matemática em torno do Ensino dos Números Irracionais na Educação Básica.

2 CURRÍCULO E O NÚMERO IRRACIONAL

Neste capítulo apresentaremos os possíveis elos entre os PCN e a BNCC acerca do ensino de Números Irracionais na Educação Básica brasileira através de um levantamento bibliográfico desses documentos considerando também as análises de Ripol quanto aos livros didáticos de matemática e o ensino destes números na sala de aula.

2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN

O conceito de currículo na educação foi se transformando e ganhando forma ao longo dos anos através de variados movimentos sociais, políticos e econômicos. As teorias curriculares contribuíram significativamente para a criação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, pois tal documento é fruto do trabalho e dos embates de especialistas e também de organizações financeiras, empresariais e internacionais ao longo das décadas do século XX.

No que tange o currículo em nosso país, somente a partir de 1920 ocorreram mudanças de atualização e reorientação curricular no Brasil. Nas décadas de 60 e 70, os movimentos de renovação de Ensino de Matemática ganharam força em vários países do mundo, inclusive o Brasil. Esse movimento ficou conhecido como Matemática Moderna. Esse movimento nasceu a partir de uma política de modernização econômica, pois a matemática seria fundamental para o desenvolvimento científico e tecnológico do país, uma vez que os cursos das áreas tecnológicas tinham como base fundamentos de matemática. De fato, tentou-se aproximar o Ensino de Matemática das escolas da Educação Básica a um ensino como é visto por pesquisadores, voltado para a formação de cientistas. Nos anos 80, o conselho nacional de professores de matemática dos Estados Unidos (National Council of Teachers of Mathematics – NCTM de 1980) apresentou no documento “Agenda para Ação” recomendações e sugestões para o Ensino de Matemática. Esse documento direcionava o foco do Ensino de Matemática para a resolução de problemas. Além disso, ele também contribuiu para discussões em torno do currículo de matemática, inserindo a importância dos aspectos sociais, antropológicos, linguísticos e cognitivos no que se refere à aprendizagem matemática.

No início da década de 1990, propostas curriculares para o ensino ganharam força e consistência, provocando a criação de instituições em nosso país com o objetivo de fazer um estudo aprofundado do currículo na Educação Básica. Em 1995, a Fundação Carlos Chagas analisou propostas curriculares oriundas de secretarias municipais e secretarias estaduais de Educação. Em 1997, o MEC apresenta os “Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais”, uma versão que destaca a organização curricular da 1ª a 4ª série do Ensino Fundamental (atualmente 1º ano ao 5º ano do Ensino Fundamental), caracterizado por Ensino Fundamental - Anos Iniciais. Dando continuidade a essa proposta de oficialização do currículo, em 1998 a Secretaria de Educação Fundamental do MEC lança os "Parâmetros Curriculares Nacionais para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental", que contempla turmas de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental (atualmente 6º ano ao 9º ano do Ensino Fundamental), caracterizado por Ensino Fundamental - Anos Finais.

É importante ressaltar que os Parâmetros Curriculares Nacionais é um documento que apresenta características potenciais para fazer a conexão entre a cultura e a sociedade externa a escola. Ele tem por finalidade apoiar o projeto das escolas na elaboração do seu programa curricular, e não um currículo a ser seguido, procurando construir referências nacionais comuns ao processo educacional de norte a sul do país.

Quanto aos objetivos do PCN no Ensino Fundamental, existe grande preocupação com a compreensão do aluno no que diz respeito a alguns valores, como respeito, direitos e deveres, além de priorizar o diálogo como forma de administrar conflitos e acordos sociais. Uma das intenções dessa reforma curricular é ajustar a relação conhecimento/comunicação, desde as particularidades dos alunos como a autoestima e perseverança até as mais variadas formas de comunicação e expressão, valorizando e enriquecendo a troca de conhecimento. Sobre a utilização de recursos tecnológicos para fins educacionais por parte dos alunos do Ensino fundamental, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997, p. 8) diz que é importante "saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos". No que tange a resolução de problemas e o processo de construção do pensamento, o PCN sugere que o aluno seja capaz de questionar a realidade formulando e resolvendo problemas a partir da criatividade, intuição, lógica e análise crítica.

Como finalidade, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática tem por objetivo fornecer elementos para ampliar o debate nacional sobre o ensino dessa área do conhecimento, socializando informações e resultados de pesquisas e as levando aos professores brasileiros. Ele visa à construção de um referencial que oriente a prática escolar que contribua para que todas as crianças e jovens brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático satisfatório, que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mercado de trabalho, priorizando as relações sociais e a cultura. Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam o papel da Matemática no ensino fundamental, evidenciando a importância do aluno valorizá-la como instrumento para compreensão do mundo que está ao seu redor, de tal maneira que venha estimular o interesse dele por essa área do conhecimento. Explicitam, ainda, a importância do aluno desenvolver e construir seu próprio conhecimento matemático, cultivando a autoestima, respeitando o trabalho dos colegas e perseverando na busca de soluções dos problemas. Os conteúdos são adotados de acordo com a relevância social, de tal modo que possam colaborar para o desenvolvimento intelectual do discente, para que o mesmo possa aplicar tais competências e habilidades no seu dia a dia. É indicada a resolução de problemas como ponto inicial para a aplicação da atividade Matemática e discutem possíveis caminhos para fazer Matemática na sala de aula, destacando a importância da História da Matemática, onde podem ser oportunizadas variadas discussões sobre a origem dos conteúdos matemáticos e, no que diz respeito às TICs - Tecnologias da Informação e Comunicação, ressaltar a sua relevância e potencialidades como ferramenta auxiliar para se obter conhecimento e fazer explorações e investigações.

Quanto aos objetivos gerais do Ensino de Matemática direcionados à construção da cidadania, os Parâmetros Curriculares Nacionais sugerem metodologias em que os alunos possam ser autores de seus próprios conhecimentos, além de colaborar para o ensino aprendizagem dos demais colegas de classe. Estimular a curiosidade do aluno é direcioná-lo para um mundo de descobertas, onde o mesmo criará argumentos, conjecturas, poderá validar seus processos de maneira lógica, fazendo assim a utilização da matemática de maneira reflexiva e crítica. Diante de problemas cotidianos que envolvem matemática, é importante coletar e organizar as informações para a resolução dos mesmos. Tal organização permite ao aluno criar as suas estratégias e utilizar as ferramentas pedagógicas necessárias que o mesmo tem a sua disposição. A busca na solução de problemas envolve etapas de processos de pensamento, onde o cognitivo do aluno é capaz de gerar estratégias e consequentemente procedimentos matemáticos a fim de atingir determinado objetivo, conforme destaca o documento:

> resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis. (BRASIL/PCN, 1997, p. 48)

Ainda dentro dos objetivos gerais do ensino de matemática para a formação do cidadão, temos a importância do trabalho em grupo onde os discentes podem discutir ideias e fazer acordos sociais, sempre priorizando o respeito mutuo. A troca de conhecimentos é uma das características marcantes nos trabalhos em grupo. Em diálogos referentes à resolução de problemas matemáticos e investigações, a linguagem é algo muito importante. Seja oral ou escrita, a linguagem é o canal de entendimento e consideramos como ferramenta principal para a busca do conhecimento em ambientes investigativos. Valorizar essas potencialidades dos discentes é muito importante, pois alguns alunos, por exemplo, tem dificuldades em expor uma ideia mais complexa através da escrita. É interessante ressaltar que, em uma investigação para resolver determinado problema, o aluno deve considerar possíveis erros como elementos importantes, pois com eles os discentes também aprendem. Diante deste cenário, o aluno sente-se a vontade para discutir ideias contribuindo para com o grupo. Diante do pressuposto, o documento discorre que:

> comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas; sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções. (BRASIL/PCN, 1997, p. 48)

A seleção de conteúdos do documento contempla o estudo dos Números e das Operações (no campo da Aritmética e da Álgebra), o estudo do Espaço e das Formas (no campo da Geometria), o estudo das Grandezas e das Medidas (que permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do conhecimento) e o estudo do Tratamento da Informação (dados estatísticos, tabelas, gráficos, combinatória e probabilidade).

Para esta pesquisa, o estudo das Grandezas e Medidas recebe destaque, pois a nossa abordagem remete a práticas de medições cotidianas como a medição de objetos e do corpo humano.

PCN e os Números Irracionais

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais existem 4 ciclos no Ensino Fundamental, onde o conjunto dos números irracionais é apresentado no quarto ciclo do Ensino Fundamental, com o intuito de que o aluno possa ampliar e aprofundar a noção de número. A ampliação do campo numérico se faz necessário neste ciclo pois as demandas cotidianas podem não ser atendidas com os conjuntos numéricos aprendidos até o terceiro ciclo. Por falar em demandas do dia a dia, o desenvolvimento numérico ganha espaço sempre diante de situações em que tais números já conhecidos não conseguem dar um retorno ao pesquisador.

> O amadurecimento do conceito de número ocorreu ao longo dos séculos, através de indagações e buscas provenientes de leigos, filósofos e matemáticos. No caminho marcado pelo desenvolvimento histórico surgiram alguns conjuntos numéricos de destaque, como os números naturais, os números inteiros, os números racionais, os números irracionais [...]. (POMMER, 2012, p. 19)

É sugerido que o aluno passe por experiências para as quais os números racionais não sejam capazes de resolver. Nessa perspectiva, é necessária a consideração de outros números: os irracionais.

Segundo o documento, é fundamental que o aluno verifique características específicas dos números irracionais, ou seja, a de que não podem ser escritos pela razão entre dois números inteiros. Além desta é importante que o

> aluno identifique o número irracional como um número de infinitas casas, decimais não periódicas, identifique esse número com um ponto na reta, situado entre dois racionais apropriados, reconheça que esse número não pode ser expresso por uma razão de inteiros; conheça números irracionais obtidos por raízes quadradas e localize alguns na reta numérica, fazendo uso, inclusive, de construções geométricas com régua e compasso. (BRASIL/PCN, 1997, p. 83)

Essa proposta inicial de como lidar com os números irracionais em sala de aula propicia ao aluno uma aprendizagem genuína do referido conteúdo, fazendo com que o mesmo faça uma viagem na história e possa visualizar a origem dos números irracionais.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), outro aspecto importante dos conteúdos do quarto ciclo é o de levar o aluno a selecionar e utilizar procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) mais adequados à situação-problema proposta, fazendo uso da calculadora como um instrumento para produzir resultados e para construir estratégias de verificação desses resultados.

No que diz respeito ao arredondamento dos números irracionais, é importante ressaltar que a todo o momento esse número, quando arredondado, tem a perda de suas características.

> Particularmente com relação aos cálculos numéricos com aproximação convém observar que no campo dos racionais ocorrem duas representações, a fracionária e a decimal, que pode ser: finita ou infinita periódica. Sabe-se, além disso, que os irracionais podem ser aproximados tanto quanto se queira por números racionais e que sua representação decimal é necessariamente infinita, e não periódica. No caso das representações infinitas (tanto de racionais como de irracionais) surge o problema da aproximação numérica, ou seja, a necessidade que se tem de considerar apenas um número finito de ordens decimais na representação do número. Tem-se aqui uma instância apropriada para abordar o conceito de arredondamento e suas consequências nos resultados das operações numéricas. (BRASIL/PCN, 1997, p. 83)

No que tange as operações matemáticas com os números irracionais, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998, p. 84) sugere que "quando eles aparecem em representações simbólicas ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, pi etc.), o aluno pode ser conduzido pelo seu professor a efetuá-las seguindo regras operatórias análogas às que são válidas para os racionais". Nesse caso, é necessário fazer aproximações através de arredondamentos de números irracionais para um decimal finito utilizando quantas casas decimais forem necessárias de acordo com a situação. No cotidiano, o que se vê na prática são alunos sendo convidados a trabalharem com radicais, fazendo deste uma quinta operação matemática.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), é sugerido também como procedimento a identificação de um número irracional como um número de representação decimal infinita, e não periódica, e localização de alguns deles na reta numérica, com régua e compasso. Outro procedimento conceitual é a aproximação por números racionais nas operações que envolvem números naturais, inteiros, racionais e irracionais, onde o aluno pode compreender os diferentes significados das operações diante de analises, interpretações, formulação de questões e solução de problemas.

Quanto ao seu ensino na sala de aula, os números irracionais têm se limitado quase que totalmente as operações com os radicais, não permitindo ao aluno desenvolver concepções acerca destes números.

> [...] onde o cálculo é tudo. [...] Desapareceram irremissivelmente todas aquelas particularidades, aquele caráter multicolorido, que os números apresentavam aos olhos dos gregos, para quem tinham mesmo um significado físico e uma personalidade (KARLSON, 1961, p. 45)

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), apesar de tradicionalmente ocupar um razoável espaço no currículo do quarto ciclo, o trabalho com os irracionais pouco tem contribuído para que os alunos desenvolvam seu conceito.

Nesse sentido, as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais sugerem materiais didáticos que sejam capazes de representar os números irracionais considerando a sua origem, para que o seu ensino tenha maior valorização no que diz respeito ao seu conceito, sem a necessidade de um rigor matemático em pleno Ensino Fundamental, mas que a sua estrutura seja apresentada da maneira mais fidedigna possível.

> Possivelmente contribui para as dificuldades na aprendizagem dos irracionais a inexistência de modelos materiais que exemplifiquem os irracionais. Além disso, quando se estuda a reta numérica racional e se constrói o conhecimento da densidade dos números racionais - entre dois racionais há uma infinidade de racionais - parece não haver mais lugar na reta numérica para nenhum tipo de número além dos racionais. Assim, a ideia de número irracional, nessa fase do aprendizado, não é seguramente intuitiva. Por outro lado, ancorar o estudo do conjunto dos racionais e irracionais no âmbito do formalismo matemático não é certamente indicado nessa etapa. Por esses motivos, julga-se inadequado um tratamento formal do conceito de número irracional no quarto ciclo. (BRASIL/PCN, 1997, p. 106)

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), o estudo dos números irracionais pode ser introduzido por meio de situações-problema que evidenciem a necessidade de outros números além dos racionais. Uma situação é a de encontrar números que tenham representação decimal infinita, e não periódica. Outra é o problema clássico de encontrar o comprimento da diagonal de um quadrado, tomando o lado como unidade, que conduz ao número $\sqrt{2}$. Nesse caso, pode-se informar (ou indicar a prova) da irracionalidade de $\sqrt{2}$, por não ser uma razão de inteiros. O problema das raízes quadradas de inteiros positivos que não são quadrados perfeitos, $\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$, etc., poderia seguir-se ao caso particular de $\sqrt{2}$.

Também é sugerida a exploração do número irracional π, sendo este a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. A verificação da irracionalidade de um número só é possível no âmbito da Matemática. Nenhuma verificação empírica, por mais precisa que seja, é capaz de provar que uma medida é irracional. No entanto, é possível propor situações que permitam aos alunos várias aproximações sucessivas para alguns deles, como o número π, por exemplo, sendo interessante usar diferentes calculadoras e informar os alunos a respeito dos cálculos que são feitos em computadores de grande porte, que produzem o valor de π com milhões de dígitos sem que haja o aparecimento de um período na expansão decimal. No que diz respeito aos cálculos aritmético e algébrico com os números irracionais, temos duas possibilidades: efetuar os cálculos seguindo regras operatórias análogas às que são válidas para os racionais ou efetuar cálculos com os irracionais por meio de aproximações racionais, permitindo a apresentação de situações apropriadas para tratar o conceito de arredondamento e utilizar as calculadoras.

Outros números irracionais transcendentais não são citados nos Parâmetros Curriculares Nacionais, nem o número irracional algébrico φ.

2.2 Base Nacional Comum Curricular - BNCC

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2017) - é um documento que visa normatizar e sistematizar o ensino nas escolas brasileiras, desde a Educação Infantil até o Ensino Médio, listando metas de ensino de cada uma das áreas: linguagens, matemática, ciências humanas e da natureza. Ela define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo de sua caminhada na Educação Básica, independente de sua origem, classe social ou local onde estuda. Construída colaborativamente por especialistas de todo o Brasil, docentes, gestores, alunos e consulta pública online, a BNCC pretende estabelecer competências e habilidades fundamentais na Educação Básica que propicie a redução das desigualdades de aprendizado.

A BNCC possui um currículo fixo mínimo, mas que pode ser acrescentado de conteúdos de acordo com a disponibilidade e os objetivos do professor, além de se constituir teoricamente como uma ferramenta para orientar a elaboração de um currículo específico para cada unidade de ensino, considerando as características regionais, sociais e culturais, com o objetivo de organizar e determinar o conteúdo mínimo que deve ser ensinado em todas as escolas públicas e privadas do país. Regida pelos princípios éticos e políticos traçados pelas Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, a BNCC visa uma formação sólida e a construção de uma sociedade igualitária e democrática.

Até o momento, os Projetos Políticos Pedagógicos das escolas são definidos de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, mas com a publicação da BNCC os currículos escolares precisarão se adequar, visto que com a sua publicação todas as unidades educacionais deverão segui-la. A BNCC é um documento mais detalhista do que o PCN no que diz respeito aos conteúdos a serem lecionados em sala de aula, porém, menos sugestivo.

BNCC e Matemática – Ensino Fundamental

O conhecimento matemático é de suma importância para todos os alunos da Educação Básica, seja por suas aplicações cotidianas, seja por seu caráter formativo. No que diz respeito à formação, a BNCC é bem direta e explicita os conteúdos mínimos a serem administrados ao longo do ano em cada ano escolar por determinada disciplina, ao contrário dos Parâmetros Curriculares Nacionais que apenas dão sugestões dos conteúdos a serem ensinados em cada ciclo por determinada disciplina.

O documento sugere a articulação dos diversos campos da Matemática – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade. Tais campos são oriundos da seleção de conteúdos sugeridos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais. Essa articulação precisa garantir que

> os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática, conceitos e propriedades, fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. (BRASIL/BNCC, 2017, p. 221)

Na BNCC é destacado como ponto importante para o Ensino de Matemática, o letramento matemático. Nessa perspectiva,

> é também o letramento matemático que assegura aos alunos reconhecer que os conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo e percebe o caráter de jogo intelectual da matemática, como aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, estimula a investigação e pode ser prazeroso (fruição). (BRASIL/BNCC, 2017, p. 222)

Esse desenvolvimento está intrinsecamente relacionado a algumas formas de organização da aprendizagem matemática, principalmente as que competem um caráter empírico. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (2017), os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem matemática e que devem ser trabalhadas ao longo de todo o Ensino Fundamental.

Com caráter enriquecedor no processo de aprendizagem, o raciocínio, a representação, a comunicação e a argumentação são competências fundamentais para o desenvolvimento do letramento matemático.

Quanto às competências específicas do Ensino Fundamental que devem ser desenvolvidas pelo componente curricular de matemática, destacamos:

- ✓ identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e atuar no mundo;
- ✓ utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos;
- ✓ interagir de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas e na busca de soluções;
- ✓ sentir-se seguro da própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos.

Baseada nos Parâmetros Curriculares Nacionais, a BNCC propõem cinco unidades temáticas correlacionadas, orientadas e distribuídas ao longo do Ensino Fundamental. São elas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas e probabilidade e estatística.

BNCC e os Números Irracionais

O pensamento numérico está intrinsecamente ligado à aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para desenvolver tal pensamento, é necessário que o aluno seja conduzido a experiências que o levem a situações significativas, ampliando de maneira gradativa o campo numérico.

> A expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. (BRASIL/BNCC, 2017, p. 225)

Comumente, o ensino do Conjunto dos Números Irracionais é realizado em nosso país no 8º ano do Ensino Fundamental, seguindo as sugestões dos Parâmetros Curriculares Nacionais que, na ocasião, sugere tal ensino no quarto ciclo do Ensino Fundamental. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular, o Conjunto dos Números Irracionais deverá ser apresentado no 9º ano do Ensino Fundamental, ainda sim seguindo as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Quanto aos objetos de conhecimento dos Números Irracionais no 9º ano do Ensino Fundamental explicitados na BNCC, temos: “necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta; números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica.” (BRASIL/BNCC, 2017, p. 268)

Quanto às habilidades destacadas na BNCC em relação aos Números Irracionais, destaca-se:

> reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional, como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo; reconhecer um número irracional como um números cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica. (BRASIL/BNCC, 2017, p. 269)

Observamos que as mesmas podem surgir a partir de observações empíricas do mundo real, favorecendo as regularidades, induções e conjecturas, propiciando maior significado para os discentes.

Ao contrário dos Parâmetros Curriculares Nacionais, a Base Nacional Comum Curricular aborda os números irracionais destacando as habilidades. Enquanto os PCN destacam os números irracionais na forma de radical (uma ideia dos reais algébricos irracionais) e em seguida destacam o irracional pi (único irracional transcendental citado nos PCN), a BNCC apenas apresenta habilidades que direcionam professores e alunos para verificarem a existência de segmentos de reta em que os números racionais não serão suficientes para medir e sugerem a localização dos irracionais na reta numérica, neste caso utilizando aproximações para um número racional. Além disso, a Base Nacional Comum Curricular não destaca os irracionais na forma de radicais, tão pouco os irracionais π, φ e outros. Talvez isso se justifique, pois a BNCC se trata de um currículo mínimo a ser dado por uma disciplina em determinado ano escolar, deixando espaço para o docente acrescentar conteúdos pertinentes às demandas de seus alunos.

2.3 Livros didáticos: o que eles dizem

Acreditamos que em uma sala de aula a autonomia do professor é inquestionável, uma vez que o mesmo é responsável direto pelo processo de ensino e de aprendizagem, auxiliando também na formação do cidadão. Os materiais e recursos utilizados na sala de aula são os mais variados (cadernos, livros, apostilas, listas de exercícios, materiais manipuláveis, calculadoras, computadores, tablets, celulares,...), possibilitando aos alunos vivências diferenciadas durante o processo de ensino. O livro didático é um material de apoio importante para a educação, sendo utilizado pela maioria dos estudantes da Educação Básica em nosso país.

Se tratando de livros de Matemática para o Ensino Fundamental, a gama de coleções é bastante considerável fazendo com que os docentes analisem os livros e escolham aqueles que melhor atendam as suas necessidades e de seus alunos ao longo do período letivo. Sobre os números irracionais nos livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental, Ripol (2007) elenca o que esses livros têm feito de um modo geral:

- reconhecimento de que existem números que não são racionais;
- pouca ênfase que se dá ao método matemático;
- a maneira como são introduzidos os números irracionais: o exemplo $\sqrt{2}$ é apresentado sem a demonstração de sua irracionalidade sendo, portanto, induzido que a sua expansão decimal seja não periódica;
- As formas utilizadas no estudo dos números irracionais têm se limitado, quase que exclusivamente, ao ensino do cálculo com radicais. O ensino tradicional dos irracionais têm pouco contribuído para que os alunos desenvolvam seu conceito.

De acordo com a autora, há um desconforto por parte dos autores de livros didáticos de matemática quanto aos números irracionais e a construção do conjunto dos números reais. Durante a análise de livros didáticos de matemática referente aos assuntos números irracionais e números reais, Ripol (2007) percebeu que os livros apresentam boa discussão do assunto, mas que logo são interrompidos e algumas vezes sem nenhuma continuidade. Ainda segundo a autora, os textos apresentados são apenas informativos, não apresentando uma discussão. Outro aspecto negativo destacado são as frases ambíguas, capazes de confundir alunos e até professores.

De acordo com Boff (2006), a maioria dos livros didáticos não estão sendo contemplados com as indicações e sugestões dos PCN a respeito do ensino de números reais. A autora destaca que os Parâmetros Curriculares Nacionais não pontuam as dificuldades de se operar com os números irracionais.

Quanto ao entendimento dos alunos a partir dos livros didáticos de matemática a respeito dos números irracionais, Boff (2006, p. 8) diz: “acabam se mostrando falhos, pois os poucos alunos que, depois de desenvolvido o assunto, se arriscavam afinal a definir número irracional, o faziam de maneira mecânica.”

Em sua pesquisa, Ripol (2007), analisou 10 livros didáticos de matemática em que as definições sobre números irracionais são apresentadas de formas distintas. A autora as classifica em três grupos por semelhança:

•(A) "Um número é irracional se não puder ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a,b \in Z$ e b não nulo."

"Irracional é o número que não pode ser escrito na forma de fração".

• (B) "Irracional é o número cuja representação decimal é infinita e não periódica".

"Todo número escrito na forma de um decimal infinito e não periódico é um número irracional".

• (C) "Os números irracionais representam medidas de segmentos incomensuráveis com a unidade".

Analisando as definições, em (A) pressupõe-se que há o conhecimento da existência de outros números (os racionais). Isso remete a ideia de que os números racionais são essenciais para a aprendizagem dos números irracionais, o que nem sempre acontece em sala de aula. Analisando as definições em (B), parte-se do pressuposto que há o conhecimento da existência de outros números além dos racionais. Refletindo sobre a definição apresentada em (C), vejo que o problema está situado na relação da possibilidade do número negativo representar uma medida de comprimento.

Segundo Boff (2006), a abordagem dos números irracionais e números reais dos livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental enfatizam:

• no 8º ano do Ensino Fundamental, apenas há uma apresentação do conceito de número irracional, muitas vezes incompleta, e oferecem apenas dois exemplos de números irracionais: $\sqrt{2}$ e π, logo após afirmar que π é um número irracional, o tornam o número racional 3,14 sem muitos comentários sobre tal aproximação.

• no 9º ano do Ensino Fundamental, os livros didáticos abordam quase que exclusivamente o cálculo com radicais, que pouco contribui para a real compreensão do conceito de número "irracional/real", bem como sobre o significado das quantidades que estes números representam.

Para os alunos da Educação Básica, é fundamental compreender o significado e saber como representar um número, pois é através das representações e situações problemas que os alunos são capazes de manipular e significar os conjuntos numéricos, em especial, o conjunto dos números irracionais, onde os livros didáticos podem representam um material auxiliar nobre para que tais objetivos sejam alcançados.

2.4 Ensino de Números Irracionais na sala de aula de Matemática

No Ensino Fundamental, o ensino dos conjuntos numéricos reserva, comumente, um espaço bastante considerável para o ensino dos números inteiros e dos números racionais, enquanto o ensino dos números irracionais ocorre de maneira mais sucinta e com aplicações de técnicas, mecanizando o ensino desses números. De maneira análoga, os livros didáticos minimizam os conteúdos referentes ao conjunto dos números irracionais, explorando com mais intensidade o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números racionais. Leviathan (2004) diz que os números inteiros e os números racionais são minuciosamente estudados na escola básica. Os números racionais são apresentados usualmente como uma comparação entre números inteiros ou expressos na forma de um número decimal exato ou por dízima periódica.

> Pouca atenção é dada aos números irracionais na Matemática Elementar. A principal razão, em nossa opinião, é que a matemática da escola básica é essencialmente concebida como um conjunto de aplicação de técnicas. (FISCHBEIN; JEHIAM; COHEN, 1995, p. 29)

Os números irracionais apresentam peculiaridades bem distintas dos números racionais. Enquanto os números irracionais não apresentam características para responder a perguntas do tipo "quantos?", os números racionais fazem este papel com propriedade. Na sala de aula de matemática, o ensino dos números irracionais ainda se encontra em um profundo poço de mistérios. Vale ressaltar que ensinar números irracionais depende de planejamento, pois trata-se de um assunto delicado, pouco intuitivo e nada trivial.

> [...] ensino dos números e das operações na educação básica não deve visar a aquisição de um conjunto de técnicas rotineiras, mas sim uma aprendizagem significativa ligada a uma compreensão relacional das propriedades dos números e das operações. Não basta aprender procedimentos, é necessário transformá-los em instrumentos de pensamento. (COELHO, 2005, p.29)

De acordo com Corbo (2012), dada a importância dos números irracionais para a compreensão da ampliação dos campos numéricos, seu estudo não pode receber uma atenção descuidada, que enfatize um único aspecto (por exemplo, o algorítmico), sob pena de provocar a elaboração de uma concepção desses números despida de significado. Isto é, a abordagem dos irracionais não pode ser feita por meio de um trabalho aligeirado, fraco, ainda que se considere toda a complexidade inerente à construção desse conhecimento.

Segundo Junior (2014), os irracionais estudados nas escolas são aqueles obtidos através de raízes, senos, cossenos, tangentes e logaritmos "inexatos" (não racionais), como, por exemplo, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, sen (8), cos (9), tan (10), log 3 etc. Como todos os irracionais têm representação infinita, sua localização na reta deve ser aproximada, e, portanto, haveria necessidade de se ensinar métodos de aproximação, o que, lamentavelmente, não é feito. De acordo com esse autor, é necessário explicar ao aluno a necessidade de saber que existe um número, não inteiro, que não tem representação decimal finita, que não tem representação como fração, chamado número irracional, cuja representação é decimal infinita e não periódica, mas que sempre pode ser substituído (aproximado) por um número racional, é uma tarefa, no mínimo, árdua. E de fato um convite à exploração de mais um conjunto numérico abstrato que surge, através da descoberta de novos elementos e suas propriedades. Uma aventura intelectual matemática disfarçada de exercício de raciocínio lógico. Precisamos fazer exemplificações, operações e aproximações com os mais variados tipos de números reais, presentes na Educação Básica, pois é através dessa experiência prática que o aluno se aproxima das características e propriedades dos diferentes números reais.

De acordo com Ripoll (2004) em geral, na sua formação dentro do curso de Licenciatura, o futuro professor faz um curso de Análise na Reta ou similar, onde é feita a construção dos números reais. Mas ali o conjunto dos Reais é construído como complemento de Q via cortes de Dedekind ou sequências de Cauchy, deduzindo-se dessa estrutura as demais propriedades, e muito pouco (ou nada) é esclarecido sobre os conflitos normalmente existentes sobre este assunto. Daí, os licenciados voltam a Educação Básica, agora como professores, sem o devido esclarecimento sobre tal assunto, sem, por exemplo, nunca terem "feito a ponte" entre aquela construção vista em Análise na Reta e a resposta às perguntas.

> Com estas dúvidas não discutidas e esclarecidas durante a Graduação, os licenciados voltam à Escola Básica, agora como professores, e o que se revela é que eles não têm conseguido complementar os livros didáticos e fazer com que sejam atingidos os objetivos dos Parâmetros Curriculares Nacionais, no que tange ao ensino de números irracionais e reais. (BOFF, 2006, p.10)

Sobre o estudo dos números irracionais, vemos que muitos alunos chegam ao final dos Ensinos Fundamental e Médio com conhecimento abaixo do esperado, o que nos sugere um tratamento inadequado para os números e operações entre eles. Segundo Souto (2010), é demasiada a limitação ao apresentar, na Educação Básica, apenas o cálculo com radicais como exemplo de operação e $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e π como únicos exemplos de irracionais. Acreditamos que esse fato aconteça devido à má formação em nível superior dos futuros professores e à maneira pela qual tais conceitos são apresentados nos livros didáticos. Ou seja, os futuros professores ministrarão em sala de aula aquilo que encontram nos livros didáticos, pois o que é tratado nos cursos de licenciatura é de certa forma distante e desconectado das problemáticas que envolvem o ensino desses conceitos na Educação Básica.

Em relação a professores da Educação Básica, Penteado (2004) relata que alguns estudantes associam a irracionalidade de um número com a infinitude de sua representação, relacionando a representação decimal infinita, ou o sinal de reticência com número irracional, isto é, o fato de um número ter reticência para simbolizar infinitas casas decimais já o caracteriza como irracional mesmo que nada seja analisado sobre a possibilidade de haver um período o que o caracterizaria como número racional. Estabelece também que os padrões para os irracionais sejam principalmente aqueles associados às raízes quadradas e ao número π. Como estamos vendo, essas lacunas do ensino dos números irracionais estão associadas a uma série de problemas que permeiam os ensinos fundamental, médio e superior através de concepções precipitadas em relação aos números irracionais por parte de alguns docentes e também dos livros didáticos, que fazem uma abordagem superficial e operatória desses números, ignorando a sua origem e essência em relação à definição e também na mecanização de processos repetitivos dos exercícios oferecidos.

No que diz respeito à distribuição curricular para o ensino dos números irracionais, Pommer (2012) destaca a importância da redistribuição do estudo dos números irracionais, não apenas nos dois últimos anos do Ensino Fundamental, mas também ao longo dos Ensinos Médio e Superior (Licenciatura em Matemática), para que se possa consolidar e ampliar tais conhecimentos em etapas escolares subsequentes, nas quais os estudantes certamente já desenvolveram maturidade e outras habilidades necessárias para compreensão e aprofundamento desse assunto.

Quanto ao ensino dos números irracionais no Ensino Fundamental, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1997) sugere que o discente seja capaz de identificar esse número como um número com infinitas casas decimais não periódicas, identifique esse número como um ponto na reta e reconhecendo que esse número não pode ser escrito por uma razão de dois números inteiros.

O aluno precisa passar por experiências que o convide a dialogar com as raízes das construções numéricas, sendo este capaz de conceituar e dar significados neste campo matemático. Acreditamos que os alicerces para o ensino dos números irracionais estejam baseados nos eixos constitutivos exato/aproximado, periódico/não periódico e finito/infinito, onde se faz necessários percursos metodológicos que abracem de maneira sólida tais eixos supracitados, favorecendo para uma aprendizagem significativa.

Experimentos manipuláveis, por exemplo, são muito bem vindos para potencializar a evolução da construção do pensamento dos discentes, dando a oportunidade para estes construírem os seus próprios conhecimentos acerca dos números irracionais, contrariando as técnicas e metodologias engessadas e vazias de significados que assombram o ensino desse conjunto numérico.

No capítulo a seguir, abordaremos os objetos didáticos desta pesquisa: investigação matemática, linguagem e escrita matemática.

3 INVESTIGAÇÃO E LINGUAGEM

Neste capítulo abordaremos os meios didáticos para que sejam alcançados os objetivos desta pesquisa, onde destacamos a investigação matemática, a linguagem e a escrita matemática, e suas influências no processo de ensino aprendizagem. Assim, os reconhecemos como instrumentos essenciais para a análise da pesquisa.

3.1 Investigação Matemática

Considerando que este trabalho tem a intenção de verificar o que alunos do 9º ano do Ensino Fundamental dizem a respeito do conceito dos números irracionais π *e* φ a partir de um conjunto de tarefas exploratórias, acreditamos que a investigação matemática seja um elemento indispensável para o corpo desta pesquisa.

O que podemos definir por Investigação Matemática? Para podermos responder a essa pergunta, precisamos nos certificarmos da etimologia da palavra investigação. De acordo com o grande dicionário da língua portuguesa da porto editora (2010), a palavra **investigação** vem do latim investigatiõne. **Investigação** é o ato ou efeito de investigar; inquirição; indagação; estudo ou série de estudos aprofundados sobre determinado tema, numa área científica ou artística; pesquisa.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), uma investigação pode ter variados contextos, como por exemplo, investigação científica, investigação jornalística, investigação criminal, entre outras. Nessa perspectiva, Ponte relata que

> [...] investigar não é mais do que conhecer, procurar compreender, procurar encontrar soluções para os problemas com nos deparamos. Trata-se de uma capacidade de primeira importância para todos os cidadãos e que deveria permear todo o trabalho da escola, tanto dos professores como dos alunos (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 2).

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), investigação matemática é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades. Segundo Castro (2004, p. 34), “as aulas investigativas supõem o envolvimento dos alunos com tarefas investigativas que permita a eles realizar atividade matemática”.

Nesse contexto, a Investigação Matemática está direcionada para a busca da construção do conhecimento matemático, que pode surgir de maneira cotidiana para a resolução de problemas. Os alunos devem ter a oportunidade de expressar suas ideias e defendê-las, estando aberto para ponderações e críticas construtivas. Ponte, Brocardo e

Oliveira (2015) afirmam que uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema e resolver. De fato, em matemática, investigações e resolução de problemas sempre caminham de mãos dadas.

Segundo Palhares (2004), as investigações matemáticas são atividades que têm um caráter mais aberto, ou seja, poderão possibilitar mais de uma resposta e necessitam da criatividade e interesse do aluno para resolvê-la.

Para Fiorentini e Lorenzato (2006), investigações matemáticas são

> aquelas que mobilizam e desencadeiam, em sala de aula, tarefas e atividades abertas, exploratórias e não diretivas do pensamento do aluno e que apresentam múltiplas possibilidades de alternativa de tratamento e significação. [...] Dependendo da forma como essas aulas são desenvolvidas, a atividade pode restringir-se apenas à fase de explorações e problematizações. Porém, se ocorrer, durante a atividade, formulação de questões ou conjecturas que desencadeiam um processo de realização de testes e de tentativas de demonstração ou prova dessas conjecturas, teremos, então, uma situação de Investigação Matemática. (FIORENTINI E LORENZATO, 2006, p. 29)

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), para que uma determinada situação possa configurar uma investigação é primordial que ela seja motivadora e desafiadora, não sendo imediatamente acessíveis, ao estudante, nem o processo de resolução nem a solução da questão. De acordo com esses autores, os professores de matemática podem propor tarefas de natureza diversas na sala de aula. Se o objetivo é que os alunos realizem investigações matemáticas, é importante analisar o modo como estas tarefas se distinguem de outras, bem conhecidas, como exercícios e problemas. Observando o Quadro 1, Ponte relata as diferença básicas entre a realização de exercícios, problemas, explorações e investigação.

Quadro 1 – Classificação e descrição dos tipos de atividades.

Atividade	Descrição
Exercício	É uma tarefa simples, um resolva, um efetue, de rápida resolução, e de estrutura fechada. Existe uma solução exata e já esperado pelo professor.
Problema	Tarefa com alto grau de dificuldade e com estrutura fechada. Existe uma solução exata ou mais coerente, relativamente rápida, já esperada pelo professor.
Exploração	Tarefa fácil, na qual muitas vezes, é sugerido ao aluno como proceder, para assim, observar e conceber importantes informações. Possui estrutura aberta.
Investigação	Uma tarefa também de estrutura aberta, porém mais difícil que a exploração, poucas informações são dadas, e o aluno fica mais independente para formular suas próprias questões norteadoras e empenhar em respondê-las.

(Fonte: PONTE, 2003, p.5)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN sugerem atividades de cunho investigativo nas aulas de matemática. O documento elenca algumas características importantes, potencializando essa tendência em Educação Matemática.

> [...], a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios. (BRASIL/PCN, 1997, p.27).

Em constante crescente, a Investigação Matemática vem ganhando espaço nos currículos brasileiros. Nessa perspectiva, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) diz que "a atividade matemática escolar não é olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade".

Os Parâmetros Curriculares Nacionais ressaltam ainda que é importante

> identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. (BRASIL/PCN, 2002a, p.47).

Para Assis, Frade e Godino (2013), as atividades de investigação possibilitam aos alunos vivenciarem experiências matemáticas. No entanto, para que essa investigação possa se desenvolver, é recomendado que o professor centre a aula na atividade dos alunos, em suas ideias e em sua pesquisa, e mantenha uma postura questionadora gerenciando o grau de apoio e suporte a dar aos alunos.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) o ensino deve levar em consideração a valorização do diálogo em sala de aula; com mediação do professor, proporcionando atividades que estimulem o raciocínio, a criatividade e que facilitem o convívio com o incerto e imprevisível.

As Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (2002a) ainda apresentam de maneira sucinta:

> A aprendizagem não se dá com o indivíduo isolado, sem possibilidade de interagir com seus colegas e com o professor, mas em uma vivência coletiva de modo a explicitar para si e para os outros o que pensa e a dificuldade que enfrenta. Alunos que não falam sobre Matemática e não tem oportunidade de produzir seus próprios textos nesta linguagem dificilmente serão autônomos para se comunicarem nesta área. (BRASIL/PCN, 2002a, p. 120)

A investigação matemática tem sido uma das tendências em Educação Matemática, pois o ato de investigar está intimamente ligado ao pensamento do indivíduo.

Cunha, Oliveira e Ponte (1995) relatam que o papel libertador que as atividades de investigação podem desempenhar na aprendizagem da matemática justifica uma atenção especial à sua elaboração. A troca de ideias e de opiniões entre professores e a experimentação de protótipos das atividades são componentes que poderão enriquecer, do nosso ponto de vista, as propostas de trabalho.

Nessa perspectiva, Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) ressaltam:

> O aluno é convidado a integrar a Matemática, complementar a Matemática não na resolução de exercícios padronizados e na formulação de questões, na realização de provas e refutações, agindo como um matemático, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e o professor. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 23).

Para Saramago (2009), nesse caso, o aluno participará ativamente da atividade e escolherá a estratégia que usará para a sua solução. O aluno percebe a matemática como algo palpável, dinâmico e com várias possibilidades e estratégias de solução.

> A realização de atividades de investigação na aula de Matemática são importantes porque elas: (a) constituem uma parte essencial da experiência Matemática e, por isso, permitem uma visão mais completa desta ciência; (b) estimulam o envolvimento dos estudantes, necessário a uma aprendizagem significativa; (c) podem ser trabalhadas por estudantes de ciclos diferentes, a níveis de desenvolvimento também diferentes; e (d) potenciam um modo de pensamento holístico (ao relacionarem muitos tópicos), essencial ao raciocínio matemático (CUNHA; OLIVEIRA; PONTE, 1995, p. 161).

Nessa perspectiva, a investigação matemática pode potencializar a aprendizagem dos estudantes permitindo vivências em diferentes níveis de desenvolvimento, possibilitando assim experiências variadas em busca da construção do conhecimento. Para tanto, é necessário que o aluno entenda a seriedade do trabalho e que as tarefas aplicadas sejam planejadas.

Segundo Canavarro (2011), o ensino exploratório da matemática não afirma que os alunos descubram isoladamente as ideias matemáticas que devem ser aprendidas, nem tão pouco que inventam conceitos e procedimentos. O ensino exploratório da matemática defende que os alunos aprendam a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem enxergar a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva. Os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

> o aluno é convidado a participar, a interagir, utilizando seus recursos cognitivos e afetivos para alcançar determinada meta. Ao mesmo tempo em que lhe dá

> autonomia, o professor cuida para que o trabalho "vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática". Nesse processo, o professor desempenha vários papéis: "desafiar os alunos, avaliar o seu progresso, raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho deles". (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 47).

Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) são a favor da utilização das investigações matemática por entenderem que para compreender a Matemática é importante analisá-la procurando compreender sua construção. Para esses autores é possível estabelecer um paralelo entre a atividade de um profissional matemático e a atividade do aluno na aula de matemática já que a atividade de resolução de problemas de ambos pode ser equivalente quanto à sua natureza. Nesse sentido, as investigações matemáticas contribuem para experiências significativas para aprendizagem do aluno e desenvolvimento profissional do professor. Esses autores afirmam que

> [...] na resolução de problemas o objetivo é encontrar um caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível. É um processo convergente. Numa investigação matemática, o objetivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação. É um processo divergente. Sabe-se qual é o ponto de partida¸ mas não se sabe qual será o ponto de chegada (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 1999, p. 4)

Partindo do pressuposto de que a investigação matemática é um processo divergente, é importante destacar os processos de construção do conhecimento que, por sua vez, são determinadas pelas tomadas de decisões. Neste caso, sabemos como a investigação se inicia, mas jamais saberemos como terminará.

Segundo Braumam (2004) o problema em questão do Ensino da Matemática não é propriamente os conteúdos curriculares, mas sim o de não desenvolver a capacidade de investigação matemática. De fato, é essencial desenvolver a investigação em educação matemática, o que exige a formação de mais investigadores (formação docente continuada), colaboração destes com as novas tendências educativas e os investimentos financeiros.

De acordo com Ponte, Brocado e Oliveira (2006), a realização de investigações matemáticas pelos estudantes pode contribuir, de maneira significativa, na aprendizagem de ideias e conceitos matemáticos. As investigações desenvolvem conhecimentos transversais, como a capacidade de comunicação e trabalho em grupo, além de contribuir na formação de novas concepções e atitudes em relação à Matemática.

Para Ponte, Brocado e Oliveira (2003), investigar corresponde a realizar descobertas, recorrendo a processos metodologicamente válidos, como formular problemas, explorar hipóteses, fazer e testar conjecturas, generalizar e construir argumentos e demonstrações. De acordo com os autores, uma Investigação Matemática tem quatro momentos para sua realização, descritas no Quadro 2.

Quadro 2 – Momentos na realização de uma investigação.

Exploração e formulação de questões	• Reconhecer uma situação problema. • Explorar a situação problemática. • Formular questões.
Conjecturas	• Organizar dados. • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura).
Testes e reformulação	• Realizar testes. • Refinar uma conjectura.
Justificação e avaliação	• Justificar uma conjectura. • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

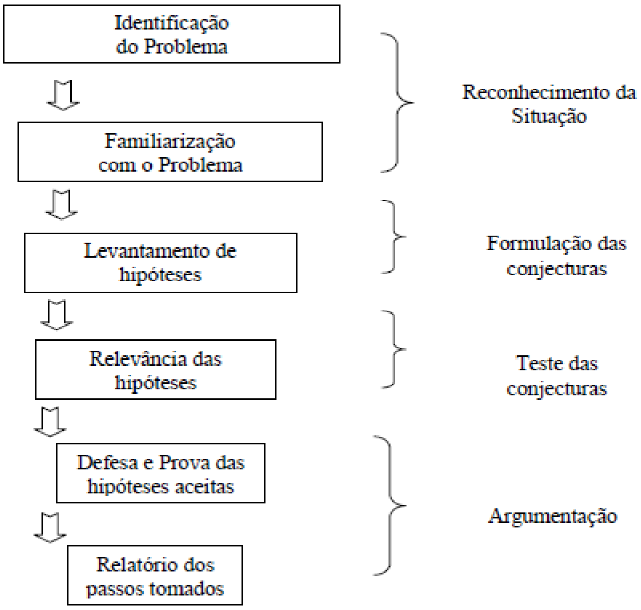
(Fonte: PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2009, p. 21)

Love (1988 apud Oliveira; Segurado; Ponte, 1996. p. 1-2), destaca alguns objetivos da Investigação Matemática:

- Identificar e iniciar os seus próprios problemas;
- Expressar as suas próprias ideias e desenvolvê-las ao resolver problemas;
- Testar as suas ideias e hipóteses de acordo com experiências relevantes;
- Defender racionalmente as suas ideias e conclusões e submeter às ideias dos outros a crítica ponderada;
- Escrever organizadamente as ideias formuladas.

Nessa perspectiva, Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) desenvolveram o diagrama de Investigação Matemática.

Figura 26 – Desenvolvimento do trabalho com Investigação Matemática.



Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira (2003)

Para Ponte, Brocado e Oliveira (2003), o que está em jogo na aprendizagem escolar da Matemática é o desenvolvimento integrado e harmonioso de um conjunto de competências e capacidades que envolvem conhecimento de fatos específicos, domínio de processos, mas também capacidade de raciocínio e de usar esses conhecimentos e processos em situações concretas, resolvendo problemas, empregando ideias e conceitos matemáticos para lidar com situações das mais diversas, de modo crítico e reflexivo.

Outro aspecto a ser destacado em uma investigação matemática é o trabalho em grupo que, por sua vez, é capaz de valorizar e potencializar os níveis de envolvimento dos alunos para a resolução das tarefas. De acordo com Cunha, Oliveira e Ponte (1995), as atividades investigativas estimulam o envolvimento dos alunos e elas podem ser trabalhadas por alunos com nível de desenvolvimento diferente. Essas atividades potencializam o raciocínio matemático uma vez que envolve vários tópicos, proporciona oportunidades de explorar conceitos matemáticos e estimula professores a repensar aspectos de sua prática docente.

Para Oliveira, Segurado e Cunha (1998), as investigações matemáticas permitem ao estudante envolver-se na atividade com seriedade formulando questões, elaborando estratégias, generalizando resultados, estabelecendo relações entre conceitos e áreas da Matemática, sistematizando ideias e resultados. Em suma, as atividades de investigação matemática auxiliam no desenvolvimento da capacidade de se pensar e fazer matemática, contribuindo na resolução de problemas cotidianos, desenvolvendo o espírito crítico e o poder de cooperação no trabalho em grupo.

Segundo Brocardo (2001), a realização de investigação na sala de aula pode ajudar a estabelecer um ambiente harmonioso em que os alunos tenham participação ativa. Isso facilita a compreensão dos processos de aprendizagem e ideias matemáticas.

O professor tem um papel muito importante na investigação matemática em sala de aula na Educação Básica. As atitudes manifestadas em relação às atividades de investigação matemática, o conhecimento e domínio sobre a atividade e a condução dada à mesma contribuem para o sucesso da investigação, contribuindo para o envolvimento dos alunos.

Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) dizem que a aplicação de tarefas investigativas nas aulas de Matemática é uma perspectiva de trabalho pedagógico que o professor pode lançar mão para a realização de um ensino da mesma. O uso dessa atividade em sala aula pode colaborar para o ensino, não perdendo de vista a função do professor no processo de investigação. Nesse caso entra em cena os verdadeiros atores do conhecimento, os alunos.

De acordo com Ponte et al (1998), o professor é convidado a desempenhar seis papéis fundamentais numa aula em que os alunos realizam atividades de investigação. O primeiro deles é pensar matematicamente "em frente" aos seus alunos. Dois outros papéis são fornecer informação e promover a reflexão, possibilitando caminhos para a investigação. Os três papéis restantes são desafiar os alunos, apoiá-los e avaliar o seu progresso. O professor exerce papel de orientar a atividade, dando suporte aos alunos em casos necessários, onde são diversas as situações em que o professor é chamado a intervir. Ao longo de toda atividade o professor deve evitar emitir opiniões concretas e manter uma atitude questionadora perante as solicitações dos alunos a fim de permitir a eles confirmar ou não suas conjecturas. Nesse sentido, o aluno não recebe o conteúdo pronto, ele é convidado a descobrir novas relações entre conceitos, levantar hipóteses, testar conjecturas e propor novas questões.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) é designada ao professor as questões relativas às investigações matemáticas. Para ele esse problema se coloca em dois planos: "ao lidar matematicamente com este tipo de atividade e ao gerir a situação de ensino aprendizagem na sala de aula". De acordo com o autor, este problema recai tanto para professores principiantes como para professores mais experientes.

De acordo com Fonseca, Brunheiras e Ponte (1999), no início do trabalho os alunos podem mostrar dificuldades que os impeçam de realizar as suas investigações, principalmente os pouco habilidosos ao trabalho de natureza investigativa, e nesse momento de impasse logo chamam pelo professor. Segundo os autores isto acontece porque não compreendem a natureza da tarefa proposta, sendo necessário ao professor explicar-lhes um pouco do que é o trabalho investigativo através de um ou mais exemplos. É nesse momento que o professor deve incentivar a autoconfiança e reflexão dos estudantes num ambiente de interação entre os colegas no sentido de descobrir novas relações entre conceitos, além de estimular o desenvolvimento de seu raciocínio e sua criatividade.

> Durante essa fase, o professor tem um papel de orientador da atividade. O decorrer da aula depende, em grande parte, das indicações que fornece sobre o modo do trabalho dos alunos e do tipo de apoio que preste no desenvolvimento das investigações. Diversas são as situações em que o professor é chamado a intervir e por isso deve estar preparado para reagir, perspectivando o desenvolvimento nos alunos de um conjunto de capacidades e atitudes essenciais. (FONSECA; BRUNHEIRA; PONTE, 2009, p. 6)

Durante a investigação matemática é necessário questionar os alunos para que os mesmos possam refletir sobre os caminhos escolhidos para responder ao problema, fazendo com que o mesmo reflita sobre suas ações e verifique se o que está procedendo é o único, melhor ou correto caminho. Nessa perspectiva, Oliveira, Segurado e Ponte (1996) sugerem alguns questionamentos para ajudar os alunos no desenvolvimento da investigação:

Como você tentou?
O que está tentando fazer?
O que pensa sobre isso?
Porque está fazendo assim?
O que você já descobriu?
Como podemos organizar isto?
Verificou se funciona mesmo?
Você consegue ver algum padrão?
Vamos construir uma tabela de resultados?

Os questionamentos acima apresentam potencialidades para causar reflexões por parte dos discentes em uma pesquisa investigativa. O professor pesquisador deve desempenhar este papel a fim de que os alunos possam sentir-se desafiados e, ao mesmo tempo, apoiados.

Polya (1978), em sua obra “A arte de resolver problemas”, relata a importância do papel questionador do professor na sala de aula. De acordo com o autor, é através da pergunta do aluno que o professor pode auxiliá-lo, provocando reflexões nos alunos para que os mesmos possam alcançar novos horizontes em seus respectivos processos de construção do pensamento e conhecimento. "Ao procurar realmente ajudar o aluno, com discrição e naturalidade, o professor é repetidamente levado a fazer as mesmas perguntas e a indicar os mesmos passos" (POLYA, 1978, p. 17).

Na investigação matemática nas salas de aula é necessário que o professor pesquisador dê um retorno aos alunos, fazendo com que todos os envolvidos possam refletir em torno de suas ações e etapas do processo.

> [...] proporcionar aos alunos momentos que possam pensar e sobretudo refletir sobre a atividade realizada. [...] esta reflexão permite, por exemplo, valorizar os processos de resolução em relação aos produtos, mesmo que estes não conduzam a uma resposta final correta, criando nos alunos uma visão mais verdadeira da Matemática [...] (FONSECA; BRUNEIRA; PONTE, 2009, p. 9)

Essa reflexão valoriza o processo desenvolvido por cada aluno para se chegar à solução do problema, mesmo esse não estando correto. Acreditamos que esse momento abra novos horizontes para o aluno, fazendo com que o mesmo amadureça para outras investigações.

No que diz respeito aos ambientes investigativos, Fonseca, Brunheiras e Ponte (1999) afirmam que há necessidade de se criar um ambiente de envolvimento dos alunos para que eles se sintam estimulados, à vontade para pensar, se questionar e questionar seus colegas, o que poderá contribuir para o sucesso da tarefa.

Segundo Skovsmose (2008), o professor tem o papel de assumir o processo de exploração e investigação, possibilitando que o cenário de investigação passe a constituir um novo ambiente de aprendizagem. Ao desenvolver atividades de Investigação Matemática, torna-se interessante incentivar os discentes a escreverem suas conjecturas e justificativas, pois se percebe que eles demonstram insegurança com as palavras e preferem colocar no papel o mínimo possível. Assim, os participantes serão instigados a produzirem seus textos em pequenos grupos e, posteriormente, socializarem suas hipóteses com os demais colegas.

A respeito de ambientes de aprendizagem, Skovsmose (2000) chama de “cenário para investigação” um ambiente que pode dar suporte ao trabalho de investigação onde, um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações. Quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo. É importante destacar que os envolvidos com a investigação precisam realmente estar disponíveis e querendo participar de tal. O que pode servir perfeitamente como um cenário para investigação a um grupo de alunos numa situação particular pode não representar um convite para outro grupo de alunos.

Skovsmose (2000) afirma que, qualquer cenário para investigação desafia o professor. A solução não é voltar para a zona de conforto do paradigma do exercício, mas estar disponível para atuar em um novo ambiente. A tarefa é tornar possível que os alunos e o professor sejam capazes de intervir em cooperação dentro da zona de risco, fazendo dessa uma atividade produtiva e não uma experiência ameaçadora.

Como grande parte da nossa pesquisa de campo será realizada com trabalhos em grupo, esperamos que haja interação, cooperação e colaboração entre os envolvidos. Neste sentido, Skovsmose (2000) afirma que a educação matemática crítica inclui o interesse pelo desenvolvimento da educação matemática como suporte da democracia. A educação matemática crítica enfatiza que a matemática como tal não é somente um assunto a ser ensinado e aprendido (não importa se os processos de aprendizagem são organizados de acordo com uma abordagem construtivista ou sociocultural), sendo um dos objetivos o desenvolvimento coletivo do grupo durante o processo de ensino aprendizagem.

Gil-Pérez (1993) destaca que o trabalho em grupo se apresenta como elemento fundamental de uma metodologia de ensino que pretende aproximar as situações de aprendizagem das atividades dos cientistas. Essa metodologia tende a explorar as dimensões do trabalho em grupo, facilitando a interação entre eles.

Castro e Frant (2011) relatam que, entendendo a interação como uma cena não estática, é preciso levar em conta que estas não se dão ao acaso e que, na verdade, apresentam um sentido que emerge de um conjunto de aspectos determinados pela atividade em que estes indivíduos estejam imersos. Os atores, ora falam, ora escutam construindo um processo necessariamente bilateral. O ato de falar e ouvir constitui uma ação cooperativa na qual o falante não monitora apenas suas ações, mas também a dos demais participantes do diálogo, levando ambas as ações em consideração. Esse conjunto de características favorece a construção do conhecimento por parte dos alunos, sendo estes autores de seus próprios conhecimentos.

De acordo com Nacarato e Lopes (2009), a definição de trabalho colaborativo nasce do confronto entre pontos de vista diferentes, através do surgimento de um debate, onde o objetivo é a resolução de um problema. Cada um, ao possuir diferentes saberes e competências, fruto de suas vivências e experiências pessoais, terá de negociar significados e representações de onde possam surgir conflitos entre ambos, embora mantendo um nível mínimo de compreensão mútua. Ainda segundo os autores, quando um aluno tem de formular uma resposta cognitiva para uma tarefa, começa por construir uma representação da própria tarefa, dos conhecimentos que julga serem necessários e da sua finalidade. Paralelamente, se estiver trabalhando com outro individuo, pode acontecer que essa mesma situação esteja a ser vivida por esse sujeito de outra forma, e a partir daí, as novas cognições vão construindo um jogo social complexo no qual a negociação do significado terá um papel determinante. Esta negociação é uma forma sutil e implícita de construir um significado para a situação através da comunicação, com o objetivo de solucionar uma atividade dinâmica e complexa.

No item abaixo destacaremos a linguagem como instrumento para esta pesquisa, refletindo sobre as suas características e propostas colaborativas, considerando esta como elemento fundamental para a troca de conhecimentos e experiências.

3.2 Matemática e Linguagem

Em um primeiro momento, a linguagem poderia ser apenas um “automóvel” capaz de transportar as nossas representações mentais. Porém, essa ferramenta possui características peculiares, como as emoções e os sentimentos, capazes de enriquecer o processo de ensino aprendizagem. De acordo com Damásio (1996), as emoções têm papel social de cunho decisivo no processo da interação. As emoções são adaptações singulares que integram o mecanismo com o qual os organismos regulam sua sobrevivência orgânica e social. Ainda segundo o autor, as emoções desempenham uma função na comunicação de significados a terceiros e podem ter também o papel de orientação cognitiva.

> Tem-se aí a noção de que apreender o sentido do que é dito envolve algo mental ou anímico (*etwas Seelishes*), algo que ocorre ou está guardado na memória de alguém e que pode, a qualquer momento, tornar-se manifesto pela linguagem. O que ocorre na mente é distinto da sua expressão linguística. A linguagem é como um porta-voz daquilo a que antecipadamente já se tem acesso na mente. A consciência observa o que está dentro de si e, depois, o expressa pela linguagem (HEBECHE, 2002, p. 194).

Segundo Menezes (2000), a linguagem é um aspecto central em todas as atividades humanas e em particular nas aulas. O autor afirma que a ligação entre a linguagem e a comunicação é óbvia, pois a comunicação é a principal função da linguagem. Como diz Stubbs (1987), ensinar e aprender confundem-se com a própria comunicação. Diante dessa perspectiva, parece-nos bastante interessante refletirmos sobre a linguagem na sala de aula de matemática, uma vez que a mesma ocupa um espaço de suma importância nesse processo de ensino aprendizagem e construção do pensamento.

Devlin (2004) aponta que a matemática e a linguagem são inseparáveis e que o surgimento das duas áreas na cultura humana foi possível pela mesma capacidade de evolução nos homens.

Para Hoyles (1985), há uma íntima ligação entre a linguagem e os processos de estruturação e construção do pensamento. O autor considera que, na sala de aula, a linguagem tem duas funções:

1) a função comunicativa: está conectada, com a capacidade de o aluno, diante de determinadas situações, ser capaz de identificar os elementos importantes e de os relatar aos demais.
2) a função cognitiva: está ligada a possibilidade da linguagem desenvolver a estruturação e a regulação do pensamento, principalmente quando o aluno está em um ambiente de cooperação e interação.

Concordando com Hoyles, Martins (2000) afirma que a linguagem do meio ambiente, que reflete uma forma de perceber o mundo real num dado tempo e espaço, aponta o modo pelo qual a criança apreende as circunstâncias em que vive, cumprindo uma dupla função: de um lado, permite a comunicação, organiza a conduta; de outro, expressa o pensamento e ressalta importância reguladora dos fatores culturais existentes nas relações sociais. De acordo com o autor, quando a linguagem se dirige aos outros, o pensamento torna-se passível de partilha. Essa acessibilidade do pensamento manifesta-se na e pela linguagem, expressando, ao mesmo tempo, muitos outros aspectos da personalidade do sujeito.

De acordo com D'amore (2006), uma razão para a matemática possuir uma linguagem tão específica é que os seus objetos não podem ser acessados diretamente, são objetos que remetem a ideias, conceitos, axiomas. A linguagem Matemática é caracterizada com as marcas de precisão, de concisão e de universalidade, possibilitando seu entendimento em diferentes lugares, independente da língua materna.

Santaella (1988) diz que a língua materna é a principal forma de linguagem humana, mas não é única, uma vez que somos seres simbólicos e fazemos uso de linguagens complexas e plurais como imagens, gráficos, sinais, sons, gestos, expressões, cheiros, entre muitos outros.

De acordo com Almeida (2016), a matemática possui uma linguagem que lhe é inerente, que por si também contém signos da linguagem natural ou materna. No entanto, por vezes se apropria em demasia de símbolos, e é esta linguagem carregada de simbologia que acaba se afastando da linguagem natural. A linguagem utilizada para se ensinar matemática, composta pela linguagem matemática, tem muito da linguagem natural, uma vez que os professores necessitam dialogar sobre as ideias suas e de seus alunos, buscando atingir os seus objetivos relacionados ao ensino de matemática, pretendendo de tal forma se mostrar inteligíveis aos alunos.

De fato, em sua essência, a matemática tem uma linguagem própria que, por sua vez, se desenvolve ao longo da história e todos os cantos do planeta. É como aprendêssemos a nos comunicar em outra língua.

> [...] o fato de a matemática ser uma linguagem (mais fina e precisa que a linguagem natural) que permite ao homem comunicar-se sobre fenômenos naturais, consequentemente, ela se desenvolve no curso da história da humanidade desde os “sons” mais elementares, e, portanto intimamente ligada ao contexto sociocultural em que se desenvolve – por isso falamos em matemática grega, matemática hindu, matemática pré-colombiana (D’AMBRÓSIO, 1986, p.35).

Segundo Almeida (2010, p. 20), podemos dividir esse momento histórico em 3 etapas:

i) Retórico: onde todas as proposições são apresentadas de forma verbal e com total ausência de sinais
ii) Sincopado: onde apesar de ainda operar verbalmente, são introduzidas algumas abreviações para termos ou operações utilizadas frequentemente.
iii) Simbólico: que conta com uma linguagem simbólica independente de palavras.

De acordo com Castro e Carvalho (2001), os processos de comunicação incluem os processos de ensino, não sendo possível ensinar sem realizar processos comunicativos. O autor enfatiza que a construção do pensamento está intrinsecamente ligada à capacidade de comunicação.

A importância social da comunicação é destacada por Hiebert (1992), quando o autor afirma que a comunicação é uma parte integrante do "fazer matemática". De acordo com o autor, esta atividade matemática constitui-se de um processo de interação social onde a comunicação desenvolve um papel altamente relevante, tanto ao nível da matemática realizada pelos profissionais como daquela que é feita pelos alunos nas aulas da Educação Básica.

Para Baroody (1993, p. 99), há duas razões para focar o ensino de matemática na comunicação: "A primeira, é que a matemática é essencialmente uma linguagem — uma segunda linguagem; a outra, é que a matemática e o ensino da matemática são, no seu âmago, atividades sociais". O autor explicita alguns motivos para o professor estimular a comunicação nas aulas de Matemática, destacando principalmente aquela que acontece entre os alunos:

i) desenvolve o conhecimento matemático;
ii) desenvolve a capacidade de resolver problemas;
iii) melhora a capacidade de raciocínio;
iv) encoraja a confiança.

Para Vilela e Mendes (2011) a linguagem passa a ser investigada enquanto constituída dos elementos dos nossos conhecimentos e, por isso, pode ser tomada como eixo de investigação. Ela é, num movimento de mão dupla, um critério de inteligibilidade, traz uma lógica para ver o mundo e, ainda, pode ser reveladora, porque expressa o que é importante numa forma de vida; ela dá indícios das características culturais de uma comunidade.

No item a seguir continuaremos abordando a linguagem através da escrita, evidenciando as suas características e potencialidades que podem colaborar com esta pesquisa e o processo de ensino e aprendizagem dos envolvidos.

3.3 Escrita Matemática

A linguagem matemática assume diversas componentes: linguagem escrita, linguagem oral e linguagem pictórica. Segundo Usiskin (1996), a escrita matemática apresenta consideráveis potencialidades para uma investigação, uma vez que essa ferramenta ajuda a revelar a complexidade que é a construção do pensamento e do conhecimento em sua essência. Corretos ou não, esses registros por escrito nos auxiliam a compreender os processos cognitivos utilizados.

Para Hebeche (2002), a escrita é um dos recursos onde o aluno pode mostrar o que sabe, uma vez que "o critério para compreender o que alguém imagina ou pensa é "o que ele diz ou faz", isto é, a sua descrição é o único modo de eu ter acesso ao o que ele imagina".

A respeito da escrita matemática, Smole e Diniz (2001) afirma que tal produção seria uma maneira de promover a comunicação nas aulas de matemática, pois, ao se comunicar matematicamente – inclusive mediante a utilização da escrita – os alunos têm a oportunidade para explorar, organizar e conectar seus pensamentos, novos conhecimentos e diferentes pontos de vista sobre um assunto.

Nessa perspectiva, o uso da escrita matemática nas aulas de matemática pode ser um aliado no que diz respeito à organização do raciocínio, desde a elaboração de textos, construção de exemplos e interpretação de determinadas ideias, corroborando para novas conexões que possibilitem construir novos significados.

De acordo com Zuchi (2004), como a matemática é uma área do saber de enorme riqueza, é natural que seja possuidora de uma linguagem própria, que em alguns casos e em certos momentos históricos se confundiu com a própria matemática. A autora ainda diz que esta linguagem tem registros orais e escritos e, como qualquer linguagem, apresenta diversos níveis de elaboração, de acordo com a competência dos interlocutores: a linguagem matemática utilizada pela comunidade científica é mais exigente do que a linguagem utilizada para traduzir ideias numa sala de aula.

Para Nacarato e Lopes (2009) a matemática, sendo uma linguagem detentora de escrita simbólica específica e de natureza universalizante, isto é, possui a capacidade de conferir um sentido unívoco a cada elemento de representação. A matemática, enquanto linguagem universal cria não só os seus próprios signos, mas também uma gramática que rege a ordem concebível no interior de um sistema coerente, em que conhecimento e linguagem possuem o mesmo princípio de funcionamento na representação.

De acordo com os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), no ensino de matemática, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando o aluno a falar e a escrever sobre matemática.

Para Powell e Bairral (2006) a escrita força os interlocutores a refletirem de maneira direta sobre sua experiência matemática. Enquanto examinamos nossas produções, desenvolvemos nosso senso crítico. A escrita suporta atos de cognição e metacognição, ou seja, não apenas sobre a capacidade de aprender, mas também o reconhecimento de seus próprios processos cognitivos e a habilidade de controlar esses processos, monitorando, organizando, e modificando-os para realizar objetivos concretos. Para esses autores a utilização da escrita influencia a aprendizagem matemática e contribui ricamente para a análise cognitiva, sendo esta ferramenta alvo de interesse nas pesquisas em Educação Matemática.

Segundo Feres e Nacarato (2008) a escrita apresenta alguns detalhes pertinentes ao processo de ensino aprendizagem. Segue abaixo alguns desses fatores:

- Exige um assunto e a matemática tem um conteúdo – os conceitos, as ideias e os símbolos devem transitar da mente do escritor para a mente do leitor, assim o aluno ao escrever sobre a matemática irá formar, reformar e externar o seu pensamento possibilitando, uma conversa consigo mesmo e com o leitor, uma organização do seu pensar matemático;

- Permite a comunicação de um conceito matemático, já que o conceito é uma ferramenta a serviço de quem indaga, assim a escrita possibilita uma resposta; a escrita permite um planejamento e a matemática tem estratégias – o registro antes da execução pode promover uma organização do pensamento matemático;

- Tem um enredo e a matemática uma organização – a formação do pensamento matemático é sistematizado através da escrita, que exige um enredo, uma sequência e uma ordem; exige coerência e a matemática requer uma relação - a necessidade do sentido de um texto pode permitir a conexão entre assuntos matemáticos; para promover a emissão de uma ideia, alguns fatos são relacionados;
- Registra o pensamento - tem uma intenção pragmática do cálculo escrito podendo revelar para o outro e permitir ao outro um controle desse pensamento, contribuindo para a avaliação; exige uma reescrita e a matemática uma refutação – a reescrita possibilita a contestação de uma verdade matemática, podendo ocorrer sua validação ou não, e essa é uma prática essencial para a formação do pensamento matemático;
- Inibe a repetição e estimula a criação – que podem desencadear a compreensão significativa dos conceitos matemáticos;
- Pode permitir um aprender com significado, colaborando com o processo da elaboração conceitual produzido pelo aluno, podendo promover uma transformação – tarefa tão almejada num ambiente que busca a democracia.

Para Powell e Bairral (2006) a escrita é uma ferramenta importante para o desenvolvimento da cognição e o fomento do aprendizado matemático. A cognição matemática deve ser desenvolvida em contexto de produção que vai além da expressividade e da individualidade. Deve promover reflexão crítica, bem como preconizar processos colaborativos de diferentes dimensões e de tomada de consciência sobre as experiências individuais e coletivas.

De acordo com Nacarato e Lopes (2009), um texto escrito pode ser visto como a tradução, por meio de palavras, de pensamentos, sentimentos e ações. No contexto ensino/aprendizagem, tanto a expressão, na forma dissertativa, de um determinado conceito quanto o eventual relacionamento deste com outros que se conectam com a busca de conhecimento e de algum domínio acerca do tema em questão. Um estudante que domina e compreende um determinado conceito deve ser capaz de escrever sobre ele, ressaltando suas certezas e possíveis dúvidas. Na aprendizagem por meio da produção escrita, não se resume a compreensão conceitual prévia à escrita fluente. Essa aprendizagem é processual, e as palavras são usadas para se chegar aos conceitos. É um fato que o exercício da escrita é aprimorado com a prática: quanto mais se escreve, mais fluência se ganha. Mas a questão principal é que a escrita amplia a aprendizagem, tornando possível a descoberta do conhecimento, favorecendo a capacidade, tornando possível a descoberta do conhecimento, favorecendo a capacidade de estabelecer conexões.

No capítulo a seguir pontuaremos a metodologia utilizada em nossa pesquisa.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo, apresentamos o percurso feito para a realização da pesquisa que se dividiu em três grandes momentos: a gestação, o nascimento e o desenvolvimento da pesquisa e sobre a qual destacamos fatores relevantes para fundamentar o processo.

Na gestação, nos debruçamos sobre a pesquisa bibliográfica dividida em três abordagens: a) uma análise a priori dos documentos do Ministério da Educação para identificar o que do tema números irracionais é tratado; b) um levantamento em livros didáticos em que verificamos o que e como o tema em estudo é tratado; c) pesquisa em artigos e teses visando encontrar indicativos sobre novas abordagens do tema.

Esta coleta e análise documental são fundamentais para a elaboração das tarefas que foram aplicadas no campo constituindo assim o nascimento da primeira versão da proposta de nosso produto educacional. Estes momentos se caracterizam como sendo o primeiro ciclo da pesquisa sob o ponto de vista macro.

Do ponto de vista micro, temos os refinamentos de cada tarefa e da sequência de tarefas inicialmente elaboradas. Com esta versão, fomos a campo em um estudo de caso em busca de respostas para nossas questões e refinamento da proposta do produto educacional, que se constituirão como o segundo ciclo da pesquisa.

Com o objetivo de situar o leitor, retomamos a nossa questão de pesquisa: o que pensam alunos do 9º ano do Ensino Fundamental quanto aos números irracionais π e φ? Para tal, nos debruçamos sobre aspectos metodológicos que possam contribuir para a nossa análise, cujos alicerces teóricos foram apresentados anteriormente e naqueles que, por ventura, possam surgir ao longo da caminhada, pois novos critérios podem ser estabelecidos no decorrer do processo, visto que, ela se constitui enquanto realiza.

Destacar o método de pesquisa nem sempre é tarefa fácil e encontrar um meio para apresentar o caminho a percorrer o percorrido também não. Neste sentido, nossa pesquisa assume características de um experimento de design e nos assentamos nas características da metodologia DBR- Design Based Research (COBB et al., 2003), cujo desenvolvimento nos permite reconfigurar as ações de forma coerente a cada etapa do processo investigativo durante as ações no campo, nosso caso, sala de aula de matemática.

4.1 DBR (Design Based Research)

O foco da nossa pesquisa está no desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes do Ensino Fundamental tendo em conta a perspectiva de ensino exploratório como uma prática inovadora para a sala de aula. Segundo Cyrino (2015), o ensino exploratório no âmbito da disciplina de matemática tem sido apresentado como uma alternativa ao ensino diretivo ou expositivo. Nessa perspectiva, Canavarro (2011) e Ponte (2003) concordam que o foco da atividade matemática passa a ser os estudantes, visto que estes, são trazidos para o centro da atividade matemática em que o conhecimento é construído e reconstruído por eles na medida em que trabalharam colaborativamente em pequenos grupos enquanto discutem situações problemas apresentadas como tarefas matemáticas significativas.

Para desenvolver a pesquisa, optamos por utilizar as técnicas características da metodologia DBR (Design Based Research), uma vez que a mesma apresenta aspectos satisfatórios em pesquisas voltadas para o ensino e a aprendizagem.

A linha de pesquisa baseada em design surgiu no início da década de 1990 como uma nova metodologia intervencionista buscando relacionar aspectos teóricos e práticos da pesquisa.

Segundo Barab e Squire (2004, p. 2, tradução nossa), DBR é "uma série de procedimentos investigativos aplicados para o desenvolvimento de teorias, artefatos e práticas pedagógicas que sejam de potencial aplicação e utilidade em processos de ensino aprendizagem existentes."

De acordo com Wang e Hannafin (2005), é uma metodologia sistematizada, mas flexível, que tem por característica otimizar as práticas educacionais através da análise, do desenvolvimento e da respectiva implementação, assentando na colaboração entre os investigadores e os sujeitos, enquadrados em cenários reais.

Para Matta, Silva e Boaventura (2014) o Design Based Research (DBR), é uma nova abordagem investigativa que reúne as vantagens das metodologias qualitativa e quantitativa, focando no desenvolvimento de aplicações que possam ser realizadas e de fato integradas às práticas sociais comunitárias, considerando sempre sua diversidade e propriedades específicas, mas também aquilo que puder ser generalizado e assim facilitar a resolução de outros problemas.

Em função de sua natureza integradora, Matta, Silva e Boaventura afirmam que:

> a DBR se propõe a superar a dicotomia e mesmo a discussão sobre pesquisa qualitativa ou quantitativa, desenvolvendo investigações com foco no desenvolvimento de aplicações e na busca de soluções práticas e inovadoras para os graves problemas da educação, podendo para isso usar tanto procedimentos quantitativos quanto qualitativos, e, de fato, não encontrando mais sentido em separar estas duas formas e nem em investir demasiado nesta diferença, senão em aplicar na medida do necessário, na direção do foco da pesquisa. (MATTA, SILVA e BOAVENTURA, 2014, p. 03)

Destacando as características da DBR, Mckenney e Reeves (2012) ressaltam que elas são:

- ✓ Teoricamente Orientada: as teorias são ponto de partida, de chegada e de investigação na DBR. Elas se mostram como princípios de design e modelagem para as soluções práticas demandadas. Um dos sentidos mais importantes da DBR é utilizar uma proposta teórica como fundamento para a construção do design educacional proposto. A base teórica baseia a construção da proposta prática a ser sugerida, mas também é estudada e potencialmente melhorada e compreendida, na medida em que são analisados os resultados;

- ✓ Intervencionista: Utiliza-se o fundamento teórico escolhido e o diálogo com o contexto de aplicação para que a pesquisa desenvolva uma aplicação que irá intervir no campo da práxis pedagógica e na qual se pretende produzir: a) produtos educacionais tais como materiais didáticos de toda natureza e suporte; b) processos pedagógicos como, por exemplo, recomendações de atitude docente, novas propostas didáticas; c) programas educacionais como currículos, cursos, organização de temas e didáticas, também desenvolvimento profissional para professores; ou d) políticas educacionais como protocolos de avaliação docente ou discente, procedimentos e recomendações de investimento, aquisição, opções para relação entre a escola e a comunidade. De fato, a DBR começa com a identificação de uma situação que necessita de intervenção e de um resultado de desenvolvimento prático somente possível de obter a partir de uma investigação científica de natureza aplicada;

- ✓ Colaborativa: a DBR é sempre conduzida em meio a vários graus de colaboração. O desenvolvimento e a busca por uma aplicação que seja solução concreta para problemas dados obrigam à colaboração de todos os envolvidos: investigador, comunidade e pessoas que se relacionam. A ideia da DBR é considerar todos como parte da equipe de pesquisa. Uma forte recomendação é que o problema seja definido de forma compartilhada com aqueles que sofrem as mazelas daquela dificuldade, e assim a pesquisa será sempre validada por todos os envolvidos;

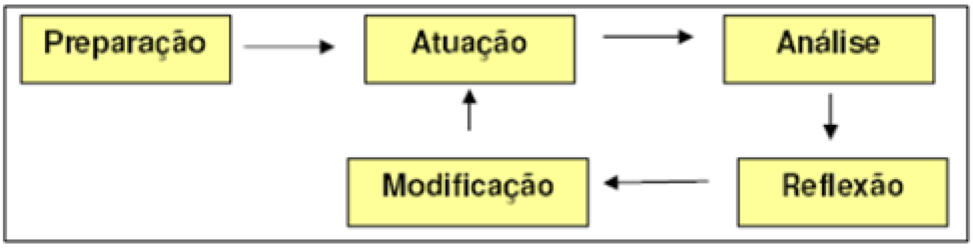
- ✓ Fundamentalmente responsiva: a DBR é moldada pelo diálogo entre os participantes, o conhecimento teórico, suas interpretações e advindos da literatura, e pelo conjunto dos testes e validações diversas realizadas em campo. Os avanços teóricos e práticos, e os potenciais ajustes na intervenção desenvolvida vão sendo desenvolvidas em diálogo e validação pela complexidade do contexto de aplicação. O conhecimento é desenvolvido em estreito diálogo com a prática, em iterações;

- ✓ Iterativa: a DBR, por ser uma metodologia voltada para a construção de soluções práticas, não é feita para terminar. De fato, cada desenvolvimento é o resultado de uma etapa, de um processo de arquitetura cognitiva, e necessariamente será o início do próximo momento de aperfeiçoamento e de melhorias. Uma abordagem baseada em ciclos de estudo, análise, projeção, aplicação, resultados, que depois são reciclados, e assim quando for necessário, ou possível.

Segundo Kindel "[...] o experimento de design supõe ser uma cama de testes para inovações educativas, ocorrendo em ciclos de experimentação, no qual a cada ciclo é possível modificar o experimento, a partir da análise empírica" (KINDEL, 2012, p. 48).

Com a pretensão de uma abordagem iterativa e de refinamento da possível solução encontrada, a iteração é potencialmente uma marca da DBR, atribuindo-lhe um caráter formativo.

Quadro 3 - Ciclo de Redesign.



(Fonte: SIGNORELLI, 2007, p. 51.)

Analisando o Quadro 1, observamos que o ciclo iterativo inicia na preparação do experimento que, por sua vez, trata do levantamento bibliográfico e elaboração de tarefas de nossa pesquisa. Na atuação, destacamos a implementação das tarefas. Na sequência, analisamos todo o material coletado de modo reflexivo podendo gerar modificações no experimento para uma nova atuação. Esse ciclo pode ser repetido quantas vezes forem necessárias.

4.2 Os sujeitos e o local da pesquisa

Para melhor estudar o objeto desta pesquisa, realizamos um estudo de "caso" e uma análise de extratos de livros - texto de matemática de 8º e 9º anos e contíguos buscando ainda identificar as orientações sobre o tema dadas nas propostas curriculares.

Convém ressaltar que estamos mais interessados no “como” e no “por que” do que no “quantos”.

Nesta pesquisa, em que investigamos como os alunos se posicionam sobre números, consideraremos entre outros elementos: definições, classificações, aproximações, sucessão. É nosso objetivo fazer um levantamento de diferentes visões dos alunos sobre números, o conjunto dos números irracionais e de que modo ocorre seu posicionamento frente às diferentes situações – problema envolvendo o cálculo do número pi (π) e fi (φ) . O contexto de sala de aula foi o lugar escolhido porque nele se desenvolve o processo de ensino, de aprendizagem e por se constituir como um espaço rico em variáveis.

Este estudo realizou-se na Escola Municipal Roberto Simonsen. É uma escola pública municipal situada em um bairro da zona oeste da cidade do Rio de Janeiro envolvendo um grupo de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental nos turnos da manhã e tarde. A escola foi inaugurada em 01 de abril de 1953 e atende, principalmente, as comunidades de Padre Miguel e Bangu, com funcionamento em regime parcial em turnos da manhã e da tarde.

Com um esboço de cronograma pronto, percebemos a viabilidade de realizar a implementação de uma tarefa por semana, ainda no 1º semestre de 2018, nos meses de maio e junho, visto que havíamos programado tantas atividades a serem realizadas em 5 semanas, tendo ainda um mês como margem de segurança caso precisássemos de mais tempo para a sua implementação.

	1ª semana de maio	2ª semana de maio	3ª semana de maio	4ª semana de maio	1ª semana de junho
Tarefa 1	X				
Tarefa 2		X			
Tarefa 3			X		
Tarefa 4				X	
Tarefa 5					X

Tabela 3 – Cronograma inicial de aplicação das tarefas

Atrelado a esse contexto, contávamos ainda com a limitação imposta pelo calendário de atividades da escola, tais como feriados, eventos, suspensão de aulas, conselho de classe, atividades extraclasse, outros.

A maioria dos estudantes das turmas de 9º ano do Ensino Fundamental estão na escola desde o 6º ano do Ensino Fundamental e são moradores do bairro onde a instituição se situa.

Nesta escola, em reuniões pedagógicas, discutimos acerca da realidade dos nossos alunos, onde temos a oportunidade de saber um pouco mais sobre eles, podendo assim tomar decisões optando por estratégias (currículo oculto) para desenvolver o seu raciocínio e sua capacidade de aprendizagem.

O currículo escolar básico é complementado por disciplinas como música, artes plásticas e teatro. É comum serem desenvolvidas atividades que favoreçam a prática do trabalho em grupo. A dinâmica de grupo, usada em algumas disciplinas, apresenta-se de forma diversificada: duplas, trios ou quartetos de alunos. As atividades também costumam ser vivenciadas de maneira diferenciada, contribuindo para as a realização desta pesquisa.

A composição do grupo foi motivada a partir de uma atividade que já ocorre normalmente na escola, denominada aula de Reforço Escolar, em que alunos com dificuldade são convidados a participarem desta atividade que se resume a revisão de conteúdos trabalhados em sala de aula acrescidos de listas de exercícios de fixação e a manipulação de alguns materiais didáticos como recursos didáticos.

Nessa perspectiva, convidamos 6 alunos do 9º ano do turno da manhã e 6 alunos do 9º ano do turno da tarde, todos participantes do Reforço Escolar. Falamos sobre pesquisas e o tema proposto para tal: estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental exploram situações com os Números Irracionais π e φ. É importante ressaltar que um dos estudantes é autista. Diante da aceitação inicial por parte dos estudantes, pedimos que cada um dos estudantes assinassem o termo de assentimento (apêndice II) e enviamos para os seus respectivos responsáveis o termo de autorização para a participação da pesquisa (apêndice I). É importante destacar que o estudante somente esteve credenciado para participar da pesquisa com o termo de consentimento livre e esclarecido (termo de autorização) devidamente preenchido e assinado por um de seus responsáveis.

Com relação à aplicação das tarefas, ressaltamos que a de número 1 foi aplicada simultaneamente para os 12 estudantes, a tarefa 7 foi aplicada individualmente, porém em dois grupos de 6 alunos, sendo 6 pela manhã e 6 pela tarde, e a tarefa 8 foi aplicada individualmente em domicílio. As demais foram aplicadas em dois turnos: pela manhã para dois grupos de 3 alunos e a tarde para outros dois grupos de 3 alunos. Para organizarmos os horários de nossos estudantes, todas as tarefas foram aplicadas em um dia específico da semana, sexta-feira, sempre com duração de 100 minutos.

4.3 A coleta de dados

Optamos pelos seguintes recursos na coleta de dados: diário de campo, registro escrito dos alunos das atividades individuais e em grupo, gravações em áudio e vídeo dos trabalhos desenvolvidos pelo pequeno grupo.

4.3.1 Diário de Campo

É um recurso importante para o pesquisador, onde são feitas anotações acerca das atividades propostas, sobre as dinâmicas do processo, sobre as interações dos discentes e as demandas que poderão surgir durante o andamento geral da pesquisa.

4.3.2 Registros Escritos

Utilizaremos para a coleta de dados os registros individuais e em grupos dos alunos durante as atividades de exploração e exploratórias de cunho investigativo.

4.3.3 As tarefas e o desenvolvimento das atividades

Foram recolhidas as fichas de trabalho escritas individualmente por todos os estudantes, mesmo o trabalho sendo feito em grupo. Sobre as atividades registrou-se a forma de encaminhamento e foram avaliadas as estratégias de encaminhamento, adequação de linguagem usada nos enunciados. A partir dos registros realizou-se a categorização e a análise das respostas obtidas.

Quanto aos alunos foram feitas anotações especificas sobre as suas dificuldades, o tipo de encaminhamento usado, sua postura dentro do grupo, a reação do grupo diante da tarefa proposta ou da dificuldade tanto do grupo quanto de um individuo. Também foi considerado o envolvimento do grupo em atividade.

4.3.4 Áudio

Durante as atividades da pesquisa, as falas dos alunos foram gravadas, autorizadas por cada um dos discentes participantes de maneira prévia. Para tal gravação de áudios, utilizamos smartphones, sendo um por grupo. De maneira planejada, cada grupo teve sua formação e seus integrantes fixados, para que tivéssemos o mesmo grupo de trabalho atuando nas investigações continuamente.

4.3.5 Vídeo ou fotos

De maneira negociada e autorizada pelos alunos, as imagens gravadas dos alunos durante as atividades na pesquisa nos ajudaram a entender determinados comportamentos e pensamentos durante o processo, valorizando suas respectivas falas e movimentos. A visualização da manipulação de materiais manipuláveis e recursos tecnológicos pelos alunos é de suma importância. Pallatieri e Grando (2010) destacam a importância dos vídeos para o professor de matemática que deseja entender o pensamento matemático de seus alunos. Os autores entendem

> a videogravação como instrumento fundamental para registrar esse movimento das ações mentais e corporais. Ou seja, através dos vídeos, o professor tem a possibilidade de perceber nas ações corporais das crianças (ao interagir com materiais) um possível movimento do pensamento acontecendo, até mesmo, o pensamento que reconhecemos como matemático. (PALLATIERI; GRANDO, 2010, p. 23).

Para a gravação de vídeos, foram utilizados smartphones, sendo um único dispositivo utilizado para registrar as imagens no ambiente de pesquisa.

Acreditamos que os recursos supracitados tenham potencialidades para nos auxiliar quanto aos registros das variadas discussões e multidiálogos entre os envolvidos. Para Arzarello (2009), os fenômenos intrínsecos ao processo de aprendizagem nas salas de aula de matemática revela uma variedade de ações e produções realizadas pelos estudantes e professores enquanto usam diferentes recursos. Estes recursos são compartilhados pelos estudantes, e possivelmente com os professores, sendo usados não apenas como meios de comunicação, mas como ferramentas que ajudam no processo de construção do pensamento.

4.3.6 Redução

A redução das anotações do diário de campo levou em consideração: categorias de respostas obtidas, estratégia usada pelos estudantes para resolver as situações problema propostas e sua relação com os conteúdos trabalhados e demais conteúdos.

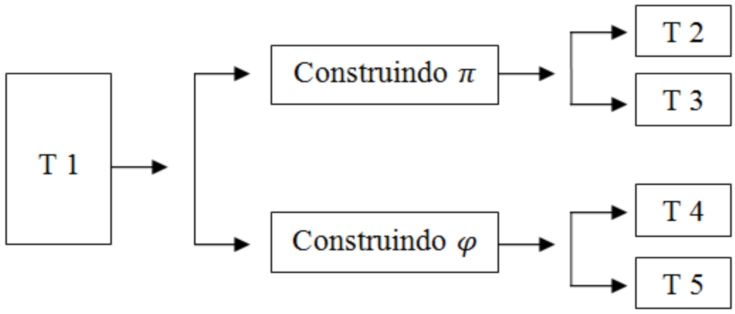
4.4 As Tarefas

As atividades ocorreram em grupos de 3 integrantes, de preferência, sendo somente as tarefas 1, 7 e 8 aplicadas de maneira individual. As tarefas foram elaboradas de maneira que não ocorressem de forma engessada, mas que desenvolvessem a exploração e a interação entre os estudantes. No quadro 4, apresentamos a primeira versão das tarefas propostas, com seus respectivos tempos previstos, objetivos e expectativas. Tais construções consideraram, a priori, o perfil dos estudantes participantes, uma vez que o pesquisador é também regente das turmas nas quais os estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental estão matriculados e as abordagens conceituais pertinentes à fundamentação teórica que sustentam essa pesquisa, mais propriamente as ideias de medida, número e números irracionais π e φ. Por se tratar de uma pesquisa baseada no experimento de *design* (DBR), as tarefas poderão sofrer alterações ao longo do processo a fim de promover melhorias nos aspectos didáticos e metodológicos.

TAREFA	OBJETIVO	EXPECTATIVAS
1- Números: o que dizem os estudantes?	Identificar o que alunos dizem sobre número.	Que alunos associem a palavra número a situações variadas do cotidiano e apresentem algum tipo de classificação, incluindo os conjuntos numéricos.
2- Medindo corpos circulares: latas, tampas e outras coisas mais	Verificar como alunos manuseiam instrumentos de medição de acordo com a adequação dos mesmos.	Que o aluno possa familiarizar-se com as técnicas de medição de objetos redondos, optando pelos recursos disponíveis mais adequados para tal.
3- Circunferência e seu Diâmetro: uma comparação PIrada	Comparar as medidas do comprimento da circunferência e de seu respectivo diâmetro.	Que alunos percebam e discutam as variações encontradas durante a construção do número irracional π.
4- Pentagrama: uma viagem de ouro	Propiciar a experimentação em relação à construção número φ (número de ouro) no pentágono regular.	Que os alunos compreendam a origem do número φ (número de ouro) a partir das diagonais de um pentágono regular.
5- Medindo o corpo humano: o homem vitruviano	Comparar as medidas das diferentes partes do corpo humano entre si e identificar que existe um padrão.	Que os alunos associem as comparações das medidas das diferentes partes do corpo humano como uma aproximação do número φ

Quadro 4 – Tarefas iniciais.

Com um percurso cuidadosamente elaborado, pensamos em uma tarefa para verificarmos as ideias dos estudantes acerca de números e conjuntos numéricos, duas tarefas referentes a construção do número irracional π e outras duas tarefas referentes a construção do número irracional φ.



Quadro 5 – Esquema de tarefas iniciais.

Devido à riqueza das respostas e dificuldades que foram surgindo ao longo do processo, acrescentamos tarefas e reconfiguramos o cronograma, objetivando disponibilizar um maior envolvimento dos estudantes. O quadro a seguir representa o cronograma ajustado das implementações.

	1ª quinzena de maio	2ª quinzena de maio	1ª quinzena de junho	2ª quinzena de junho	1ª quinzena de agosto	2ª quinzena de agosto	1ª quinzena de setembro	2ª quinzena de setembro
Tarefa 1	X							
Tarefa 1.A		X						
Tarefa 2			X					
Tarefa 3				X				
Tarefa 4					X			
Tarefa 5						X		
Tarefa 6							X	
Tarefa 7								X
Tarefa 8								X

Tabela 4 – Cronograma de aplicação de tarefas definidas ao longo da pesquisa

As tarefas utilizadas nas implementações para a coleta de dados da presente foram sendo (re)elaboradas a partir da tarefa inicial a cada novo encontro e analise das respostas. Com o propósito de ilustrar as tarefas implementadas, relacionamos no quadro a seguir a sequência, e os objetivos.

TAREFA	OBJETIVO	EXPECTATIVAS
1- Números: o que dizem os estudantes?	Identificar o que estudantes dizem sobre número.	Que estudantes associem a palavra número a situações variadas do cotidiano e apresentem algum tipo de classificação, incluindo os conjuntos numéricos.
1.A- Agrupando objetos e elementos	Verificar como os estudantes agrupam palavras referentes a número.	Que os estudantes possam agrupar palavras a partir de uma característica comum de maneira justificada
2- Medindo corpos circulares: latas, tampas e outras coisas mais	Verificar como estudantes manuseiam instrumentos de medição de acordo com a adequação dos mesmos.	Que o estudante possa familiarizar-se com as técnicas de medição de objetos redondos, optando pelos recursos disponíveis mais adequados para tal.
3- Circunferência e seu Diâmetro: uma comparação PIrada	Comparar as medidas do comprimento da circunferência e de seu respectivo diâmetro.	Que estudantes percebam e discutam as variações encontradas durante a construção do número irracional π.
4- Matemágica: uma viagem de ouro	Propiciar a experimentação em relação à construção número φ (número de ouro) no pentágono regular.	Que os estudantes compreendam a origem do número φ (número de ouro) a partir das diagonais de um pentágono regular.
5- Um número Divino	Comparar as medidas das diferentes partes do corpo humano entre si e identificar que existe um padrão.	Que os estudantes associem as comparações das medidas das diferentes partes do corpo humano como uma aproximação do número φ
6- Pentagrama e a Razão Áurea	Verificar a origem do número áureo a partir do pentágono regular e triângulos semelhantes.	Que os estudantes possam comparar os triângulos semelhantes oriundos do pentágono regular.
7- A Espiral Áurea na tela do Smartphone	Propiciar aos estudantes as vivências das etapas da construção do retângulo áureo e espiral áurea.	Que os estudantes possam compreender a infinidade desse processo.

8- Fotografando π usando φ	Comparar as fotos tiradas de Smartphones com e sem o retângulo áureo.	Que os nossos estudantes possam perceber a harmonia e proporção áurea nas fotos tiradas utilizando o retângulo áureo.

Quadro 6. Continuação – Tarefas aplicadas ao longo da pesquisa

4.5 Análise de Dados

Esta pesquisa foi direcionada para identificar os diferentes modos de como os alunos se posicionam diante de diferentes situações-problema e investigar de que forma uma proposta de sequência de tarefas de exploração numa perspectiva exploratório-investigativa contribui para o conhecimento, em particular para dois números irracionais exemplares.

A proposta de análise dos dados neste trabalho não levará em conta somente as suas estruturas internas, mas também o posicionamento dos alunos na atividade ao desenvolver o conteúdo. Para realizar este tipo de análise, existem diversas técnicas de coleta de dados, dentre as quais as descritas anteriormente.

A análise foi realizada durante o processo, seja nas reduções, seja nas respostas lidas para que sobre as mesmas pudessem ser propostas novas atividades conforme a necessidade do grupo de estudantes. Estas novas atividades poderiam aprofundar, esclarecer, levantar novas questões, sintetizar ou buscar novos focos de atenção sobre a situação - problema que estavam trabalhando.

Para a análise de dados recorremos aos materiais utilizados para coleta de dados: diário de campo, registros escritos, gravações em áudio e gravações em vídeo. A leitura desses materiais foi feita atentamente varias vezes, onde iniciamos toda a extração do material bruto para a análise. Na sequência, foi feita a redução do material bruto a fim de lapidarmos tais informações retiradas inicialmente da pesquisa. A redução tem por objetivo organizar, focalizar e simplificar as ideias desenvolvidas e intrínsecas a pesquisa de campo, desde a discussão dos alunos as ideias teóricas envolvidas.

Segundo Mometi (2007, p. 89), “[...] a redução dos dados se refere ao processo de seleção, focalização, simplificação, abstração e transformação dos dados brutos que aparecem escritos nas notas de campo”. Para esse processo, levamos em consideração as escritas, falas e imagens dos participantes relacionadas às suas hipóteses e argumentações durante a busca das soluções dos problemas, assim como suas justificativas e raciocínios para tal. Sendo assim, temos elementos potencialmente colaborativos para a elaboração para o texto final da análise.

4.6 Ciclos Iterativos

Esta pesquisa prevê três ciclos, a saber:

1) levantamento bibliográfico e elaboração das tarefas, esta fase se constitui no que é denominado de prospectivo. Ou seja, se constitui nossa hipótese de trabalho para a compreensão do tema a partir de uma reflexão sobre o material e as orientações existentes, daí a necessidade do levantamento bibliográfico;

2) implementação das tarefas e análise delas ao longo do processo. Esta fase se constitui como sendo aquela em que ocorre a iteratividade visto que a partir da análise das respostas dos estudantes, novas tarefas podem ser introduzidas e as demais podem ser refinadas;

3) análise final com apresentação dos resultados que compõem o produto deste trabalho.

CICLO	DESCRIÇÃO
1°	Levantamento Bibliográfico. Análise de documentos curriculares e livros didáticos. Elaboração das tarefas
2º	Implementação das tarefas desenvolvidas através de análise da história e construção dos números irracionais, enfatizando os irracionais Pi e Fi.
3º	Análise das tarefas. Refinamento/Aperfeiçoamento das tarefas após a aplicação de cada uma delas e possível elaboração de novas tarefas. Implementação de tarefas aperfeiçoadas e refinadas de acordo com a análise do ciclo 2. Análise das tarefas aperfeiçoadas e refinadas.

Quadro 7 – Ciclos iterativos

No próximo capítulo destacaremos os resultados e discussões inerentes à pesquisa.

5 RESULTADOS

Neste capítulo trataremos de toda dinâmica na pesquisa de campo, incluindo a descrição dos processos construtivos em cada tarefa e análises dos mesmos.

5.1 Levantamento Bibliográfico e Elaboração das Tarefas

A partir do levantamento bibliográfico, observamos pontos teóricos que julgamos importantes para a elaboração das tarefas que podem vir a contribuir para o amadurecimento e construção de significados e para o ensino e aprendizagem dos números irracionais, mais precisamente os irracionais π e φ, objetos desta pesquisa.

Em função das dificuldades para se pensar em tarefas que pudessem ser aplicadas para estudantes (adolescentes de 13, 14 e 15 anos de idade) do 9º ano do Ensino Fundamental sobre a existência de outros números, diferentes daqueles em que possuem domínio, buscamos na literatura encontrar subsídios para nos ajudar nesta ideia. Um dos pontos encontrados foi pensar em situações concretas, reais e de alguma forma possíveis de serem experimentadas. Outro aspecto a ser considerado é a vivência e o conhecimento dos estudantes sobre alguns números irracionais. Diante de tais perspectivas elaboramos, inicialmente, 5 tarefas para serem propostas aos alunos participantes da pesquisa. Vale a pena ressaltar que tal pesquisa carrega em sua essência os preceitos da DBR (Design Based Research), o que nos possibilita, a cada tarefa aplicada, refinar e aperfeiçoar a mesma ou alterar de maneira qualitativa e orientada próxima, a fim de que tenhamos mais elementos para análise das mesmas.

5.2 Descrição e Análise das Tarefas

Neste item destacaremos a descrição e análise de cada uma das tarefas, considerando os instrumentos utilizados e as mais variadas formas de registros dos alunos. Para esta pesquisa foram escolhidos 12 alunos de turmas do 9º ano do Ensino Fundamental, sendo 6 alunos do turno da manhã e 6 alunos do turno da tarde.

Em relação as tarefas aplicadas, chegamos a um número total de 9. Prevíamos inicialmente 5 tarefas, mas de acordo com as necessidades da pesquisa se fez necessário a criação de novas tarefas ou o refinamento de algumas já aplicadas para que voltassem a campo, coincidindo assim com algumas características da metodologia DBR. A dinâmica de aplicação foi diversificada quanto ao número de participantes por grupo em cada tarefa. A tabela abaixo resume como procedemos em cada tarefa a respeito do número de participantes por grupo.

TAREFA	T1	T1-A	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
Nº DE PARTICIPANTES POR GRUPO	Individual	3	3	3	3	3	3	Individual com colaboração	Individual

Tabela 5 – Número de estudantes participantes por grupo em cada tarefa

Em alguns momentos, adotamos o individualismo dos nossos estudantes para aproveitarmos ao máximo o que eles pensam acerca das tarefas realizadas de maneira individual. Mas especificamente, optamos por tarefas individuais no início e final da pesquisa a fim de analisarmos o crescimento e amadurecimento dos nossos alunos em relação aos números irracionais, com ênfase no π e φ.

5.2.1 TAREFA 1 – Números: o que é e para que servem?

A 1ª atividade teve dois momentos, onde no primeiro apresentamos a palavra carro e no segundo a palavra número, termo de interesse dessa pesquisa.

Com relação ao primeiro termo, os estudantes escreviam e na sequência falavam a palavra para o professor pesquisador anotar no quadro. Tivemos mais algumas rodadas seguindo esse mesmo processo, onde orientei que escrevessem quantas mais palavras pensassem como sendo termos que definissem ou representassem carro.

Abaixo, temos a frequência com que cada palavra apareceu durante a atividade referente à palavra carro:

ar, cabo de freio, marcha, rápido, sinal e vela (1); banco (2); pessoas (7); aquecedor, batida, freio, pneu e radar (8); para-brisa, rapidez, retrovisor, vidro e volante (9); mala, motor, rádio, rua e viajar (10) e gasolina (12).

De acordo com a frequência, a palavra que mais apareceu sobre carro foi gasolina. Outras palavras que apareceram com maior frequência foram mala, motor, rádio, rua e viajar. Analisando as palavras gasolina, motor e rua, temos ai um terno fundamental para a utilização de um carro. Um carro movido somente à gasolina só anda se possuir motor e gasolina e, tendo este, só poderá se deslocar de maneira significativa se tiver rua para esse deslocamento. Por sua vez, as palavras mala, rádio e viajar representam situações secundárias em relação ao carro. Para caracterizarmos um carro não dependemos de mala e rádio. Percebemos que, para parte do grupo, o lazer (viajar) e o conforto (mala e rádio) devem estar alinhados ao conceito de carro.

Essa análise nos dá uma ideia das concepções dos estudantes acerca dos automóveis, em particular carro associado exclusivamente ao lazer e no deslocamento através de ruas, visto que moram em ambiente urbano e sua experiência de vida, estudantes com idade variando entre 13 e 15 anos e que ainda não se encontram no mercado de trabalho.

Como nosso interesse de pesquisa está voltado para os números, não nos aprofundamos nesta questão. Diante do exposto, verificando-se que os estudantes compreenderam a proposta, deu-se o segundo momento, descrito a seguir.

Após terem vivenciado tal experiência com um termo do dia a dia, foi lhes dito que fariam a mesma atividade, considerando agora, uma palavra relacionada com a disciplina matemática, e a palavra escolhida foi número. A tarefa teve como foco acolher os estudantes participantes de nossa pesquisa e possibilitar um momento de troca de ideias acerca de números e conjuntos numéricos.

Objetivos e Etapas

Acreditamos ser importante possibilitarmos momentos de reflexão sobre o tema número e conjuntos numéricos. Para isto, destacamos os seguintes objetivos específicos: a) verificar o primeiro pensamento acerca de número e algumas associações; b) verificar os números e/ou grupos de números que os alunos conhecem; c) verificar como os estudantes agrupam números; d) verificar quais números "esquisitos" os estudantes conhecem.

Esta tarefa apresenta duas etapas: a) reflexão acerca da ideia de número; b) reflexão acerca da ideia de conjuntos numéricos. Para a realização de tal, os estudantes receberam um roteiro da tarefa 1 com os itens abaixo:

Quadro 8 – Roteiro da tarefa 1.

1- Escreva algumas ideias sobre o que você lembra quando ouve a palavra número.
2.A- Diga que números conhece.
2.B- Que outros números conhece?
3- Estes números que você citou têm nomes ou podem ser agrupados? Como?
4- Que números entram na categoria dos naturais? E dos inteiros? E dos racionais? Qual a diferença entre eles?
5.A - Que números você conhece como sendo irracionais?
5.B - Irracionais por quê?
6- Que outros números "esquisitos" você conhece?

A nossa expectativa nesta tarefa foi verificar como alunos associam a ideia de número e como eles os agrupam.

Dinâmica

Durante toda a tarefa os alunos trabalharam de maneira individual, entretanto, foram possibilitados momentos para troca de ideias durante a tarefa, onde cada aluno pode externar seus pensamentos. A duração da tarefa foi de 100 minutos

Abaixo, temos a frequência com que cada palavra apareceu durante a atividade referente a número:

contar, dias e minutos (1); letra (5); medida, multiplicação e régua (6); altura, equação, geometria e relógio (7); conta, problema e trena (8); contagem, dinheiro, distância, matemática e trigonometria (9); cálculo e soma (10) e calculadora (11).

Observando a frequência de cada palavra, percebemos que a palavra que apresenta a maior frequência é calculadora. Calculadora é um objeto bastante utilizado no dia a dia pelas pessoas e com o advento das tecnologias de comunicação as calculadoras passaram a se integrar aos aparelhos telefônicos. Aparece também com frequência as palavras cálculo e soma**,** onde essas fazem parte do vocabulário matemático dos alunos. Outro aspecto importante é que os termos número, cálculo e soma remetem à ideia de operação e, portanto, a calcular que, por sua vez, remete ao instrumento de cálculo, a calculadora.

Analisando a tarefa, percebemos que não temos referências para números como código. Neste caso, observamos que os estudantes participantes desta pesquisa consideram que números servem para contar e medir. Nesse sentido, Caraça (1970) aponta que os aspectos que envolvem as ações de contar e medir formam as bases para os conhecimentos pertinentes aos números.

A seguir, daremos início a 2ª etapa desta tarefa abordando número e conjuntos numéricos.

Cotidiano numérico (o que já se conhece)

Para analisarmos as atividades 2.A e 2.B optamos por uma tabela afim observar as sequências de respostas dos nossos estudantes. Queremos aqui, verificar quais números ou grupos de números que os alunos conhecem. Provocamos uma reflexão, onde tentamos retirar dos alunos a maior variedade de números e grupos de números conhecidos por eles.

Diante de uma categorização (APÊNDICE IV) em que buscamos identificar a ideia teórica envolvida nos exemplos dados pelos estudantes, identificamos duas ideias principais: a) a que usa a representação numérica dando ênfase as operações (8 alunos) e b) a que apresenta os números através de conjuntos numéricos (2 alunos)

Em suma, descreveremos por categorias/grupos de semelhança os números que os nossos estudantes conhecem:

- os alunos Dinho e Lan enfatizam, de certo modo, os conjuntos numéricos para relatarem os números que já conhecem e também algumas caracterizações que favorecem as ideias de operações matemáticas;

  Alguns exemplos: *Racionais; irracionais; inteiros; negativos; frações; radicais.*

- os demais estudantes exemplificaram, muitas vezes, os seus respectivos números conhecidos através de estruturas operatórias. Analisando tais números, percebemos o quanto é forte para esse grupo de estudantes a "ideia de operação matemática" para se representar número.

  Alguns exemplos: $\frac{7}{49}$*; 0,006013;* $2\sqrt{5}$*; 8,5;* $\sqrt{9}$*;* $\sqrt{25}$*;* $\frac{3}{7}$*;* $\sqrt[2]{5}$*; 7; 95%; 14; 100%;*$2\sqrt{3}$*;* $\sqrt{\frac{7}{9}}$*;* $\sqrt[3]{-2^3}$.

Nos exemplos dados imediatamente acima, embora estes estudantes não tenham realizado uma classificação olhando para os conjuntos numéricos, é possível identificar o conjunto dos números naturais = {7, 14}; o conjunto dos números inteiros = {7, 14}; números racionais e, para este caso, temos números decimais = {0,006013; 8,5} e frações ordinárias = $\{\frac{7}{49}, \frac{3}{7}\}$; representação através de percentuais = {95 %, 100%}. Não é possível saber se a representação através de radicais são representantes de números irracionais ou não $\{2\sqrt{5}, \sqrt[2]{5}\}$. Ou seja, os nossos estudantes utilizam as frações e os radicais para dizerem quais números conhecem quanto para responderem ao item que solicitamos "que outros números conhece". Desta forma, entendemos que para este grupo de estudantes os radicais representam uma quinta operação, a de radiciação. Fato este, evidenciados nas múltiplas representações $\{2\sqrt{3};\ \sqrt{\frac{7}{9}};\ \sqrt[3]{-2^3}\}$.

De um modo geral, nos pareceu um pouco difícil para os nossos estudantes responderem ao item 3 sem transcenderem a barreira das operações para relatarem os números que conhecem. De alguma forma, parte dos estudantes participantes desta pesquisa destacam, intuitivamente, a(s) operação(ões) como elemento primordial para caracterizar determinados números.

Agrupando números

Para analisarmos as atividades 3, 4, 5.A e 5.B optamos por uma tabela afim observar as sequências de respostas dos nossos estudantes (APÊNDICE V).

A justificativa para tais perguntas se dá pelas dificuldades dos alunos ao conceituarem os conjuntos numéricos e classificar determinados números. Diante dessa perspectiva, as nossas expectativas vão de encontro a percepção dos alunos no que diz respeito à classificação de números naturais, inteiros, racionais e irracionais de maneira contundente.

Mais uma vez, os estudantes Lan e Dinho esboçam a ideia de conjuntos numéricos nesta tarefa, desta vez para agrupar os números que haviam citado na atividade anterior. Quanto aos demais estudantes, observamos que estes agruparam os números a partir da sua estrutura operatória, fazendo pouco uso da classificação em relação aos conjuntos numéricos. Observe a ilustração:

$\sqrt{25}$ - Radical – Número Racional

$\sqrt{5}$ - Radical – Número Irracional

Em ambos os casos temos um radical, porém, a classificação quanto aos conjuntos numéricos depende dos valores do índice e do radicando. Podemos inferir que esses dados são oriundos de uma linguagem utilizada nas salas de aula e nos materiais didáticos que, por sua vez, fazem pouco uso de reflexões voltadas para os conjuntos numéricos, favorecendo a um olhar para este como uma operação matemática.

Com relação à classificação dos conjuntos numéricos, os elementos foram bem classificados pelos alunos, onde somente 2 participantes cometeram algum um erro em relação a classificação. Também observamos os exemplos dados na forma de radical com raízes exatas por todos para números racionais.

Durante toda a tarefa tivemos a gravação de áudio dos alunos participantes da pesquisa. É importante ressaltar que tal gravação foi autorizada pelos responsáveis dos alunos participantes. No decorrer da execução do item 5, a aluna indagou o professor pesquisador:

Trecho do áudio_ 17: 32

Vick_ *Professor, tem números que servem para os três!*

Lan _ *É verdade!*

Prof_ *Vocês podem me dar um exemplo de um número que seja natural, inteiro e racional?*

Vick_ *O 3.*

Vick_ *Então não tem diferença entre eles?*

No áudio acima alguns alunos percebem que todo número natural é inteiro e também racional, mas não conseguem perceber a diferença entre eles. A justificativa e argumentação são elementos da escrita matemática pouco trabalhados na sala de aula de matemática, favorecendo a minimização dos processos de pensamento matemático e sua discussão entre os estudantes.

A respeito dos números irracionais, observamos que os alunos associam estes números a estrutura do radical (neste caso raízes inexatas), o que sugere um olhar mais próximo de uma operação matemática quanto ao radical, deixando o real significado desses números bem distantes da sua essência e origem. Abaixo segue um comentário pontual por grupos de semelhança de respostas:

Gu e Pepi: ambos associam o número irracional a uma raiz não exata. Neste caso, há uma exclusão dos números irracionais transcendentes. De acordo com seus exemplos, observamos um olhar mecanizado voltado para a operação com radical, favorecendo a formação de lacunas para a construção do real significados destes números. Por sinal, as raízes aproximadas fornecidas nos exemplos por estes alunos apresentam falha nos cálculos ou no próprio conceito quanto à operação com radicais.

Tammy e Vick: pelos seus respectivos exemplos, acreditam que o número irracional pode ser um decimal com finitas casas decimais. Talvez essa ideia possa estar associada aos exercícios dos livros didáticos de matemática que enfatizam a extração de raízes não exatas fazendo a aproximação para um número racional por falta ou excesso.

Ninha e Lane: de acordo com seus exemplos, acreditam que o número irracional está ligado as dízimas periódicas em sua forma decimal. O fato que, provavelmente, causou tal confusão, é o de dízimas periódicas e números irracionais na forma decimal terem infinitas casas decimais.

Ao analisarmos as respostas, observamos as dificuldades em definir um número irracional e também na redação desses alunos. De modo geral, eles o definem como sendo um número não inteiro, número quebrado, número com infinitas casas decimais, números que não apresentam raízes exatas. Essas definições citadas pelos estudantes envolvidos na pesquisa não representam a verdadeira origem e conceito do número irracional, e sim a sua forma mecanizada, formando uma ideia pronta e acabada deste número. Outro aspecto importante é a comparação dos exemplos dados pelos estudantes para números racionais (geralmente raízes exatas) e os números irracionais (geralmente raízes não exatas), onde observamos a etimologia dessas palavras prevalecendo sobre o real significado sobre cada um dos conjuntos numéricos citados. Para esses estudantes, números racionais e números irracionais são antagônicos, ou seja, números racionais está diretamente ligados a raízes exatas enquanto números irracionais está conectado a raízes inexatas.

Número esquisito

Ao longo da minha caminhada como professor de matemática da Educação Básica ouvi alguns termos em sala de aula ditos pelos alunos para designarem certos números, onde alguns desses era denominado “esquisito” por eles. Não sei ao certo o motivo pelo qual alguns alunos acham determinados números esquisitos, mas acredito que esse fato se deve a característica e estrutura não tão comuns desses números no cotidiano, a própria familiarização com o mesmo e as dificuldades para entendê-lo e criar um significado para tal.

Analisando o APÊNDICE VI e traçando um perfil geral dos alunos participantes quanto aos números esquisitos, podemos dizer que estes números podem ser: frações, números decimais, dízimas e radicais.

De maneira particular, nos chamou a atenção a resposta do aluno DINHO (100 km/h) quanto à ideia de número esquisito. O número exemplificado pelo aluno não se enquadra, em um primeiro momento, no grupo de números citados pelos demais alunos. Uma possibilidade para essa resposta seria o fato do aluno ter conectado ideias numéricas com a palavra carro, oriunda da atividade 1 desta tarefa. Por outro lado, não parece tão comum no cotidiano essa relação matemática de razão $\frac{Km}{h}$. Pensando por esse lado, parece que tal exemplo citado não se encontra tão distante dos exemplos fornecidos pelos demais alunos, uma vez que esses citam números racionais, de um modo geral, como esquisitos.

5.2.2 TAREFA 1.A – Agrupando objetos e elementos (O ESTRANHAMENTO)

Após analisarmos a Tarefa 1, observamos a riqueza de informações ali contidas (acertos, erros, incertezas e lacunas a respeito da ideia de número e conjuntos numéricos) através de registros escritos e áudios e a necessidade de aprofundarmos tal tarefa para podermos entender melhor o que os estudantes pensam sobre números. É importante ressaltar que está pesquisa está debruçada na metodologia DBR que, por sua vez, possibilita refinamentos e melhorias das tarefas para futuras aplicações. Esta tarefa não fazia parte do nosso repertório de tarefas, mas após análise da Tarefa 1 percebemos a necessidade de sua elaboração e melhorias de determinados aspectos. Para tanto, pensamos em uma tarefa em que os estudantes pudessem refletir acerca do que foi discutido no encontro anterior.

A mesma apresenta duas etapas: a) reflexão acerca da caracterização para o agrupamento de palavras ditas pelos estudantes relacionadas a número; b) criação de textos a partir de palavras ditas pelos estudantes referentes a número, considerando a coerência textual.

Quadro 9 – Roteiro da tarefa 1.A

1- Vocês receberam a lista de palavras ditas por cada integrante do grupo. Agora, as agrupem/classifiquem de modo mais conveniente. Não se esqueça de justificar cada grupo/classificação, além de dar um nome para cada um deles.
2- Escreva uma redação, música ou poesia com todas as palavras agrupadas/classificadas acima.

Para iniciar a tarefa, os estudantes receberam do professor/pesquisador as palavras ditas acerca de número no encontro anterior juntamente com a Tarefa 1.A. Assim, cada grupo pôde se organizar para iniciar a execução da mesma.

Dinâmica

Durante toda atividade os alunos trabalharam em grupos de, no máximo, quatro alunos. O trabalho em grupo possibilita uma troca intensa de ideias, onde pensamentos são compartilhados e decisões são tomadas a partir de acordos entre os estudantes. A duração da tarefa foi de 100 minutos. Nesta atividade, destacamos os seguintes objetivos específicos: a) caracterizar e agrupar por semelhança ou diferença palavras ditas/ escritas na tarefa anterior oriundas da ideia de número pelos alunos, considerando os diálogos e acordos sociais entre os mesmos; b) verificar a coerência textual e a capacidade de criação de textos a partir das palavras ditas pelos estudantes referentes a número; c) procurar identificar consenso entre os integrantes dos grupos para os agrupamentos escolhidos.

No primeiro momento, percebi que os estudantes ficaram um tanto temerosos com a tarefa, mas com o diálogo em grupo deram início a tarefa e a mesma pode fluir, mesmo com "gotículas" de insegurança.

Abaixo temos análise do quadro 9 com os agrupamentos de cada grupo de alunos acerca da palavra número. Nela temos três colunas: grupos, respostas e observações. Na 1ª coluna designamos por G1 o grupo 1, por G2 o grupo 2, por G3 o grupo 3 e por G4 o grupo 4.

Na 2ª coluna anotamos as respostas de cada grupo e na 3ª coluna temos uma observação acerca de uma possível identificação da ideia que está por trás dos respectivos agrupamentos.

GRUPOS	RESPOSTAS	OBSERVAÇÕES
G1 TOR LOR VICK	- *Soma, cálculo, dinheiro e equação.* - *Relógio, contagem, distância e trena.* - *Matemática, calculadora, altura e medida.*	- Operação - Instrumentos de medida - Instrumentos usados na matemática.
G2 NICK RICK MARI	- *Matemática, cálculo e problemas.* - *Altura, distância e trena.* - *Dinheiro, multiplicação e soma.* - *Trigonometria, conta e calculadora.* - *Letra, equação e medida.*	- Operação - Instrumentos de medida - Operação com dinheiro - Conceitos ligados à trigonometria - Álgebra
G3 PEPI BIEL	- *Distância, metros, quilômetros e centímetros.* - *Largura, altura e comprimento.* - *Contas, números, resultados e somas.* - *Problemas, equações, divisões e multiplicações.* - *Contagem, números, contas e equações.*	- Unidades de medida - Medidas no espaço - Operações - Álgebra e operações - Sistema numérico e álgebra
G4 NINHA PAMY LANE	- *Dinheiro, contagem e moeda.* - *Soma, cálculo e conta.* - *Distância, dias e altura.* - *Matemática, geometria e multiplicação.* - *Régua, altura e trena.* - *Relógio, número e minutos.* - *Problemas, conta e solução.* - *Calculadora, números e soma.* - *Equação, contagem e trigonometria.*	- Dinheiro - Operações - Unidades de medida - Áreas da matemática e operação - Instrumentos para medir - Contagem de tempo - Ideias associadas a problemas - Operações com calculadora - Conceitos ligados à trigonometria

Quadro 10 – Transcrição tarefa 1.A

O grupo G1 optou por fazer três agrupamentos de palavras, onde identificamos a partir de observações a ideia de medida. Notamos também que este grupo utilizou quatro palavras em cada agrupamento sem fazer a repetição da mesma, ou seja, de acordo com o grupo e as características adotadas para os seus respectivos agrupamentos cada palavra atendia a uma única propriedade e, consequentemente, pertencendo a somente um agrupamento.

O grupo G2 optou por fazer cinco agrupamentos de palavras, onde observamos as ideias de medida e operações. Também observamos que o grupo utilizou três palavras em cada agrupamento sem fazer a repetição da mesma, ou seja, de acordo com o grupo e as características adotadas para os seus respectivos agrupamentos cada palavra atendia somente a uma propriedade, pertencendo assim um único agrupamento.

Com o auxílio do diário de campo, pude anotar uma pergunta interessante da aluna MARI durante a tarefa:

Mari_ *Professor, eu posso colocar a mesma palavra em mais de um grupo?*

Prof_ *Se você achar pertinente, sim. Se a palavra atende a característica que o grupo definiu, tudo bem!*

Mesmo o grupo G2 (da aluna MARI) não tendo optado pela utilização de uma palavra em mais de um agrupamento (classificação), observamos nessa pergunta a reflexão da aluna no que diz respeito a um elemento pertencer a mais de um conjunto. Vale lembrar que na aula anterior alguns alunos relataram que existem números que são naturais, inteiros e racionais, ou seja, existem números que pertencem a mais de um conjunto numérico.

No grupo G3 tivemos a ausência de 1 aluno. Trabalhando em dupla, o grupo 3 optou por fazer cinco agrupamentos de palavras, onde observamos as ideias de álgebra, medida e operações. Também notamos que tal grupo utilizou quatro palavras em quatro agrupamentos e três palavras em um agrupamento, além de incluir as palavras *números* e *equações* em dois agrupamentos distintos. Desse modo, acreditamos que este grupo percebeu que um elemento pode pertencer a mais de um conjunto, considerando as suas características e propriedades.

O grupo G4 optou por fazer nove agrupamentos de palavras, onde observamos as ideias de medida e operações. Também observamos que o grupo utilizou três palavras em cada agrupamento, além de incluir as palavras *Altura*, *conta* e *contagem* em dois agrupamentos distintos. Desse modo, acreditamos que este grupo percebeu que um elemento pode pertencer a mais de um conjunto, considerando as suas características e propriedades.

Um novo olhar

Ao tabularmos os termos e exemplos usados pelos estudantes sobre as respostas da tarefa anterior, identificamos ideias conceituais sobre a aplicação do número. Ou seja, número como contagem, medida, operação, entre outros.

No que diz respeito às operações, destacam-se as operações matemáticas na resolução de problemas nos campos aritmético e algébrico (*soma, cálculo, dinheiro, equação, problemas e conta*). Sobre medida, observamos os instrumentos de medida e unidades de medida utilizados cotidianamente (*relógio, contagem, distância, trena, metros, quilômetros, centímetros, altura e dias*).

Também observamos a preocupação dos estudantes em escrever os agrupamentos com um mesmo quantitativo de palavras, buscando assim uma sistematização para tais agrupamentos. É importante ressaltar que os grupos G1 e G2 não incluíram uma mesma palavra em mais de um agrupamento (apesar da aluna MARI do G2 ter perguntado ao professor quanto a isso), ao contrário dos grupos G3 e G4 que fizeram uso de uma mesma palavra em mais de um agrupamento.

Quanto as diferentes concepções de número, é importante ressaltarmos as prototípicas que podem surgir a partir deste. O número natural, de um modo geral, serve para *contar*, mas quando olhamos para ele no conjunto dos números inteiros, ele pode estar sendo compreendido como a *posição na reta ou até onde foi (módulo)*. Se pensarmos no número racional 3, ele pode estar associado a *razão* $\frac{6}{2}$. Associado a essa ideia, nos debruçaremos sobre a palavra *distância* escrita pelos quatro grupos: os grupos G1 e G2 associam a palavra *distância* a instrumento de medida, onde essa percepção ganha força a partir da palavra *trena* pertencente ao mesmo agrupamento, enquanto os grupos G3 e G4 associam *distância* a unidade de medida.

Sentimos a falta das justificativas para cada agrupamento adotado pelos grupos, o que ajudaria entender melhor as características de cada agrupamento e as reflexões acerca do mesmo. Para tanto, pretendemos sugerir aqui um novo comando (enunciado da questão) a fim de proporcionar maior reflexão e detalhes para a tarefa 1.A.

"Na aula anterior cada grupo escreveu/disse palavras associadas ao termo número. Agora, agrupe as palavras por semelhanças ou diferenças e justifique suas respostas".

Acreditamos que o enunciado supracitado seja capaz de enriquecer a pesquisa fornecendo mais elementos para a aprendizagem dos envolvidos.

O Estranhamento

Como a produção de texto não é algo muito comum na sala de aula de matemática, os alunos ficaram surpresos e estranharam tal tarefa. Ao quebrarem tal paradigma, os grupos iniciaram seus respectivos textos e o que era um ambiente cercado por interrogações transformou-se em um cenário com espaços para a arte, criatividade e novas descobertas.

TEXTO **G1**	OBSERVAÇÕES
Uma bela matemática Se inicia com uma soma Cálculo seu dinheiro e sua distância	- Operação e medida.
O relógio tem uma contagem regressiva Procuro me esforçar para achar uma medida	- Instrumento e medida de tempo.
Cálculo minha altura Para achar sua formosura	- Medida. Centrado no eu/seu. Relações humanas.
Uso a trena e a equação Para chegar até seu coração.	- Álgebra e sentimento.

Quadro 11 – Transcrição tarefa 1.A

O grupo G1 fez uma poesia com as palavras agrupadas na tarefa anterior. No entanto, observamos que não foram utilizadas todas as palavras. Entretanto, as estrofes apresentam ideias relacionadas entre si, como por exemplo, quando os estudantes se referem ao instrumento e medida de tempo, além de apresentarem o mundo das sensações, mesmo que de maneira explícita, como o sentimento.

Os demais textos foram colocados nos anexos a fim de provocar maior conforto e fluidez durante a leitura.

O grupo G2 escreveu um texto narrativo (APÊNDICE VII) com as palavras agrupadas na tarefa anterior. No entanto, observamos que não foram utilizadas todas as palavras. No texto destacam-se as situações cotidianas como festa, deslocamento, relações e acordos sociais.

O grupo G3 fez uma poesia (APÊNDICE VIII) com as palavras agrupadas na tarefa anterior. Percebemos que não foram utilizadas muitas das palavras disponíveis. A poesia feita pelo grupo enfatiza ideias matemáticas como contagem, operações e limite relacionadas aos sentimentos.

TEXTO **G4**	OBSERVAÇÕES
Preciso de uma solução para conquistar seu coração.	- Sentimento.
Para conquistar seu coração, eu uso a equação, sempre tem alguns problemas, mas eu tenho a solução.	- Álgebra e sentimento.
Pode ter alguns problemas, distâncias, dias, minutos e até o relógio pode demorar a passar, mas o nosso amor dá conta.	- Instrumento de medida, unidades de medida e sentimento.
Para medir o meu amor por você, pensei na geometria, mas nada foi capaz, nem sequer a trigonometria.	-Geometria e sentimento.
Se tiver alguma dúvida sobre o nosso amor, use a calculadora.	- Operação e sentimento.
O meu amor por você é igual a multiplicação, se multiplica a cada dia.	- Operação e sentimento.
O nosso amor é igual à matemática, cheio de problemas, mas sempre tem a solução.	-Resolução de problemas e sentimento.
Nem um número, moeda e dinheiro é maior do amor que eu sinto por você.	- Contagem e sentimento.
Utilizo a régua e a trena para medir a distância que	- Instrumentos de medida

nos separa. Faço a contagem dos dias para te ver. A soma do nosso amor é maior que a altura do professor Leonardo.	e sensibilidade. - Contagem e unidade de tempo. -Medida de comprimento e sentimento.

Quadro 12. Continuação – Transcrição tarefa 1.A

O grupo G4 fez uma poesia e apenas uma das palavras não foi utilizada. Os estudantes desse grupo foram bastante incisivos na relação matemática/mundo das emoções e sentimentos, destacando a ideia de contagem, medida e operação. Nos parece que este grupo utiliza o sentimento de maneira mais intensa para a construção da poesia, sendo este sentimento um fator colaborador para novas criações.

Matemática/Sentimentos e novos horizontes

Após o estranhamento da tarefa por parte dos estudantes, me chamou a atenção e me surgiu à mente a seguinte pergunta: por que na sala de aula de matemática o aluno escreve tão pouco acerca do que pensa? Os exercícios em sala de aula geralmente são de cunho fechado, possibilitando ao aluno apenas a traçar estratégias de percursos cognitivos para a resolução do problema. Ao encontrar a solução parte-se para outro problema e o ciclo continua, onde muitos alunos utilizam métodos mecanizados para resolução de problemas e a discussão que poderia ser feita em torno desse percurso não costuma ser agraciada nas salas de aula de matemática.

A intervenção no cenário da sala de aula de matemática pode possibilitar essa quebra de paradigma, pois quando propomos a elaboração de textos permitimos a flexibilidade de respostas diferenciadas por parte dos estudantes.

Apesar das dificuldades encontradas pelos grupos para redigirem um texto com termos matemáticos, observamos a capacidade para a criação dos alunos quando trabalham em grupos, considerando os multidiálogos e troca de ideias.

Comparando o texto redigido com a tarefa anterior, não percebemos uma sistematização para a criação do texto em relação as palavras agrupadas. Eles escreveram e foram selecionando palavras de acordo com a coerência textual, selecionando palavras agrupadas aleatoriamente.

Vimos como as emoções e os sentimentos acompanharam os nossos estudantes em boa parte da atividade, onde eles usaram sentimentos para explicar sua compreensão sobre os números. Segundo Damásio (1996), as emoções desempenham uma função na comunicação de significados a terceiros e podem ter também o papel de orientação cognitiva.

A fim de enriquecer a tarefa e, consequentemente, o aprendizado dos estudantes, daremos aqui uma sugestão para um novo enunciado em futuras aplicações desta tarefa. Acreditamos que tal enunciado possa ter restringido as possibilidades textuais, contribuindo para a dificuldade em elaborar o texto e não favorecendo o escape.

“Escreva um texto (redação, carta, música, poesia etc) com todas as palavras agrupadas/classificadas na questão anterior”

Com o novo enunciado, acreditamos que os estudantes terão mais horizontes para olhar e liberdade para escolhas, adequando-se ao gênero textual que melhor lhe cabe.

5.2.3 TAREFA 2 – Medindo corpos redondos: latas, tampas e outras coisas mais

Com o objetivo de proporcionarmos aos nossos estudantes experiências envolvendo medidas de corpos com a construção do número π, elaboramos uma tarefa que, de certa forma, é um pré-requisito para tal. A instrumentação e medição de corpos redondos não costuma ser algo cotidiano e pouco trabalhado nas salas de aula de matemática. Nessa perspectiva, pensamos em uma tarefa em que os estudantes pudessem apropriar-se de técnicas para a medição de objetos circulares e refletissem a respeito das variações encontradas ao medirem o comprimento do contorno da base.

Objetivos e Etapas

É de suma importância, nesta atividade, possibilitarmos momentos de reflexão para os nossos estudantes. Nessa perspectiva, destacamos os seguintes objetivos específicos: a) familiarizar os estudantes com os instrumentos para medição; b) comparar as medidas obtidas usando linhas diferentes; c) verificar se o uso de diferentes tipos de linhas interfere no comprimento da circunferência; d) comparar os resultados obtidos com os colegas de grupo.

A tarefa apresenta quatro etapas: a) organização dos instrumentos de medida e escolha dos objetos circulares; b) medição dos objetos circulares escolhidos com a linha, barbante fino e barbante grosso e preenchimento da tabela; c) comparação e reflexão acerca dos valores das medidas tabeladas; d) Relato da dinâmica: o que foi feito, como foi feito, observações, descobertas e conclusões.

Quadro 13 – Roteiro da tarefa 2.

1- Preencha a tabela, na linha cinza anotando o tipo ou a cor de sua linha que irá usar para medir os objetos e na coluna o nome do objeto a ser medido.

“objetos redondos”			
1:			
2:			
3:			

a) Compare as medidas de um mesmo objeto usando as três linhas. O que observou?
b) Compare as medidas de diferentes objetos usando a mesma linha, o que pode afirmar sobre as medidas dos objetos?
c) Compare as suas respostas com as de seu colega de grupo, o que observou? Explique.
d) Qual foi o objeto mais fácil de medir? Explique.
e) Escreva um texto relatando o que foi feito, como foi feito o que observou descrevendo todas as suas descobertas e suas conclusões.

Para iniciarmos a tarefa, disponibilizamos alguns objetos redondos para acrescentar aos que eles, estudantes, haviam trazido. A partir daí, cada grupo escolheu 3 objetos redondos entre os que foram disponibilizados, podendo assim, medir o pedaço de cada linha (linha de costura, barbante fino e barbante grosso) que achavam suficiente para medir seus respectivos objetos.

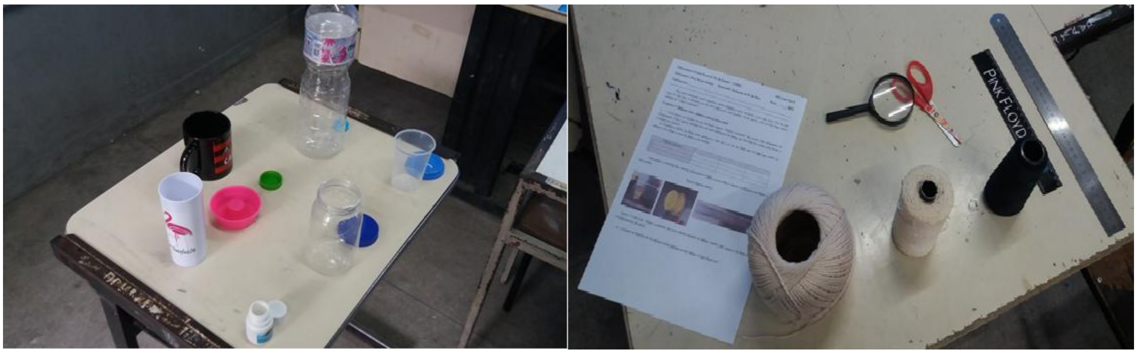


Figura 27 – Objetos utilizados na tarefa 2.

Materiais utilizados – Linha de costura, barbante fino, barbante grosso, régua, tesoura, lupa e objetos circulares escolhidos.

Dinâmica

Durante toda atividade os alunos trabalharam em grupos de, no máximo, quatro alunos. Acreditamos que o trabalho em grupo possibilita a troca de ideias, favorecendo a construção do conhecimento a partir da troca de experiências entre os estudantes. A duração da tarefa foi de 100 minutos.

Figura 28 – Estudantes trabalhando em grupos durante a tarefa 2.

Em relação ao preenchimento da tabela (APÊNDICE IX), observamos que o grupo G3 encontrou alguns resultados inteiros, por coincidência ou falta de precisão nas medidas. Se pensarmos pela perspectiva da falta de precisão, essa característica desempenhada pelo grupo G3 é comum, considerando que na sala de aula de matemática tradicional os alunos tem pouco contato com instrumentos de medidas. Acreditamos que experiências em que os alunos possam manusear instrumentos de medida e objetos (sentir/tocar) possam contribuir para uma sensibilização quanto à precisão das medidas de objetos, principalmente os objetos redondos que, por natureza, apresentam dificuldades peculiares com relação a sua medição.

Abaixo segue as respostas dos grupos referente a cada item da Tarefa 2.

a) Compare as medidas de um mesmo objeto usando as três linhas. O que observou?

GRUPOS	RESPOSTAS	COMENTÁRIOS
G1 TOR LOR VICK	*O barbante grosso é melhor para medir e o objeto mais simples é o pote de maionese. O mais complicado é o brinquedo e para medir é a linha. As medidas mudam através das linhas.*	É dada a espessura da linha a propriedade de ser o elemento que faz com que os objetos tenham contornos de medidas de circunferências diferentes.
G2 NICK	*Observamos que conforme as linhas foram ficando mais grossas, a largura dos objetos*	Classificam o barbante grosso como a linha mais fácil para

KINHO MARI	*iam aumentando. E achamos o barbante grosso mais fácil de medir as coisas.*	medir os contornos de circunferências.
G3 PEPI LAN	*O barbante grosso foi de maior medida. O barbante mais fino ficou com uma medida menor. A linha teve a menor medida.* *BG>BF>L*	Nos chamou a atenção o simbolismo e a linguagem matemática para expressarem seus pensamentos e conclusões.
G4 NINHA PAMY LANE	*Quando medimos com o barbante mais grosso o resultado é maior do que os mais finos.*	Diante da experiência, os estudantes concluem que o barbante grosso é o elemento que proporciona medidas de contorno de circunferências maiores.

Quadro 14. Continuação – Transcrição tarefa 2.

Provavelmente foi a primeira experiência desses alunos com medidas de objetos circulares, espantos e surpresas poderiam surgir naturalmente.

Trecho do áudio_ 04: 11

Mari_ *Professor, é certo ou errado estar aumentando?*
Prof_ *Como?*
Vick _ *Tem um que tá aumentando, outro que tá diminuindo!*
Prof_ *Não entendi!*
Mari_ *Os centímetros, os metros e a largura estão aumentando.*
Prof_ *Como assim?!*
Mari_ *Com a linha ficou 24,4 cm, com o barbante fino ficou 24,8 cm e com o barbante grosso ficou 26,0.*
Prof_ *Vejam se isso também acontece com o outro objeto.*

No áudio acima os grupos ficaram surpresos com as medidas encontradas para o mesmo objeto quando medidos com linhas diferentes (linha de costura, barbante fino e barbante grosso), pois quanto mais grossa for a linha maior será a medida encontrada para o comprimento da circunferência, devido a falta de flexibilidade do material ao “abraçar” o objeto.

Ao analisarmos os registros escritos observamos que tal percepção foi alcançada pelos grupos G2, G3 e G4. O grupo G1 apenas relatou que as medidas mudam de acordo com as linhas usadas.

Com relação ao item b (APÊNDICE X), os grupos G1 e G2 observaram que quanto maior a circunferência a ser medida mais fácil será a manipulação do mesmo, enquanto os grupos G3 e G4 observaram as diferenças entre as medidas dos objetos.

O Acordo Social

Neste item, temos a intenção de verificar a capacidade dos grupos de fazerem acordos (APÊNDICE XI). Os grupos G1 e G4 observaram a relação medida do objeto e facilidade para manipulação, onde ambos concordam que objetos de maior circunferência são mais fáceis de serem manipulados e, consequentemente, medidos e, objetos de menor circunferência são mais difíceis de serem manipulados e, consequentemente, medidos.

Os grupos G2 e G3 observaram a relação medida do objeto. Para eles, quanto maior a circunferência, maior será a medida do comprimento.

A Dificuldade

Durante a tarefa percebi que todos os grupos apresentaram certa dificuldade para medir alguns objetos circulares com determinadas linhas (APÊNDICE XII). O trecho de áudio abaixo está relacionado à dificuldade de uma aluna ao medir um objeto utilizando a linha de costura.

Trecho do áudio_ 03: 20

Lor_ *Cara, não to conseguindo fazer com essa linha aqui. É muito ruim!*

A respeito do áudio acima, a estudante Lor estava medindo uma pequena tampa de remédio com o barbante grosso. Com relação aos objetos que possuem o menor diâmetro ao serem medidos, contornando-se com os barbantes mais grossos torna-se mais difícil. E se ao contrário, a linha for mais fina, é mais fácil medir o comprimento que contorna a circunferência.

Momento de Reflexão

Para finalizar a Tarefa 2, pensamos em algo que direcionasse os estudantes para uma reflexão conjunta. Encontra-se no APÊNDICE XIII as considerações por grupo.

No que diz respeito aos instrumentos utilizados para medir os objetos redondos, apenas o grupo G1 ressaltou a importância da organização dos mesmos, assim como destacou no texto a escolha dos objetos circulares a serem medidos. Percebemos no grupo G4 a organização para um trabalho em conjunto, onde as alunas deste grupo caminharam sempre juntas durante todo o processo empírico. O único grupo a declarar que utilizou de fato a lupa foi o G2. Sobre as descobertas, os grupos G2, G3 e G4 perceberam que a medida em que utilizavam linhas mais grossas a medida do comprimento dos objetos circulares também aumentava. Durante esta tarefa o grupo G1 não mencionou tal observação. Em relação a grossura das linhas, todos os grupos observaram que quantos mais fina for a linha pior será o seu manuseio e, quanto mais grossa for a linha, mais fácil será sua manipulação. Com relação ao tamanho do objeto redondo, os grupos disseram que quanto maior o objeto mais fácil será a sua manipulação.

Enquanto os estudantes redigiam suas descobertas, observações e conclusões, eis que uma discussão se inicia em meio a aula a partir de um pensamento que é externado:

Trecho do áudio_ 11:16

Mari_ *Caraca né, como é que a gente consegue entender o que a gente tá fazendo? Tipo assim, você passa a questão aqui, a gente lê e a gente entende o que tá fazendo*.

Prof_ *Desculpa! Não entendi, fala de novo.*

Mari_ *Como é que a gente consegue: a gente escreve, faz besteira e tá entendendo... pensa nisso, eu vou ficar maluca... rsrsr.*

Tor_ *Filósofa!*

Nick_ *Mas isso sou eu pensando como o ser humano existe*.

Mari_ *É mesmo*.

Nick_ *Como eu to pensando gente? Tipo, eu to fazendo um negócio agora, e como eu to fazendo?*

Mari_ *As vezes eu to no ônibus e penso.*

Nick_ *Como eu to no ônibus?*

Mari_ *Maior parada!*

Prof_ *Pensar na origem das coisas, raízes das coisas, não é? É o que nós estamos fazendo aqui agora.*

Mari_ *É maior loucura!*

Os variados diálogos entre os estudantes acerca das medidas dos objetos redondos, a tarefa e o suporte do professor pesquisador não propiciaram apenas a formação de um cenário de pesquisa, mas também de um ambiente para aprendizagem e discussões em torno das descobertas e dos "porquês" do dia a dia. O trecho de áudio acima caracteriza bem essa discussão a partir do pensamento da aluna Mari a respeito da origem das coisas, como o simples fato de fazer ou pensar. Acreditamos que essa característica da tarefa em relação a justificar e descrever paulatinamente os processos realizados possa ter contribuído para tal discussão e reflexão sobre a origem das coisas.

Martins (2000) afirma que a linguagem do meio ambiente, que reflete uma forma de perceber o mundo real num dado tempo e espaço, aponta o modo pelo qual a criança apreende as circunstâncias em que vive, cumprindo uma dupla função: de um lado, permite a comunicação, organiza e medeia a conduta; de outro, expressa o pensamento e ressalta importância reguladora dos fatores culturais existentes nas relações sociais. De acordo com o autor, quando a linguagem se dirige aos outros, o pensamento torna-se passível de partilha. Essa acessibilidade do pensamento manifesta-se na e pela linguagem, expressando, ao mesmo tempo, muitos outros aspectos da personalidade do sujeito.

No que tange a escrita e linguagem matemática, observamos o simbolismo adotado pelo grupo G3 para expressar as linhas que, segundo eles, favorecem medidas maiores para o contorno dos objetos. Nesse sentido, em uma das competências da BNCC, os alunos devem enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático- utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens: gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escito na língua materna. De acordo com Santaella (1988), a língua materna é a principal forma de linguagem humana, mas não é única, uma vez que somos seres simbólicos e fazemos uso de linguagens complexas e plurais como imagens, gráficos, sinais, sons, gestos, expressões, cheiros, entre muitos outros.

As experiências vividas na Tarefa 2, provavelmente, proporcionaram aos alunos novos horizontes com relação ao significado de medida. Observamos que as dificuldades encontradas deram espaços para novas descobertas e vivências a partir do trabalho em grupo e multidiálogos.

5.2.4 TAREFA 3 – Circunferência e seu Diâmetro: uma comparação Pirada

Para esta aula, na qual o objetivo é mostrar a origem do numero irracional π, pretendemos proporcionar aos nossos estudantes experiências não tão comuns cotidianamente nas salas de aula de matemática. É importante lembrar que os estudantes participantes desta pesquisa puderam vivenciar momentos importantes no que diz respeito às medidas de objetos redondos na aula anterior. A nossa perspectiva é que a tarefa elaborada, as discussões dos grupos participantes e o suporte do professor pesquisador para acender as possíveis reflexões intrínsecas ao tema da aula, origem do número π, possam colaborar para um cenário de pesquisa e, principalmente, para um ambiente de aprendizagem.

Objetivos e Etapas

Destacamos na Tarefa 3 os seguintes objetivos específicos: a) familiarizar os estudantes com os instrumentos para medição; b) verificar a origem do número irracional π a partir dos multidiálogos a respeito dos dados coletados.

A tarefa apresenta quatro etapas: a) escolha e organização dos instrumentos de medida; b) medição das circunferências e preenchimento da tabela; c) comparação e reflexão acerca dos valores das medidas tabeladas; d) reflexão final e conclusões.

1- Escolha uma das linhas e meça o comprimento da circunferência e o diâmetro e anote na tabela. Não esqueça de anotar na coluna o nome da circunferência.

Linha escolhida: ______________________

Circunferência	Comprimento da Circunferência	Comprimento do diâmetro	
1:			
2:			
3:			
4:			
5:			

a) Compare a medida da circunferência com a medida do diâmetro correspondente, o que observou?

b) Encontre a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro. Anote o resultado na quarta coluna. O valor é igual em todos os casos? Obs: **razão é a comparação existente entre dois valores de uma mesma grandeza.**

2- Repita o processo usando outra linha para medir as circunferências e complete a tabela. **Linha escolhida**: ______________________

Circunferência	Comprimento do Diâmetro	Comprimento da Circunferência	$\frac{Comprimento}{Diâmetro}$
1:			
2:			
3:			
4:			
5:			

a) Calcule a razão entre o comprimento da circunferência e diâmetro e complete a 4ª coluna. O valor é igual em todos os casos?
b) Compare as razões encontradas da circunferência A das tabelas 1 e 2, elas são iguais? E para a circunferência B? E para a circunferência C? E para a circunferência D? E para a circunferência E ? Explique sua resposta
c) Compare a sua resposta com a dos seus colegas e comente.

Quadro 15. Continuação – Roteiro da tarefa 3.

Para darmos início a tarefa, disponibilizei, para cada grupo, 5 circunferências de raios 1cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm e 7 cm, respectivamente denominadas por circunferências A, B, C, D e E. Pedi que cada grupo medisse e cortasse o pedaço de linha (linha de costura, barbante fino e barbante grosso) necessária para medir tais circunferências.

Materiais utilizados – Linha de costura, barbante fino, barbante grosso, régua, tesoura, lupa e algumas circunferências.

Dinâmica

Durante toda atividade os alunos trabalharam em grupos de, no máximo, quatro alunos. Desse modo, os grupos tiveram a liberdade para trocar ideias e experiências entre seus integrantes, contribuindo assim para a construção dos seus próprios conhecimentos. A duração da tarefa foi de 100 minutos.

Os grupos iniciaram as medidas das circunferências e anotaram os dados encontrados na tabela (APÊNDICE XIV). Com as experiências vividas na aula anterior, percebemos que os alunos conseguiram organizar os instrumentos de medida com mais eficácia, além de mostrar maiores habilidades e familiaridade com os mesmos. Ao medir as circunferências, observamos a dificuldade de todos os grupos em sobrepor a linha utilizada com perfeição sobre a circunferência. Tal dificuldade pode estar associada a falta de flexibilidade de algumas linhas quanto a sobreposição em linhas curvilíneas. Já em relação à medida do diâmetro (segmento de reta), os estudantes não tiveram grandes dificuldades.

Com relação à escolha da ordem das circunferências na tabela, observamos que os grupos G1, G2 e G3 foram conservadores e utilizaram a própria ordem alfabética enquanto o grupo G4 escolheu aleatoriamente sua sequência de circunferências. Com a experiência da aula anterior onde todos os grupos foram unanimes quanto ao uso da linha mais grossa ser mais fácil para medir, percebemos que esse foi o critério para a escolha da linha utilizada pelos grupos G1, G3 e G4. Sobre as medições, nos chamou a atenção à coincidência ou insistência do grupo G2 ao citar números inteiros em relação ao comprimento das circunferências medidas.

A respeito da comparação da medida da circunferência com a medida do diâmetro, os grupos observaram que o comprimento do diâmetro e o comprimento da circunferência são proporcionais. Para eles, quanto maior o comprimento da circunferência maior será o comprimento do diâmetro (APÊNDICE XV). Os mesmos afirmam que o comprimento da circunferência é sempre maior que o comprimento do diâmetro.

Sobre a última percepção dos grupos supracitada, perguntei aos grupos se eles conseguiam perceber alguma regularidade sobre essas medidas, mas nenhum dos grupos deu retorno a respeito do assunto.

No que diz respeito à razão entre o comprimento da circunferência e o seu respectivo diâmetro (APÊNDICE XVI), os grupos relataram que os valores não são iguais. O grupo G1 observou que as razões encontradas nas circunferências A e E assumem o mesmo valor (3,19). Os grupos G2 e G4 perceberam que a parte inteira do número encontrado para a razão é sempre a mesma, onde o grupo G4 especifica este como 3. O grupo G3 fez uma conexão com o ensino tradicional e percebeu que tais valores encontrados se aproximam do que eles aprenderam sobre o número irracional $\pi = 3{,}14$.

Repetindo o Processo

Após finalizarem a primeira experiência na atividade, os grupos repetiram o processo dando continuidade a tarefa. Com uma linha de espessura diferente, os grupos novamente realizaram as medidas das circunferências e anotaram os dados encontrados na tabela (APÊNDICE XVII).

Em relação à escolha do material de medida escolhido, percebemos que os grupos G1, G3 e G4 escolheram a linha mais grossa que tinham a disposição. Vale lembrar que esses mesmos grupos escolheram, no item anterior, o barbante grosso como um dos materiais para as medições. De fato, esses grupos seguiram firmes sobre suas respectivas ideias de que a linha mais grossa facilita a medição de objetos redondos. Já o grupo G2 optou pelas linhas mais finas para a execução desta tarefa. Observamos que durante as medições os estudantes ainda se deparavam com um certo desconforto ao medir as circunferências com as linhas mas, que de certa forma, esse desconforto foi dando espaço a confiança e a familiaridade com os instrumentos de medição favorecendo a um ambiente de aprendizagem sem medo das incertezas que os assolavam em um primeiro momento.

Com relação ao cálculo da razão entre o comprimento da circunferência e seu respectivo diâmetro, seguem as considerações dos grupos:

GRUPOS	RESPOSTAS
G1 TOR LOR	*Não. A parte inteira é sempre 3. Observamos que a primeira casa decimal das circunferências B, C e E, elas resultam em 1.*
G2 NICK KINHO	*Não, o valor não são todos iguais, mas a parte inteira é sempre três e as circunferências D e E dividindo o comprimento pelo diâmetro deu o mesmo valor.*
G3 BIEL PEPI LAN	*Não. O valor também se aproxima do valor de π (3,14).*
G4 NINHA PAMY LANE	*Não, porém percebemos que as letras C e E são os mesmos resultados.*

Quadro 16 – Transcrição tarefa 3.

De um modo geral, os grupos responderam que os valores das razões encontradas não são iguais em todos os casos. Vale ressaltar que os grupos mantiveram, na tabela 2, a mesma ordem de escolha das suas circunferências. Observamos algumas percepções interessantes dos grupos a respeito da análise da tabela: o grupo G1 observou que a parte inteira das razões encontradas é sempre 3 e que em três circunferências (B, C e E) a primeira casa decimal resulta em 1. Assim como o grupo G1, o grupo G2 também percebeu que a parte inteira é sempre 3. Esse mesmo grupo relatou que as razões encontradas para as circunferências D e E eram as mesmas. O grupo G3 destaca que os valores encontrados na tabela são próximos de $\pi = 3,14$. Assim como na tabela anterior, o grupo G3 faz uma análise que nos faz refletir como é forte a ligação do $\pi = 3,14$ com o ensino tradicional e conservador da sala de aula. Em nenhum momento este grupo pensou nas regularidades que ali poderiam haver. O grupo G4 apenas relata que observaram que as razões encontradas para as circunferências C e E são iguais (3,18).

Comparando as Razões

Ao analisarmos as respostas dos grupos (APÊNDICE XVIII), percebemos que as razões encontradas a partir de uma determinada circunferência nas tabelas 1 e 2 apresentam valores diferentes. Cruzando os dados de um modo aleatório, o grupo G1 percebeu que a razão D da tabela 1 é igual a razão C da tabela 2. Dessa mesma forma, o grupo G2 relata que a razão E encontrada na tabela 1 é igual à razão da circunferência B encontrada na tabela 2. Ao analisar a tabela 2, esse mesmo grupo percebe que as razões encontradas para as circunferências D e E apresentam os mesmos valores (3,11). O grupo G3 generaliza os dados encontrados nas duas tabelas e afirmam que tais razões se aproximam de 3,14. Também relatam que a razão encontrada na circunferência B da tabela 2 é igual a razão encontrada na circunferência E da tabela 1 (3,19). O grupo G4 observou que na tabela 2 as razões encontradas para as circunferências C e E apresentavam os mesmos valores.

De um modo geral os grupos optaram por fazer comparações de medidas das razões encontradas nas tabelas 1 e 2, onde todos observaram certas características importantes, mas não se preocuparam em justificar as mesmas. Vale reforçar que o comentário do grupo G3 é precedido de um conceito supostamente formado em relação ao número π, aprendido provavelmente na sala de aula. Acreditamos que "essa verdade absoluta" em torno do número irracional π possa ter escondido novos horizontes do grupo G3 no que diz respeito à construção desse número de maneira empírica.

Dialogando para comentar: mais uma reflexão

Para finalizar a atividade, cada grupo deve descrever um comentário refletindo sobre todo o percurso feito durante a tarefa (APÊNDICE XIX).

Os grupos G1 e G2 relatam que medir circunferências utilizando linhas é algo complicado. Esse fato se deve a dificuldade da sobreposição da linha em relação à circunferência. O grupo G1 observou que encontrou o valor de π na circunferência E da tabela 2. Já o grupo G2 relatou que em nenhum momento encontrou o valor de π e justifica a falta de êxito afirmando que as linhas utilizadas (barbante e linha de costura) não favoreceram a uma medição fidedigna das circunferências (mais uma vez a linha sendo a vilã). O grupo G3 comenta que o barbante mais grosso é a linha mais fácil de usar e que os valores encontrados nas razões da tabela 2 são menores que os encontrados na tabela 1. Esse mesmo comentário se deu no grupo G4, onde o mesmo afirma a dificuldade para medir a circunferência corretamente.

É importante ressaltar que quanto maior for o raio, menor será a curvatura do círculo, tornando os arcos de circunferências cada vez mais próximos de um segmento de reta, facilitando assim o processo de colocar a linha sobre a circunferência.

Os diálogos entre os grupos formaram um pilar de sustentação para a construção do pensamento e o desenvolvimento do cognitivo desses estudantes. Para Hoyles (apud Lappan e Schram, 1985), a função cognitiva está ligada a possibilidade da linguagem desenvolver a estruturação e a regulação do pensamento, principalmente quando o aluno está em um ambiente de cooperação e interação. A respeito de ambientes de aprendizagem, Skovsmose (2000) chama de "cenário para investigação" um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação, para ele, um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações. Quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo.

Apesar da familiarização dos estudantes em relação aos instrumentos de medição utilizados na tarefa, percebemos o quanto eles ainda se sentem inseguros para medir circunferências com linhas finas ou mais grossas, ainda mais quando é necessário fazer medições a partir da sobreposição de determinada linha em relação ao contorno de uma circunferência.

Técnicas de medição fazem parte do repertório geométrico da aula de matemática, mas nem sempre são utilizados. Muitas vezes ficamos presos a fórmulas, acreditando que somente esse recurso possa ser suficiente, mas do ponto de vista da matemática crítica, ele não é o suficiente. Consta no documento da Base Nacional Comum Curricular que a geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume e nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras, é necessário estimular o aluno na construção do pensamento geométrico.

De fato, a medição do contorno de circunferências a partir de linhas ajuda na criticidade dos alunos quanto ao estudo da geometria, desenvolvendo assim o pensamento geométrico dos estudantes.

5.2.5 TAREFA 4 – Matemágica: uma viagem de ouro

Com o objetivo de sensibilizar o olhar e promover maior envolvimento dos estudantes na proposta de descobrir novas conexões entre a matemática, ciências e as artes e estimular novas práticas escolares de leitura e até mesmo escrita, de modo a promover discussões, propomos aos nossos estudantes que assistissem ao filme “Donald no país da Matemágica” para que possam refletir a respeito da história de alguns números e suas respectivas relações com a geometria. Vale lembrar que na última aula, os estudantes puderam vivenciar a construção do número irracional π através de procedimentos que os fizessem refletir acerca de tal construção, possibilitando uma ressignificação deste número.

Objetivos e Etapas

Nesta tarefa temos os seguintes objetivos específicos: a) perceber a relação número/geometria; b) verificar a origem e história do número φ, relacionando-o com as formas geométricas em algumas situações cotidianas.

A tarefa apresenta duas etapas: a) assistir o filme; b) conversar e refletir, em grupo, sobre as percepções dos estudantes acerca do filme.

Dinâmica

O filme durou, aproximadamente, 28 minutos. Após o término do filme, eles foram divididos em grupos de, no máximo, 4 alunos para que pudessem discutir e trocar ideias acerca do que perceberam. A atividade durou 50 minutos.

Quadro 17 – Roteiro da tarefa 4.

1- A matemática se faz presente em nossas vidas nos mínimos detalhes, através de contagens, medidas, formas geométricas, entre outros. Para verificarmos melhor essa ideia, assistiremos ao filme “Donald no país da Matemágica”.

   a) O que relacionado à matemática chamou a sua atenção? Por quê?
   b) O que viram de novidade matemática?
   c) O que já sabiam?

Ao iniciarmos o filme, orientamos os nossos estudantes para que fizessem silêncio e, consequentemente, não atrapalhasse o colega quanto às percepções do filme.

O que chamou a atenção?

De acordo com o grupo G1 (TOR, LOR e VICK) - *Tudo, porque são um monte de formas geométricas.* Já para o grupo G2 (NICK e KINHO) - *Em relação a matemática chamou nossa atenção a música. Porque tem relação com a geometria na partição da música.* Para o grupo G3 (BIEL, LAN e PEPI) - *A sinuca nos chamou a atenção por que trabalha com diversos tipos de matérias da matemática.* De acordo com o grupo G4 (NINHA, PAMY e LANE) - *A sinuca porque é tudo muito calculado e usa conteúdos matemáticos como a geometria.*

Observamos em cada grupo os encantos que o filme causou. No grupo G1 as formas geométricas foi o elemento matemático que mais chamou atenção. O que mais se destacou para os estudantes do grupo G2 foi a relação música e matemática. Vale ressaltar que esses estudantes tem aulas de música, designada no currículo como arte. Provavelmente o termo partição esteja ligado a teoria aprendida nas aulas de música. Já os grupos G3 e G4 se encantaram com a matemática aplicada a mesa de sinuca, desde as operações fracionárias a geometria.

A mesa de sinuca e a música ganharam um destaque especial nessa aula de matemática. Esse fato se deve graças ao cotidiano dos nossos estudantes que, por sua vez, tem aulas de música semanalmente e tem acesso com facilidade a mesas de sinuca na região onde residem. Conhecimentos matemáticos são fundamentais para a compreensão e a atuação no mundo, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio lógico e crítico, além de possibilitar o estímulo a investigação.

Novidade Matemática

De maneira unânime, os grupos relataram que o retângulo áureo (regra de ouro) foi uma novidade quanto ao conhecimento matemático.

G1 (TOR, LOR e VICK) - *Nós vimos de novidade o retângulo áureo e a relação da matemática com a música.*

G2 (NICK e KINHO) - *Vimos os ângulos, porque percebemos que usando os ângulos ajuda a ganhar na sinuca. Vimos de novidade o retângulo áureo por que facilita a medir cada ângulo da figura.*

G3 (BIEL, LAN e PEPI) - *Vimos que diversos jogos de tabuleiro são trabalhados com cálculos e que o pentagrama e a regra de ouro é uma novidade para a gente.*

G4 (NINHA, PAMY e LANE) - *Vimos de novidade a regra de ouro.*

O grupo G1 ainda destaca a relação da música com a matemática como algo novo. O grupo G2, ainda lisonjeado com a matemática da sinuca, aponta os ângulos utilizados na sinuca como uma novidade em suas vidas. O grupo G3 percebe a importância dos cálculos matemáticos em alguns jogos de tabuleiro. De um modo geral, observamos que foi a partir da geometria que os estudantes puderam relacionar o conhecimento matemático aplicado a algumas coisas do cotidiano como a música, jogos de tabuleiro, entre outros. Segundo Canavarro (2011), os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas e o raciocínio matemático.

Acreditamos que a geometria, neste caso, tenha contribuído o suficiente para que os estudantes pudessem enxergar novos horizontes.

Bagagens de Conhecimento (O que já se sabia)

Como na aula anterior os estudantes participaram de uma aula a respeito da construção do número π, já era de se esperar que os grupos de fato relatassem que tal número já era conhecido.

G1 (TOR, LOR e VICK) - *O número Pi, ângulos, etc.*

G2 (NICK e KINHO) - *Número Pi, conhecíamos os ângulos de uma maneira geral, os números e o pentagrama.*

G3 (BIEL, LAN e PEPI) - *Sabíamos que alguns jogos são trabalhados com cálculos de matemática e também conhecemos o Pi (3,14).*

G4 (NINHA, PAMY e LANE) - *Nós já sabíamos: teorema de Pitágoras, Pi e geometria.*

Após analisarmos os registros escritos pelos grupos, confirmamos que a geometria é uma velha conhecida dos nossos alunos, mas que ainda precisa se fazer mais presente na vida desses estudantes de maneira viva e significativa na sala de aula de matemática.

5.2.6 TAREFA 5 – Número Divino

Após nossos estudantes assistirem e refletirem acerca do filme "Donald no país da Matemágica", onde tiveram a oportunidade de conhecer um pouco mais sobre a história de alguns números e algumas de suas aplicações cotidianas, iremos propor, nessa aula, a medição de algumas partes do corpo humano a fim de compará-las e verificar a existência de um número muito próximo do número φ existente em algumas situações do dia a dia.

Objetivos e Etapas

Propiciar momentos em que os estudantes possam experimentar novas experiências engrandecem não tão somente o conhecimento matemático dos alunos, mas também ao crescimento pessoal deste para lidar com algumas situações do dia a dia. Destacamos na Tarefa 5 os seguintes objetivos específicos: a) familiarizar os estudantes com os instrumentos de medida; b) medir diferentes partes do corpo humano; c) comparar as medidas encontradas entre si de forma a encontrar a razão entre elas.

A tarefa apresenta quatro etapas: a) escolha do colega a ser medido e organização do instrumento de medida; b) medição e preenchimento da tabela; c) comparação e reflexão acerca dos valores das medidas tabeladas; d) reflexão final e conclusões.

1- Com a ajuda de seus colegas de grupo e uma fita métrica, preencha a tabela abaixo. Será necessário escolher um integrante do grupo para ser medido pelos demais. Lembre-se, a precisão da medida é muito importante.

Nome do aluno: ____

Medida 1 (M_1)	Medida 2 (M_2)	M_1 / M_2
Distância entre a ponta do nariz e o queixo =	Distância entre a linha dos olhos e a ponta do nariz =	
Distância entre o umbigo e o chão =	Distância do topo da cabeça até o umbigo =	
Distância do ombro a ponta do dedo =	Distância do cotovelo a ponta do dedo =	
Tamanho do dedo =	Distância da dobra central do dedo até a ponta =	

a) Compare a Medida 1 com a Medida 2, o que observou?
b) Observe os valores encontrados para as razões M_1 / M_2 da 3ª coluna. O valor é igual em todos os casos?

2- Repita o processo medindo outro integrante do grupo e complete a tabela.

Nome do aluno: ____		
Medida 1 (M_1)	Medida 2 (M_2)	M_1 / M_2
Distância entre a ponta do nariz e o queixo =	Distância entre a linha dos olhos e a ponta do nariz =	
Distância entre o umbigo e o chão =	Distância do topo da cabeça até o umbigo =	
Distância do ombro a ponta do dedo =	Distância do cotovelo a ponta do dedo =	
Tamanho do dedo =	Distância da dobra central do dedo até a ponta =	

a) Compare a Medida 1 com a Medida 2, o que observou?
b) Observe os valores encontrados para as razões M_1 / M_2 da 3ª coluna. O valor é igual em todos os casos?
c) Compare as razões encontradas nas tabelas 1 e 2, elas são iguais? Explique a sua resposta.
d) O número irracional fi, oriundo do pentágono regular, possui valor φ = 1,618033988749894848... . Ele também é conhecido como número áureo ou número de ouro. Compare as razões preenchidas nas tabelas acima dos corpos de alguns integrantes do grupo com o número áureo. O que observou?

Quadro 18. Continuação – Roteiro da tarefa 5.

Para iniciarmos a tarefa, disponibilizamos, para cada grupo, uma fita métrica e destaquei a importância da precisão das medidas (jamais desprezando os milímetros). Também foram orientados a utilizarem a calculadora (comum ou do celular) para encontrar as razões entre as medidas propostas.

Dinâmica

Trabalhando em grupos, os estudantes iniciaram as medidas do corpo de seu colega de grupo e anotaram os dados encontrados na tabela (APÊNDICE XX). Por se tratar de medidas lineares, percebemos que os nossos estudantes não tiveram grandes dificuldades para medirem algumas partes do corpo do colega de grupo. Por coincidência ou insistência, observamos nas tabelas dos quatro grupos uma grande quantidade de medidas inteiras. Esse fato pode estar atrelado à falta de familiaridade e sensibilidade desses estudantes em trabalhar com medidas e manipular instrumentos de medição. Outra possibilidade seria a ideia associada ao número natural tão comum cotidianamente.

Comparando medidas de partes do corpo humano

De um modo geral, os grupos perceberam que os dados da Medida 1 (M_1) são maiores que os dados da Medida 2 (M_2).

G1 (TOR, LOR e VICK) - *As medidas da coluna 1 são maiores do que a coluna 2.*

G2 (NICK e KINHO) - *Os valores da medida 1 é maior que a medida 2.*

G3 (BIEL, LAN e PEPI) - *Observei que os números obtiveram uma recaída e observamos também que os valores se aproximam do número Fi (1,61).*

G4 (NINHA, PAMY e LANE) - *Todos os resultados da medida 1 são maiores que os da medida 2.*

No que diz respeito à comparação, sentimos falta nas respostas dos grupos de quantas vezes os dados da Medida 1 (M_1) são maiores que os dados da Medida 2 (M_2). O grupo G3 percebe, um suas experimentações, que as razões encontradas se aproximam de φ.

Referente à razão M_1 / M_2, os grupos afirmam não ter encontrado o mesmo resultado em todos os casos. Também ressaltam que a parte inteira encontrada é sempre 1.

G1 (TOR, LOR e VICK) - *Não, observamos que o valor inteiro é o mesmo valor (1). Também observamos que em três casos a primeira casa decimal é 6.*

G2 (NICK e KINHO) - *Não é igual em todos os casos, mas a parte inteira sempre dá 1 e observamos que o número 6 da parte decimal se repetiu em três casos.*

G3 (BIEL, LAN e PEPI) - *Não. Porque os valores são diferentes e o valor inteiro é igual em todos os casos.*

G4 (NINHA, PAMY e LANE) - *Não, mas o último resultado M_1 / M_2 tem resultado inferior aos outros, a parte inteira é sempre 1.*

Os grupos G1 e G2 relatam que, em três casos, a primeira casa decimal foi 6). De um modo geral, os grupos caminharam em busca de regularidades numéricas e, de certa forma, eles puderam enxergar algumas coisas que, até então, podem ser coincidências ou não, ou seja, ainda há uma desconfiança sobre esse princípio de regularidade encontrada.

Repetindo o Processo

Os grupos iniciaram as medidas do corpo de um novo colega de grupo e anotaram os dados encontrados na tabela (APÊNDICE XXI). Acreditamos que o novo processo possa dar crédito a algumas ideias formalizadas oriundas da primeira experimentação.

Com exceção do grupo G1, os demais grupos abandonaram a ideia de "medida inteira" e se sentiram mais a vontade para verificar os milímetros nas medidas do corpo do colega de grupo a ser medido, atendendo ao nosso pedido e orientação quanto à precisão nas medidas. Vemos com bons olhos esse pequeno detalhe, pois acreditamos que os estudantes sentiram-se mais seguros e confiantes ao longo dos momentos da tarefa.

Quando compararam os valores da Medida 1 (M_1) com os valores da Medida 2 (M_2) neste novo processo, os grupos G1, G2 e G4 perceberam que os resultados da Medida 1 são maiores que os resultados da Medida 2.

G1 (TOR, LOR e VICK) - *Que a medida 1 é maior que a medida 2.*

G2 (NICK e KINHO) - *Observamos que a medida 1 é maior que a medida 2 e que 2 medidas da coluna 1 são iguais.*

G3 (BIEL, LAN e PEPI) - *Observamos que obtiveram resultados quase iguais.*

G4 (NINHA, PAMY e LANE) - *Todos os resultados da medida 1 são maiores do que os da medida 2.*

O grupo G3 provavelmente não se atentou a pergunta e analisou a 3ª coluna M_1 / M_2, onde observaram que as razões tinham valores bem parecidos.

Em relação à razão M_1 / M_2, os grupos novamente afirmam não ter encontrado o mesmo resultado em todos os casos. Vale lembrar que estamos em um experimento que, por ordem da natureza ou não, envolvem medidas que, quando comparadas, podem tender a φ.

G1 (TOR, LOR e VICK) - *Não, observamos que o valor inteiro é o mesmo valor (1).*

G2 (NICK e KINHO) - *Não, mas a parte inteira sempre deu um e em dois casos a segunda casa decimal deu 6.*

G3 (BIEL, LAN e PEPI) - *Não. Porque os valores são diferentes e também se aproximam do valor de Fi (1,618 ...).*

G4 (NINHA, PAMY e LANE) - *Não. Porém os inteiros são sempre 1 e três desses resultados são maiores do que um resultado. Percebemos que em três casos a primeira casa decimal é 6.*

Os grupos G1, G2 e G4 ressaltam que a parte inteira encontrada é sempre 1. Seguindo as observações, os grupos G2 e G4 relatam que em alguns casos a primeira casa decimal é 6. O grupo G3 afirma ter percebido que os valores encontrado em sua tabela estão próximos de φ. Apesar do φ não ser tão comum nas salas de aula de matemática, nos parece que os integrantes do grupo G3 estão bem antenados quanto a este número, mesmo que de maneira superficial, pronta e acabada.

Ao compararem as razões M_1 / M_2 encontradas nas tabelas 1 e 2 (APÊNDICE XXII), os grupos relatam que os valores das razões encontrados nas tabelas 1 e 2 não são iguais, mas afirmam que em todos os casos a parte inteira é sempre igual a 1. O grupo G1 observou que as medidas M_1 das tabelas 1 e 2 são sempre maiores que as medidas M_2 das tabelas 1 e 2. Já o grupo G2 percebeu que em quatro casos a primeira casa decimal da razão foi 6. O grupo G4 relata que os valores encontrados na tabela 1 são menores que os encontrados na tabela 2. Analisando o comentário do grupo G4, podemos inferir que para as medidas M_1 e M_2 isso ocorreu, haja visto que a estudante Pammy tem medidas menores que a estudante Ninha. Com relação a 3ª coluna (M_1/M_2) nada podemos afirmar, pois independente das medidas dos alunos existe uma possível tendência para o valor dessa razão. Sabemos também que isso não é uma regra, considerando que não fomos feitos em um “torno mecânico”.

Um número muito próximo de φ

De maneira unânime, os grupos observaram que os valores encontrados para as razões M_1/M_2 são bem próximos do número de ouro. Eles justificam essa aproximação a partir da parte inteira encontrada (1) e por alguns casos encontrados para a 1ª casa decimal (6). Nesse sentido, o grupo G4 nos chama atenção, pois usam um termo bem expressivo para externa seus pensamentos (APÊNDICE XXIII):

> G4: “*Percebemos uma aproximação muito forte entre os números 1,6 oriundo do pentágono regular e o 1º resultado da 3ª coluna da segunda tabela*...”

A respeito da escrita matemática, para Powell e Bairral (2006) a escrita força os interlocutores a refletir, diretamente, sobre sua experiência matemática. Enquanto examinamos nossas produções, desenvolvemos nosso senso crítico. A escrita suporta atos de cognição e metacognição, ou seja, não apenas sobre a capacidade de aprender, mas também o reconhecimento de seus próprios processos cognitivos e a habilidade de controlar esses processos, monitorando, organizando, e modificando-os para realizar objetivos concretos. Concordando com Powell e Bairral, Smole (2001) afirma que tal produção seria uma maneira de promover a comunicação nas aulas de Matemática, pois, ao se comunicar matematicamente – inclusive mediante a utilização da escrita – os alunos têm a oportunidade para explorar, organizar e conectar seus pensamentos, novos conhecimentos e diferentes pontos de vista sobre um assunto.

Outro fato que nos chamou a atenção é a percepção e reflexão dos grupos G1 e G2 quanto as casas decimais de φ e das razões M_1/M_2. Ambos os grupos afirmam que o número φ possui infinitas casas decimais, enquanto as razões M_1/M_2 encontradas possuem uma quantidade finita de casas decimais. No campo geométrico, essa ideia de infinidade pode também estar relacionada com o filme "Donald no país da Matemágica", onde os estudantes puderam observar, na última aula, a infinidade de construções de retângulos áureos a partir de um retângulo áureo qualquer. De modo análogo, durante o mesmo filme vimos que, a partir de um pentagrama, podemos construir infinitos pentagramas. Acreditamos que essa relação finito/infinito observado pelos estudantes possa ser uma luz para a compreensão do número irracional quando aproximado para um número racional.

A Base Nacional Comum Curricular (2017) sugere que durante o processo da construção da noção de número, os alunos precisam desenvolver, entre outras, as ideias de aproximação, proporcionalidade, equivalência e ordem, noções fundamentais da Matemática. Para essa construção, é importante propor, por meio de situações significativas, sucessivas ampliações dos campos numéricos. No estudo desses campos numéricos, devem ser enfatizados registros, usos, significados e operações.

Os pares aproximado/não aproximado e finito/infinito apareceram com propriedade nesta tarefa, provocando em nossos alunos inquietações e, consequentemente, dando lugar a construção do pensamento e conhecimento, colaborando assim para uma experiência rica baseada na troca de experiências e na dialógica. Neste sentido, as competências gerais da Educação Básica, situadas nos PCN's e na BNCC, sugerem a utilização de diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

5.2.7 TAREFA 6 – Pentagrama e a Razão Áurea

Dando continuidade ao estudo do número de ouro (φ), foi proposto uma tarefa para encontrar o número de ouro a partir da comparação entre as diferentes medidas de elementos do pentagrama.

Objetivos e Etapas

Compreender, a partir do manuseio de triângulos semelhantes oriundos das diagonais do pentágono regular, a origem e a construção do número φ, considerando os multidiálogos e trocas de experiências. Destacamos na Tarefa 6 os seguintes objetivos específicos: a) familiarizar os estudantes com os materiais manipuláveis; b) verificar, a partir de sobreposições de triângulos, congruências, semelhanças e relações métricas entre os triângulos formados pelas diagonais do pentágono regular.

A tarefa apresenta cinco etapas: a) manipulação livre de triângulos e do pentágono regular; b) sobreposição de triângulos; c) comparação dos triângulos a fim de observar semelhanças; d) resolução da equação do 2º grau formada a partir da semelhança de triângulos; e) reflexão e discussão acerca do método matemático utilizado para obtenção do número áureo a partir das diagonais do pentágono regular.

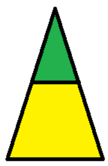
Quadro 19 – Roteiro da tarefa 6.

1- Vocês receberam um pentágono regular de lado 12 cm com suas diagonais formando um pentagrama e dois triângulos, um de cor verde e outro de cor amarela.

a) Verifique na figura onde podem ser encaixados os triângulos de cor verde. Justifique a sua resposta.

b) É possível encaixar o triângulo amarelo também? Justifique.

2- Observe a figura abaixo em que o triângulo verde foi sobreposto ao amarelo.



No triângulo verde chamaremos de x a medida do maior lado e de y a medida do menor lado. Como deve ser chamado o maior lado do triângulo amarelo em função de x e y (usando as letras x e y)? E o lado menor do triângulo amarelo, como deve ser chamado?

3- Agora, assista ao vídeo "O número de ouro no Pentagrama" em que GSMathred fez para encontrar a razão áurea $\frac{x}{y}$. Quais conteúdos aplicados no vídeo você conhece?

Para iniciarmos a tarefa, disponibilizamos, para cada grupo, um pentágono regular de lado 12 cm com suas respectivas diagonais e dois triângulos, um de cor verde e outro de cor amarela, retirados de um pentágono regular congruente ao pentágono regular recebido pelos estudantes.

Materiais utilizados – Triângulos de papel ofício, pentágono regular de papel ofício e vídeo retirado do youtube “O número de ouro no Pentagrama” de GSMathred.

Dinâmica

Durante toda atividade os alunos trabalharam em grupos de, no máximo, quatro alunos. Desse modo, os grupos tiveram a liberdade para trocar ideias e experiências entre seus integrantes, contribuindo assim para a construção do conhecimento. A duração da tarefa foi de 50 minutos.

Manipulando polígonos

Os grupos iniciaram a atividade explorando livremente os materiais disponibilizados. Em relação à verificação na figura onde poderiam ser encaixados os triângulos de cor verde, os grupos foram unânimes em encontrar as respostas corretas.

G1 (TOR e VICK) - *Nas cinco pontas da estrela (Pentagrama).*

G2 (NICK, KINHO e MARI) - *Nas 5 pontas do pentagrama.*

G3 (BIEL, LAN e PEPI) - *Podem ser encaixados nas cinco pontas do pentagrama.*

G4 (NINHA, PAMY e LANE) - *Se encaixa nas 5 pontas do pentagrama.*

De modo generalizado, eles foram objetivos quanto ao número de triângulos verdes que se encaixam com perfeição na região interior ao pentágono regular. Eles tiveram tal percepção ao sobrepor o triângulo verde em várias partes da região interna ao pentágono regular, onde os grupos detalham que tais triângulos verdes podem ser encaixados nas 5 pontas da estrela (pentagrama), o que nos sugere que a “ponta da estrela” tenha sido utilizado pelos grupos como referencial geométrico para localização dos triângulos internos ao pentágono regular que são congruentes ao triângulo verde.

Com relação à verificação na figura onde poderiam ser encaixados os triângulos de cor amarela, os estudantes utilizaram técnicas análogas a anterior (APÊNDICE XXIV). Os grupos utilizam a sobreposição de figuras para verificar quantos triângulos amarelos podem ser encaixados na região interna ao pentágono regular. Os quatro grupos afirmam que o triângulo amarelo pode ser encaixado sim e que tal situação ocorre em 5 maneiras distintas. Os grupos

G1 e G2 observaram que a base do triângulo amarelo coincide com o maior lado do triângulo verde, enquanto o grupo G4 afirma que o maior lado do triângulo amarelo sempre coincide com um dos lados do pentágono regular, o que nos sugere uma ideia de localização de triângulos internos do pentágono regular que são congruentes ao triângulo amarelo. O referencial geométrico (ponto geométrico), a sobreposição de figuras e a visualização geométrica formaram uma tríade fundamental para o bom andamento desta tarefa, colaborando para um cenário de discussões e trocas de conhecimento. Segundo Hoyles (apud Lappan e Schram, 1985), a função comunicativa está conectada, com a capacidade de o aluno, diante de determinadas situações, ser capaz de identificar os elementos importantes e de os relatar aos demais.

Comparando triângulos

Utilizando novamente técnicas geométricas de sobreposição de figuras no plano, os grupos observaram que o maior lado do triângulo amarelo deve ser chamado de $x + y$ e que seu lado menor deve ser chamado de x.

G1 (TOR e VICK) - *O maior lado do triângulo amarelo é $x + y$. E o menor lado deve ser chamado de x. O maior lado do triângulo amarelo é chamado $x + y$ e o menor lado é chamado de x.*

G3 (BIEL, LAN e PEPI) - *O maior lado do triângulo amarelo mede $x + y$ e o menor lado do triângulo amarelo mede x.*

G4 (NINHA, PAMY e LANE) - *O maior lado do triângulo amarelo mede $x + y$ e o menor lado mede x.*

Apesar de tal questão nos remeter ao pensamento da álgebra tradicional aprendida na sala de aula de matemática, é importante ressaltar que os estudantes encontraram tais resultados a partir de manipulações e observações das peças de figuras geométricas disponibilizadas para eles, utilizando técnicas de sobreposição de figuras planas e visualização geométrica.

Reflexão dos conteúdos aplicados para obtenção da razão áurea

De maneira unânime, os grupos destacam as equações do 2º grau e a semelhança de triângulos como conteúdos observados no vídeo ao qual eles conhecem (APÊNDICE XXV). Geralmente, as abordagens em livros didáticos referentes às congruências de triângulos e semelhanças de triângulos são baseadas em resolução de exercícios repetitivos do tipo “calcule o valor de x no triângulo”. Aqui, a nossa proposta foi trazer algo diferente, onde o aluno teria a chance de manipular materiais e discutir ideias com os colegas de grupo, desenvolvendo assim o raciocínio lógico e o pensamento matemático.

De acordo com Cunha, Oliveira e Ponte (1995), as atividades investigativas estimulam o envolvimento dos alunos e elas podem ser trabalhadas por alunos com nível de desenvolvimento diferente. Essas atividades potencializam o raciocínio matemático uma vez que envolve vários tópicos, proporciona oportunidades de explorar conceitos matemáticos e estimula professores a repensar aspectos de sua prática docente. Nesta tarefa, articulamos os campos geométrico e algébrico, sendo assim necessário para que os nossos estudantes pudessem fazer induções e conjecturas a fim de resolver problemas, bastante sugerido pelo PCN e BNCC.

Vale ressaltar que tais conteúdos contemplam o currículo do 9º ano do Ensino Fundamental de matemática e que os mesmos foram ensinados em sala de aula no 2º bimestre (maio a julho) deste ano.

5.2.8 TAREFA 7 – A construção do Retângulo Áureo

Na última aula, os estudantes vivenciaram, na prática, a experiência de obter o número de ouro a partir de sua origem, dando ênfase ao estudo geométrico dos triângulos formados pelas diagonais do pentágono regular (Pentagrama). Nesta aula, construiremos o retângulo áureo e a sua respectiva espiral áurea, utilizando régua e compasso.

Objetivos e Etapas

Proporcionar momentos em que os estudantes possam experimentar a construção do retângulo áureo e sua espiral áurea com régua e compasso. Destacamos na Tarefa 7 os seguintes objetivos específicos: a) familiarizar os estudantes com os instrumentos para medição e construção; b) vivenciar e compreender as etapas da construção do retângulo áureo e sua respectiva espiral áurea, em um ambiente colaborativo. A tarefa apresenta quatro etapas: a) medição da área de foto do seu respectivo Smartphone; b) construção do retângulo áureo na malha quadriculada; c) construção da espiral áurea na malha quadriculada; d) Construção do retângulo áureo e espiral áurea no acetato.

Quadro 20 – Roteiro da tarefa 7.

1- Meça o maior lado da área de fotografia do seu celular (Medida: _______________)   2- Meça o menor lado da área de fotografia do seu celular (Medida: _______________)   3- Você recebeu uma malha quadriculada, com quadrados medindo 1 cm de lado. Desenhe na malha quadriculada um retângulo áureo medindo 8 cm por 5 cm, seguindo as orientações passo a passo.   4- Com o auxílio do compasso, construa uma espiral áurea no retângulo seguindo as orientações passo a passo.   5- Você acabou de receber um pedaço de acetato. Construa o retângulo áureo e a espiral áurea no acetato a partir da sobreposição do acetato em relação ao retângulo áureo e espiral áurea construídos na malha quadriculada 8 cm por 5 cm. Para isso, você deverá usar canetinha permanente.

Para iniciarmos a tarefa, disponibilizamos, para cada aluno, uma malha quadriculada 1 cm x 1 cm, acetato, canetinha permanente, régua e compasso. Cada aluno utilizou o seu próprio Smartphone para a execução da mesma.

Materiais utilizados – Smartphone, malha quadriculada em papel ofício, acetato, canetinha permanente, régua e compasso.

Dinâmica

A atividade foi aplicada de maneira individual, mas orientamos nossos estudantes quanto ao espírito colaborativo da tarefa. Assim, eles tiveram liberdade para auxiliar e trocar informações e técnicas com os colegas de pesquisa. A duração desta atividade foi de 100 minutos.

Medindo a área de fotografia do Smartphone

Seria mais prático pedirmos para os nossos estudantes medirem a tela de seus respectivos Smartphones, porém alguns aparelhos possuem a área de fotografia menor que a tela. Para não corrermos riscos, foram medidas as áreas de fotografia dos Smartphones. Segue abaixo as medidas da área de fotografia dos Smartphones de cada estudante participante:

BIEL → Maior lado : *8,8 cm* Menor lado: *5,0 cm*

VICK → Maior lado : *11 cm* Menor lado: *6 cm*

LAN → Maior lado : *11,9 cm* Menor lado: *6,9 cm*

MARI → Maior lado : *9 cm* Menor lado: *7 cm*

NINHA → Maior lado : *8,2 cm* Menor lado: *6,2 cm*

PAMMY → Maior lado : *7,5 cm* Menor lado: *5,7 cm*

TOR → Maior lado : *12 cm* Menor lado: *7 cm*

Figura 29 – Estudantes medindo a área de fotografia de seus respectivos smartphones.

Ao longo das medições da área de fotografia de seus respectivos Smartphones, os estudantes não tiveram grandes dificuldades para tal, onde utilizaram a régua para verificar as medidas.

Construindo o retângulo áureo na malha quadriculada: seguindo o passo a passo

Pensamos na malha quadriculada pois tal material possibilita variadas construções em que se utilizam segmentos de reta. Para a execução desta questão, os estudantes utilizaram a régua, a canetinha colorida e uma folha anexa com o passo a passo da construção do retângulo áureo 8 cm x 5 cm.

Figura 30 – Estudantes construindo o retângulo áureo na malha quadriculada.

Não observamos dificuldades por parte dos estudantes para executarem esta etapa.

Construindo a espiral áurea na malha quadriculada: a hora do compasso

Para traçar a espiral áurea no retângulo áureo recém-construído, precisamos recorrer a um instrumento de construções geométricas muito importante, o compasso. De fato, foi notória a dificuldade da maioria dos estudantes com esse instrumento, onde foi perceptível tal falta de familiaridade com o compasso. Em seus cotidianos escolares, os estudantes fazem pouco uso desse importante instrumento de construções geométricas nas aulas de matemática, favorecendo a insegurança e instabilidade nos momentos em que se faz necessário seu uso.

Figura 31 – Estudantes construindo a espiral áurea na malha quadriculada.

Apesar das dificuldades, os estudantes foram orientados e conseguiram construir com o auxílio do compasso a sua respectiva espiral áurea.

Passando toda a construção para o acetato

Colaborando uns com os outros, os estudantes puderam passar o retângulo áureo e a espiral áurea desenhados na malha quadriculada para o acetato, sobrepondo o acetato transparente sobre o retângulo áureo construído.

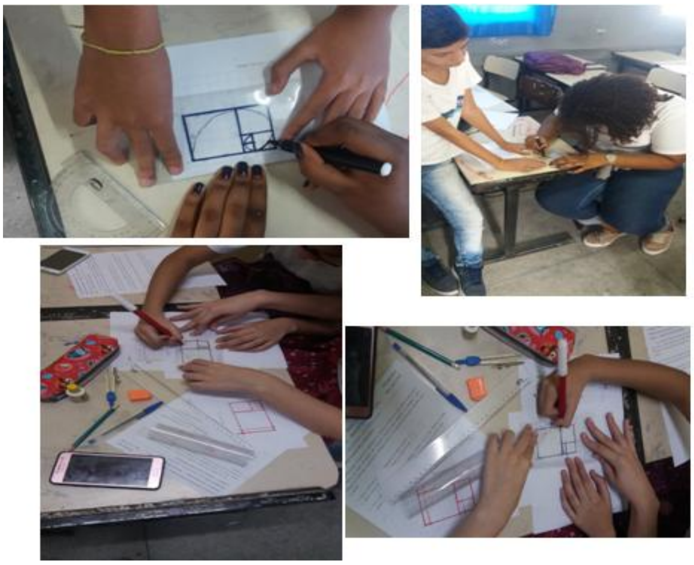


Figura 32 – Estudantes construindo o retângulo áureo e a espiral áurea no acetato.

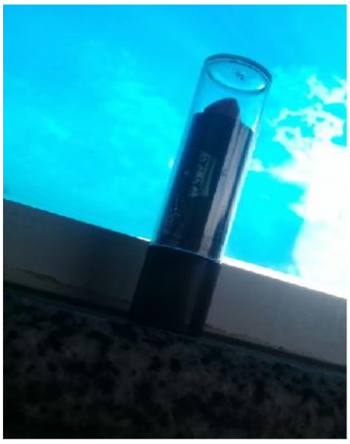
O objetivo da nossa pesquisa termina com esta atividade. Mas, em função da leitura de um trabalho[1] em que a autora propõe tirar fotos usando o retângulo áureo, propusemos aos estudantes um fechamento/avaliação em que eles deveriam "conectar o π com φ" tirando fotos, com seu respectivo Smartphone, de objetos redondos utilizando o retângulo áureo construído no acetato. As fotos foram encaminhadas por WhatsApp após o término da pesquisa.

A título de ilustração, seguem algumas das fotos encaminhadas.

FOTO TRADICIONAL	FOTO RETIRADA COM O RETÂNGULO ÁUREO
	
	
	

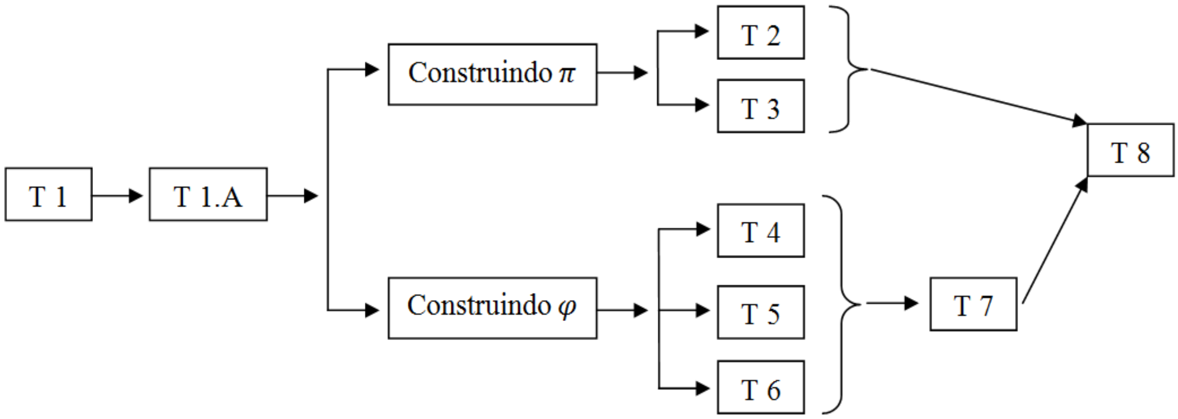
[1] O trabalho lido refere-se à dissertação de mestrado Razão Áurea e Números de Fibonacci: da teoria à prática através da fotografia, da autora Maria Isabel Afonso Melo, PUC-RJ/PROFMAT, Ano: 2017.




As fotografias acima retratam um pouco como a matemática se faz presente na vida dos estudantes de maneira suave e agradável, onde a beleza da geometria representada nas imagens podem traduzir significados aritméticos e algébricos. Essa sensibilidade só é capaz de transcender a barreira do conhecimento quando os atores (estudantes) são levados a experiências que possibilitem tocar, sentir, dialogar, refletir e formar uma ideia sólida em torno do que se quer descobrir. Em suas experiências, nossos estudantes relataram a beleza nas fotos, a harmonia entre os elementos fotografados e a proporcionalidade áurea. Também é importante ressaltar que, segundo alguns estudantes, foi uma surpresa estudar matemática a partir de fotografias.

Em um primeiro momento, após muitas leituras e reflexões, pensamos numa pesquisa com 5 tarefas previamente elaboradas, perfazendo um total de 3 ciclos. Vale lembrar que inicialmente havíamos pensado em desenvolver 5 tarefas (ver quadro 5 situado na página 95) mas, ao longo do processo, percebeu-se a necessidade de desenvolver outras, e que foram introduzidas na pesquisa, pois vimos o quanto nossos estudantes produziram e o retorno foi uma produção rica conforme descrito aqui capítulo 5. Assim, seguimos com um novo percurso de tarefas:



Quadro 21 – Esquema de tarefas aplicadas ao longo da pesquisa

É claro que essa modificação da estrutura das tarefas e criação de novas surgiu durante a pesquisa de campo, com potencialidade para proporcionar o enriquecimento conceitual dos nossos estudantes. Acreditamos que essa nova versão das tarefas tenha contribuído de maneira eficiente, auxiliando na promoção dos multidiálogos e trocas de conhecimento, além de amenizar as lacunas deixadas pelos atuais materiais didáticos no que tange os números irracionais.

A seguir apresentamos as considerações finais e suas reflexões em torno de nossa pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo dos números irracionais, em geral, vem sendo negligenciado pelos autores de livros textos, uma vez que quando abordam tais números reduzem a alguns poucos exemplos de $\sqrt{n}$, sendo *n* primo, mais especificamente $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ e o número π.

Nessa perspectiva, os alunos classificam os irracionais como sendo número de raiz não exata em contraposição aos racionais para quem estes são definidos como sendo número de raiz exata. Essa contraposição pode ter sido impulsionada a partir da etimologia das palavras racional e irracional, sugerindo uma negação. De um modo geral, eles definem número irracional como sendo um número não inteiro, número quebrado, número com infinitas casas decimais, números que não apresentam raízes exatas. Essas definições citadas pelos estudantes envolvidos na pesquisa não representam a verdadeira origem e conceito do número irracional, e sim a sua forma mecanizada, formando uma ideia pronta e acabada deste número.

Diante disso, na tarefa 1.A, foi solicitado que elaborasse um texto com todos os termos usados por eles para que pudéssemos obter mais informações, e o que se obteve foi a confirmação da definição dos dados.

A partir disso, nos propomos a abordar dois números irracionais, um conhecido, o π, e o outro irracional desconhecido, o φ. Sugerimos atividades que levem os estudantes à fazer medições, envolvendo a ideia de comparação, aproximação e referencial de modo que essas atividades possam ser introduzidas à partir do 8º ano, sempre levando em conta que podemos acrescentar mais e mais medições de tal forma estas cheguem cada vez mais próxima do valor de π. Para o caso do número φ pode-se desenvolver atividades em que os estudantes possam comparar diretamente as diagonais e os lados de diferentes pentágonos regulares. Outra sugestão é trabalhar com a sequência de Fibonacci.

Cabe ao professor criar ambientes onde o aluno possa um conceito trazido dos números e operações conhecidas, discutir ideias de aproximações em diferentes contextos, elaborar regras e formalizar suas descobertas.

Com relação ao estudo dos números irracionais, muito ainda há para ser feito. Nesta pesquisa, foi dado um passo neste sentido.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, M. A. R. de. **O tratado de álgebra de john wallis e suas relações com a álgebra britânica.** 2010. 123 f. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

ALMEIDA, José Joelson Pimentel de. **Gêneros do discurso como forma de produção de significados em aulas de matemática.** Campina Grande: Eduepb, 2016.

ARAÚJO, Sharlene Melanie Martins. **Fundamentos geométricos aplicados em design de marcas.** 2015. 104 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2015.

ASSIS, Adriana; FRADE, Cristina; GODINO, Juan D.. **Influência dos Padrões de Interação Didática no Desenvolvimento da Aprendizagem Matemática: análise de uma atividade exploratório-investigativa sobre sequências**. Bolema**,** Rio Claro, v. 27, n. 47, p.733-758, dez. 2013.

ARZARELLO, Ferdinando. **Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom**. Educational Studies in Mathematics. v. 70, n. 2. 2009, p. 97-109.

BALDINO. **Curso de história da matemática**. Brasília: Universidade de Brasília, 2000. Cap. 2. p. 3-56.

BARAB, S.; SQUIRE, K. Design-based research: putting a stake in the ground. **Journal of the Learning Sciences**, v. 13, n. 1, p. 1-14, 2004.

BAROODY, A. **Problem solving, reasoning, and communicating, k-8: Helping children think mathematically**. New York: Macmillan, 1993.

BELINI, M.M. **A razão áurea e a sequência de Fibonacci.** 86 p. Dissertação (PROFMAT). USP, São Paulo, 2015.

BERLINGOFF, W.P.; GOUVÊA, F.Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. Trad. ELZA GOMIDE, ELENA CASTRO. São Paulo: Edgard Blucher, 2008.

BIGODE, António J.L. **Matemática Atual - 8ª série**. São Paulo: Atual Editora, 1994.

BOFF, D.S. **A Construção dos Números Reais na Escola Básica**. 2006. 254 f. Dissertação de Mestrado Profissionalizante. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.

BONGIOVANNI, Vincenzo; WATANABE, Renate. **Pi acaba?** Revista do Professor de Matemática. Nº 19, p. 1-8. 1º semestre de 1991.

BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BOYER, C.B. MERZBACH, U. C. **História da matemática**. Trad. HELENA CASTRO. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**.(1997). Brasília: MEC/SEF.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio PCN + Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais** - Ciências Humanas e suas Tecnologias. Brasília/D.F, 2002a.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – BNCC** – Ensino Fundamental. Homologado em 2017.

BRAUMANN, Carlos A.. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem da matemática.** Centro de Investigação em Matemática e Aplicações, Évora, v. 9, n. 4, p.30-50, 2004.

BROCARDO, J. **Investigações na aula de matemática: A história da Rita**. In I. C. Lopes, J. Silva, P. Figueiredo (EDs.), Actas ProfMat. p. 155-161. Lisboa: APM, 2001.

CAJORI, F. **Uma história da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CANAVARRO, Ana Paula. **Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios**. Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Évora, v. 2, n. 13, p.11-18, dez. 2011.

CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 5. Ed. Portugal: Lisboa, 1970.

CASTRO, A. D. de; CARVALHO, A. P. de. **Ensinar a ensinar**: **didática para a escola fundamental e média**. São Paulo: Pioneira, 2001.

CASTRO, J. F. **Um estudo sobre a prática em um contexto de aulas investigativas de matemática.** 2004. 197 f. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2004.

CASTRO, Monica Rabello de; FRANT, Janete Bolite. **Modelo da Estratégia Argumentativa.** Curitiba: Ufpr, 2011.

CERRI, C**. Desvendando os Números Reais.** IME-USP, 2006**.**

COBB, P. et al. **Design Experiments in Educational Research**. Vol 32: pp. 9- 13. Disponível em: http://dixieching.wordpress.com/2010/08/14/designexperiments-in-educational-research-Cobb-et-al-2003/. Acesso em: 17 mar. 2018.

COELHO, M. P. F. **A multiplicação de números inteiros relativos no ‘Ábaco do Inteiros’: uma investigação com alunos do 7º ano de escolaridade**. 2005, 151 f. Dissertação de Mestrado - Universidade do Minho, Braga, 2005.

CONTADOR, P. R. M. **Matemática, uma breve história, volume 1**. São Paulo: Livraria da Física, 2008.

___________________. **Matemática: uma breve história**. 2.ed. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2012

CORBO, Olga. **Um estudo sobre os conhecimentos necessários ao professor de Matemática para a exploração de noções concernentes aos números irracionais na Educação Básica**. 2012, 313 f. Tese de Doutorado - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.

CUNHA, Helena; OLIVEIRA, Hélia; PONTE, João Pedro da. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Actas do Profmat**,** Lisboa, v. 3, n. 2, p.161-167, 1995.

CYRINO, M. C. da C. T. **Ensino exploratório e casos multimídia na formação de professores que ensinam matemática.** Recurso multimídia para a formação de professores que ensinam matemática. Ano: 2015.

DAMÁSIO, A. (1996) ***O Erro de Descartes:*** **emoção, razão e o cérebro humano**. São Paulo: Companhia das Letras.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática**. São Paulo: Summus, 1986.

D'AMORE, B. **Semiotics, Culture and Mathematical Thinking**. Número especial della rivista Relime (Cinvestav, México. DF, México), 2006. p. 177 – 196.

DEVLIN, K. **O Gene da Matemática.** Trad. Sérgio Moraes Rego. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GRANDE DICIONÁRIO DA LÍNGUA PORTUGUESA. **O acordo ortográfico**. Porto: porto editora, 2010.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 2ª edição, Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1997.

FERES, Solange Aparecida de Camargo; NACARATO, Adair Mendes. **O Pensamento Matemático Revelado no Discurso.** In: EMBRAPEM, 1., 2008, São Paulo. Anais... . São Paulo: Unesp, 2008. v. 1, p. 1 - 15. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/146-1-A-gt11_feres_ta.pdf>. Acesso em: 17 fev. 2018.

FIGUEIREDO, Djairo de Guedes de. **Números Irracionais e Transcendentes.** 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F.; CRISTOVÃO, E. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico.** Seminário Luso- brasileiro de investigações matemáticas no currículo e na formação de professores. Lisboa, 2005.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FISCHBEIN, E; JEHIAM, R; COHEN, D. **The Concepto f Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers**. Educational Studies in Mathematics. Jul 1995, v. 29, n. 1, p. 29-44

FONSECA, H., BRUNHEIRA, L., PONTE, J. P. **As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática**. Actas do ProfMat 99. Lisboa: APM, 1999.

GARBI, G. **A Rainha das Ciências**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2006.

GAROFALO, César Augusto. **A influência da proporção áurea nas artes gráficas.** 17º Congresso Nacional de Iniciação Científica. SEMESP, São Paulo, 2017.

GIL-PÈREZ, D. **Contribuición de la historia y de la filosofia de las ciencias al desarrollo de un modelo de enseñanza/aprendizaje como investigación. Enseñanza de las Ciencias**, 11(2), 197-212, 1993.

GUELLI, O. **Contando a História da Matemática: a invenção dos números**. 9. Ed. São Paulo: Ática, 1998.

HEBECHE, Luiz. **O mundo da consciência: ensaio a partir da filosofia da psicologia de L. Wittgenstein**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

HIEBERT, J. **Reflection and communication: Cognitive considerations in school Mathematics reform.** In W. Secada (Ed.), International Journal of Educational Research (pp. 439-456). Oxford: Pergamon Press, 1992.

HOYLES, C. **What is the point of group discussion?** Educational Studies in Mathematics, 2, 205-214, 1985. <http://www.esev.ipv.pt/servicos/upload%5Cma%5C267%5Cpadr%C3%B5es.pdf> Acesso em: 10 abr. 2018.

JUNIOR, Orlando da Silva. **Cálculo no Ensino Médio: Números Reais**. 2014. 87 f. Dissertação de Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Profmat - Sbm - Impa, Rio de Janeiro, 2014.

KARLSON, P. **A Magia dos Números**. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1961.

KINDEL, Dora Soraia. **Discutindo os racionais na 7ª série visando à noção de densidade**. 1998. 202 f. Dissertação de mestrado – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1998.

__________. **Um Ambiente Colaborativo a Distância: Licenciandos Dialogando sobre os Infinitos.** 2012. 280 f. Tese de Doutorado - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.

LAPA, João David Ferreira. **Variações tipológicas da planta circular na arquitetura ocidental.** 2015. 208 f. Dissertação de Mestrado – Universidade do Porto, Porto, 2015.

LIVIO, Mario. **Razão Áurea: a história de fi, um número surpreendente**, 6ª edução, Rio de Janeiro: Record, 2011.

LEVIATHAN, T. **Introducing real numbers: when and how?** Proceedings of ICME 10, 2004.

MAOR, E. e: **A história de um número**. 4. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MARTINS', João Carlos. **Vygotsky e o Papel das Interações Sociais na Sala de Aula: Reconhecer e Desvendar o Mundo**. In: C R E MARIO COVAS, 2000, São Paulo. Anais... . São Paulo: Puc/sp, 2000. p. 111 - 122. Disponível em: <http://www.crmariocovas.sp.gov.br/pdf/ideias_28_p111-122_c.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2018.

MATTA, Alfredo Eurico Rodrigues; SILVA, Francisca de Paula Santos da; BOAVENTURA, Edivaldo Machado. **Design-based research ou pesquisa de desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século xxi**. Revista da Faeeba, Salvador, v. 23, n. 42, p.23-37, jul. 2014.

MCKENNEY, S.; REEVES, T. **Conducting educational design research**. Abingdon: Routledge, 2012.

MELO, M. I. A. **Razão Áurea e Números de Fibonacci: da teoria à prática através da fotografia.** 2017, 80 f. Dissertação de Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Profmat – Sbm, PUC-RJ, Rio de Janeiro, 2017.

MENEZES, Luis. **Matemática, linguagem e comunicação**. Revista Milennium, Instituto Politécnico de Viseu, n. 20, outubro de 2000. Disponível em: HTTP://www.ipv.pt/millenium/20_ect3.htm. Acesso em: 28 abr. 2018.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (Vol. II)**. Ensino Básico, 2º Ciclo, Reforma Educativa, Direcção Geral dos ensinos Básico e Secundário. Lisboa: Imprensa Nacional - Casa da Moeda, 1991.

MLODINOW, L. **A Janela de Euclides: a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço.** Tradução de Enézio E. de Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial, 2010.

MOMETTI, A. L. **Reflexão sobre a Prática: Argumentos e Metáforas no discurso de um grupo de Professores de Cálculo.** 2007. 273 f. Tese de Doutorado – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

NACARATO, A; LOPES, C. **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

NCTM. **Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s**. 1980. Disponível em:<http://www.nctm.org/flipbooks/standards/agendaforaction/index.html> Acesso em: 12 abr. 2018.

OLIVEIRA, Edson de; FERREIRA, Thiago Emanuel. **O número de ouro e suas manifestações na natureza e na arte**. Revista Complexus – Instituto Superior De

Engenharia Arquitetura e Design – Ceunsp, Salto-Sp, Ano. 1, n. 2, P. 64-81, Setembro de 2010. Disponível em: www.engenho.info. Acesso em: 10 nov. 2017.

OLIVEIRA, H. M. **Actividades de investigação na aula de matemática: aspectos da prática do professor.** 1998. 271 f. Dissertação de Mestrado – Universidade de Lisboa, Lisboa, 1998.

OLIVEIRA, H; SEGURADO, I; CUNHA, H. **Histórias de investigações Matemáticas**. publicado pelo IIE, 1998.

OLIVEIRA, M.; SEGURADO, M. I.; PONTE, J. P. da. **Explorar, investigar e discutir na aula de matemática**. Actas do ProfMat (CD-ROM, p. 207-213. Lisboa: APM, 1996.

OLIVEIRA, João Milton de. **A Irracionalidade e Transcendência do Número π**. 2013. 43 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2013.

PALHARES, P. **Elementos de Matemática para professores do Ensino Básico.** Lisboa: LIDEL, 2004.

PALLATIERI, M; GRANDO, R. C. **A importância da videogravação enquanto instrumento de registro para o professor do pensamento matemático de crianças pequenas**. Horizontes, São Francisco, v. 21, n. 2, p. 21- 29, jul./dez. 2010.

PENTEADO, C. B. **Concepções do professor do Ensino Médio relativas à densidade dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade.** 2004. 247 f. Dissertação de Mestrado – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2004.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

POMMER, Wagner Marcelo. **A construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais**. 2012. 246 f. Tese de Doutorado – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2012.

PONTE, J. P.; MATOS, J. F. **Cognitive processes and social interaction in mathematical investigations**. In J. P. Ponte, J. F. Matos, 1992.

PONTE, J.P. et al. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática**. Quadrante, 7(2), 41-70, 1998.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigação Matemática na Sala de Aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

__________. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006

__________. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

__________. **Investigações matemáticas na Sala de Aula.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

POSSEBON, Ennio. **O modulor de Le Corbusier: forma, proporção e medida na arquitetura.** FMU –Revista de Cultura IMAE, ano 5, número 11, Janeiro/Junho 2004, páginas 68 a 76. Disponível em <http://www.fmu.br/pdf/p68a76.pdf> Acesso em: 07 abr. 2018.

POWELL, Arthur; BAIRRAL, Marcelo. **A escrita e o pensamento matemático**. São Paulo: Papirus Editora, 2006.

RIPOLL, C. C. **A construção dos números reais nos Ensinos Fundamental e Médio**. In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Salvador, 2004.

RIPOLL, C. C. **A construção dos números reais na Escola Básica.** Palestra ministrada no Estágio dos Professores Premiados da OBMEP, IMPA, 2007.

ROCHA, Rute Ribeiro Meireles. **Sensibilização para existência dos números irracionais.** 2018. 155 f. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2018.

ROONEY, Anne. **A história da matemática: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito**. São Paulo: M.books, 2012.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SANTAELLA, L. **O que é Semiótica**. 6. ed. São Paulo: Editora Brasiliense, 1988.

SANTOS, Gilberto Vieira dos. **Explorando a matemática do número φ, o número de ouro**. 2013. 73 p. Dissertação de Mestrado - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Profmat – Sbm, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2013.

SARAMAGO, Guilherme; CUNHA, Ana Maria Oliveira. **Ensinar Matemática: perspectivas teóricas e práticas dos professores**. In: Selva Guimarães Fonseca. (Org.). Ensino Fundamental - conteúdos, Metodologias e Práticas. Campinas/SP: Alínea, 2009, v. p. 93-114.

SIGNORELLI, S. F. **Um ambiente virtual para o ensino semipresencial de funções de uma variável real: design e análise**. 2007. 183 f. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007.

SILVA, Tomaz Tadeu da. **Identidades terminais**: as transformações na política da pedagogia e na pedagogia da política. Petrópolis: Vozes, 1996. SACRISTAN, J. Gimeno. **Poderes instáveis em educação**. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1999.

SILVA, Benedito Antonio da; PENTEADO, Cristina Berndt. **Fundamentos dos números reais: concepções de professores e viabilidade de início do estudo da densidade no ensino médio.** Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v. 11, n. 2, p.351-371, 2009. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/1860/1808>. Acesso em: 11 out. 2017.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática: compreensão e prática.** 3. ed. – São Paulo: Moderna, 2015.

SKOVSMOSE, Ole. **Cenários para investigação**. Bolema, Dinamarca, v. 14, n. 14, p.66-91, 2000.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da reflexão em educação matemática crítica.** Tradução de Orlando de Andrade Figueiredo e Jonei Cerqueira Barbosa. Campinas: Papirus, 2008.

SMOLE, Kátia S.; DINIZ, Maria I. (Orgs.) **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

SOUTO, A. M. **Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica.** 2010. 106 f. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

STEWART, Ian. **O fantástico mundo dos números**. Londres: Profile Books, 2015.

SMOLE, Kátia S.; DINIZ, Maria I. **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

STUBBS, M. **Linguagem, escolas e aulas**. Lisboa: Livros Horizonte, 1987.

USISKIN, Z. **Mathematics as a Language. In P. C. Elliott e M. J. Kenney (Eds.). Communication in Mathematics:** Yearbook (pp. 231-243). Reston, VA: NCTM.
Superior de Educação de Viana do Castelo. Nov/Dez. 2005. Disponível em: VALE, I.; PIMENTEL, T. **Padrões: um tema transversal do currículo**. LIBEC, Escola, 1996.

VILELA, Denise S.; MENDES, Jackeline Rodrigues. **A linguagem como eixo da pesquisa em educação matemática: contribuições da filosofia e dos estudos do discurso**. Zetetiké: FE/Unicamp, Campinas, v. 19, n. 36, p.10-25, jul. 2011.

VISCONTI, Leonardo. **A Geometria do Design: Estudos sobre proporção e composição da forma**. ESD, EBA, UNIVERCIDADE e ESPM. Ano: 2002.

WANG, F., & HANNAFIN, M. J. **Design-based research and technology-enhanced learning environments**. Educational Technology Research and Development, 53(4), 5-23, 2005.

ZUCHI, Ivanete. **A importância da linguagem no ensino de matemática**. Educação Matemática em Revista. São Paulo: Revista da SBEM, ano 11, nº 16, p. 49-55, maio de 2004.

APÊNDICE I – TERMO DE CONSENTIMENTO (RESPONSÁVEL)

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
PPGEduCIMAT- Programa de Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (RESPONSÁVEL)

Eu,____, portador do CPF____________________, responsável por____ estou autorizando-o a participar de um estudo denominado ***estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental exploram situações com os números irracionais π e φ,*** cujos objetivos e justificativas são: Contribuir para uma prática pedagógica produtiva, que possibilite aos professores em formação inicial perceberem as especificidades do conjunto dos números irracionais, bem como suas representações e aplicações, com ênfase nos números irracionais transcendentes; investigar propostas de materiais e estratégias, com abordagem investigativa, que proporcionem a aprendizagem estruturada destes conceitos. Elaborar um produto a partir desta pesquisa e torná-lo acessível aos demais interessados.

A participação dos estudantes no referido estudo será no sentido de colaborar com a ***execução das atividades em grupo; elaboração de registro escrito e relatório sucinto dos progressos e particularidades das atividades; autorização de gravação, em áudio, dos diálogos provenientes das considerações em grupo e da turma; além da gravação de vídeos em determinados momentos***.

Fui alertado de que, da pesquisa a se realizar, posso esperar alguns benefícios, tais como: *Evolução de conhecimentos, experimentação de atividade científica e oportunidade de aprendizagem coletiva. Também fui esclarecido de que não há possibilidade de desconfortos físicos durante o processo por se tratar de uma pesquisa de foco educacional.*

Estou ciente de que minha privacidade será respeitada, ou seja, meu nome ou qualquer outro dado ou elemento que possa, de qualquer forma, me identificar, será mantido em sigilo.

Também fui informado de que posso me recusar a participar do estudo, ou retirar meu consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar.

Os pesquisadores envolvidos com o referido projeto são Fernando da Rocha da Silva (Mestrando) e Dora Soraia Kindel (Docente/orientadora) e com eles poderei manter contato pelo e-mail *fernando_rocha86@yahoo.com.br*.

Enfim, tendo sido orientado quanto ao teor de todo o aqui mencionado e compreendido a natureza e o objetivo do já referido estudo, manifesto minha autorização do meu filho(a) ____ participar estando totalmente ciente de que não há nenhum valor econômico, a receber ou a pagar, pela sua participação.

Nova Iguaçu, ______ de ______________________ de 2018

____

Nome e assinatura

____

Fernando da Rocha da Silva (Mestrando)

____

Dora Soraia Kindel (Docente e orientadora)

APÊNDICE II – TERMO DE CONSENTIMENTO (ALUNO)

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
PPGEduCIMAT- Programa de Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (ALUNO)

Eu,____, portador do CPF (preencher somente se possuir) ____________________, estou em acordo com a minha participação em um estudo denominado: ***estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental exploram situações com os números irracionais π e φ***, cujos objetivos e justificativas são: Contribuir para uma prática pedagógica produtiva, que possibilite aos professores em formação inicial perceberem as especificidades do conjunto dos números irracionais, bem como suas representações e aplicações, com ênfase nos números irracionais; investigar propostas de materiais e estratégias, com abordagem investigativa, que proporcionem a aprendizagem estruturada destes conceitos. Elaborar um produto a partir desta pesquisa e torná-lo acessível aos demais interessados.

A participação dos estudantes no referido estudo será no sentido de colaborar com a ***execução das atividades em grupo; elaboração de registro escrito e relatório sucinto dos progressos e particularidades das atividades; autorização de gravação, em áudio, dos diálogos provenientes das considerações em grupo e da turma; além da gravação de vídeos em determinados momentos***.

Fui alertado de que, da pesquisa a se realizar, posso esperar alguns benefícios, tais como: *Evolução de conhecimentos, experimentação de atividade científica e oportunidade de aprendizagem coletiva. Também fui esclarecido de que não há possibilidade de desconfortos físicos durante o processo por se tratar de uma pesquisa de foco educacional.*

Estou ciente de que minha privacidade será respeitada, ou seja, meu nome ou qualquer outro dado ou elemento que possa, de qualquer forma, me identificar, será mantido em sigilo.

Também fui informado de que posso me recusar a participar do estudo, ou retirar meu consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar.

Os pesquisadores envolvidos com o referido projeto são Fernando da Rocha da Silva (Mestrando) e Dora Soraia Kindel (Docente/orientadora) e com eles poderei manter contato pelo e-mail *fernando_rocha86@yahoo.com.br*.

Enfim, tendo sido orientado quanto ao teor de todo o aqui mencionado e compreendido a natureza e o objetivo do já referido estudo, manifesto minha autorização em participar estando totalmente ciente de que não há nenhum valor econômico, a receber ou a pagar, por minha participação.

Nova Iguaçu, ______ de ______________________ de 2018

____

Nome e assinatura

____

Fernando da Rocha da Silva (Mestrando)

____

Dora Soraia Kindel (Docente e orientadora)

APÊNDICE III – TERMO DE CONSENTIMENTO (ESCOLA)

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
PPGEduCIMAT- Programa de Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (ESCOLA)

Eu, ____________________________________, portador (a) do CPF __________________ e Diretor (a) geral da Escola _________________________________ com Matricula __________________, estou ciente que alunos do 9º ano do Ensino Fundamental desta unidade estão sendo convidados a participar de uma pesquisa denominada ***estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental exploram situações com os números irracionais*** π ***e*** φ, cujos objetivos e justificativas são: Contribuir para uma prática pedagógica produtiva, que possibilite aos professores em formação inicial perceberem as especificidades do conjunto dos números irracionais, bem como suas representações e aplicações, com ênfase nos números irracionais transcendentes; investigar propostas de materiais e estratégias, com abordagem investigativa, que proporcionem a aprendizagem estruturada destes conceitos. Elaborar um produto a partir desta pesquisa e torná-lo acessível aos demais interessados.

A participação dos estudantes no referido estudo será no sentido de colaborar com a ***execução das atividades em grupo; elaboração de registro escrito e relatório sucinto dos progressos e particularidades das atividades; autorização de gravação, em áudio, dos diálogos provenientes das considerações em grupo e da turma; além da gravação de vídeos em determinados momentos***.

Fui alertada de que, da pesquisa a se realizar, posso esperar alguns benefícios, tais como: *Evolução de conhecimentos, experimentação de atividade científica e oportunidade de aprendizagem coletiva. Também fui esclarecida de que não há possibilidade de desconfortos físicos durante o processo por se tratar de uma pesquisa de foco educacional.*

Estou ciente de que a privacidade dos alunos será respeitada, ou seja, o nome ou qualquer outro dado ou elemento que possa, de qualquer forma, identificá-lo, será mantido em sigilo.

Também fui informada de que o aluno pode se recusar a participar do estudo, ou retirar seu consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar.

Os pesquisadores envolvidos com o referido projeto são Fernando da Rocha da Silva (Mestrando) e Dora Soraia Kindel (Docente/orientadora) e com eles poderei manter contato pelo e-mail *fernando_rocha86@yahoo.com.br*.

Enfim, tendo sido orientada quanto ao teor de todo o aqui mencionado e compreendido a natureza e o objetivo do já referido estudo, manifesto minha autorização do aluno da escola Municipal Roberto Simonsen em participar, estando totalmente ciente de que não há nenhum valor econômico, a receber ou a pagar, pela sua participação.

Nova Iguaçu, ______ de ______________________ de 2018

____

Nome e assinatura

____

Fernando da Rocha da Silva (Mestrando)

____

Dora Soraia Kindel (Docente e orientadora)

APÊNDICE IV – Números conhecidos pelos estudantes

ALUNO	Que números conhece?	Quais outros números conhece?	Ideia teórica envolvida	Observações
RIQUE	$14; 0{,}5; -3{,}1; \frac{16}{8}; -\frac{14}{4}; \frac{\sqrt{7}}{\sqrt[3]{2}}; -\sqrt{8};$ $018{,}0; 100\%; 0{,}9; -1{,}3; 7y^2.$	$\sqrt[2]{2} + \sqrt[2]{4}; 2\sqrt[3]{4^2};$ $3^1{:}3^2; 8^2; 3x^2.$	Representação numérica, dando ênfase às operações.	Destaca as frações, potências e radicais nos dois itens. Não percebemos uma categorização/agrupamento para designar os números que conhece em ambos os momentos
THAMMY	$7; 5^2; \sqrt{114}; \frac{30}{3}; \frac{25}{\sqrt{5}}; \sqrt[3]{50};$ $2{,}77; 15x^2; 3\sqrt{3}.$	$100; 10^3; \sqrt{25}; \frac{1}{2};$ $25x.$	Representação numérica, dando ênfase às operações.	Idem a RIQUE
VICK	$10^2; 5{,}77; \sqrt{5^2}; \frac{3}{4}; 95\%; 7y^2;$ $\sqrt{2^4}.$	$2\sqrt{5}; 7\sqrt[3]{2^4}; \frac{5}{10} x \frac{10}{5};$ $x^2; \sqrt{5+4}.$	Representação numérica, dando ênfase às operações.	Idem a RIQUE
NINHA	$4{,}5; \sqrt{9}; 4x; 6{,}5; -2; 3x.$	$-6x$	Representação numérica, dando ênfase às operações.	Mostrou timidez para dizer quais números conhecia.
LANE	$\frac{7}{49}; 0{,}006013; 2\sqrt{5}; 8{,}5.$	$4{,}3; \sqrt{2}; 11; 16x.$	Representação numérica, dando ênfase às operações.	Destaca as frações e radicais nos itens. Não percebemos uma categorização/agrupamento para designar os números que conhece em ambos os momentos.
LAN	*π; $\sqrt{a}$; inteiros; graus; radianos; irracionais; incógnitas, etc.*	*Racionais.*	Agrupamentos e ideias de conjuntos numéricos.	Utilizou grupos de números para exemplificar os que conhece.
PAMY	$\sqrt{9}; \sqrt{25}; \frac{3}{7}; \sqrt[2]{5}.$	$2\sqrt{3}; \sqrt{\frac{7}{9}}; \sqrt[3]{-2^3}.$	Representação numérica, dando ênfase às operações.	Destaca as frações e radicais nos dois itens. Não percebemos uma categorização/agrupamento para designar os números que conhece em ambos os momentos.
GU	*$\sqrt{4}$; 10%; 40; π; 40:2; MMC; MDC; raiz quadrada; radicais semelhantes; porcentagem, divisão e multiplicação.*	*Equação do 1º grau; equação do 2º grau; adição; subtração e geometria.*	Representação numérica, dando ênfase às operações e a medida.	Parece que, além de pensar nas operações, também pensou na ideia de medida.
DINHO	*Racionais; irracionais; inteiros; negativos; frações; radicais.*	*Pi; número de Euler e Phi.*	Agrupamentos e ideias de conjuntos numéricos.	Utilizou conjuntos numéricos para exemplificar alguns dos números que conhece, sem se desprender da ideia de operação matemática.
PEPI	*Radicais semelhantes; $\sqrt[5]{3}$; π; e; φ.*	*Potências 3^2 ou 2^3.*	Representação numérica, dando ênfase às operações.	Destaca as potências e radicais nos itens.

APÊNDICE V – Agrupamento/Classificação

ALUNO	Estes números que você citou têm nomes ou podem ser agrupados? Como?	Que números entram na categoria dos naturais? E dos inteiros? E dos racionais? Qual a diferença entre eles?	Que números você conhece como sendo irracionais?	Irracionais por quê?
RIQUE	*Sim. Fração, potência, raiz, porcentagem, divisão de potências, equação.*	*Naturais: 1; 2; 3; 4; 5; ...* *Inteiros: 20; 30; 40; 60; ...* *Racionais:* $\sqrt{4}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt{24}$; *Não têm diferença porque de algum modo ele pode se encaixar nos 3.*	$\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$; ...	*Não são números inteiros como na raiz dois não irá dar um número inteiro, será um número quebrado.*
THAMMY	*Sim. Elas podem se juntar e formar equações e frações, como por exemplo:* $15x^2 + 25x - 7$ *e* $\frac{25}{\sqrt{5}}$.	*Naturais: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; ...* *Inteiros:* $\sqrt{25}$; *7;* $\sqrt{100}$; *114; ...* *Racionais:* $\sqrt{9}$ *Muitos números não têm diferenças, mas outros tem. Tipo: se for uma fração vai saber se tem diferença quando for o resultado final, como por exemplo,* $\sqrt{25}$ *é 5 e ele se encaixa em todos.*	$\sqrt{2}$; $-\sqrt{5}$; $-1{,}2$.	*Na minha opinião são números não inteiros e negativos.*
VICK	*Sim. Podemos chamar de equações, frações, racionalização, porcentagem, potência.*	*Naturais: 1; 2; 3; 4; 5; ...* *Inteiros: 10; 20; 30; 40; 50; ...* *Racionais:* $\sqrt{4}$; $\sqrt{9}$; $\sqrt{10}$. *Não vejo a diferença, por que de algum modo ele pode se encaixar aos 3.*	$\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; 5,33; 12,66	*São números que não são exatos e inteiros, números quebrados, que provavelmente não dão um valor exato.*
NINHA	*Sim, temos nomes: raiz quadrada, números decimais. Alguns podem-se agrupar em equações.*	*Natural: 5.* *Inteiro: 16.* *Racional:* $\sqrt{4}$.	*3; 0,444...;* $\sqrt{7}$; $\sqrt{5}$.	*Por que não dá para simplificar, como a* $\sqrt{7}$, *não tem uma resposta de só um número.*
LANE	*Sim. Frações, números inteiros, raiz quadrada.*	*Natural: 6.* *Inteiro: Não podem ser quebrados. Exemplos: 10; 9; 8; ...* *Racional:* $\sqrt{25}$.	*0,85858585..., pelo motivo de nunca acabar.*	*Por não ser inteiro e pelo motivo de nunca acabar.*
LAN	*Irracionais, inteiros, incógnita, graus, radianos.*	*Natural: 2.* *Inteiros: -3; 4.* *Racional:* $\sqrt{4}$. *Uns podem ter números negativos e não podem ser quebrados. Alguns números podem se encaixar nos 3 grupos.*	*Raízes não exatas, números aproximados, Phi.*	*Além de não serem exatos, a maioria, não são números que aparecem tanto no dia a dia.*
PAMY	*São agrupados. Raiz quadradas fracionais, radicais.*	*Natural:* $\sqrt{9}$; $\sqrt{25}$; $\sqrt[2]{5}$; $\sqrt[3]{-2^3}$ *Inteiro: 4; 8; 36.* *Racional:* $\sqrt{16}$; $\sqrt{49}$. *Que existe um número racional que pode ser natural e que pode ser*	*Eu conheço a* $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$.	*Por que esses números irracionais não são exatos. 2,638945...*

		inteiro.		
GU	*Sim. Radicais, MMC, MDC e raiz quadrada.*	*Naturais: 6; 7; 8; 9.* *Inteiros: 4; 6; 8; 10.* *Racionais:* $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{25}=5$; $\sqrt{9}=3$; $\sqrt{36}=6$. *A diferença entre eles é que são de "categorias diferentes".*	*Uma raiz não exata. Exemplo:* $\sqrt{7}=3{,}5$; $\sqrt{5}=2{,}5$.	*Por que ele não é uma raiz não exata e não é um número inteiro. Exemplo:* $\sqrt{7}=3{,}5$. *Por que ele não tem um número exato que possa dar um valor sem vírgula.*
DINHO	*Sim. Racionais, irracionais e inteiros.*	*Naturais: 1; 2; 3; 4; 5.* *Inteiros: 10; 100; 1000.* *Racionais:* $\sqrt{4}$. *A diferença: o jeito de dizer.*	*São os números que nunca acabam. Ex:* $\sqrt{5}$; $\sqrt{7}$.	$\sqrt{7}$ *é exato porque não tem resultado exato.*
PEPI	*Sim, são agrupados. Racionais e potências.*	*Números naturais: 1; 2; 3; 4; 5.* *Números inteiros: 2; 4; 6; 8; 10; ...* *Números racionais:* $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{25}=5$; $\sqrt{9}=3$. *A diferença entre eles é que eles são de categorias diferentes.*	*Números irracionais são números que não possuem raízes exatas. Ex:* $\sqrt{7}=3{,}5$; $\sqrt{5}=2{,}5$.	*Por que eles não possuem raízes exatas.*

APÊNDICE VI – Número esquisito

Categoria	Exemplos ditos	Aluno (s)
Dízima e raiz não exata	*Dízima; 0,0001411; 7777; 777; 77;* $\sqrt{21}$; *número irracional; 77.777;* $\sqrt{21}$.	Rique e Vick.
Dízimas e operações com radicais	*0,333...;* $\frac{30}{\sqrt{25}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{100}}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt[2]{2^2.3}$; $\sqrt{7}$; x^2.	Thammy e Ninha.
Decimal exato	*0,000004; 999,9; 0,00001.*	Lane, Gu e Pepi.
Velocidade	*100 km/h.*	Dinho.
Raízes com índices altos e dois irracionais.	*Phi; número de ouro; raízes com índices altos.*	Lan.
raízes	$\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$.	Pamy.

APÊNDICE VII – Estranhamento

TEXTO **G2**

Luciene muito disposta pois tinha uma festa para ir a noite. Sendo assim, ela tirou as medidas e altura para fazer seu vestido, tudo isso com a ajuda de uma trena.

Ela resolveu fazer o vestido porque pelos seus cauculos sairia mais em conta e sobraria mais dinheiro para pagar um uber pós a distância da casa dela até o local da festa era longa.

Antes da festa ela colocou a sua filha pra estudar trigonometria, equação e multiplicação sem usar a cauculadora. Quando Mirela acabou de fazer os problemas matemáticos, Luciene somou e viu que estava tudo errado e mandou ela fazer tudo de novo.

Mirela fez uma carta com letras destacas pedindo sua mãe para ir a festa prometendo tirar notas boas no próximo semestre. Luciene leu a carta de sua filha e resolveu deixá-la ir com ela a festa.

APÊNDICE VIII – Estranhamento

TEXTO **G3**

Para acabar com a sua viagem
é melhor fazer uma contagem.

Meu amor por você é igual a matemática,
não tem limites.

Para conquistar seu coração
só basta fazer uma multiplicação.

Para acabar com seu dilema, nós temos uma solução,
pegue o seu caderno e faça uma divisão.

APÊNDICE IX – Medindo corpos redondos com diferentes tipos de linhas

PREENCHIMENTO DA TABELA G1

“objetos redondos”	*Linha*	*Barbante Fino*	*Barbante Grosso*
1: *Pote de Maionese*	*24,3 cm*	*24,3 cm*	*24,7 cm*
2: *Tampa de Remédio*	*10,5 cm*	*11 cm*	*11,3 cm*
3: *Brinquedo*	*21,5 cm*	*23,3 cm*	*24,6 cm*

PREENCHIMENTO DA TABELA G2

“objetos redondos”	*Linha*	*Barbante Fino*	*Barbante Grosso*
1: *Caneca*	*24,4 cm*	*24,8 cm*	*26 cm*
2: *Tampa da Maionese*	*19 cm*	*20,7 cm*	*21,1 cm*
3: *Tampa de suco*	*12,5 cm*	*12,8 cm*	*13 cm*

PREENCHIMENTO DA TABELA G3

"objetos redondos"	*Barbante Grosso*	*Barbante Fino*	*Linha*
1: *Caneca*	*26 cm*	*26 cm*	*25 cm*
2: *Pote de Maionese*	*25 cm*	*24,9 cm*	*23,8 cm*
3: *Tampa de suco*	*14 cm*	*13,3 cm*	*13,4 cm*

PREENCHIMENTO DA TABELA G4

"objetos redondos"	*Barbante Grosso*	*Barbante Fino*	*Linha*
1: *Copo*	*17,5 cm*	*17,1 cm*	*17 cm*
2: *Copo de Requeijão*	*16,5 cm*	*16 cm*	*15,2 cm*
3: *Tampa de Remédio*	*9,9 cm*	*9,8 cm*	*9,7 cm*

APÊNDICE X – Comparando as medidas de diferentes objetos usando a mesma linha

GRUPOS	RESPOSTAS
G1 TOR LOR VICK	*Observamos que uma circunferência maior é melhor para ser medida. Percebemos com um pote de maionese e uma tampa pequena de remédio.*
G2 NICK KINHO MARI	*Quanto maior a circunferência, mais fácil é medir e manipular o objeto.*
G3 PEPI LAN	*A medida de cada objeto é diferente.*
G4 NINHA PAMY LANE	*O copo de requeijão é quase parecido com o resultado do copo e a tampa de remédio tem um resultado diferente por ser menor do que os outros.*

APÊNDICE XI – Comparando as respostas do colega com o seu colega de grupo (Acordos Sociais)

GRUPOS	RESPOSTAS
G1 TOR LOR VICK	*Observamos que cada vez que a grossura da linha é menor, dificulta para medir. E também achamos que o barbante grosso é melhor para medir.*
G2 NICK KINHO MARI	*Observamos que quanto maior o objeto, mais centímetros tem.*
G3 PEPI LAN	*Os materiais mais grossos ficaram com a maior medida. A medida de cada objeto muda devido à sua circunferência.*
G4 NINHA PAMY LANE	*Os objetos maiores são mais fáceis e simples de medir, os menores são mais complicados porque são pequenos.*

APÊNDICE XII – A dificuldade

GRUPOS	RESPOSTAS
G1 TOR LOR VICK	*Pote de maionese, porque pegamos melhor no objeto.*
G2 NICK KINHO MARI	*Caneca, pois é o maior objeto que medimos.*
G3 PEPI LAN	*A caneca, por ter uma circunferência maior.*

G4 NINHA PAMY LANE	*O copo foi o mais fácil por ser o maior que os outros objetos.*

APÊNDICE XIII – Momento de reflexão

GRUPOS	RESPOSTAS
G1 TOR LOR VICK	*Primeiro organizamos as medidas, logo após escolhemos os objetos, medimos primeiro com o barbante grosso, depois com o barbante fino e por último usamos a linha. Percebemos que as medidas vão ficando diferentes a cada objeto e linhas.*
G2 NICK KINHO MARI	*Começamos medindo com linhas da mais fina para a mais grossa e medimos os objetos do mais grosso para o mais fino, tudo isso com a ajuda de uma régua para medir e uma lupa para enxergar os centímetros. Descobrimos que quanto maior o objeto mais centímetros tem e que a linha mais grossa é mais fácil de medir e que ao decorrer das linhas os centímetros iam aumentando.*
G3 PEPI LAN	*Medimos 3 objetos redondos diferentes com 3 tipos de linhas. Observamos que a medida dos objetos mudam devido a grossura de cada linha e do tamanho da circunferência.*
G4 NINHA PAMY LANE	*Nós medimos cada objeto com linhas diferentes. Cada uma segurou de um lado da linha para facilitar e levar até a régua para medir.Os copos maiores são mais simples de medir do que a tampa de remédio por ser menor.Quando medimos com o barbante grosso o resultado é maior do que os mais finos.*

APÊNDICE XIV – Preenchimento da tabela item 1

PREENCHIMENTO DA TABELA G1 **Linha escolhida**: Barbante grosso

Circunferência	Comprimento da Circunferência	Comprimento do diâmetro	$\frac{Comprimento}{Diâmetro}$
1: *A*	*6,7*	*2,1*	*3,19*
2: *B*	*12,5*	*4,1*	*3,04*

3:	*C*	*19,7*	*6,1*	*3,22*
4:	*D*	*25,2*	*8,1*	*3,11*
5:	*E*	*45,0*	*14,1*	*3,19*

PREENCHIMENTO DA TABELA G2 **Linha escolhida**: Barbante fino

Circunferência		Comprimento da Circunferência	Comprimento do diâmetro	$\frac{Comprimento}{Diâmetro}$
1:	*A*	*7,7*	*2,0*	*3,85*
2:	*B*	*14,0*	*4,3*	*3,25*
3:	*C*	*19,0*	*6,3*	*3,01*
4:	*D*	*26,0*	*8,2*	*3,17*
5:	*E*	*44,0*	*14,2*	*3,09*

PREENCHIMENTO DA TABELA G3 **Linha escolhida**: Barbante grosso

Circunferência		Comprimento da Circunferência	Comprimento do diâmetro	$\frac{Comprimento}{Diâmetro}$
1:	*A*	*7,3*	*2,1*	$\cong 3{,}47$
2:	*B*	*13,3*	*4,1*	$\cong 3{,}24$
3:	*C*	*19,2*	*6,2*	$\cong 3{,}09$
4:	*D*	*25,7*	*8,1*	$\cong 3{,}17$
5:	*E*	*45*	*14,1*	$\cong 3{,}19$

PREENCHIMENTO DA TABELA G4 **Linha escolhida**: Barbante grosso

Circunferência		Comprimento da Circunferência	Comprimento do diâmetro	$\frac{Comprimento}{Diâmetro}$
1:	*B*	*13,2*	*4*	*3,3*
2:	*A*	*6,8*	*2,1*	*3,33*
3:	*C*	*19,6*	*6*	*3,26*
4:	*D*	*25,9*	*8,1*	*3,19*
5:	*E*	*45,5*	*14*	*3,25*

APÊNDICE XV – Comparando a medida da circunferência com a medida do diâmetro

GRUPOS	RESPOSTAS
G1 TOR LOR	*A circunferência é sempre maior que o diâmetro. Quanto maior a circunferência maior é o diâmetro.*

G2 NICK KINHO	*A circunferência é sempre maior que o diâmetro. Quanto maior a largura maior o diâmetro e quanto maior o comprimento maior a circunferência.*
G3 BIEL PEPI LAN	*A medida do diâmetro é sempre menor que o comprimento da circunferência. Quanto maior o comprimento da circunferência,maior será o diâmetro.*
G4 NINHA PAMY LANE	*Todos da circunferência tem resultados maiores do que do diâmetro. Quanto maior a circunferência maior o resultado.*

APÊNDICE XVI – Razão entre o comprimento da circunferência e a medida do diâmetro

GRUPOS	RESPOSTAS
G1 TOR LOR	*Todos os valores são diferentes, mas percebemos que a circunferência A e E tem o mesmo valor.*
G2 NICK KINHO	*Não, os valores não são iguais, mas percebemos que a parte inteira são iguais.*
G3 BIEL PEPI LAN	*Não. Percebemos que todos chegam perto do valor do número irracional π (3,14).*
G4 NINHA PAMY LANE	*Não. Nós percebemos que os números são próximos. O número inteiro que é 3 sempre aparece.*

APÊNDICE XVII – Preenchimento da tabela item 2 (Repetindo o Processo)

PREENCHIMENTO DA TABELA G1 **Linha escolhida**: Barbante fino

Circunferência	Comprimento do Diâmetro	Comprimento da Circunferência	$\frac{\boldsymbol{Comprimento}}{\boldsymbol{Di\hat{a}metro}}$
1: *A*	*2,1*	*6,8*	*3,23*
2: *B*	*4,1*	*13,0*	*3,17*
3: *C*	*6,1*	*19,0*	*3,11*
4: *D*	*8,1*	*25,1*	*3,09*
5: *E*	*14,1*	*44,3*	*3,14*

PREENCHIMENTO DA TABELA G2 **Linha escolhida**: Linha de costura

Circunferência	Comprimento do Diâmetro	Comprimento da Circunferência	$\frac{\boldsymbol{Comprimento}}{\boldsymbol{Di\hat{a}metro}}$
1: *A*	*7,4*	*2,0*	*3,7*
2: *B*	*13,0*	*4,2*	*3,09*
3: *C*	*17,0*	*6,1*	*2,78*
4: *D*	*25,2*	*8,1*	*3,11*
5: *E*	*43,6*	*14,0*	*3,11*

PREENCHIMENTO DA TABELA G3 **Linha escolhida**: Barbante fino

Circunferência	Comprimento do Diâmetro	Comprimento da Circunferência	$\frac{\boldsymbol{Comprimento}}{\boldsymbol{Di\hat{a}metro}}$
1: *A*	*2,1*	*7,2*	$\cong$ *3,27*
2: *B*	*4,1*	*13,1*	$\cong$ *3,19*
3: *C*	*6,2*	*19,1*	$\cong$ *3,08*
4: *D*	*8,1*	*25,5*	$\cong$ *3,14*
5: *E*	*14,1*	*44,1*	$\cong$ *3,12*

PREENCHIMENTO DA TABELA G4 **Linha escolhida**: Barbante fino

Circunferência	Comprimento do Diâmetro	Comprimento da Circunferência	$\frac{\boldsymbol{Comprimento}}{\boldsymbol{Di\hat{a}metro}}$
1: *B*	*4*	*12,7*	*3,17*
2: *A*	*2,1*	*6,2*	*2,95*
3: *C*	*6*	*19,1*	*3,18*
4: *D*	*8,1*	*25*	*3,08*
5: *E*	*14*	*44,6*	*3,18*

APÊNDICE XVIII – Comparando as razões

GRUPOS	RESPOSTAS
G1 TOR LOR	*As razões encontradas da circunferência A das tabelas 1 e 2 não são iguais. Circunferência B não são iguais também. Circunferência C não são iguais. Circunferência D não são iguais. Circunferência E não são iguais. Percebemos que na tabela 1 da razão D é igual a razão C da tabela 2.*
G2 NICK KINHO	*Comparamos as razões da circunferência A, das tabelas 1 e 2 e percebemos que elas não são iguais. Com valores iguais percebemos que as razões da circunferência da tabela 1 e a tabela 2, a circunferência E e a B deram o mesmo resultado. Na tabela 2 a circunferência D e E deram o mesmo resultado também.*
G3 BIEL PEPI LAN	*A → não, B → não, C → não, D → não e E → não.* *Todos chegam perto de π (3,14...), a razão do comprimento da circunferência e do diâmetro de B da tabela 2 é igual de E na tabela 1.* *Quando o material da linha for mais fino, a razão das grandezas será menor.*
G4 NINHA PAMY LANE	*As razões das medidas das circunferências são diferentes. Porém, na tabela 2 as letras C e E possuem a mesma razão.*

APÊNDICE XIX – Dialogando para comentar: mais uma reflexão

GRUPOS	RESPOSTAS
G1 TOR LOR	*Percebemos que as razões sempre terminam diferentes,o valor do π é o mesmo valor da circunferência E da tabela 2. Nem todas as razões deram o valor de π. Acreditamos que o barbante não ajudou muito na medição.*
G2 NICK KINHO	*Aprendemos na sala de aula que o valor de π sempre dá aproximadamente 3,14. Porém, quando calculamos percebemos que nenhum deu esse valor porque acreditamos que foi o barbante e a linha de costura que nos atrapalhou pois dificultou.*

G3 BIEL PEPI LAN	*O barbante grosso foi o material mais fácil de usar. O valor da razão da tabela 2 é menor que o da tabela 1. Medir o diâmetro é mais fácil, medir o comprimento da circunferência é difícil pois não tem uma perfeição.*
G4 NINHA PAMY LANE	*Quando medimos com a linha grossa, encontramos razões maiores do que quando medimos com a linha fina. A linha grossa foi mais fácil para medir.Uma dificuldade que tivemos foi medir a circunferência corretamente.*

APÊNDICE XX – Preenchimento da tabela item 1 (Corpo Humano)

PREENCHIMENTO DA TABELA G1

Nome do aluno: TOR

Medida 1 (M_1)	Medida 2 (M_2)	M_1 / M_2
Distância entre a ponta do nariz e o queixo = 8,1 cm	Distância entre a linha dos olhos e a ponta do nariz = 5,1 cm	1,58
Distância entre o umbigo e o chão = 95 cm	Distância do topo da cabeça até o umbigo = 59 cm	1,61
Distância do ombro a ponta do dedo = 67 cm	Distância do cotovelo a ponta do dedo = 41 cm	1,63
Tamanho do dedo = 8 cm	Distância da dobra central do dedo até a ponta = 4,9 cm	1,63

PREENCHIMENTO DA TABELA G2

Nome do aluno: NICK

Medida 1 (M_1)	Medida 2 (M_2)	M_1 / M_2
Distância entre a ponta do nariz e o queixo = 8,5 cm	Distância entre a linha dos olhos e a ponta do nariz = 5,2 cm	1,63
Distância entre o umbigo e o chão = 96 cm	Distância do topo da cabeça até o umbigo = 63 cm	1,52
Distância do ombro a ponta do dedo = 68 cm	Distância do cotovelo a ponta do dedo = 41 cm	1,66
Tamanho do dedo = 8 cm	Distância da dobra central do dedo até a ponta = 5 cm	1,6

PREENCHIMENTO DA TABELA G3

Nome do aluno: BIEL

Medida 1 (M_1)	Medida 2 (M_2)	M_1 / M_2
Distância entre a ponta do nariz e o queixo = 8,5 cm	Distância entre a linha dos olhos e a ponta do nariz = 4,6 cm	1,848
Distância entre o umbigo e o chão = 93 cm	Distância do topo da cabeça até o umbigo = 56 cm	1,660
Distância do ombro a ponta do dedo = 64 cm	Distância do cotovelo a ponta do dedo = 42 cm	1,523
Tamanho do dedo = 7 cm	Distância da dobra central do dedo até a ponta = 4,3 cm	1,627

PREENCHIMENTO DA TABELA G4

Nome do aluno: PAMMY

Medida 1 (M_1)	Medida 2 (M_2)	M_1 / M_2
Distância entre a ponta do nariz e o queixo = 8,1 cm	Distância entre a linha dos olhos e a ponta do nariz = 5,1 cm	1,58
Distância entre o umbigo e o chão = 96 cm	Distância do topo da cabeça até o umbigo = 69 cm	1,39
Distância do ombro a ponta do dedo = 68 cm	Distância do cotovelo a ponta do dedo = 40 cm	1,72
Tamanho do dedo = 8 cm	Distância da dobra central do dedo até a ponta =5 cm	1,6

APÊNDICE XXI – Repetindo o processo (Corpo Humano)

PREENCHIMENTO DA TABELA G1

Nome do aluno: LOR

Medida 1 (M_1)	Medida 2 (M_2)	M_1 / M_2
Distância entre a ponta do nariz e o queixo = 8 cm	Distância entre a linha dos olhos e a ponta do nariz = 5 cm	1,6
Distância entre o umbigo e o chão = 98 cm	Distância do topo da cabeça até o umbigo = 67 cm	1,46
Distância do ombro a ponta do dedo = 68 cm	Distância do cotovelo a ponta do dedo = 41 cm	1,65
Tamanho do dedo = 8,2 cm	Distância da dobra central do dedo até a ponta = 5 cm	1,64

PREENCHIMENTO DA TABELA G2

Nome do aluno: KINHO

Medida 1 (M_1)	Medida 2 (M_2)	M_1 / M_2
Distância entre a ponta do nariz e o queixo = 8,5 cm	Distância entre a linha dos olhos e a ponta do nariz = 5,5 cm	1,54
Distância entre o umbigo e o chão = 102 cm	Distância do topo da cabeça até o umbigo = 65 cm	1,56
Distância do ombro a ponta do dedo = 77 cm	Distância do cotovelo a ponta do dedo = 47,6 cm	1,61
Tamanho do dedo = 8,5 cm	Distância da dobra central do dedo até a ponta = 5,8 cm	1,46

PREENCHIMENTO DA TABELA G3

Nome do aluno: PEPI

Medida 1 (M_1)	Medida 2 (M_2)	M_1 / M_2
Distância entre a ponta do nariz e o queixo = 8,5 cm	Distância entre a linha dos olhos e a ponta do nariz = 5,2 cm	1,634
Distância entre o umbigo e o chão = 98 cm	Distância do topo da cabeça até o umbigo = 59 cm	1,661
Distância do ombro a ponta do dedo = 65 cm	Distância do cotovelo a ponta do dedo = 42 cm	1,547
Tamanho do dedo = 8,5 cm	Distância da dobra central do dedo até a ponta = 5,1 cm	1,66

PREENCHIMENTO DA TABELA G4

Nome do aluno: NINHA

Medida 1 (M_1)	Medida 2 (M_2)	M_1 / M_2
Distância entre a ponta do nariz e o queixo = 7,2 cm	Distância entre a linha dos olhos e a ponta do nariz = 4,5 cm	1,6
Distância entre o umbigo e o chão = 101 cm	Distância do topo da cabeça até o umbigo = 57,9 cm	1,74
Distância do ombro a ponta do dedo = 66,1 cm	Distância do cotovelo a ponta do dedo = 41 cm	1,61
Tamanho do dedo = 8,5 cm	Distância da dobra central do dedo até a ponta =5,1 cm	1,66

APÊNDICE XXII – Comparando as razões encontradas nas tabelas 1 e 2

GRUPOS	RESPOSTAS
G1 TOR LOR VICK	*Não, mas elas tem algumas semelhanças, como o número inteiro (1). Também observamos que a medida 1 das tabelas 1 e 2 são maiores que a medida 2 das tabelas 1 e 2.*
G2 NICK KINHO	*Comparamos e vimos que elas não são iguais, mas a parte inteira deu igual a 1 e os valores são bem próximos um dos outros e a parte decimal deu 6 em quatro casos e a parte decimal deu 5 em três casos.*
G3 BIEL PEPI LAN	*Não são iguais. Porém o número 1 sempre aparece no valor e eles possuem valores diferentes.*
G4 NINHA PAMY LANE	*Não. A tabela 1 contem resultados menores do que a tabela 2. Porém os números inteiros da tabela 1 são iguais os da tabela 2.*

APÊNDICE XXIII – Um número muito próximo de φ

GRUPOS	RESPOSTAS
G1 TOR LOR VICK	*Observamos que na medida três da tabela 1 deu 1,61como o valor de φ. Observamos também que na tabelas 1 e 2 existem seis razões estão muito próximas do número de ouro. Observamos também que o número de ouro tem infinitas casas decimais. As razões encontradas não*

	possuem infinitas casas decimais.
G2 NICK KINHO	*Observamos que eles são bem próximos do número áureo e percebemos que as razões tem resultados com números decimais exatos, já o número de ouro tem infinitas casas decimais.*
G3 BIEL PEPI LAN	*Observamos que os resultados tem uma aproximação entre eles e também o número 1 aparece em todos os valores assim como aparece no número Fi (1,618 ...). Percebemos que na tabela 2 em três razões a primeira casa decimal vale 6, assim como no número Fi (1,618 ...).*
G4 NINHA PAMY LANE	*Percebemos uma aproximação muito forte entre os números 1,6 oriundo do pentágono regular e o 1º resultado da 3ª coluna da segunda tabela que são iguais.*

APÊNDICE XXIV – Manipulando e encaixando o triângulo amarelo

GRUPOS	RESPOSTAS
G1 TOR VICK	*Sim, ele se encaixa em cinco partes, a base do triângulo amarelo coincide com o maior lado verde.*
G2 NICK KINHO MARI	*Sim, ele se encaixa em 5 partes, onde a base do triângulo amarelo coincide com o maior lado do triângulo verde.*
G3 BIEL PEPI LAN	*Sim. Por que é possível encaixar em 5 triângulos que são compostos pela ponta da estrela e coincide com o lado do pentágono.*
G4 NINHA PAMY LANE	*Sim. É possível encaixar em 5 triângulos em que o maior lado coincide com o lado do pentágono.*

APÊNDICE XXV – Reflexão dos conteúdos aplicados para obtenção da razão áurea

GRUPOS	RESPOSTAS
G1 TOR VICK	*Nós conhecemos fórmula de báscara, equação do 2º grau, distributiva, raiz e semelhança de triângulos.*
G2 NICK KINHO MARI	*Semelhança de triângulos, distributiva, proporção e fórmula de bhaskara.*
G3 BIEL PEPI LAN	*Semelhança de triângulos, bhaskara, proporção e equação do 2º grau.*
G4 NINHA PAMY LANE	*Equação do 2º grau, proporção e multiplicando cruzado.*

ANEXO – Parecer do comitê de ética

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COMISSÃO DE ÉTICA NA PESQUISA DA UFRRJ / CEP

Protocolo N° 1.204/18

PARECER

O Projeto de Pesquisa intitulado "Estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental exploram situações com os números irracionais" sob a coordenação da Professora Drª. Dora Soraia Kindel, do Instituto Multidisciplinar/Departamento de Educação e Sociedade, processo 23083.025516/2018-27, atende os princípios éticos e está de acordo com a Resolução 466/12 que regulamenta os procedimentos de pesquisa envolvendo seres humanos.

UFRRJ, 06/12/18.

Prof.ª Dra. Lúcia Helena Cunha dos Anjos
Pró-Reitora Adjunta de Pesquisa e Pós-Graduação

PRODUTO

O produto oriundo desta pesquisa trata-se de um guia didático para professores contendo orientações, métodos, técnicas e tarefas que possibilitem o aperfeiçoamento do processo de ensino aprendizagem dos Números Irracionais, enfatizando os números π e φ.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO / INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

OS NÚMEROS IRRACIONAIS π E φ: UMA PROPOSTA EXPLORATÓRIA PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Guia Didático para Docentes

FERNANDO DA ROCHA DA SILVA

Sob a orientação da Professora Doutora

DORA SORAIA KINDEL

Seropédica
2019

APRESENTAÇÃO

O presente guia didático se constitui no produto resultante de uma dissertação de Mestrado Profissional e tem como objetivo compartilhar com professores da Educação Básica um conjunto de tarefas para a introdução do conceito de Números Irracionais, dando ênfase aos irracionais π e φ. Esperamos contribuir com práticas e abordagens diferenciadas no Ensino dos Números Irracionais na sala de aula de Matemática, colaborando assim para a formação continuada do Professor e as novas perspectivas para o Ensino de Matemática.

PÚBLICO ALVO

Professores que ensinam matemática e que desejam atualizar suas práticas pedagógicas e experimentar novos métodos para a construção dos conjuntos numéricos, mas propriamente o conjunto dos números irracionais, dando ênfase ao π e φ.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A escolha do tema em foco surge a partir da minha experiência como professor de matemática da Educação Básica, das necessidades curriculares relacionadas ao Ensino da Matemática e das lacunas apresentadas nos livros didáticos de Matemática. Nessa caminhada percebo o quanto é complexo para os alunos conceituarem a ideia dos números irracionais π e φ e, se dependerem dos livros didáticos de matemática, essa compreensão provavelmente ficará vaga.

Quando estudei os números irracionais pela primeira vez na 7ª série do Ensino Fundamental (atual 8º ano do Ensino Fundamental), me recordo do cálculo de raízes não exatas e da apresentação de maneira “pronta e acabada” do número π, onde o mesmo, por algum motivo, assumia o valor 3,14. Não participei de experimentos que me propiciasse processos construtivos para a conceituação desses números. Minhas experiências com o número φ somente iniciaram no nível superior, na graduação Licenciatura em Matemática, na disciplina de geometria euclidiana. Também me recordo que os livros didáticos que estudei ao longo dos Ensinos Fundamental e Médio não citavam o número irracional φ.

Temos interesse nesse tema, pois o mesmo representa um dos pontos críticos e chave no estudo dos números reais na Educação Básica. De acordo com Silva (2009) as dificuldades dos alunos na aprendizagem de limite e continuidade de funções, por exemplo, são decorrentes da falta de compreensão de propriedades do conjunto dos números reais. Essa noção de números reais se faz presente em muitos conteúdos matemáticos, mas, pesquisas destacam que o ensino destes números ainda apresentam lacunas.

As demandas sociais nos remetem a criação de alternativas para o ensino, de um modo generalizado, com o intuito de tornar o aluno reflexivo e crítico no que tange a sua aplicação matemática cotidiana. Nessa empreitada, entendemos que o professor tem um papel especial, pois ele é quem poderá propor metodologias para o ensino a fim de atender as necessidades da atual sociedade.

É importante ressaltar que essa proposta de ensino vai de encontro às novas tendências em Educação Matemática, possibilitando a inserção de novas metodologias e agregando novas técnicas para o Ensino de Matemática. A nossa perspectiva é que este material possa auxiliar o docente na introdução e discussão sobre a existência de dois números irracionais π e φ através da comparação entre diferentes medidas.

A PROPOSTA

A Investigação Matemática está direcionada para a busca da construção do conhecimento matemático, que pode surgir de maneira cotidiana para a resolução de problemas. Os alunos devem ter a oportunidade de expressar suas ideias e defendê-las, estando aberto para ponderações e críticas construtivas. Ponte, Brocardo e Oliveira (2015) aferem que uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema e resolver. De fato, em matemática, investigações e resolução de problemas sempre caminham de mãos dadas.

A respeito de ambientes de aprendizagem, Skovsmose (2000) chama de "cenário para investigação" um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação, para ele, um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e procurarem explicações. Quando os alunos assumem o processo de exploração e explicação, o cenário para investigação passa a constituir um novo ambiente de aprendizagem. No cenário para investigação, os alunos são responsáveis pelo processo. É importante destacar que os envolvidos com a investigação precisam realmente estar disponíveis e querendo participar de tal. O que pode servir perfeitamente como um cenário para investigação a um grupo de alunos numa situação particular pode não representar um convite para outro grupo de alunos. Se certo cenário pode dar suporte a uma abordagem de investigação ou não é uma questão empírica que pode ser respondida através da prática dos professores e alunos envolvidos.

A proposta está organizada de tal forma que as tarefas sempre se iniciam no topo da página para que o professor possa reproduzi-las se assim o desejar. Além disso, apresenta-se a tarefa propriamente dita e por fim os objetivos específicos relacionados a metodologia de trabalho e à aprendizagem. Na seção conversa com o professor apresenta-se, em linhas gerais, sugestões, comentários sobre possíveis problemas em sala de aula e como resolvê-los e/ou um breve relato de nossa experiência durante a pesquisa.

Segue a apresentação das tarefas.

Introdução à tarefa 1

Para convidá-los a este cenário com o objetivo de saber o conhecimento prévio dos estudantes propusemos uma tarefa em que pudessem se expressar por escrito. Como a escrita e a opinião sobre determinados temas, nas aulas de matemática, não costumam ser uma prática comum iniciamos o trabalho propondo que escrevessem algo do dia a dia, no nosso caso, carro. Mas que o professor de matemática pode sugerir qualquer palavra. Em seguida, o professor poderá ou não promover uma conversa em que os estudantes falem/discutem o tema e então, ao final desta, introduzir o tema de sua aula. No nosso caso, o tema eram os números irracionais e para tanto gostaríamos de saber o que os estudantes conheciam sobre números, que exemplos apresentariam, o que sabiam das classificações numéricas e se identificavam diferentes aplicações para os diferentes números. Nesse sentido, elaboramos para isso a primeira tarefa, que segue.

TAREFA 1 – Números: o que é e para que servem?

1- Escreva algumas ideias sobre o que você lembra quando ouve a palavra número.

____

____

____

2.A - Diga que números conhece.

____

____

2.B - Que outros números conhece?

____

____

3- Estes números que você citou têm nomes ou podem ser agrupados? Como?

____

____

____

4- Que números entram na categoria dos naturais? E dos inteiros? E dos racionais? Qual a diferença entre eles?

____

____

____

5.A - Que números você conhece como sendo irracionais?

____

____

5.B - Irracionais por quê?

____

____

6- Que outros números "esquisitos" você conhece?

____

____

____

Objetivos

Acreditamos ser importante possibilitarmos momentos de reflexão sobre o tema número e conjuntos numéricos. Para isto, destacamos os seguintes objetivos específicos: a) verificar que concepções ou definições e exemplos são apresentados pelos estudantes; b) verificar os números e/ou grupos de números que os alunos conhecem; c) verificar como os estudantes agrupam números; d) verificar quais números “esquisitos” os estudantes conhecem; e) refletir acerca da ideia de número e conjuntos numéricos.

Conversa com o professor sobre as questões da tarefa

Sugerimos que essa tarefa seja realizada individualmente pelo estudante, a fim de extrairmos ao máximo o que cada um deles pensam acerca de números e conjuntos numéricos. É importante lembrar que esse tipo de tarefa não é muito comum na sala de aula de matemática. Nessa perspectiva, sugerimos uma familiarização para a atividade através de um termo qualquer do dia a dia. Iniciando a tarefa, pedimos aos nossos estudantes que escrevessem a primeira palavra referente ao termo número e na sequência falasse o mesmo para que o professor o colocasse no quadro. Após cada estudante fazer a sua contribuição, propomos que cada um escrevesse em sua folha a maior quantidade de palavras referente ao termo número. Uma outra forma de proceder é fazer uma “Tempestade de Ideias[2]”, onde é previsto várias rodadas em que os participantes expõem palavras que remetem ao termo colocado pelo professor. Ao final da rodada, em que cada estudante diz uma palavra, novas rodadas vão sendo introduzidas, de forma a enriquecer o quadro de termos associados. Ao longo da tarefa, muitas perguntas poderão surgir, algumas talvez sem resposta, mas de fato o importante é estimular os estudantes a partir dessas perguntas, provocando um espírito investigador em cada um deles, pedindo para que justifiquem ao máximo suas respostas, descrevendo assim como chegou a tal pensamento/conclusão. Durante a realização da pesquisa percebeu-se que os estudantes usaram, no máximo, o número de linhas disponibilizadas neste produto.

Ao longo da minha caminhada como professor de Matemática da Educação Básica ouvi alguns termos em sala de aula ditos pelos alunos para designarem certos números, onde alguns desses era denominado “esquisito” por eles. Não sei ao certo o motivo pelo qual alguns

[2] Tempestade de ideias: sugerimos a leitura da dissertação de mestrado Função: concepções e estratégias de estudantes da 1ª série do Ensino Médio na exploração de tabelas de Sarai Oliveira Silva, PPGEduCIMAT – UFRRJ, 2017, a fim de verificar algumas experiências com a Tempestade de ideias.

alunos acham determinados números esquisitos, mas acredito que esse fato se deve a característica e estrutura não tão comuns desses números no cotidiano, a própria familiarização com o mesmo e as dificuldades para entendê-lo e criar um significado para tal.

Introdução à tarefa 1-A

A respeito da escrita matemática, Smole (2001) afirma que tal produção seria uma maneira de promover a comunicação nas aulas de Matemática, pois, ao se comunicar matematicamente – inclusive mediante a utilização da escrita – os alunos têm a oportunidade de explorar, organizar e conectar seus pensamentos, novos conhecimentos e diferentes pontos de vista sobre um assunto.

Para Powell e Bairral (2006) a escrita força os interlocutores a refletir, diretamente, sobre sua experiência matemática. Enquanto examinamos nossas produções, desenvolvemos nosso senso crítico. A escrita suporta atos de cognição e metacognição, ou seja, não apenas sobre a capacidade de aprender, mas também o reconhecimento de seus próprios processos cognitivos e a habilidade de controlar esses processos, monitorando, organizando, e modificando-os para realizar objetivos concretos. Para esses autores a utilização da escrita influencia a aprendizagem matemática e contribui ricamente para a análise cognitiva, sendo esta ferramenta alvo de interesse nas pesquisas em educação matemática.

Segundo Feres e Nacarato (2008) a escrita apresenta alguns intrínsecos do processo de aprendizagem. Um desses fatores é que um assunto e a matemática tem um conteúdo – os conceitos, as ideias e os símbolos devem transitar da mente do escritor para a mente do leitor, assim o aluno ao escrever sobre a matemática irá formar, reformar e externar o seu pensamento possibilitando, uma conversa consigo mesmo e com o leitor, uma organização do seu pensar matemático.

Observamos que a riqueza de informações contidas nas respostas dos estudantes na tarefa 1 (acertos, erros, incertezas e lacunas a respeito da ideia de número e conjuntos numéricos) necessitava de maior aprofundamento para entendermos melhor o que os estudantes pensavam sobre números como também gostaríamos que eles também refletissem sobre o que o próprio grupo havia produzido. Assim, elaboramos a próxima tarefa ofertando-lhes as respostas produzidas pelo grupo e que agora deveriam refletir sobre elas buscando conectá-las entre si por semelhanças e diferenças.

TAREFA 1.A – Agrupando objetos e elementos

1- Vocês receberam a lista de palavras ditas por cada integrante do grupo. Agora, as agrupem/classifiquem do modo mais conveniente. Não se esqueça de justificar cada grupo/classificação, além de dar um nome para cada um deles.

2- Escreva uma redação, música ou poesia com todas as palavras agrupadas/classificadas acima.

Objetivos

Objetivos específicos: a) caracterizar e agrupar por semelhança ou diferença palavras ditas/ escritas na tarefa anterior oriundas da ideia de número pelos alunos, considerando os diálogos e acordos sociais entre os mesmos; b) verificar a coerência textual e a capacidade de criação de textos a partir das palavras ditas pelos estudantes referentes a número; c) procurar identificar consenso entre os integrantes dos grupos para os agrupamentos escolhidos.

Conversa com o professor sobre as questões da tarefa

Para iniciar a tarefa, os estudantes devem receber do professor as palavras ditas acerca de número na aula anterior, através de xerox da folha utilizada, juntamente com a Tarefa 1.A. Uma sugestão é que os alunos sejam divididos em grupos de, no máximo, 4 componentes, para que a conversa não venha dispersar a atenção.

A mesma apresenta duas etapas: a) reflexão acerca da caracterização para o agrupamento de palavras ditas pelos estudantes relacionadas a número; b) criação de textos a partir de palavras ditas pelos estudantes referentes a número, considerando a coerência textual.

Em um primeiro momento, em nossa experiência, percebemos que os estudantes ficaram um tanto temerosos com a tarefa, mas com o diálogo em grupo deram início a tarefa e a mesma pode fluir, mesmo com "gotículas" de insegurança. Vale ressaltar que este tipo de tarefa não costuma fazer parte do cotidiano das aulas de matemática, influenciando na timidez dos estudantes. Os exercícios em sala de aula geralmente são de cunho fechado, possibilitando ao aluno apenas a traçar estratégias de percursos cognitivos para a resolução do problema. Ao encontrar a solução parte-se para outro problema e o ciclo continua, onde muitos alunos utilizam métodos mecanizados para resolução de problemas e a discussão que poderia ser feita em torno desse percurso não costuma ser agraciada nas salas de aula de matemática.

A intervenção no cenário da sala de aula de matemática pode modificar o cenário de desconforto entre os estudantes sobre o que e como fazer. É interessante que o professor sugira algumas ideias como: exemplificar os tipos de números, termos que tem a ver com sentimento em relação à matemática, definição, propriedade dos números, enfim, com relação à redação usando todos os termos, o professor pode sugerir que escrevam uma carta ao explicador, a um ex-professor, escreva uma poesia, um acróstico, uma música (rap, samba, rock, ...), o importante é que os estudantes percebam que é possível fazer este texto e que para nós o importante é a lógica da escrita envolvendo os termos de forma que possamos entender o que o estudante pensa sobre a matemática e, em particular, sobre o conteúdo específico, pois quando propomos a elaboração de textos permitimos a flexibilidade de respostas diferenciadas por parte dos estudantes. A tarefa possui características que podem favorecer ao entendimento de algumas ideias, como a pertinência de um determinado elemento em mais de um conjunto. É importante estimular os estudantes quanto ao espírito pesquisador, pedindo para que justifiquem ao máximo suas respostas, descrevendo detalhadamente como agrupou determinadas palavras e dando um nome para tal agrupamento. Essa minuciosidade pode nos dar elementos para compreendermos o que os nossos alunos pensam quanto aos números e seus conjuntos.

Introdução à tarefa 2

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN sugerem atividades de cunho investigativo nas aulas de matemática. O documento elenca algumas características importantes, potencializando essa tendência em educação matemática.

> [...], a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios. (BRASIL, 1997, p.27).

Em constante crescente, a Investigação Matemática vem ganhando espaço nos currículos brasileiros. Nessa perspectiva, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) diz que "a atividade matemática escolar não é olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade".

Os Parâmetros Curriculares Nacionais ressaltam ainda que é importante

> identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. (BRASIL, 2002a, p.47).

O professor tem um papel muito importante na investigação matemática em sala de aula na educação básica. As atitudes manifestadas em relação as atividades de investigação matemática, o conhecimento e domínio sobre a atividade e a condução dada a mesma contribuem para o sucesso da investigação, contribuindo para o envolvimento dos alunos.

Segundo Brocardo (2001), a realização de investigação na sala de aula pode ajudar a estabelecer um ambiente em que os alunos participam ativamente. Facilita a compreensão dos processos e ideias matemáticas e da atividade matemática. Segue o roteiro da tarefa 2.

TAREFA 2: Medindo corpos redondos: latas, tampas e outras coisas mais

1- Você trouxe ou recebeu de seu professor alguns “objetos redondos” tais como copo, tampinhas de refrigerantes, CDs entre outros e tem três tipos diferentes de linhas que deverão ser usadas para medir o contorno dos objetos completando a tabela com as informações encontradas.

Para medir o contorno dos objetos, colocamos a linha ao seu redor e depois verificamos na régua a sua medida.

Veja as figuras abaixo.

a) Preencha a tabela, na linha cinza anotando o tipo ou a cor de sua linha que irá usar para medir os objetos e na coluna o nome do objeto a ser medido.

“Objetos Redondos”	Linha 1	Linha 2	Linha 3
1:			
2:			
3:			

Agora, é com você. Meça o contorno dos seus objetos usando as linhas e anote, nos espaços em branco correspondente, da tabela.

2- Responda os seguintes itens:

a) Compare as medidas de um mesmo objeto usando as três linhas. O que observou?

____
____
____
____
____
____

b) Compare as medidas de diferentes objetos usando a mesma linha, o que pode afirmar sobre as medidas dos objetos?

c) Compare as suas respostas com as de seu colega de grupo, o que observou? Explique.

d) Qual foi o objeto mais fácil de medir? Explique.

e) Escreva um texto relatando o que foi proposto, o que foi feito, como foi feito e o que observou descrevendo todas as suas descobertas e suas conclusões. Obs: procure seguir a ordem sugerida.

Objetivos

É de suma importância, nesta tarefa, possibilitarmos momentos de reflexão para os nossos estudantes. Diante disso, seguem os seguintes objetivos específicos: a) familiarizar os estudantes com os instrumentos para medição; b) comparar as medidas obtidas usando linhas diferentes; c) verificar se o uso de diferentes tipos de linhas interfere no comprimento da circunferência; d) comparar os resultados obtidos com os colegas de grupo.

Conversa com o professor sobre as questões da tarefa

Para a aplicação desta tarefa serão necessários alguns objetos redondos onde, neste caso, cada aluno poderá trazer 1 objeto. A partir daí, cada grupo (no máximo 4 estudantes) escolherá 3 objetos circulares entre os que foram disponibilizados, podendo assim, medir o pedaço de cada linha (linha de costura, barbante fino, barbante grosso, nylon, entre outros) que acham suficiente para medir seus respectivos objetos.

Materiais utilizados – Três tipos de linhas, régua, tesoura, lupa (opcional) e objetos circulares escolhidos.


A tarefa apresenta quatro etapas: a) organização dos instrumentos de medida e escolha dos objetos circulares; b) medição dos objetos circulares escolhidos com as linhas e preenchimento da tabela; c) comparação e reflexão acerca dos valores das medidas tabeladas; d) Relato da dinâmica: o que foi feito, como foi feito, observações, descobertas e conclusões.

Como medir objetos redondos é pouco comum em nosso cotidiano, provavelmente alguns estudantes possam sentir dificuldades em relação a esta ação. Devemos considerar, em alguns casos, a falta de flexibilidade da linha utilizada ao “abraçar” o objeto redondo a ser medido e também o fato desse objeto ter uma superfície muito lisa, o que provocaria falta de atrito da linha com o objeto no momento da medição. É importante estimular a precisão para medir os objetos, comparando as medidas encontradas. Em nossa experiência, vimos que alguns grupos tenderam a utilizarem valores inteiros para representarem tais medidas que nem sempre eram inteiras, fato este que pode ocasionar problemas futuros em experimentações envolvendo medições. Com relação às dificuldades encontradas, vale ressaltar a experiência de uma estudante que mediu uma pequena tampa de remédio com um pedaço de barbante grosso, onde a mesma relatou que não estava conseguindo fazer a medição com tal barbante. Outro momento importante em nossa experimentação foi quando outra estudante perguntou ao professor se era possível um mesmo objeto medido com três linhas de espessuras diferentes fornecerem medidas diferentes. Esse fato pode acontecer considerando a flexibilidade da linha utilizada que pode "não abraçar" o objeto redondo como deveria.

De fato, essa tarefa poderá propiciar muitas discussões nos grupos, gerando uma riqueza nos debates e nos registros escritos e também nos diálogos. A linguagem e escrita matemática utilizada pelos estudantes são os alicerces didáticos fundamentais para a construção dos conhecimentos dos alunos. A participação do professor é muito importante para dar fluidez ao trabalho, não para dar respostas, mas sim para apoiar o seu aluno e fazê-lo refletir em torno do que está sendo pesquisado. Acreditamos que esta tarefa possa proporcionar aos alunos novos horizontes com relação ao significado de medida. Observamos, em nossa experiência, que as dificuldades encontradas deram espaços para novas descobertas e vivências a partir do trabalho em grupo e dos multidiálogos.

Introdução à tarefa 3

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), para que uma determinada situação possa configurar uma investigação é primordial que ela seja motivadora e desafiadora, não sendo imediatamente acessíveis, ao estudante, nem o processo de resolução nem a solução da questão. As atividades de investigação contrastam com as tarefas que são habitualmente usadas no processo de ensino tradicional, uma vez que são abertas, permitindo que o aluno coloque as suas próprias questões e estabeleça o caminho a seguir com liberdade.

De acordo com Ponte (2003), os professores de matemática podem propor tarefas de natureza diversas na sala de aula. Se o objetivo é que os alunos realizem investigações matemáticas, é importante analisar o modo como estas tarefas se distinguem de outras, bem conhecidas, como exercícios e problemas.

Observando o Quadro 1, Ponte relata as diferença básicas entre a realização de exercícios, problemas, explorações e investigação.

Quadro 1 – Classificação e descrição dos tipos de atividades.

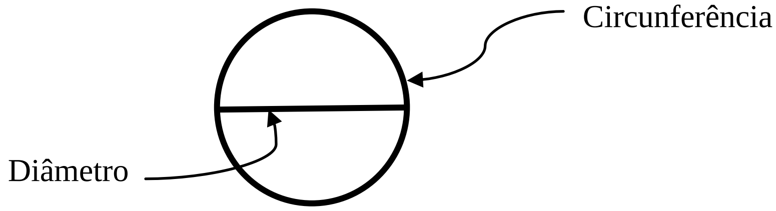
Atividade	Descrição
Exercício	É uma tarefa simples, um resolva, um efetue, de rápida resolução, e de estrutura fechada. Existe uma solução exata e já esperado pelo professor.
Problema	Tarefa com alto grau de dificuldade e com estrutura fechada. Existe uma solução exata ou mais coerente, relativamente rápida, já esperada pelo professor.
Exploração	Tarefa fácil, na qual muitas vezes, é sugerido ao aluno como proceder, para assim, observar e conceber importantes informações. Possui estrutura aberta.
Investigação	Uma tarefa também de estrutura aberta, porém mais difícil que a exploração, poucas informações são dadas, e o aluno fica mais independente para formular suas próprias questões norteadoras e empenhar em respondê-las.

Fonte: PONTE, 2003, p.5

A tarefa proposta a seguir possui características de uma atividade de exploração, mas que também apresenta questões que podem desencadear um processo de realização de testes e tentativas de demonstração para os resultados obtidos, visto que se induz o estudantes a perceber que o número Pi aparece na comparação entre o comprimento e o diâmetro de circunferências com qualquer medida de raio.

TAREFA 3: Circunferência e seu Diâmetro: uma comparação PIrada

Nesta tarefa, serão medidos o comprimento da circunferência e o diâmetro de algumas circunferências. Veja a figura:



1) Escolha uma das linhas e meça o comprimento da circunferência e o diâmetro e anote na tabela. Não esqueça de anotar na coluna o nome da circunferência.

Linha escolhida: ______________________

Circunferência	Comprimento da Circunferência	Comprimento do diâmetro	
1:			
2:			
3:			
4:			
5:			

a) Compare a medida da circunferência com a medida do diâmetro correspondente, o que observou?

____

____

____

____

____

____

b) Encontre a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro. Anote o resultado na quarta coluna. O valor é igual em todos os casos? Obs: **razão é a comparação existente entre dois valores de uma mesma grandeza.**

____

____

____

____

____

____

____

____

2) Repita o processo usando outra linha para medir as circunferências e complete a tabela.

Linha escolhida: ______________________

Circunferência	Comprimento do Diâmetro	Comprimento da Circunferência	$\frac{Comprimento}{Diâmetro}$
1:			
2:			
3:			
4:			
5:			

a) Calcule a razão entre o comprimento da circunferência e diâmetro e complete a 4ª coluna. O valor é igual em todos os casos?

____
____
____
____
____

b) Compare as razões encontradas da circunferência A das tabelas 1 e 2, elas são iguais? E para a circunferência B? E para a circunferência C? E para a circunferência D? E para a circunferência E ? Explique sua resposta

____
____
____
____
____
____
____

c) Compare a sua resposta com a dos seus colegas e comente.

____
____
____
____
____
____
____
____
____

Objetivos

Destacamos nesta tarefa os seguintes objetivos específicos: a) familiarizar os estudantes com os instrumentos para medição; b) verificar a origem do número irracional π a partir dos multidiálogos a respeito dos dados coletados.

Conversa com o professor sobre as questões da tarefa

Para ser dado o pontapé inicial na tarefa, é necessário disponibilizar para cada grupo (no máximo 4 alunos) circunferências de raios 1cm, 2cm, 3cm, 4cm e 5cm, respectivamente denominadas por circunferências A, B, C, D e E, que se encontra no ANEXO I deste guia. Também será necessário disponibilizar, pelo menos, dois tipos de linhas para os grupos medirem as circunferências, régua, tesoura e lupa (opcional).

A tarefa apresenta quatro etapas: a) escolha e organização dos instrumentos de medida; b) medição das circunferências e preenchimento da tabela; c) comparação e reflexão acerca dos valores das medidas tabeladas; d) reflexão final e conclusões.

Observamos, em nossa experiência, que durante as medições os estudantes ainda se deparavam com um certo desconforto para medir o comprimento das circunferências (fruto de um cotidiano escolar que pouco trabalha as medidas de objetos) com linhas, mas que, aos poucos, esse desconforto foi dando espaço a confiança e a familiaridade com os instrumentos de medição. Nem sempre é fácil sobrepor a linha escolhida/disponibilizada sobre a circunferência que pode estar relacionado ao tipo de linha que pode não ser flexível o suficiente para contornar com precisão a circunferência ou por que o raio é muito pequeno e, neste caso, é preciso que a linha se curve mais. Essas variáveis favorecem a uma bela discussão sobre o melhor tipo de linha para execução da tarefa. A ideia é que eles percebam que quanto mais flexível e fino for a linha, mais próximo do resultado esperado estarão, assim como quanto maior for a medida do raio, mais fácil se torna medir o comprimento. É importante ressaltar que quanto maior for o raio, menor será a curvatura do círculo, tornando os arcos de circunferências cada vez mais próximos de um segmento de reta, facilitando assim o processo de colocar a linha sobre a circunferência. A respeito da construção do número π, provavelmente os grupos poderão encontrar valores diferentes na razão $\frac{comprimento\ da\ circunferência}{comprimento\ do\ diâmetro}$. Os diálogos entre os grupos formam um pilar de sustentação para a construção do pensamento e o desenvolvimento cognitivo desses estudantes. Neste caso, vale a pena estimulá-los para uma discussão em torno dos elementos responsáveis por essas variações nos valores encontrados para os números candidatos a π.

Introdução à tarefa 4

O vídeo pode se tornar um importante aliado no processo de ensino aprendizagem, mas é preciso escolhê-lo adequadamente aos objetivos do trabalho, tarefa nem sempre fácil pois existem muitos filmes disponíveis e a nossa prática carece deste tipo de uso. Se a linguagem do vídeo possui características diferentes da linguagem dos livros, as metodologias devem ser pensadas considerando estas diferenças. É importante destacar que o vídeo não substitui outros recursos didáticos, ele os complementa e se integra aos demais. Moran (1995) apresenta algumas situações de uso de vídeos em aula:

- como sensibilização: para introduzir um novo assunto, despertando a curiosidade e motivação dos alunos;
- como ilustração: serve para apresentar novos cenários;
- como simulação: pode mostrar, por meio de simulação, processos químicos ou físicos, por exemplo;
- como conteúdo de ensino: informação sobre conteúdos específicos;
- como produção: registro do trabalho desenvolvido, intervenção ou expressão.

No nosso caso, o vídeo foi usado como instrumento de sensibilização, ilustração e como conteúdo de ensino. E neste caso, o conteúdo era história dos números no que se refere aos números e sua conexão com a geometria.

TAREFA 4 – Matemágica - uma viagem de ouro

1- A matemática se faz presente em nossas vidas nos mínimos detalhes, através de contagens, medidas, formas geométricas, entre outros. Agora, assistiremos ao filme "Donald no país da Matemágica", a fim de refletirmos a respeito da história dos números e suas relações com a geometria.

Fonte: http://matematicabrazil.blogspot.com/2016/10/donald-no-pais-da-matemagica.html

a) O que relacionado à matemática chamou a sua atenção? Por quê?

____
____
____
____
____
____

b) O que viram de novidade matemática?

____
____
____
____
____
____

c) O que já sabiam?

____
____
____
____
____
____
____
____

Objetivos

Objetivos específicos da tarefa: a) perceber a relação entre os números e a geometria; b) verificar a origem e história do número φ, relacionando-o com as formas geométricas em algumas situações cotidianas.

Conversa com o professor sobre as questões da tarefa

Com a intenção de sensibilizar o olhar e promover maior envolvimento dos estudantes na proposta de descobrir novas conexões entre a matemática, ciências e as artes e estimular novas práticas escolares de leitura e até mesmo escrita, de modo a promover discussões, propomos aos nossos estudantes que assistissem ao filme "Donald no país da Matemágica", com duração aproximada de 28 minutos e disponível gratuitamente no Youtube.

A tarefa apresenta duas etapas: a) assistir o filme; b) conversar e refletir, em grupo de no máximo 4 estudantes, sobre as percepções dos estudantes acerca do filme. Ela faz uma abordagem sobre o que mais chamou a atenção ao longo do filme, assim como o que viram de novo e o que já sabiam. As diversidades nas respostas pode ser um atrativo interessante para o professor e um elemento a mais para potencializar as futuras aulas de matemática, visto que o filme trabalha a história, a música e os jogos em uma relação intrínseca com a matemática. Neste momento, é importante a contribuição do professor trazendo outras e novas contribuições de forma a complementar as informações contidas no filme. Como este filme é rico em detalhes, é provável que muitas aulas sejam inspiradas a partir do conteúdo por ele apresentado.

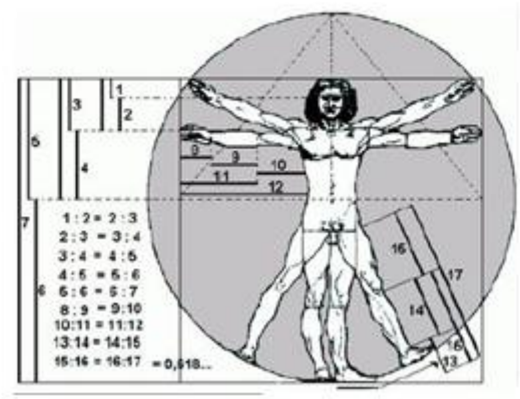
É importante chamar a atenção dos alunos para a forte relação entre o cotidiano e a matemática e entre a aritmética e a geometria.

Introdução à tarefa 5

Castro e Frant (2011) relatam que, entendendo a interação como uma cena não estática, é preciso levar em conta que estas não se dão ao acaso e que, na verdade, apresentam um sentido que emerge de um conjunto de aspectos determinados pela atividade em que estes indivíduos estejam imersos. Os atores, ora falam, ora escutam construindo um processo necessariamente bilateral. O ato de falar e ouvir constitui uma ação cooperativa na qual o falante não monitora apenas suas ações, mas também a dos demais participantes do diálogo, levando ambas as ações em consideração. Esse conjunto de características favorece a construção do conhecimento por parte dos alunos, sendo estes autores de seus próprios conhecimentos. Outro aspecto a ser considerado é a possibilidade de usar o próprio corpo como objeto de estudo. Neste sentido, assim como Vitruvio estabeleu relação entre as diferentes medidas de nosso corpo propusemos aos estudantes que fizessem estas medições e as comparassem entre si. Segue o roteiro da tarefa.

TAREFA 5: um número Divino

1- Com a ajuda de seus colegas de grupo e uma fita métrica, preencha a tabela abaixo. Será necessário escolher um integrante do grupo para ser medido pelos demais. Lembre-se, a precisão da medida é muito importante.



Fonte: http://artenarede.com.br/blog/index.php/o-homem-vitruviano-e-o-numero-phi-a-matematica-da-beleza/

Nome do aluno: ____

Medida 1 (M_1)	Medida 2 (M_2)	M_1 / M_2
Distância entre a ponta do nariz e o queixo =	Distância entre a linha dos olhos e a ponta do nariz =	
Distância entre o umbigo e o chão =	Distância do topo da cabeça até o umbigo =	
Distância do ombro a ponta do dedo =	Distância do cotovelo a ponta do dedo =	
Tamanho do dedo =	Distância da dobra central do dedo até a ponta =	

a) Compare a Medida 1 com a Medida 2, o que observou?

____
____
____
____
____
____
____

b) Observe os valores encontrados para as razões M_1 / M_2 da 3ª coluna. O valor é igual em todos os casos?

____
____
____
____
____
____
____

2- Repita o processo medindo outro integrante do grupo e complete a tabela.

Nome do aluno: ____

Medida 1 (M_1)	Medida 2 (M_2)	M_1 / M_2
Distância entre a ponta do nariz e o queixo =	Distância entre a linha dos olhos e a ponta do nariz =	
Distância entre o umbigo e o chão =	Distância do topo da cabeça até o umbigo =	
Distância do ombro a ponta do dedo =	Distância do cotovelo a ponta do dedo =	
Tamanho do dedo =	Distância da dobra central do dedo até a ponta =	

a) Compare a Medida 1 com a Medida 2, o que observou?

____

____

____

b) Observe os valores encontrados para as razões M_1 / M_2 da 3ª coluna. O valor é igual em todos os casos?

____

____

____

c) Compare as razões encontradas nas tabelas 1 e 2, elas são iguais? Explique a sua resposta.

____

____

____

____

____

____

____

d) O número irracional fi, oriundo do pentágono regular, possui valor φ = 1,618033988749894848... . Ele também é conhecido como número áureo ou número de ouro. Compare as razões preenchidas nas tabelas acima dos corpos de alguns integrantes do grupo com o número áureo. O que observou?

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Objetivos

Propiciar momentos em que os estudantes possam experimentar novas experiências engrandecem não tão somente o conhecimento matemático dos alunos, mas também ao crescimento pessoal deste para lidar com algumas situações do dia a dia. Seguem os seguintes objetivos específicos da tarefa: a) familiarizar os estudantes com os instrumentos de medida; b) medir diferentes partes do corpo humano; c) comparar as medidas encontradas entre si de forma a encontrar a razão entre elas.

Conversa com o professor sobre as questões da tarefa

Para iniciar a tarefa é interessante que o professor traga algumas informações sobre Vitruvio e em seguida disponibilizar para cada grupo uma fita métrica, para que possam medir partes do corpo de seu colega. É interessante destacar também a importância da precisão das medidas (jamais desprezar os milímetros). E para encontrar a razão entre as medidas, os estudantes podem ser orientados a usarem as calculadoras de seus celulares. Nesta tarefa o objetivo não é saber fazer contas de dividir e sim perceber a relação entre as razões comparando-as bem como, as aproximações que definem o número irracional φ.

A tarefa apresenta quatro etapas: a) escolha do colega a ser medido; b) preenchimento da tabela; c) comparação e reflexão acerca dos valores das medidas tabeladas; d) reflexão final e conclusões.

Em nossa experiência, percebemos que os nossos estudantes não tiveram grandes dificuldades para medirem algumas partes do corpo do colega de grupo, provavelmente por se tratarem de medidas lineares. Por coincidência ou insistência, observamos ao longo do preenchimento das tabelas dos quatro grupos uma grande quantidade de medidas inteiras. Esse fato pode estar atrelado à falta de familiaridade desses estudantes em trabalhar com medidas e manipular instrumentos de medição como também pelo pouco uso de números decimais associados à medida, em sala de aula. Outra possibilidade seria a ideia associada ao número natural tão comum cotidianamente.

Com relações as possíveis percepções dos estudantes ao longo da tarefa no que diz respeito às ideias de número com finitas casas decimais e número com infinitas casas decimais, é interessante traçar um paralelo com os eixos constitutivos finito/infinito, aproximado/não aproximado e periódico/não periódico, pois os mesmos apareceram com propriedade nesta tarefa, podendo provocar inquietações nos estudantes como também dar lugar a construção do pensamento e conhecimento, colaborando assim para uma experiência rica baseada na troca de experiências e na dialógica.

Introdução à tarefa 6

De acordo com Nacarato e Lopes (2009), a definição de trabalho colaborativo nasce do confronto entre pontos de vista diferentes, através do surgimento de um debate, onde o objetivo é a resolução de um problema. Cada um, ao possuir diferentes saberes e competências, fruto de suas vivências e experiências pessoais, terá de negociar significados e representações de onde possam surgir conflitos entre ambos, embora mantendo um nível mínimo de compreensão mútua. Ainda segundo os autores, quando um aluno tem de formular uma resposta cognitiva para uma tarefa, começa por construir uma representação da própria tarefa, dos conhecimentos que julga serem necessários e da sua finalidade. Paralelamente, se estiver trabalhando com outro individuo, pode acontecer que essa mesma situação esteja a ser vivida por esse sujeito de outra forma, e a partir daí, as novas cognições vão construindo um jogo social complexo no qual a negociação do significado terá um papel determinante.

Na próxima tarefa os estudantes terão a oportunidade de vivenciar este jogo envolvendo diferentes pontos de vista para a realização dela. Segue o roteiro.

TAREFA 6: Pentagrama e a Razão Áurea

1- Vocês receberam um pentágono regular com suas diagonais formando um pentagrama e dois triângulos, um de cor verde e outro de cor amarela.

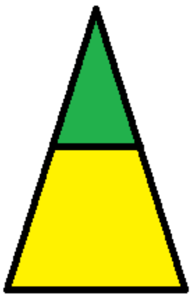
a) Verifique na figura onde podem ser encaixados os triângulos de cor verde. Justifique a sua resposta.

____
____
____
____
____

b) É possível encaixar o triângulo amarelo também? Justifique.

____
____
____
____
____

2- Observe a figura abaixo em que o triângulo verde foi sobreposto ao amarelo.



No triângulo verde chamaremos de x a medida do maior lado e de y a medida do menor lado. Como deve ser chamado o maior lado do triângulo amarelo em função de x e y (usando as letras x e y)? E o lado menor do triângulo amarelo, como deve ser chamado?

____
____
____
____
____
____

3- Agora, assista ao vídeo “O número de ouro no Pentagrama” (https://www.youtube.com/watch?v=m7bEyDROTig) para entender como GSMathred fez para encontrar a razão áurea $\frac{x}{y}$. Em seguida, identifique os conteúdos apresentados no vídeo e que você já conhece ou estudou nas aulas de matemática.

4- Juntamente com os seus colegas de grupo, escreva um texto com os passos observados durante a aula para a obtenção do número φ destacando o que achou mais interessante.

Objetivos

Compreender, a partir do manuseio de triângulos semelhantes oriundos das diagonais do pentágono regular, a origem e a construção do número φ, considerando os multidiálogos e trocas de experiências. Destacamos nesta tarefa os seguintes objetivos específicos: a) familiarizar os estudantes com os materiais manipuláveis; b) verificar, a partir de sobreposições de triângulos, congruências, semelhanças e relações métricas entre os triângulos formados pelas diagonais do pentágono regular.

Conversa com o professor sobre as questões da tarefa

Para iniciar esta tarefa é necessário disponibilizar para cada grupo, de no máximo 4 alunos, um pentágono regular com suas respectivas diagonais e dois triângulos, um de cor verde e outro de cor amarela, retirados de um pentágono regular congruente ao pentágono regular recebido pelos estudantes disponível no ANEXO II deste produto.

A tarefa apresenta cinco etapas: a) manipulação livre de triângulos e do pentágono regular; b) sobreposição de triângulos; c) comparação dos triângulos a fim de observar semelhanças; d) resolução da equação do 2º grau formada a partir da semelhança de triângulos; e) reflexão e discussão acerca do método matemático utilizado para obtenção do número áureo a partir das diagonais do pentágono regular.

Materiais utilizados – Triângulos de papel ofício, pentágono regular de papel ofício e vídeo retirado do Youtube “O número de ouro no Pentagrama” de GSMathred.

Em um primeiro momento, sugerimos que o material em anexo seja entregue a cada grupo para que os mesmos possam conhecer o material e fazer manipulação livre. Durante a tarefa, é interessante estimular os alunos quanto à visualização geométrica e a sobreposição de figuras, sendo esses atributos importantes para as congruências e semelhanças de triângulos que poderão ser percebidos ao longo da tarefa e que são de suma importância para a formação da equação do 2º grau que fornecerá o número irracional φ. Mais do que isso, é fundamental provocar nos estudantes o espírito investigador, solicitando uma reflexão sobre todas as possibilidades de congruências e semelhanças de triângulos no interior do pentágono regular, a fim de enriquecer a discussão.

Acreditamos que essa proposta possa oferecer elementos diferentes no que diz respeito à aprendizagem de números irracionais, onde o aluno tem a chance de manipular figuras e discutir ideias com os colegas de grupo, desenvolvendo assim o raciocínio lógico e o pensamento matemático, articulando os campos geométrico e algébrico, bastante sugerido pelo PCN e BNCC.

Introdução à tarefa 7

A investigação matemática pode potencializar a aprendizagem dos estudantes permitindo vivências em diferentes níveis de desenvolvimento, possibilitando assim experiências variadas em busca da construção do conhecimento. Para tanto, é necessário que o aluno entenda a seriedade do trabalho e que as tarefas aplicadas sejam planejadas.

Segundo Canavarro (2011), o ensino exploratório da matemática não afirma que os alunos descubram isoladamente as ideias matemáticas que devem ser aprendidas, nem tão pouco que inventam conceitos e procedimentos. O ensino exploratório da matemática defende que os alunos aprendam a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem enxergar a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva. Os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática.

Esta tarefa surge a partir da leitura de um trabalho[3] em que a autora propõe tirar fotos de objetos redondos usando o retângulo áureo construído em sala de aula com um Smartphone. Neste caso, propusemos aos nossos estudantes a construção do retângulo áureo e a sua respectiva espiral áurea no acetato. Segue o roteiro.

[3] O trabalho lido refere-se à dissertação de mestrado Razão Áurea e Números de Fibonacci: da teoria à prática através da fotografia, da autora Maria Isabel Afonso Melo, PUC-RJ/PROFMAT, Ano: 2017.

TAREFA 7: A Espiral Áurea na tela do Smartphone[4]

1- Meça o maior lado da área de fotografia do seu celular (Medida: ______________)

2- Meça o menor lado da área de fotografia do seu celular (Medida: ______________)

3- Você recebeu uma malha quadriculada, com quadrados medindo 1 cm de lado. Desenhe na malha quadriculada um retângulo áureo medindo 8 cm por 5 cm, seguindo as orientações passo a passo.

4- Com o auxílio do compasso, construa uma espiral áurea no retângulo seguindo as orientações passo a passo.

5- Você acabou de receber um pedaço de acetato. Construa o retângulo áureo e a espiral áurea no acetato a partir da sobreposição do acetato em relação ao retângulo áureo e espiral áurea construídos na malha quadriculada 8 cm por 5 cm. Para isso, você deverá usar canetinha permanente.

[4] Esta tarefa é baseada na dissertação de mestrado Razão Áurea e Números de Fibonacci: da teoria à prática através da fotografia, da autora Maria Isabel Afonso Melo, PUC-RJ/PROFMAT, Ano: 2017.

Objetivos

Proporcionar momentos em que os estudantes possam experimentar a construção do retângulo áureo e sua espiral áurea com régua e compasso. Segue os objetivos específicos da tarefa: a) familiarizar os estudantes com os instrumentos para medição e construção geométrica; b) vivenciar e compreender as etapas da construção do retângulo áureo e sua respectiva espiral áurea, em um ambiente colaborativo.

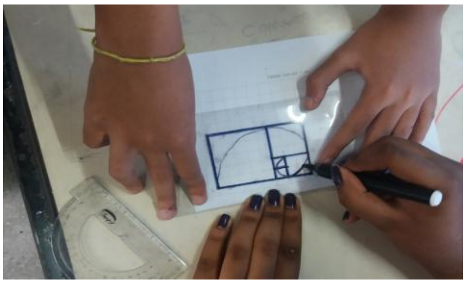
Conversa com o professor sobre as questões da tarefa

Para que a tarefa seja iniciada é necessário disponibilizar para cada aluno uma malha quadriculada 1 cm x 1 cm em papel ofício (ANEXO III), acetato, canetinha permanente, régua e compasso. Também é importante lembrar que o aluno utilizará o seu próprio Smartphone para a execução da mesma.

A tarefa apresenta quatro etapas: a) medição da área de foto do seu respectivo Smartphone; b) construção do retângulo áureo na malha quadriculada; c) construção da espiral áurea na malha quadriculada; d) Construção do retângulo áureo e espiral áurea no acetato.

Em nossa experiência, optamos por trabalhar com um retângulo áureo de dimensões 8 cm por 5 cm, mas isso não impede de utilizarmos outras medidas que caracterizem a proporção áurea. É importante lembrar que, caso o professor queira mudar as dimensões do retângulo áureo, esta esteja de acordo com as dimensões da área de fotografia dos Smartphones utilizados pelos alunos. Não percebemos dificuldades por parte dos nossos alunos para a construção do retângulo áureo na malha quadriculada. Para traçar a espiral áurea no retângulo áureo recém construído (passo a passo no ANEXO IV), será necessário recorrer a um instrumento de construções geométricas muito importante, o compasso. De fato, foi notória, em nossa experiência, a dificuldade da maioria dos estudantes com esse instrumento, onde foi perceptível tal falta de familiaridade com o compasso. Em seus cotidianos escolares, os estudantes fazem pouco uso desse importante instrumento de construções geométricas nas aulas de matemática, favorecendo a insegurança e instabilidade nos momentos em que se faz necessário seu uso. Diante das dificuldades, o apoio do professor e, principalmente, o trabalho colaborativo, formam uma dupla importante e com potencialidades para a execução desta etapa. Estudantes com mais habilidades no uso do compasso podem auxiliar os estudantes que apresentam mais dificuldades em seu manuseio.

Para finalizar a tarefa, os alunos são convidados a passar o retângulo áureo e a espiral áurea desenhados na malha quadriculada para o acetato, sobrepondo o acetato transparente sobre o retângulo áureo construído.



Nessa perspectiva, destacamos o trabalho colaborativo entre os estudantes, que pode ser fundamental para o bom andamento durante a execução desta tarefa podendo contribuir para a construção de um jogo social complexo no qual a negociação de significados terá um papel determinante.

Introdução à tarefa 8

Assis, Frade e Godino (2013) relatam que atividades de investigação possibilitam aos alunos vivenciarem experiências matemáticas. No entanto, para que essa investigação possa se desenvolver, é recomendado que o professor centre a aula na atividade dos alunos, em suas ideias e em sua pesquisa, e mantenha uma postura questionadora gerenciando o grau de apoio e suporte a dar aos alunos. Nessa perspectiva, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997) diz que a atividade matemática escolar não é olhar para coisas prontas, acabadas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade, contribuindo assim para formação intelectual e cidadã. Com o intuito de avaliarmos o trabalho realizado até aqui propusemos que os estudantes fotografassem objetos redondos com e sem a divisão áurea da tela do seu Smartphone. Segue a proposta da tarefa.

TAREFA 8: Fotografando π usando φ

1- Em sua casa, fotografe três objetos redondos e, utilizando o retângulo áureo do acetato, coloque-o na área de fotografia de seu Smartphone de modo centralizado e fotografe os mesmos três objetos novamente. Compare as fotos e comente[5].

[5] Esta tarefa é baseada na dissertação de mestrado Razão Áurea e Números de Fibonacci: da teoria à prática através da fotografia, da autora Maria Isabel Afonso Melo, PUC-RJ/PROFMAT, Ano: 2017.

Objetivos

Utilizar técnica fotográfica usando o retângulo áureo e espiral áurea construídos no acetato, a fim de verificar a estética, harmonia e a proporção áurea.

Conversa com o professor sobre as questões da tarefa

Aqui finalizamos um conjunto de tarefas que destacaram os números, os conjuntos numéricos e os números irracionais, dando ênfase ao π e φ. Nesta tarefa, pensamos em fundir as ideias em torno das construções dos números π e φ, dando lugar as artes e a fotografia.

Para tal, dividimos a tarefa em três momentos:

Momento 1 – Fotografar três objetos redondos;

Momento 2 – Utilizando o retângulo áureo feito no acetato, fotografar novamente os mesmos três objetos redondos;

Momento 3 – Comparação e comentários acerca das fotos dos momentos 1 e 2.

Em relação aos materiais utilizados, destacamos os Smartphones dos alunos e o retângulo áureo e espiral áureo construídos no acetato. Esta atividade foi realizada em casa e de maneira individual. Em nossa experiência, percebemos como as fotografias retratam um pouco como a matemática se faz presente na vida dos estudantes de maneira suave e agradável, onde a beleza da geometria representada nas imagens podem traduzir significados aritméticos e algébricos. Essa sensibilidade só é capaz de transcender a barreira do conhecimento quando os atores (estudantes) são levados a experiências que possibilitem tocar, sentir, dialogar, refletir e formar uma ideia sólida em torno do que se quer descobrir. Durante o trabalho, nossos estudantes relataram a beleza nas fotos, a harmonia entre os elementos fotografados e a proporcionalidade áurea. Também é importante ressaltar que, segundo alguns estudantes, foi uma surpresa estudar matemática a partir de fotografias.

REFERÊNCIAS

ASSIS, Adriana; FRADE, Cristina; GODINO, Juan D.. **Influência dos Padrões de Interação Didática no Desenvolvimento da Aprendizagem Matemática: análise de uma atividade exploratório-investigativa sobre sequências**. Bolema**,** Rio Claro, v. 27, n. 47, p.733-758, dez. 2013.

BOYER, C.B. MERZBACH, U. C. **História da matemática**. Trad. HELENA CASTRO. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**.(1997). Brasília: MEC/SEF.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretária de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio PCN + Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais** - Ciências Humanas e suas Tecnologias. Brasília/D.F, 2002a.

BROCARDO, J. **Investigações na aula de matemática: A história da Rita**. In I. C. Lopes, J. Silva, P. Figueiredo (EDs.), Actas ProfMat. p. 155-161. Lisboa: APM, 2001.

CANAVARRO, Ana Paula. **Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios**. Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Évora, v. 2, n. 13, p.11-18, dez. 2011.

CASTRO, Monica Rabello de; FRANT, Janete Bolite. **Modelo da Estratégia Argumentativa.** Curitiba: Ufpr, 2011. 176 p.

D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática**. São Paulo: Summus, 1986.

FERES, Solange Aparecida de Camargo; NACARATO, Adair Mendes. **O Pensamento Matemático Revelado no Discurso.** In: EMBRAPEM, 1., 2008, São Paulo. Anais... . São Paulo: Unesp, 2008. v. 1, p. 1 - 15. Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/146-1-A-gt11_feres_ta.pdf>. Acesso em: 17/02/2018.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

KINDEL, Dora Soraia. **Um Ambiente Colaborativo a Distância: Licenciandos Dialogando sobre os Infinitos.** Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Bandeirante de São Paulo Tese de Doutorado, São Paulo, 2012.

MCKENNEY, S.; REEVES, T. **Conducting educational design research**. Abingdon: Routledge, 2012.

MORAN, J. M.. **“O vídeo na sala de aula”.** In Revista Comunicação & Educação. São Paulo, ECA-Ed. Moderna, [2]: 27 a 35, jan./abr. de 1995.

MELO, M. I. A. **Razão Áurea e Números de Fibonacci: da teoria à prática através da fotografia.** Dissertação de mestrado, PUC-RJ/PROFMAT, Ano: 2017.

NACARATO, A; LOPES, C. **Escritas e leituras na educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

POMMER, Wagner Marcelo. **A construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais**. São Paulo: tese de Doutorado USP, 2012.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigação Matemática na Sala de Aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

__________. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

__________. **Investigações matemáticas na Sala de Aula.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

POWELL, Arthur; BAIRRAL, Marcelo. **A escrita e o pensamento matemático**. São Paulo: Papirus Editora, 2006. 111 p.

RIPOLL, C. C. (2004). **A construção dos números reais nos Ensinos Fundamental e Médio**. In: II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Salvador.

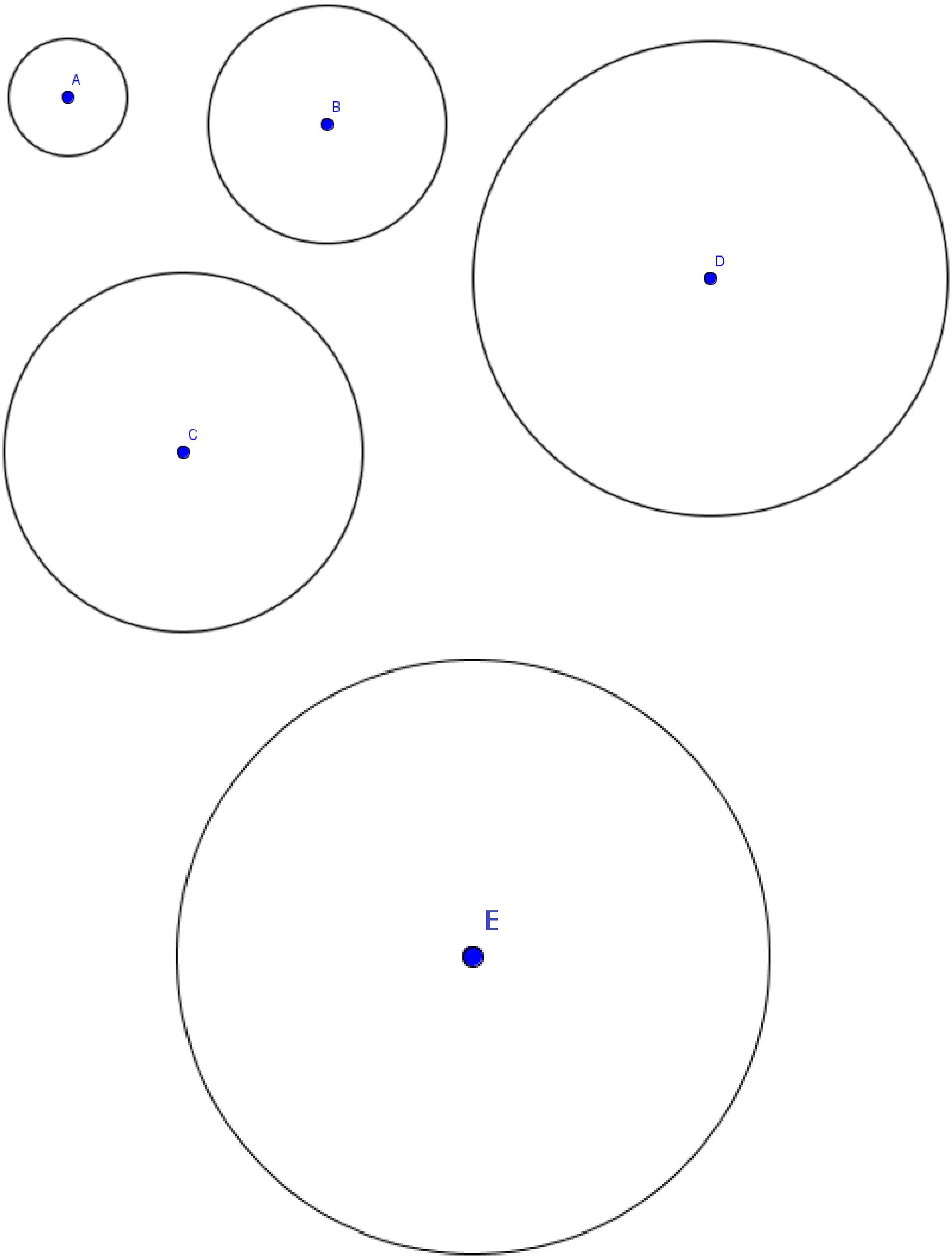
SILVA, S. O. **Função: concepções e estratégias de estudantes da 1ª série do Ensino Médio na exploração de tabelas**. Dissertação de Mestrado, PPGEduCIMAT – UFRRJ, Ano: 2017.

SILVA, Benedito Antonio da; PENTEADO, Cristina Berndt. **Fundamentos dos números reais: concepções de professores e viabilidade de início do estudo da densidade no ensino médio.** Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v. 11, n. 2, p.351-371, 2009.

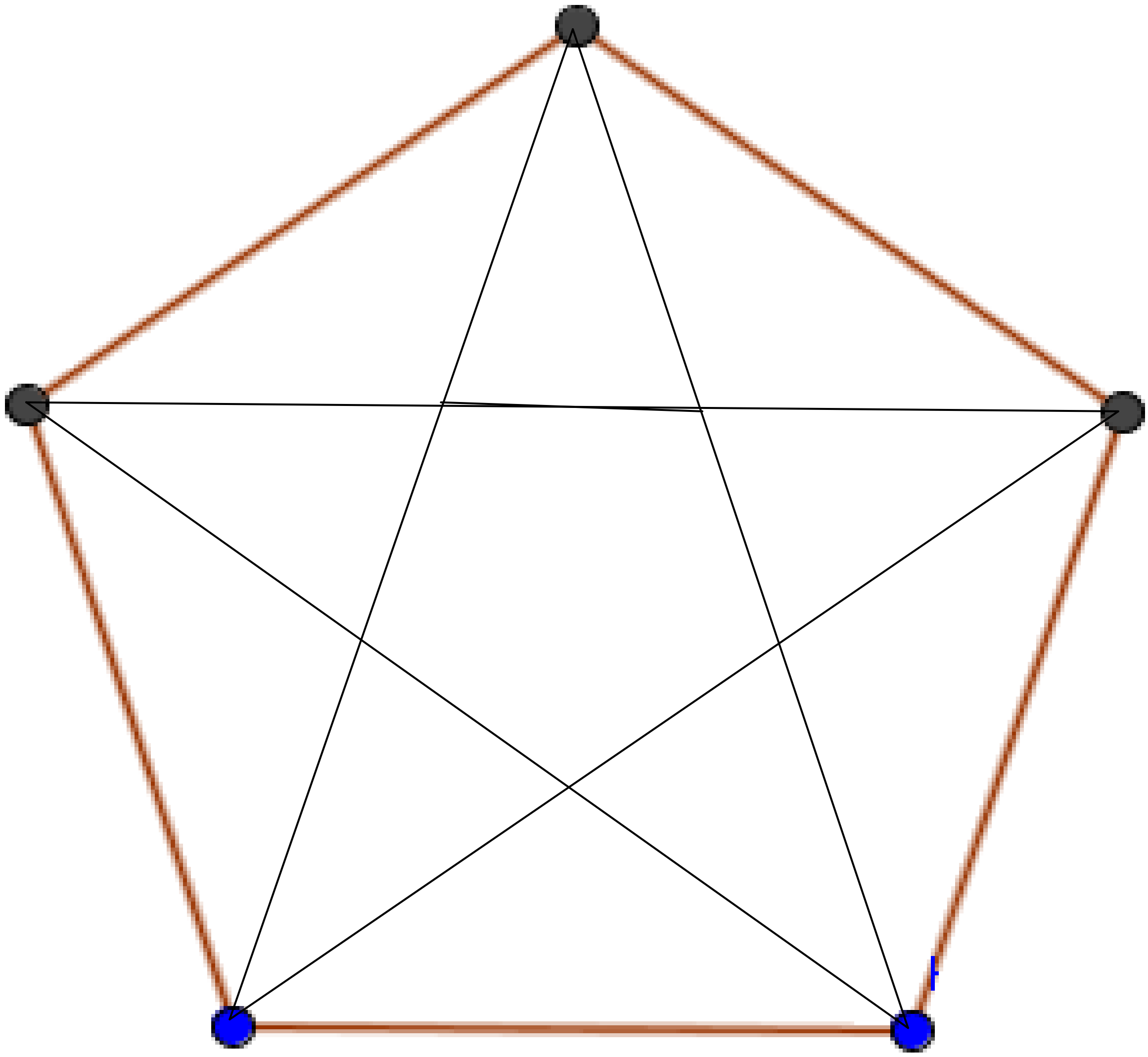
SKOVSMOSE, Ole. **Cenários para investigação**. Bolema, Dinamarca, v. 14, n. 14, p.66-91, 2000.

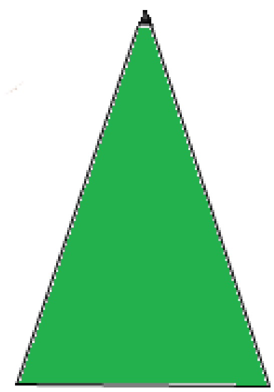
SMOLE, Kátia S.; DINIZ, Maria I. (Orgs.) **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

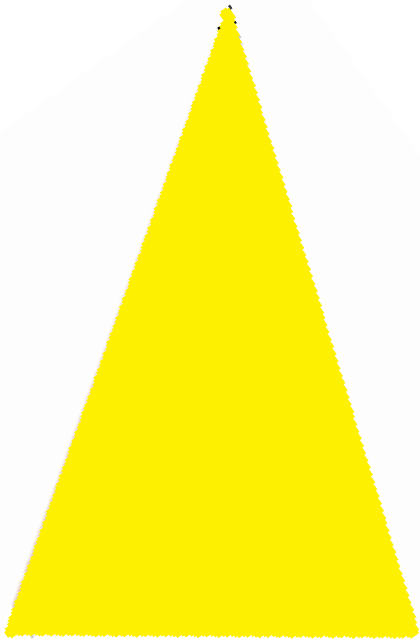
ANEXO I – Circunferências



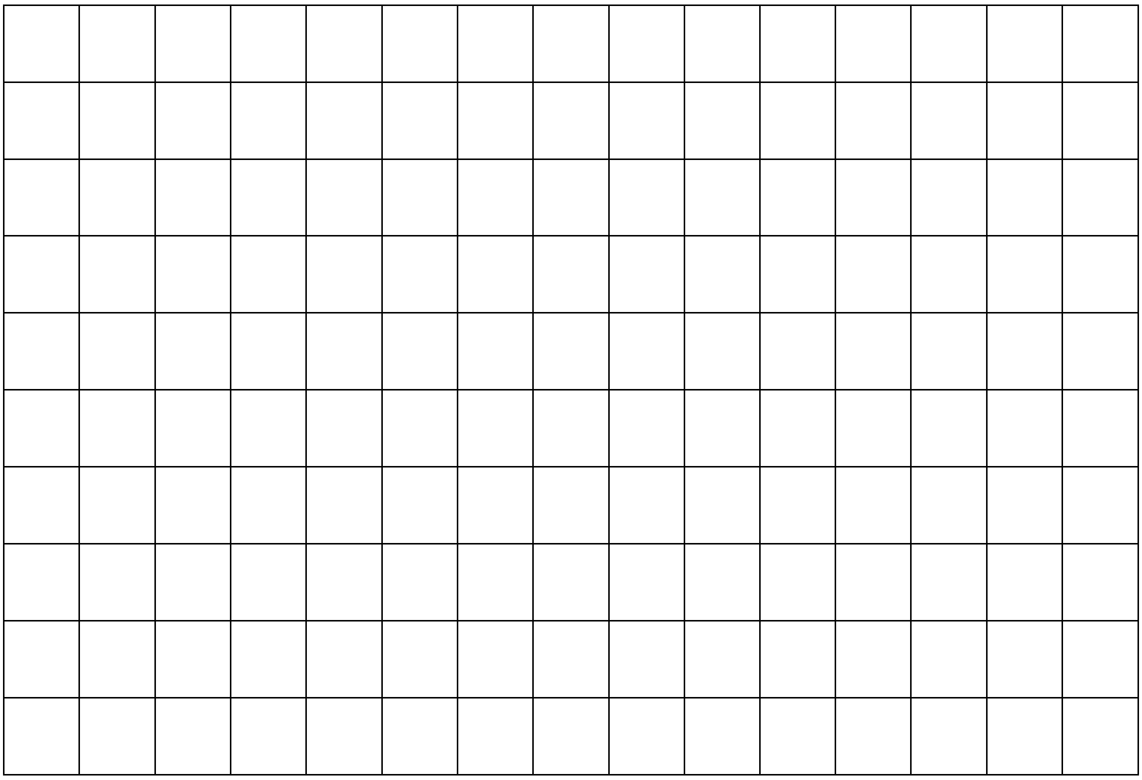
ANEXO II – Pentágono Regular (Pentagrama)







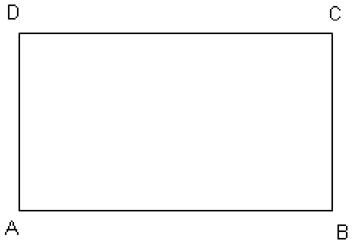
ANEXO III – Malha Quadriculada



ANEXO IV – Passo a passo para a construção da espiral áurea

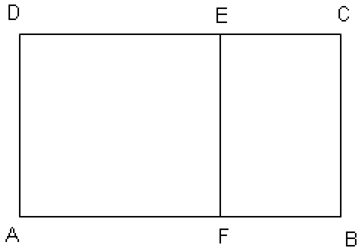
1º Passo

Construa um retângulo 8cm por 5cm na malha quadriculada recebida. Nomeie seus vértices em A, B, C e D.



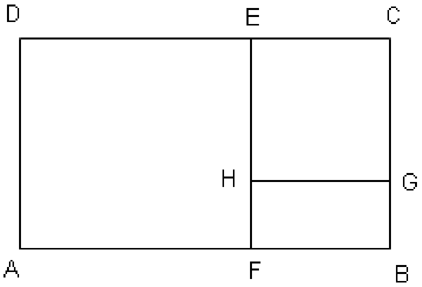
2º Passo

A seguir construa um quadrado 5cm por 5cm utilizando o lado AD. E nomeie os outros vértices de E e F , conforme figura.



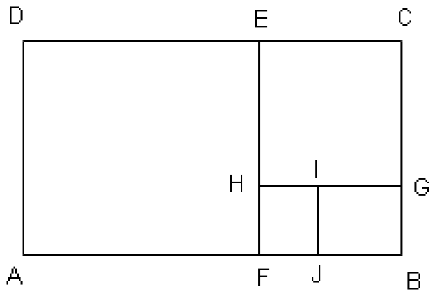
3º Passo

Refaça o processo construindo um quadrado 3cm por 3cm utilizando o lado EC. Nomeie os outros vértices de G e H.



4º Passo

Refaça o processo construindo um quadrado 2cm por 2cm utilizando o lado GB . Nomeie os outros vértices de I e J.



Para finalizar, divida o retângulo FHIJ em dois quadrados 1cm por 1cm.

5º Passo: utilizando o compasso

- Coloque a ponta seca do compasso no vértice E e faça uma abertura até o vértice A. Gire até chegar no vértice F.
- A seguir, coloque a ponta seca do compasso no vértice H e faça uma abertura até o ponto F. Gire o compasso até chegar no ponto G.
- Agora, coloque a ponta seca no ponto I. Faça uma abertura até o ponto G e gire o compasso até o ponto J.
- E, finalmente, coloque o compasso no ponto médio do segmento IJ. Abra o compasso até o ponto I e gire até o ponto J.
- Ok! Sua espiral áurea já está pronta!