UFRRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO

GEOMETRIA ESPACIAL: A APRENDIZAGEM ATRAVÉS DE DIFERENTES RECURSOS DIDÁTICOS

EDNARA ALVES DA SILVA PAULA

2020

Alves da Silva Paula, Ednara, 1986-

A324g GEOMETRIA ESPACIAL: A APRENDIZAGEM ATRAVÉS DE DIFERENTES RECURSOS DIDÁTICOS / Ednara Alves da Silva Paula. - Mendes, 2020.

135 f.

Orientador: Bruno Matos Vieira.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, 2020.

1. Geometria Espacial. 2. Visualização . 3. Recursos didáticos . I. Matos Vieira, Bruno, 1979-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

GEOMETRIA ESPACIAL: A APRENDIZAGEM ATRAVÉS DE DIFERENTES RECURSOS DIDÁTICOS

EDNARA ALVES DA SILVA PAULA

Sob a orientação do Professor Doutor
Bruno Matos Vieira

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação** no Curso de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática.

Seropédica, RJ
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

EDNARA ALVES DA SILVA PAULA

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Educação em Ciências e Matemática, no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 29/04/2020.

____
Bruno Matos Vieira, Prof. Dr UFRRJ (Orientador)

____
Marcelo Almeida Bairral, Prof. Dr UFRRJ

____
Juliane Figueiredo Fonseca, Profª. Drª. UFJF

DEDICATÓRIA

À memória de minha mãe Tania Luiza (falecida em agosto de 2018), minha inspiração, que sempre me ensinou a ser independente e a lutar pelos meus sonhos e objetivos. Foi uma mulher sábia e forte que me incentivou a subir mais esse degrau na minha formação, e está presente no meu coração.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, por me capacitar, me dar saúde, e determinação para continuar e concluir o mestrado.

Agradeço o apoio do meu esposo Antonio Luiz Teixeira de Paula, pelo seu companheirismo, paciência, incentivo, e por todas as vezes que ficou por horas me aguardando no carro, à espera do término das aulas, não imagino como faria sem a sua ajuda.

Agradeço ao meu orientador Bruno Matos Vieira, por todos os ensinamentos, pelas horas de dedicação em me instruir, pelas sugestões e apontamentos que foram imprescindíveis para a elaboração desse trabalho, e pela boa vontade em me atender sempre que foi necessário.

Agradeço ao professor Marcelo Almeida Bairral, por me receber como visitante no grupo GEPETICEM, onde tive a oportunidade de receber informações e sugestões valiosas para o término da minha pesquisa.

Agradeço ao coordenador Márcio de Albuquerque Vianna e toda a equipe do PPGEduCIMAT, tanto a equipe de apoio, como aos professores do programa, que tornaram possível a realização de mais uma etapa na minha formação profissional.

Agradeço aos colegas do curso, que passaram por toda essa trajetória comigo, principalmente aos amigos Adriano e Eli Felipe, que tive diversos momentos de troca, dividindo as dúvidas e as ansiedades dessa jornada.

Agradeço a toda equipe do Colégio Estadual João Kopke, por abrir as portas para a realização dessa pesquisa, as minhas amigas Lucilene e Shener, que se disponibilizaram a me ajudar, ficando com as minhas turmas, em momentos que foram necessários. As amigas Elisa e Izabel, por acreditar e participar dessa pesquisa comigo. E as diretoras Tania Fontes e Lise Maria pela autorização para a realização desse trabalho na Unidade Escolar.

Agradeço aos amigos Paulo Mariano e Marcos Paulo, pelas dicas e sugestões para a participação no processo seletivo, bem como, no decorrer do curso.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 – *This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Finance Code 001.*

RESUMO

PAULA, E. A. S. 2020. 135 p. **Geometria espacial: a aprendizagem através de diferentes recursos didáticos**. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2020.

Esta pesquisa tem como objetivo apresentar um possível caminho para o desenvolvimento da habilidade de visualização, bem como, verificar de que forma esses recursos podem ajudar no desenvolvimento do pensamento geométrico espacial no Ensino Médio, numa perspectiva de aprendizagem significativa. Considerando que a habilidade de visualização é o ponto de partida para o processo de ensino e aprendizagem de geometria, propomos apoios didáticos em materiais manipulativos concretos (sólidos geométricos) e virtuais (GeoGebra 3D), buscando trabalhar também dentro de um contexto interdisciplinar com Artes e História, desenvolvemos atividades utilizando artes geométricas, para revisar conceitos de Geometria Plana, e atividades baseadas na construção de maquetes, sendo inspiradas nas obras de Oscar Niemeyer. O presente trabalho foi desenvolvido com alunos de uma turma de 2º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual João Kopke em Engenheiro Paulo de Frontin (RJ), e observamos que o uso de maquetes e artes geométricas trouxeram significado para o estudo da Geometria, que a manipulação dos sólidos geométricos auxiliou no desenvolvimento da visualização, bem como, o GeoGebra, trazendo inovação e estimulando os alunos a aprendizagem. Foi elaborada uma sequência didática como produto dessa pesquisa, com atividades diversificadas lançando mão dos recursos utilizados nesse trabalho, porém passando por alguns ajustes.

Palavras-chave: Geometria Espacial; Recursos Didáticos; Visualização.

ABSTRACT

PAULA, E. A. S. 2020. 135 p. **Spatial Geometry: Learning through different didactic resources.** Dissertation (Master of Science and Mathematics Education). Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2020.

This research aims to present a possible path for the development of visualization skills, as well as to verify how these resources can help in the development of spatial geometric thinking in high school, in a perspective of significant learning. Considering that the visualization skill is the starting point for the teaching and learning process of geometry, we propose didactic support in concrete (geometric solids) and virtual (GeoGebra 3D) manipulative materials, also seeking to work within an interdisciplinary context with Arts and History, we develop activities using geometric arts, to review concepts of Flat Geometry, and activities based on the construction of models, being inspired by the works of Oscar Niemeyer. The present work was developed with students from a 2nd year high school class at Colégio Estadual João Kopke in Engenheiro Paulo de Frontin (RJ), and we observed that the use of models and geometric arts brought meaning to the study of Geometry, which the manipulation of geometric solids helped in the development of visualization, as well as, GeoGebra, bringing innovation and encouraging students to learn. A didactic sequence was elaborated as a product of this research, with diversified activities making use of the resources used in this work, however undergoing some adjustments.

Keywords: Spatial geometry; Didactic resources; Visualization.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE APÊNDICES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CIEP	Centro Integrado de Educação Pública
PPGEduCIMAT	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática
UFRRJ	Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino de geometria tem sido trabalhado na educação básica por meio da abordagem das definições e propriedades das figuras geométricas, o que não contribui para uma aprendizagem significativa, pelo contrário, o início dessa forma leva o educando a buscar apenas uma memorização dos conteúdos. A habilidade de visualização influencia diretamente no desenvolvimento do pensamento geométrico, e é por isso que uma abordagem expositiva dessas definições e propriedades não é suficiente para que o estudante possa abstrair os conceitos trabalhados, sendo assim, lançar mão de materiais didáticos variados é necessário para a criação de um contexto com situações de aprendizagem.

Trabalho na Rede Pública Estadual de Educação do Rio de Janeiro, no Município de Engenheiro Paulo de Frontin, e há alguns anos leciono na Educação Básica. Sou graduada em Matemática (Licenciatura), pela Universidade Severino Sombra, e atualmente mestranda do Programa de Pós-Graduação em Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

O interesse pelo tema escolhido, surgiu a partir da participação como discente em uma disciplina do curso de especialização em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática, oferecido pela Universidade Federal Fluminense, nessa disciplina havia a proposta de implementar atividades utilizando o *software* GeoGebra. Então escolhi trabalhar o conceito de Função Polinomial do 2º Grau nas turmas de 1º ano do Ensino Médio, utilizando o GeoGebra na versão aplicativo, pois o laboratório de informática da escola se encontrava em reforma, obtendo assim, um resultado que para mim foi satisfatório. Os alunos apresentaram um entusiasmo diferente com essa proposta inovadora, em que eles poderiam lançar mão dos próprios *smartphones* como um recurso para estudar matemática, e as dificuldades que apresentavam em relacionar a representação gráfica com a representação algébrica foi superada. Nesse mesmo período, eu estava enfrentando alguns contratempos para trabalhar conceitos da Geometria Espacial com as turmas do 2º ano, pois estas apresentavam dificuldades em relação à visualização dos sólidos geométricos, e também não conseguiam compreender as características presentes em cada sólido, e o cálculo das áreas e volumes acabavam acontecendo por meio da memorização de fórmulas, ou seja, mecanicamente. Incomodada com essa situação, e querendo uma aprendizagem significativa para meus alunos, decidi analisar o uso do ambiente de geometria dinâmica proporcionado pelo GeoGebra para desenvolver conceitos de Geometria Espacial.

Motivada por questionamentos feitos pelos alunos sobre a relação da Geometria com o mundo real, muitos inclusive com a impressão de que essa se limitava a um conjunto de regras abstratas, busco nessa pesquisa investigar também a implementação de atividades com uma abordagem interdisciplinar com Arte e História, e que revelam aspectos histórico-culturais dessa disciplina.

Nessa perspectiva, partimos da seguinte interrogação: "De que forma o uso de diferentes recursos didáticos, podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Espacial, bem como, no desenvolvimento da habilidade de visualização de estudantes do 2º ano do Ensino Médio?" Assim, o objetivo geral é apresentar um possível caminho para o desenvolvimento da habilidade de visualização, bem como, do pensamento geométrico espacial no Ensino Médio, numa perspectiva de aprendizagem significativa que lance mão de recursos didáticos variados.

Especificamente, buscamos:

(i) Levantar o estado da arte referente a possibilidade de uma aprendizagem significativa para o desenvolvimento do pensamento geométrico, e sobre os recursos a serem explorados para o ensino da geometria espacial;

(ii) elaborar uma sequência didática significativa com atividades de cunho interdisciplinar (Artes e História) lançando mão de recursos variados;

(iii) analisar a contribuição dos diversos recursos didáticos para o desenvolvimento do pensamento geométrico espacial e da visualização.

Esta dissertação está composta por cinco capítulos:

No capítulo um apresentamos uma reflexão sobre a aprendizagem significativa de geometria tendo a visualização como base para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

No segundo capítulo tratamos do uso de diferentes recursos didáticos para o ensino da Geometria Espacial na perspectiva de alguns pesquisadores, investigando suas contribuições para o desenvolvimento da habilidade de visualização.

No capítulo três expomos a estrutura metodológica desse trabalho, bem como, os sujeitos da pesquisa, a coleta de dados, planejamento da sequência didática, e a organização do trabalho que foi inspirada nas quatro fases da Engenharia Didática (análises prévias, concepção e análise a priori, experimentação, e análise a posteriori e validação), mas não seguindo a rigidez do modelo, portanto, sofrendo algumas adaptações.

O capítulo quatro visa analisar os dados das atividades implementadas em sala de aula, através de apoios didáticos variados (concretos e virtuais).

O último capítulo é separado para as considerações e reflexões finais sobre a pesquisa, discorrendo sobre os desafios e potencialidades da sequência didática, buscando o aperfeiçoamento dessa sequência de forma a contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Espacial.

CAPÍTULO I

1. ENSINO, APRENDIZAGEM E DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Este capítulo tem como objetivo apresentar um breve estudo bibliográfico realizado sobre a visualização como estratégia para o desenvolvimento do pensamento geométrico, bem como, o uso de recursos didáticos virtuais e concretos para facilitar o processo de ensino e aprendizagem de geometria.

1.1.Uma aprendizagem significativa

Para pensar sobre uma aprendizagem significativa da Geometria, primeiro devemos refletir sobre as concepções intrínsecas no termo aprendizagem significativa. Coll (2002) alerta sobre o uso indiscriminado e acrítico do termo aprendizagem significativa, procurando fazer uma reflexão sobre ideias que foram formadas ao longo do tempo e que ajudam a entender a polissemia de tal conceito, que vai da tradição centrada na criança, baseados nos pensamentos de autores como Rousseau, Claparède, Montessori, Dewey, que enxergam o aluno como um agente ativo no processo de aprendizagem, passando por Bruner, que defende que o aluno precisa adquirir o conhecimento por seu próprio meio, citando Piaget, que trouxe o argumento de que a construção de novos conhecimento acontece por meio da assimilação e integração de conhecimentos prévios, trazendo também como exemplo Rogers, que trabalha com uma concepção humanística, que tem como característica uma educação adaptada a necessidade de cada indivíduo, e por conta da diversidade de significados traz o convite para o uso reflexivo do termo. Ainda na perspectiva de Coll (2002, p. 156), a respeito da aprendizagem significativa, afirma que:

> [...] Certamente, o aluno é o responsável final da aprendizagem na medida em que constrói o seu conhecimento, atribuindo sentido e significado aos conteúdos do ensino, mas é o professor quem determina, com sua atuação, com o seu ensino, que as atividades nas quais o aluno participa possibilitem um maior ou menor grau de amplitude e profundidade dos significados construídos e, sobretudo, quem assume a responsabilidade de orientar esta construção numa determinada direção.

Certamente o aluno possui um papel de destaque no processo de aprendizagem, mas o professor é o responsável por entender, planejar, inovar, executar e criar situações favoráveis a esse processo de ensino e aprendizagem.

Colinvaux (2008) apresenta brevemente o processo de transição da concepção da aprendizagem tradicional para a ressignificação do termo aprendizagem que permanece até hoje, após uma ruptura que ocorreu na década de 70, explicando que a aprendizagem na visão tradicional a mente do aluno é considerada com uma caixa em que o professor deposita as informações, logo observa-se uma característica bem simplista, o professor ensina e não havendo nada de errado com o aluno, ele aprende, o foco então é o ensino. Porém, durante a década de 70, um movimento conhecido como Movimento das Concepções Alternativas, muda o foco do ensino para colocá-lo no processo da aprendizagem, entendendo o aluno como um sujeito social e pensante, e então esse movimento de pesquisa, passa a se basear teoricamente nas ideias de Ausubel, que trouxe a expressão "aprendizagem significativa", para Ausubel só construímos significados a medida que conseguimos relacioná-los com conhecimentos prévios, no entanto, pesquisadores como Posner perceberam que havia uma resistência à mudança sobre esses conhecimentos prévios mesmo após o ensino, propondo então o modelo da mudança conceitual. Já na década de 80, surgiram pesquisas sinalizando a escola como o local, com contextos sociais e culturais variados, logo o processo de aprendizagem passou a ser visto como um processo multifacetado, bem diferente da visão tradicional.

Para Masetto (2011, p.607), a aprendizagem na área do conhecimento compreende:

> [...] o desenvolvimento intelectual do homem em todas as suas operações mentais: capacidade de pensar, refletir, analisar, comparar, criticar, justificar, argumentar, inferir conclusões, generalizar, buscar e processar informações, compará-las, criticá-las, organizá-las, produzir conhecimentos, descobrir, pesquisar, criar, inventar, imaginar. São aprendizagens mais complexas do que apenas receber informações e reproduzi-las.

Sabendo que ao entrar em uma sala de aula encontraremos uma classe heterogênea, cada aluno possui sua particularidade, portanto, ao lançar mão de recursos variados aumentamos a possibilidade de criar situações que estimulem a participação e que seja significativa para os estudantes. Outra parte que contribui para uma aprendizagem significativa é a interação, aluno-aluno e professor-aluno, pois o aluno desenvolve a área afetivo-emocional, a autoestima, bem como, cria um melhor relacionamento com o grupo, tendo a oportunidade de se expressar, de dialogar, de ser solidário, e respeitoso referente a opiniões contrárias (MASETTO, 2011).

Entendemos como aprendizagem significativa, uma aprendizagem que abrange a formação em sua totalidade, em seus aspectos cognitivos, sociais, afetivos, e culturais, sendo considerado as atitudes, os valores e a diversidade. Nesse sentido, acreditamos no investimento em um ensino inovador, diferente do tradicional, em que o aluno é protagonista, é ativo e busca estratégias.

1.2.A habilidade de visualização para a aprendizagem da geometria

O desenvolvimento da visualização como habilidade é fundamental para a aprendizagem significativa de um conceito geométrico, principalmente para a Geometria Espacial. Quando o professor considera isso, o cenário da sala de aula muda totalmente, pois evita a introdução inconsciente das teorias. Gutiérrez (1996) afirma que a visualização sempre foi reconhecida como um componente necessário para o ensino e aprendizagem de Geometria. Arcavi (2003), salienta que a visualização não se relaciona apenas com ilustrações, mas se configura como um componente de destaque para o desenvolvimento do raciocínio, para a construção de conceitos, e para a resolução de problemas. A partir do pensamento desses autores, entendemos que para o desenvolvimento de uma aprendizagem significativa dos conceitos de Geometria, o educador deve se planejar para uma abordagem em que o aluno possa participar ativamente da construção do conhecimento, com recursos que o levem a associar a situações do seu cotidiano, para que posteriormente ele seja capaz de utilizar esse conhecimento em novas circunstâncias. A Geometria Espacial é um caminho para a leitura e a interpretação do espaço em que vivemos, desse modo, é importante a elaboração de atividades que realcem a presença de conceitos geométricos no mundo real.

A respeito do desenvolvimento do pensamento geométrico, Leivas (2009, p. 136) elaborou a seguinte definição: “Pensamento geométrico avançado é um processo capaz de construir estruturas geométricas a partir de imaginação, intuição e visualização, para a aquisição de conhecimentos matemáticos científicos.” O autor relaciona o pensamento geométrico a um processo mental que forma conceitos e ideias abstratas a partir de experiências sensoriais, e atividades motoras. Seguindo essa concepção, constatamos a importância no estudo da geometria espacial, do tocar, estimulando o sentido tátil, que pode acontecer por meio de uma atividade artesanal, como a construção do sólido geométrico, que permite que o estudante perceba a textura e a forma do objeto de estudo, assim como, a comparação desses objetos com formas presentes no cotidiano. Os softwares de geometria dinâmica também servem para aguçar imaginação, o GeoGebra, por exemplo, com sua variedade de ferramentas, possibilita a construção, a manipulação e a animação de diversos objetos, auxiliando também no desenvolvimento da habilidade de visualização.

O estudo de geometria na Educação Básica, muitas vezes se limita a uma abordagem formal voltada a realização de demonstrações, por meio de constantes cálculos algébricos, tendo como apoio somente o livro didático. Mas diversos estudos revelam que o desenvolvimento do pensamento geométrico está diretamente relacionado a habilidade de visualização, que pode ser estimulada por meio de diferentes recursos didáticos.

Kaleff (2003) relata que para alguns pesquisadores a habilidade de visualização é tão importante quanto realizar cálculos numéricos e a utilização de símbolos algébricos. No entanto, nas escolas e universidades esse aspecto é pouco valorizado. Logo, seguindo essa teoria, vemos o papel que a habilidade de visualização ocupa no processo de aprendizagem de geometria, como ela é imprescindível para que o aluno realmente compreenda as formas geométricas, e perceba essas formas no seu dia a dia, sabendo de suas características. Alves e Sampaio (2010, p.75) afirmam que "A utilização do computador no ensino da geometria exerce uma especial importância na questão da visualização". Pois os *softwares* de geometria dinâmica auxiliam na identificação de conceitos e propriedades geométricos. Já Oliveira e Leivas (2017, p.111) relatam que "a utilização de modelos concretos permite que a figura geométrica possa ser observada em várias posições e angulações, tornando o registro da imagem mental mais dinâmico...". Para que essa habilidade seja desenvolvida é importante implementar atividades com materiais manipulativos concretos e virtuais, com o propósito de um estudo mais completo dos conceitos geométricos.

Há diferentes definições para o conceito de visualização, conforme os estudos de Arcavi (2003) a visualização vai além da visão propriamente dita, podendo ser classificada em três categorias: culturais, cognitivas e sociológicas. As culturais se referem às crenças e valores, como as discussões em torno das provas visuais, não muito bem aceitas entre os matemáticos. A categoria cognitiva está voltada a saber lidar e a entender as múltiplas representações. Já a sociológica considera o fato de pessoas que são visualmente ricas, e outras não, por virem de origens culturais diferentes. Costa (2002) nomeia a visualização de pensamento visual-espacial, indicando que o mesmo se distingue em três modos: o pensamento visual-espacial resultante da percepção; o pensamento visual-espacial resultante da manipulação de imagens e da construção mental de relações entre imagens; e o pensamento visual resultante da exteriorização do pensamento. Essas classificações envolvem diversas operações, com ênfases nos sentidos, nas transformações, nas manipulações, nas codificações, e nas argumentações. Bairral, Oliveira e Izar (2019) afirmam que a visualização não é um processo cognitivo inato, mas que precisa ser desenvolvido ao longo da Educação Básica, e que é importante desenvolver atividades que estimulem a imaginação e a interpretação para a formação de imagens mentais. Faiguelernt (1999, p.53) trouxe a seguinte definição: “Visualização geralmente se refere à habilidade de perceber, representar, transformar, descobrir, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre as informações visuais.” Afirmando ainda que para o desenvolvimento do raciocínio geométrico a visualização funciona como um apoio intuitivo, sendo que em toda atividade de geometria existe uma integração, mesmo que implicitamente, de três tipos de processos: a visualização, a construção e a prova.

Logo podemos encontrar pontos comuns entre esses autores, destacamos em primeiro lugar que o ensino de geometria não deve se limitar ao formalismo nas demonstrações e na algebrização, pois somente esse tipo de abordagem não ajuda o aluno a alcançar uma aprendizagem significativa, temos observado que é importante haver um equilíbrio, pois entendemos que o formalismo ocupa também um papel dentro do estudo da geometria, mas existe um caminho a percorrer até chegar nesse ponto, o educando precisa ver sentido e compreender esse caminho. O segundo ponto, é que a visualização não é uma habilidade inata, portanto necessita ser desenvolvida, o que pode acontecer por meio de recursos didáticos variados, que podem ser virtuais ou concretos. Virtuais, usamos no sentido de recursos digitais, que estão disponíveis para domínio público, ou possuem uma licença para o uso, lançando mão de programas e aplicativos de geometria dinâmica, que necessitam de um computador, um *smartphone*, ou *tablet*. Concretos, usamos quando nos referimos a recursos que possam estimular a parte sensorial tátil, aquilo que se pode tocar, sentindo sua forma e textura. O terceiro e último ponto, é que a visualização não é o mesmo que ver, a sua definição é bem mais abrangente envolvendo muitos fatores, como a formação de uma imagem mental, podendo ser evocada quando necessário, a fatores culturais e cognitivos, bem como a intuição e a percepção.

O desenvolvimento da habilidade de visualização é muito importante para que o processo de ensino e aprendizagem de geometria seja significativo, mas também é preciso criar possibilidades de interação entre os sujeitos envolvidos, aluno-aluno e professor-aluno, dar lugar ao diálogo, à descoberta, pensar no aluno como um ser social marcado por contextos culturais, e proporcionar situações que os levem a pensar e refletir sobre a realidade.

CAPÍTULO II

2. CONSTRUINDO UM CENÁRIO DIDÁTICO PARA O ESTUDO DA GEOMETRIA ESPACIAL

Ao longo do tempo, diversos pesquisadores, como Gutiérrez (1996), Fainguelernt (1999), Kallef (2003), Presmeg (2006), Oliveira (2016), Settimy (2018) apontam para o fato de que a habilidade de visualização é de fundamental importância para a aprendizagem de conceitos geométricos, alguns trazendo também a proposta de recursos didáticos variados. Portanto, o objetivo desse capítulo é provocar reflexões sobre o uso de diversos recursos, como o GeoGebra3D, sólidos construídos artesanalmente, maquetes, e artes geométricas para a formação de uma sequência didática para o ensino da Geometria Espacial, pensando em estratégias que favoreçam o processo de ensino e aprendizagem desse conteúdo, investigando suas potencialidades e limitações.

2.1.A Geometria em um ambiente dinâmico com o GeoGebra 3D

O GeoGebra[1] é um ambiente de geometria dinâmica, livre, e disponível na versão aplicativo para aparelhos com sistema Android e IOS. Atualmente diferentes pesquisas (BORSOI, 2016; HENRIQUE, 2017; SETTIMY, 2018.) revelam que esse *software* vem contribuindo bastante para o ensino da Geometria, pois permite a visualização de várias maneiras, através da construção e da manipulação dos objetos que estão na tela, movimentando os elementos e mantendo as relações geométricas, facilitando, o teste de hipóteses e a criação de estratégias para a resolução de problemas, por isso se constitui um importante recurso para o processo de ensino e aprendizagem.

Borsoi (2016) apresentou como produto do seu trabalho uma sequência didática para uma turma de 3º ano do Ensino Médio explorando conceitos da Geometria Espacial através do GeoGebra 5.0 (versão 3D), alcançando um resultado satisfatório, considerando que os alunos puderam trabalhar situações geométricas de forma dinâmica e investigativa, o que ajudou no desenvolvimento de imagens mentais e habilidades espaciais.

Henrique (2017) em sua pesquisa falou sobre as contribuições e desafios do GeoGebra convencional (*dekstop*) e na versão aplicativo para *smartphone*s, para trabalhar os conceitos de polígono regular e de retas paralelas cortadas por uma transversal, com alunos do 8º e 9º ano.

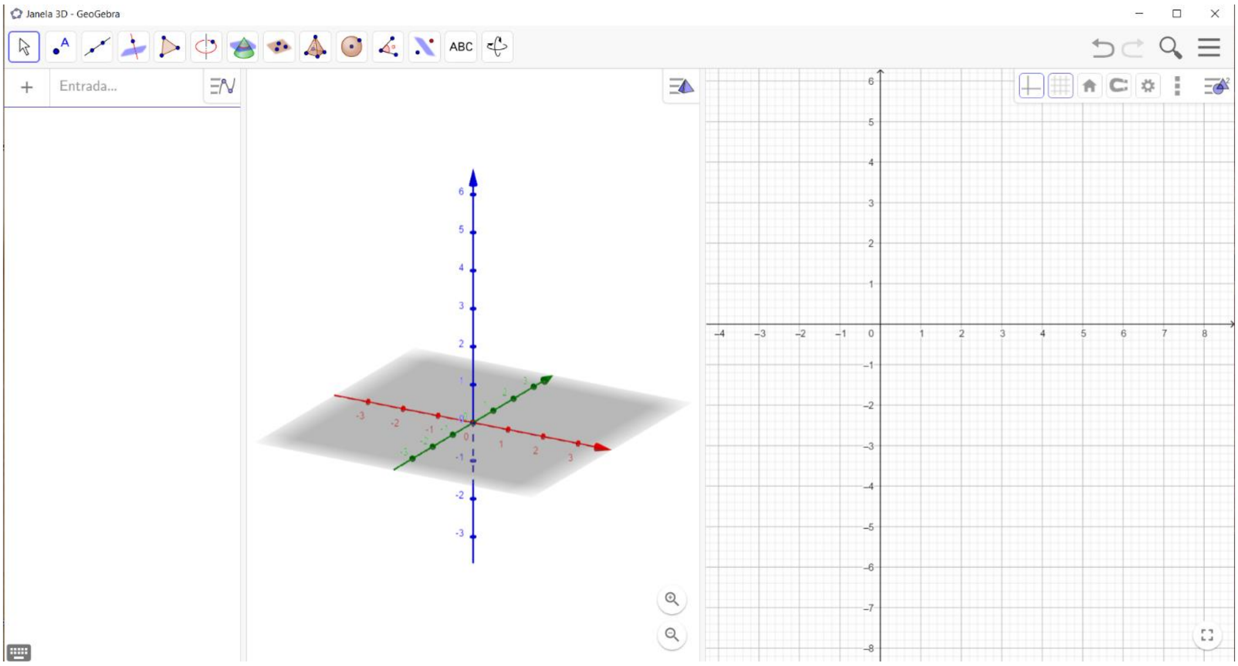
[1] Disponível em <http://www.geogebra.org//>. Acesso em 20 fev. 2019.

Em relação ao ambiente de geometria dinâmica em *smartphones*, destacou alguns pontos positivos como a interação, reflexão, e visibilidade, mas percebeu dificuldade de visualização em casos de tela de *smartphone* pequena.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) comentam sobre o potencial dos programas de geometria dinâmica, que facilitam a exploração e a investigação de conceitos geométricos, através do desenho, da manipulação e da construção dos objetos de estudo.

O GeoGebra na sua versão 5.0 possui como artifício a janela de visualização 3D, como segue na figura abaixo:

Figura 1: Captura da tela inicial do GeoGebra 5.0



Fonte: Elaborado pelo autor

Nessa versão 5.0 do GeoGebra o *layout* inicial apresenta uma janela de visualização tridimensional com eixos xyz, podendo também ser dividida em duas janelas (3D e 2D), contando com novas ferramentas que permite a construção e configuração dos objetos espaciais.

Uma representação dos sólidos em um ambiente de geometria dinâmica pode facilitar muito a abstração do aluno, pois ele irá observar o objeto em diversos ângulos, fazer planificações, animações e comparações. E o educando será capaz de compreender os padrões estudados, e estabelecer relações entre formas presentes no seu dia a dia com as analisadas no aplicativo.

Sobre o uso de animações em 3D, Bairral (2012, p.56) diz que:

> Além da escassez no currículo o uso de animações em 3D em nosso trabalho se justifica pela:
>
> - Proximidade de um trabalho contextualizado em situações cotidianas.
> - Possibilidades de realização de projetos de trabalho.
> - Abordagem da questão da rigidez e da mobilidade de formas.
> - Motivação e possibilidade de uma produção criativa.
> - Constituição de uma atividade não comum e rotineira para os alunos.
> - Produção de aluno e professor como criadores em seu processo educativo.

Uma simples aula tradicional, não tem sido suficiente para atrair a atenção dos alunos que vivem tão envolvidos com as tecnologias do nosso cotidiano. E agora para articular conceitos referentes a Geometria Espacial, contamos com o GeoGebra 3D, que pode ser instalado nos *Smartphones* dos alunos, sendo mais um recurso para o professor que trabalha em uma escola que não dispõe de um laboratório de informática, ou mesmo, para o que prefere implementar as tarefas em sala de aula.

A conveniência de uma abordagem diferente, usando um aplicativo instalado nos dispositivos móveis dos estudantes, já é um fator que os motiva bastante. Principalmente pela razão de eles participarem ativamente da construção do próprio conhecimento.

> Tendo em vista que os educandos vivem em contato com o “novo”, o “diferente” e o “motivador”, torna-se necessário que esses recursos também sejam utilizados nas aulas de matemática e que exerçam certa influência na forma de condução do trabalho docente, com o propósito de assumir um novo sentido e colaborar para diminuir bloqueios apresentados por muitos de nossos alunos que temem esta disciplina. (SOUZA, 2014, p.7)

O GeoGebra 5.0 possui uma diversidade de ferramentas, pois esse aplicativo nos oferece meios diversos para a construção e manipulação de figuras geométricas, nele representamos figuras planas e espaciais, podendo, dentre tantas funções, ampliar, rotacionar e medir, e como recurso mediador, favorece uma abordagem diferente da tradicional, seu ambiente dinâmico, torna o estudante ativo, assumindo uma posição investigadora diante da variedade de possibilidades. No entanto, na lousa não é possível reproduzir os objetos geométricos de maneira tão realista quanto no GeoGebra, a imagem é estática o que dificulta a visualização.

Para Buriol, Macedo e Silva (2016) com o uso da computação gráfica e os dispositivos móveis, o estudo da Geometria Espacial se torna mais atraente para os alunos. O desafio é aliar as tecnologias digitais ao processo de ensino aprendizagem o que contribuindo para o aperfeiçoamento de nossas aulas.

2.2. Reflexões sobre o uso de sólidos geométricos e materiais concretos no estudo da Geometria Espacial

Sabemos que a Geometria é uma área da Matemática direcionada para a representação visual, não podendo ser reduzida a uma abordagem axiomática através de aplicações de fórmulas e a memorização de propriedades. Desse modo, muitos pesquisadores vêm investigando meios para que os discentes desenvolvam a habilidade de visualização, considerando que assim os conceitos geométricos podem ser melhor compreendidos.

> O desenvolvimento dessa habilidade acontece na medida em que colocamos para o aluno um apoio didático baseado em materiais manipulativos concretos e virtuais que representam e modelam o objeto matemático em estudo. (KALEFF, 2016, p.30)

Nesse tópico iremos refletir sobre a utilização de sólidos geométricos, como um elemento a mais, na perspectiva de apresentar opções para o docente que pensa em desenvolver uma prática diferente da tradicional, discorrendo sobre a experiência de alguns pesquisadores.

A pesquisa de Vidaletti (2009) analisou a manipulação de sólidos geométricos no estudo da Geometria Espacial, para isso utilizou com seus alunos embalagens de produtos comercializados, desmontou, tirou o molde em uma cartolina e montou outras embalagens, e durante esse processo realizou o cálculo da área e volume delas para em seguida montar outras embalagens mudando a forma, mas mantendo o volume da embalagem original. E assim conseguiu desenvolver conceitos importantes sobre a Geometria Espacial, como as formas dos sólidos geométricos e suas classificações, e o cálculo de área e volume desses sólidos.

Settimy (2018) em sua pesquisa trata do desenvolvimento da visualização utilizando recursos didáticos variados em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, dentre os recursos apresentados, estão os sólidos em acrílico e planificações articuladas de alguns sólidos geométricos servindo como apoio para a realização de algumas atividades do livro didático, e ao longo da execução das atividades os discentes encontraram maneiras de representar, conceituar, exemplificar e associar as formas expressando um envolvimento e motivação na realização das tarefas.

Paula e Sampaio (2018) em um relato de experiência trazem reflexões sobre o desenvolvimento do pensamento e da linguagem geométrica com o auxílio de recursos digitais

(GeoGebra) e materiais concretos, fazendo a construção de um tetraedro por meio de origami, e fabricando outros sólidos com materiais recicláveis, explicando que o uso desses materiais auxiliaram fortemente no aprendizado dos alunos.

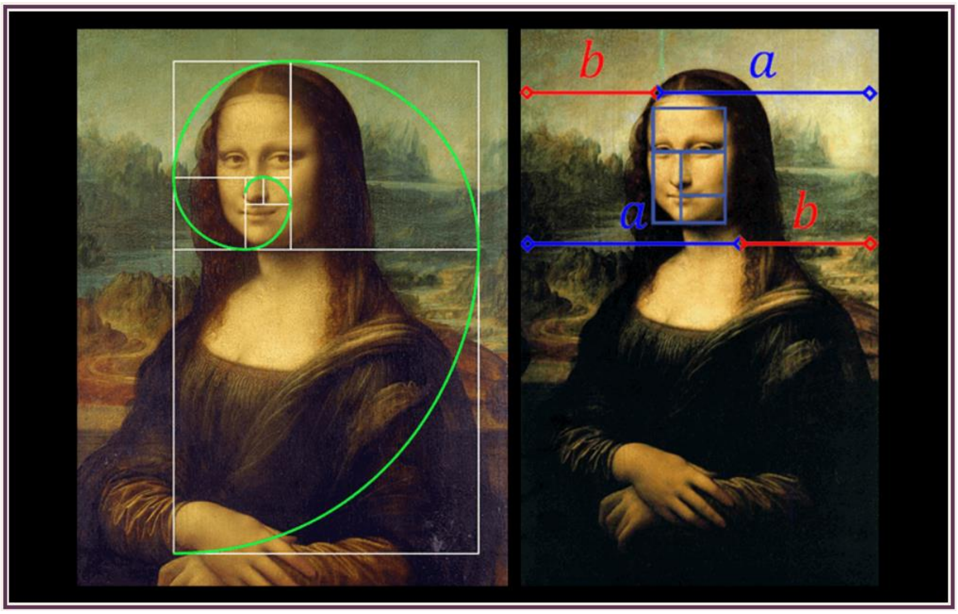
Biembengut e Hein (2019), ao falar da modelagem como estratégia de ensino e aprendizagem da matemática, trazem a proposta do estudo da Geometria Plana e Espacial por meio de materiais manipulativos, como embalagens em formatos geométricos e também através da construção de maquetes, indicando o desenvolvimento de alguns conceitos como volume, superfície, capacidade e massa.

Tendo como base o trabalho desses pesquisadores, podemos afirmar que no ensino da Geometria é indispensável a utilização de recursos variados, e que especificamente para o estudo da Geometria Espacial, os sólidos geométricos servem como suporte para desenvolver conceitos importantes. Os modelos podem ser em acrílico, ou construídos artesanalmente com embalagens, cartolina, palitos, canudos e etc. Não é relevante quais materiais os compõem, e sim o planejamento de sua utilização para apoiar a prática do professor criando condições que estimulam a habilidade de visualização, propiciando a identificação e reconhecimento de propriedades, garantindo uma abordagem multifacetada.

2.3. Um olhar interdisciplinar da Arte para a Geometria

Associando a Arte e a Matemática, os conceitos geométricos são trabalhados e ao mesmo tempo proporciona ao aluno um ambiente mais criativo, lúdico e significativo. Segundo Fainguelernt e Nunes (2015) a Matemática e a Arte sempre estabeleceram uma conexão, é possível encontrar estudos que analisam as obras de arte e comprovam essa relação, dentre outros, como as de Leonardo da Vinci, Pablo Picasso, Piet Mondrian, e Escher.

Figura 2: Mona Lisa



Fonte:< https://www.chiefofdesign.com.br/proporcao-aurea/> Acesso em: 10 jul. 2019

Leonardo da Vinci, fazia suas composições utilizando formas simples, como triângulos e círculos, além de toda a estrutura de suas obras serem baseadas na proporção áurea[2], conforme observamos na Gioconda (figura 2). Picasso e Braque iniciaram um movimento artístico chamado de cubismo[3], nesse movimento o artista decompõe e compõe a realidade através de elementos geométricos, Mondrian influenciado pelo cubismo também utilizou elementos geométricos em suas obras, Escher desenvolveu seus trabalhos se baseando em visualizações e representações, explorando padrões geométricos também usou com frequência em suas obras os poliedros, buscando trabalhar também com a simetria das formas (FAINGUELERNT; NUNES, 2015).

Na figura 3, temos retratado a obra “Casas em L'Estaque”, criada em 1908 por Braque, onde se pode observar a representação de casas em forma de cubos.

[2] A razão áurea é um número irracional, que é representada pela letra grega Phi (ϕ), denominada de Proporção Divina, foi usada em famosas obras de arte, e dentre elas destacamos: a “Mona Lisa”, de Leonardo da Vinci, “O Nascimento de Vênus”, de Botticelli, e nas dimensões do quadro de “O Sacramento da Última Ceia”, de Salvador Dalí.

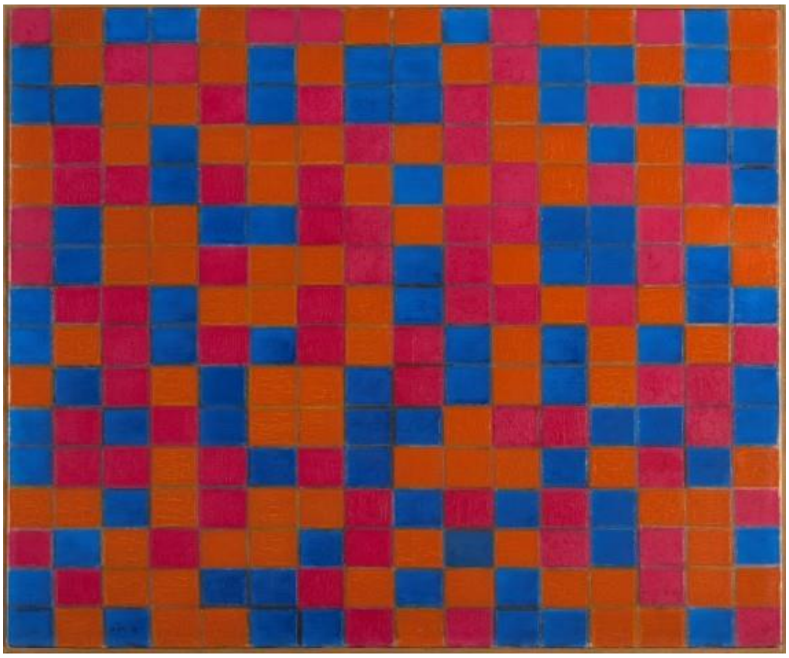
[3] Movimento artístico fundado por Picasso e Braque na França no início do século XX, caracterizado pela utilização de formas geométricas para retratar a natureza.

Figura 3: Casas em L'Estaque

Fonte: <https://www.todamateria.com.br/obras-importantes-cubismo/>. Acesso em: 19 mar. 2020.

Na figura 4, temos a representação de uma das obras de Piet Mondrian de 1919, intitulada de “Composição Xadrez”, um trabalho baseado na geometria abstrata.

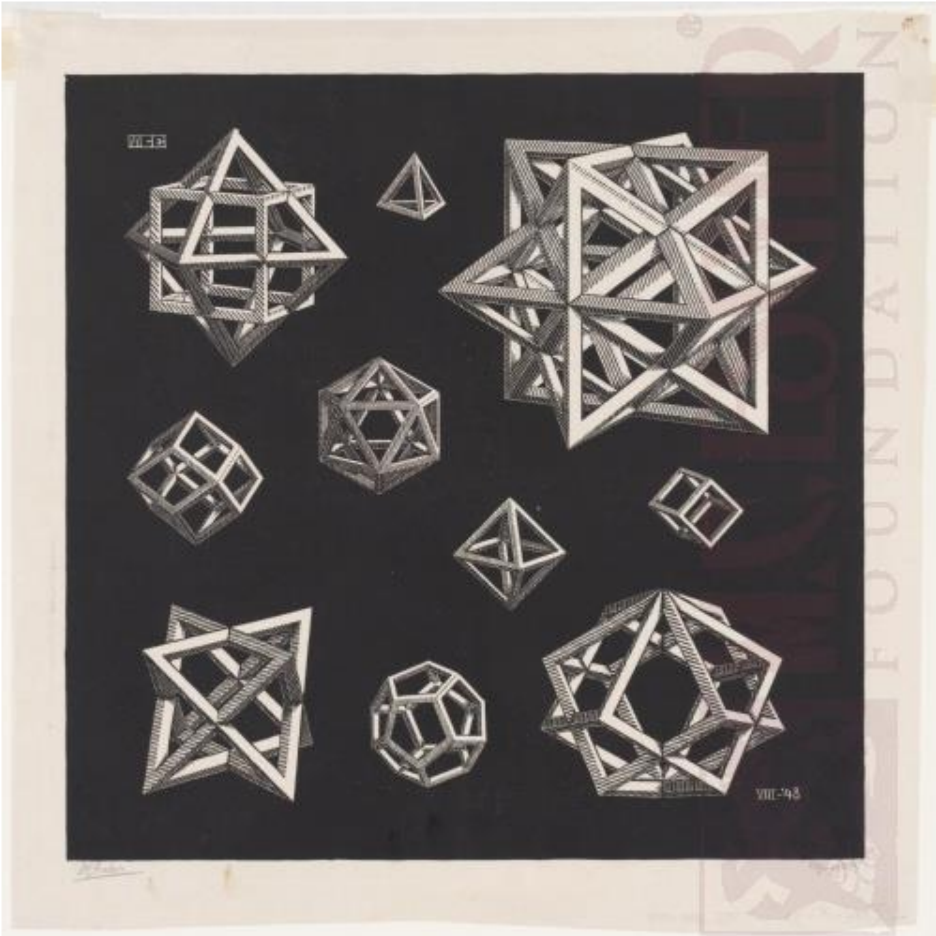
Figura 4: Composição Xadrez



Fonte: <https://www.ebiografia.com/piet_mondrian/> Acesso em: 19 mar. 2020

A seguir temos representado uma xilogravura, que é a arte de gravar ou entalhar madeiras, realizada por Escher sob o título: “Estudos, estrelas”, em que podemos observar a representação de formas geométricas espaciais.

Figura 5: Xilogravura de Escher



Fonte: <https://mcescher.com/nl/galerij/wiskundig/> Acesso em: 24 fev. 2020

Implementando atividades de cunho interdisciplinar, envolvendo a Arte e a Geometria procuramos estimular um novo olhar do aluno, no qual ele irá descobrir que a Matemática não está presente apenas nas fórmulas, e em exercícios algébricos, mas os conceitos matemáticos também fazem parte de obras artísticas. Assim o educando desenvolverá um posicionamento crítico da realidade, descobrindo a Matemática em seu aspecto histórico-cultural.

A proposta principal dessa pesquisa é a análise de recursos didáticos variados para o estudo da Geometria Espacial, sendo esses recursos virtuais e concretos, entendendo que os mesmos podem contribuir para o desenvolvimento da habilidade de visualização. Ao observar as obras de artes, o estudante poderá reconhecer padrões, simetrias, e assim perceber as propriedades geométricas presentes nos quadros, esculturas, e na arquitetura.

> (...) é aconselhável que se leve o aluno a vivenciar experiências com diversos tipos de materiais concretos manipulativos, a fim de que ele possa ter a oportunidade de encontrar o meio material que seja mais apropriado à sua percepção sensorial e que mais aguce a sua curiosidade (KALLEF , 2003, p.17).

Segundo Fazenda (2002) o termo “interdisciplinaridade” possui vários sentidos, tendo, portanto, uma diversidade de terminologias, mas culminando em um mesmo propósito, que é a integração das disciplinas que acontece através de trocas de saberes entre os professores ou especialistas, por meio de um projeto de pesquisa. Ao trabalhar com obras de diferentes artistas para tratar e revisar conceitos geométricos, transcendemos as barreiras das disciplinas, Artes, Matemática e História, mostrando uma possibilidade de interação entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, uma atitude que pode se configurar como um passo para a interdisciplinaridade.

CAPÍTULO III

3. CONSTRUINDO UM CENÁRIO METODOLÓGICO

Neste capítulo iremos tratar do cenário metodológico da pesquisa, que foi organizada em quatro fases, sendo elas inspiradas na Engenharia Didática, mas não seguindo a rigidez do modelo, sofrendo, portanto, algumas adaptações. Trataremos aqui também sobre os sujeitos da pesquisa, o planejamento e coleta de dados.

3.1. As fases da pesquisa

A atual pesquisa se realizou em uma turma do 2º ano do Ensino Médio na perspectiva de apresentar um possível caminho para o desenvolvimento da habilidade de visualização, bem como, do pensamento geométrico espacial lançando mão de recursos didáticos variados.

Os procedimentos metodológicos desse trabalho apresentam caráter qualitativo, e para coleta de dados, a pesquisadora utilizou folha de atividades com o registro das respostas dos alunos, questionário, registros fotográficos e observações de campo.

Para Minayo (2002) a pesquisa qualitativa atravessa um nível da realidade que não pode ser medido, pois permeia o universo dos valores sociais, se aprofundando em determinados fenômenos das relações que não são passíveis de serem quantificados. Segundo a autora, a pesquisa qualitativa se organiza e três fases, a fase exploratória da pesquisa, a fase do trabalho de campo, e a fase do tratamento do material recolhido, nomeando essas fases de "ciclo da pesquisa". Nesse sentido, o presente trabalho se dividiu em quatro fases, sendo elas organizadas de maneira adaptada a partir das fases da Engenharia Didática. A adaptação ocorreu, principalmente, na fase da *análise a priori*, que segundo Almouloud e Coutinho (2008, p.67), "O objetivo de uma *análise a priori* é determinar como as escolhas efetuadas (as variáveis que queremos assumir como pertinentes) permitem controlar os comportamentos dos alunos e explicar seu sentido." Em oposição a esse pensamento, concordamos com Colinvaux (2008, p.9) que traz o argumento de que a aprendizagem não é um "processo controlável e previsível, subordinado ao ensino, tornou-se uma ação/atividade que parece ter vida própria e segue caminhos muitas vezes inesperados." Logo, entendemos a importância da elaboração de um planejamento, para implementar e desenvolver os conceitos de maneira organizada, porém entendendo que considerando as diversidades sociais e culturais presentes em uma sala de aula, não se pode prever a reação em relação aos recursos propostos.

Segundo Artigue (1988) a Engenharia Didática, surgiu no início da década de 80, a partir da Didática da Matemática, ela relata que essa metodologia pode ser comparada com o trabalho de um engenheiro, que no caso é o educador, que planeja e prepara um projeto de ensino para ser desenvolvido em sala de aula, e para isso se apoia em conhecimentos científicos da sua área. E que ao desenvolver o projeto pode se ver diante de situações mais complexas, portanto deverá fazer novas escolhas e tomar novas decisões. A autora explica que uma pesquisa que segue os pressupostos da Engenharia Didática é constituída por quatro fases:

- 1ª fase: de análises prévias;
- 2ª fase: de concepção e análise a priori;
- 3ª fase: de experimentação;
- 4ª fase: de análise a posteriori e validação.

Na 1ª fase estudam-se os fatores que levaram ao problema de pesquisa, trata-se da análise do quadro didático/teórico, bem como, as dificuldades, as concepções e os obstáculos apresentados pelos alunos. Artigue (1988) argumenta que as análises preliminares podem ser retomadas a qualquer fase da pesquisa.

Na fase de concepção e análise a priori, é o momento em que o pesquisador pensa na forma que vai agir em relação a suas constatações a partir das suas análises prévias. Então, o professor prepara ações que acredita serem importantes e que podem se configurar um caminho ou uma solução para os problemas encontrados. Na 3ª fase é o período em que se coloca em prática toda a sequência didática, ou seja, a execução dos instrumentos de pesquisa, que pode ser revisto havendo necessidade, implicando um retorno a fase anterior.

A quarta e última fase é a da análise dos dados produzidos pelos alunos a partir da experimentação, esses dados são coletados através de observações do desenvolvimento deles durante a execução da sequência didática. E também por meio de técnicas complementares como a aplicação de questionários, entrevistas, etc. A seguir, segundo Artigue (1996), ocorre um confronto entre a análise a priori e análise a posteriori, etapa em que irá validar ou não a hipótese da pesquisa.

Quadro 1 – Fases da Pesquisa

Fases da Pesquisa	Contexto
Análises Prévias	A definição do problema de pesquisa foi formada a partir de observações realizadas pelo professor, no que tange as dificuldades apresentadas pelos alunos em relação a aprendizagem de conceitos presentes no estudo da Geometria Espacial. E também através da análise das

	respostas dos alunos a um questionário, que se dividiu em três etapas: a primeira para analisar o conceito geral que eles têm em relação a disciplina; a segunda para verificar o envolvimento deles com as tecnologias de informação e comunicação; e a última para analisar os conhecimentos referentes a Geometria Espacial, e a habilidade de visualização.
Concepção e Análise a Priori	Elaboração da sequência didática com atividades que valorizam o desenvolvimento da habilidade de visualização, lançando mão de recursos concretos (numa perspectiva interdisciplinar com Artes e História) e virtuais (através do GeoGebra 3D na versão aplicativo). A elaboração dessa sequência didática, foi baseada nas considerações formadas na fase anterior.
Experimentação	Execução da sequência didática, e coleta de dados.
Análise a Posteriori e Validação	As análises foram realizadas a partir da observação dos alunos no desenvolvimento da sequência didática (sendo registrado no diário de campo do pesquisador), do diálogo, das reflexões em relação as respostas das atividades, e da interação (entre professor e aluno/ aluno e aluno). E confronto da análise a priori e análise a posteriori, sistematizando as considerações finais.

Fonte: Elaborado pela autora

3.2. Contexto da pesquisa e análises prévias

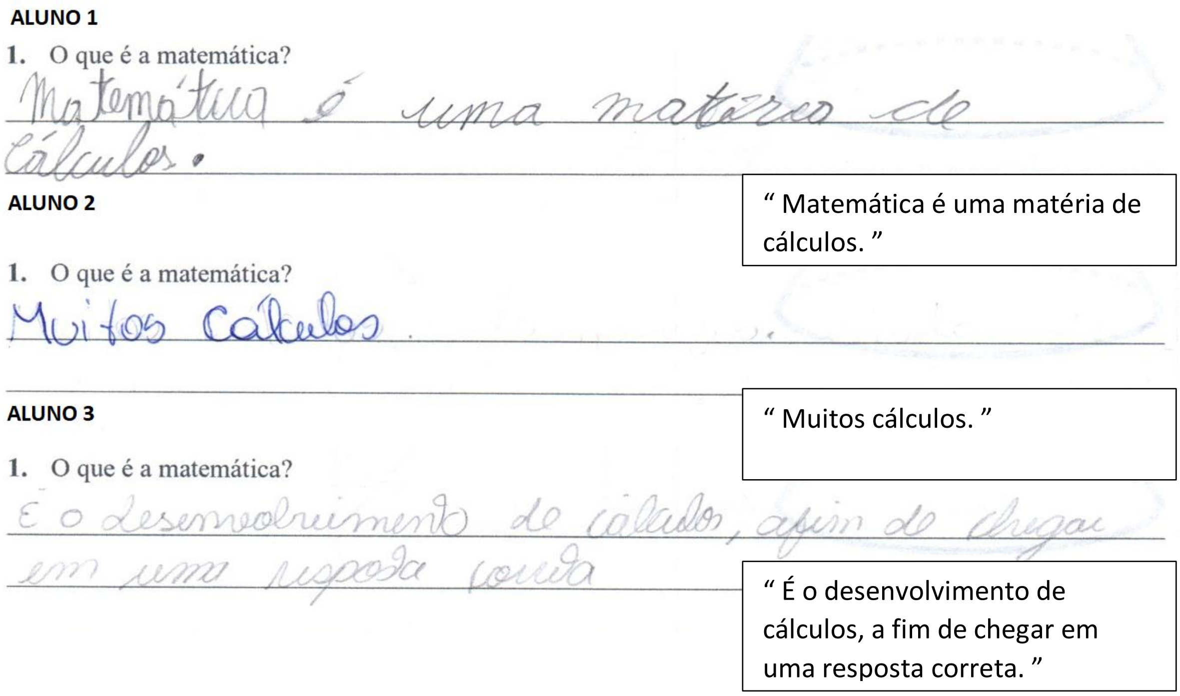
As atividades foram propostas em uma turma de 2º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual João Kopke, localizado no Município de Engenheiro Paulo de Frontin, interior do Rio de Janeiro. As tarefas foram realizadas durante o ano letivo de 2018, com uma turma de 41 alunos na faixa etária de 15 a 18 anos.

Antes da elaboração da sequência didática, a pesquisadora elaborou um questionário para analisar os conhecimentos prévios dos alunos em relação a Geometria Espacial, principalmente no que diz respeito a habilidade de visualização, e também para analisar as concepções deles em relação a Matemática.

A aplicação do questionário inicial ocorreu no dia 08 de outubro de 2018, o que foi fundamental para a pesquisadora em relação a instituição de hipóteses, e elaboração da sequência didática. O questionário se dividiu em três etapas, a primeira para analisar as concepções que os alunos têm em relação a matemática, a segunda para analisar o envolvimento deles com as tecnologias de informação e comunicação (principalmente os *Smartphones*), e a terceira para analisar os conhecimentos prévios em relação a Geometria Espacial, bem como, a habilidade de visualização.

A primeira etapa consistiu em uma única pergunta: "O que é a matemática?", apesar de ser uma questão muito abrangente, ajudou a revelar a perspectiva geral da turma em relação a disciplina, pois a maioria das respostas foram bem semelhantes como podemos observar na figura 6:

Figura 6: Primeira etapa do questionário inicial



Fonte: Elaborado pela autora

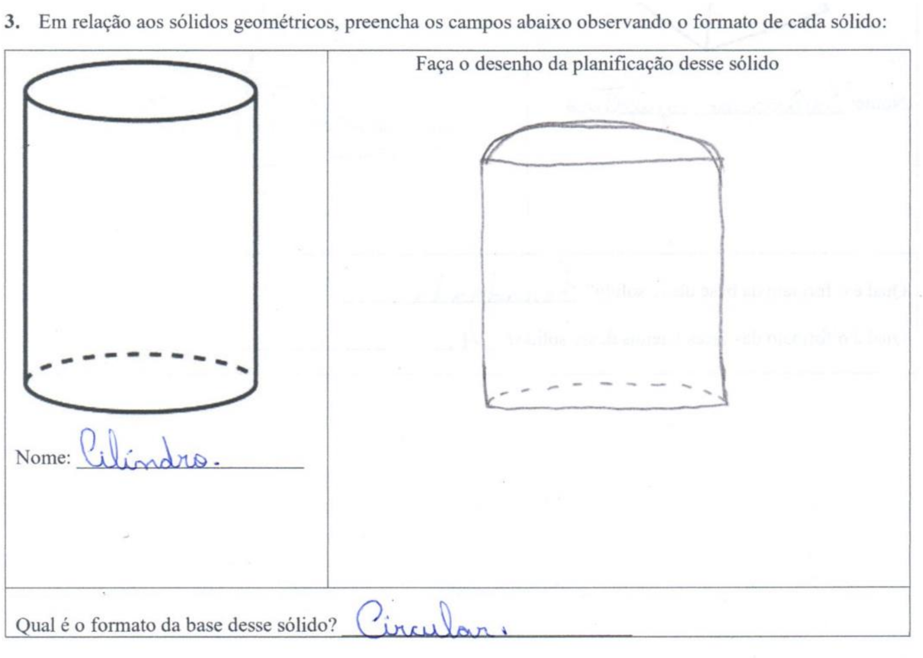
Na maioria das respostas os alunos relacionaram a Matemática à realização de cálculos, como algo totalmente abstrato e mecânico. O que despertou na pesquisadora a necessidade de mostrar a matemática em outra perspectiva, destacando como essa área do conhecimento se faz presente no cotidiano e como se conecta com outras disciplinas, de forma que os educandos pudessem desenvolver o pensamento crítico, a sensibilidade e a criatividade. Sendo assim, apesar de a professora já ter utilizado algumas atividades envolvendo Artes Geométricas, para uma breve revisão de conceitos presentes no estudo da geometria plana, as primeiras atividades da sequência didática foram elaboradas também num enfoque interdisciplinar com Artes e História, enfatizando, que as professoras dessas disciplinas, em acordo com a professora de Matemática, buscaram trabalhar temas relacionados ao Modernismo, a biografia de Oscar Niemeyer, e a Artes Geométricas.

Na segunda etapa do questionário, verificou-se o hábito de utilizar *Smartphone*, e se havia muitos alunos que não possuíam um, mas felizmente todos os alunos tinham um aparelho. O objetivo de tal indagação, se baseou no fato de a professora querer desenvolver atividades utilizando o GeoGebra na versão aplicativo, já que a escola estava desprovida de um laboratório de informática.

A terceira etapa teve como propósito investigar os conhecimentos dos educandos em relação as características, identificação e planificação dos sólidos geométricos, e também referente a habilidade de visualização. Antes da realização do questionário, cada parte foi explicada para os alunos, sobre o que era uma planificação, e também sobre a classificação e reconhecimento de cada sólido.

Em relação ao cilindro, como se pode ver na figura abaixo, a maioria dos alunos souberam nomear corretamente e identificar o formato da base, mas não tinha noção da planificação desse sólido.

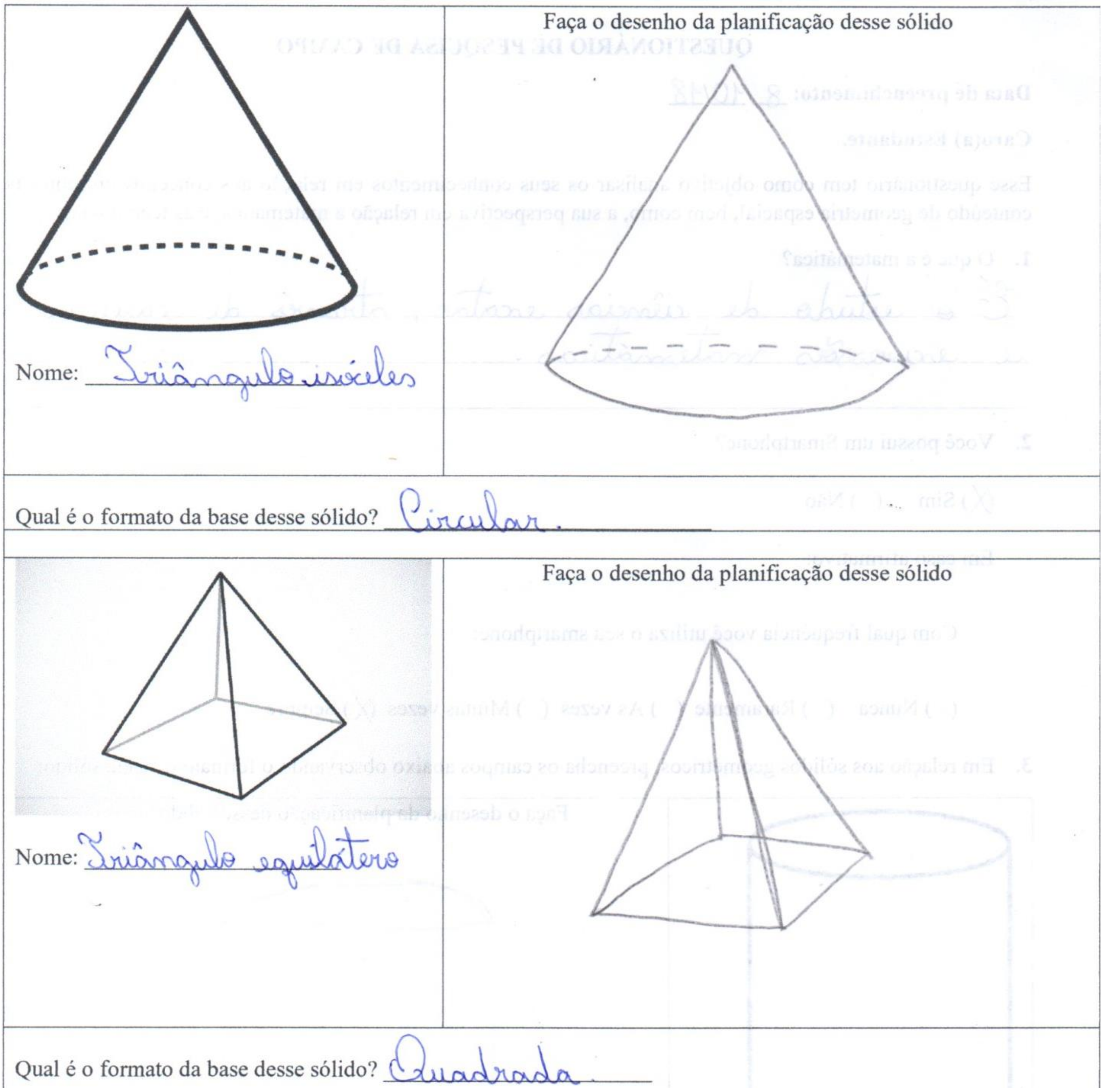
Figura 7: Terceira etapa do questionário inicial – Cilindro



Fonte: Elaborado pela autora

Uma situação que sobressaiu foi que alguns alunos nomearam o cone e a pirâmide de triângulo, ainda que a apresentação se encontre em 2D, as figuras tratam de objetos tridimensionais, mas eles classificaram ambos como se não fossem sólidos geométricos e sim figuras planas, o que pode representar uma dificuldade de visualização.

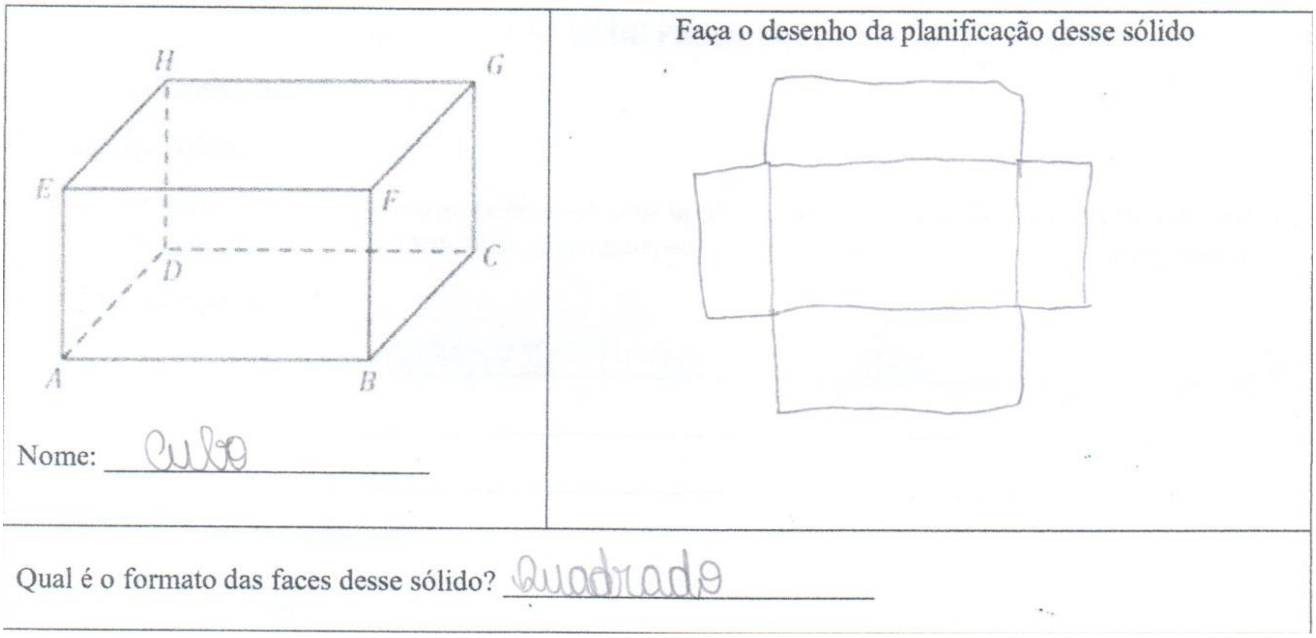
Figura 8: Terceira etapa do questionário inicial – Cone e Pirâmide



Fonte: Elaborado pela autora

Analisando a planificação que os estudantes fizeram do paralelepípedo, percebe-se que a maioria apresentou dificuldade para identificar o número de faces que esse sólido possui, e também em diferenciar uma face retangular de uma face quadrada, por esse motivo tiveram dificuldade de compreender a diferença de um cubo para um paralelepípedo.

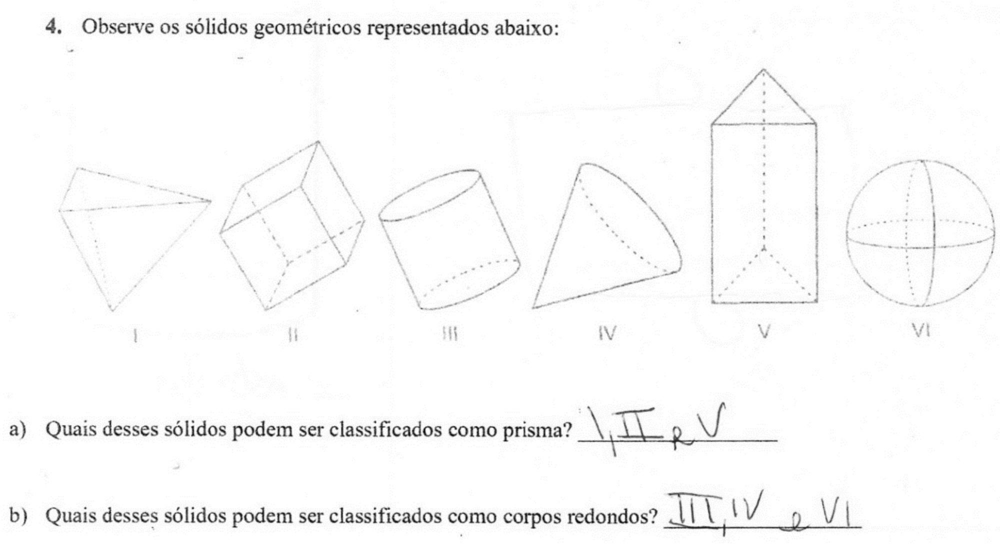
Figura 9: Terceira etapa do questionário inicial - Paralelepípedo



Fonte: Elaborado pela autora

Na parte que era para classificar dentre as figuras apresentadas quais eram os corpos redondos, os educandos não tiveram dificuldades nesse quesito, talvez por causa do formato arredondado dos sólidos, logo não mostraram embaraços para distinguir um prisma de um corpo redondo, mas apresentaram problemas em identificar a diferença entre um prisma e uma pirâmide, como podemos conferir na figura 10.

Figura 10: Terceira etapa do questionário inicial – Classificação dos sólidos



Fonte: Elaborado pela autora

Na maior parte dos casos os alunos se mostraram participativos e comprometidos na realização das atividades, fora a última tarefa, todas as atividades foram realizadas em sala de aula, e em relação a organização, os alunos foram dispostos em duplas e/ou grupos, e puderam escolher os colegas com quem iriam formar equipe.

3.3. Análise a priori e elaboração da sequência didática

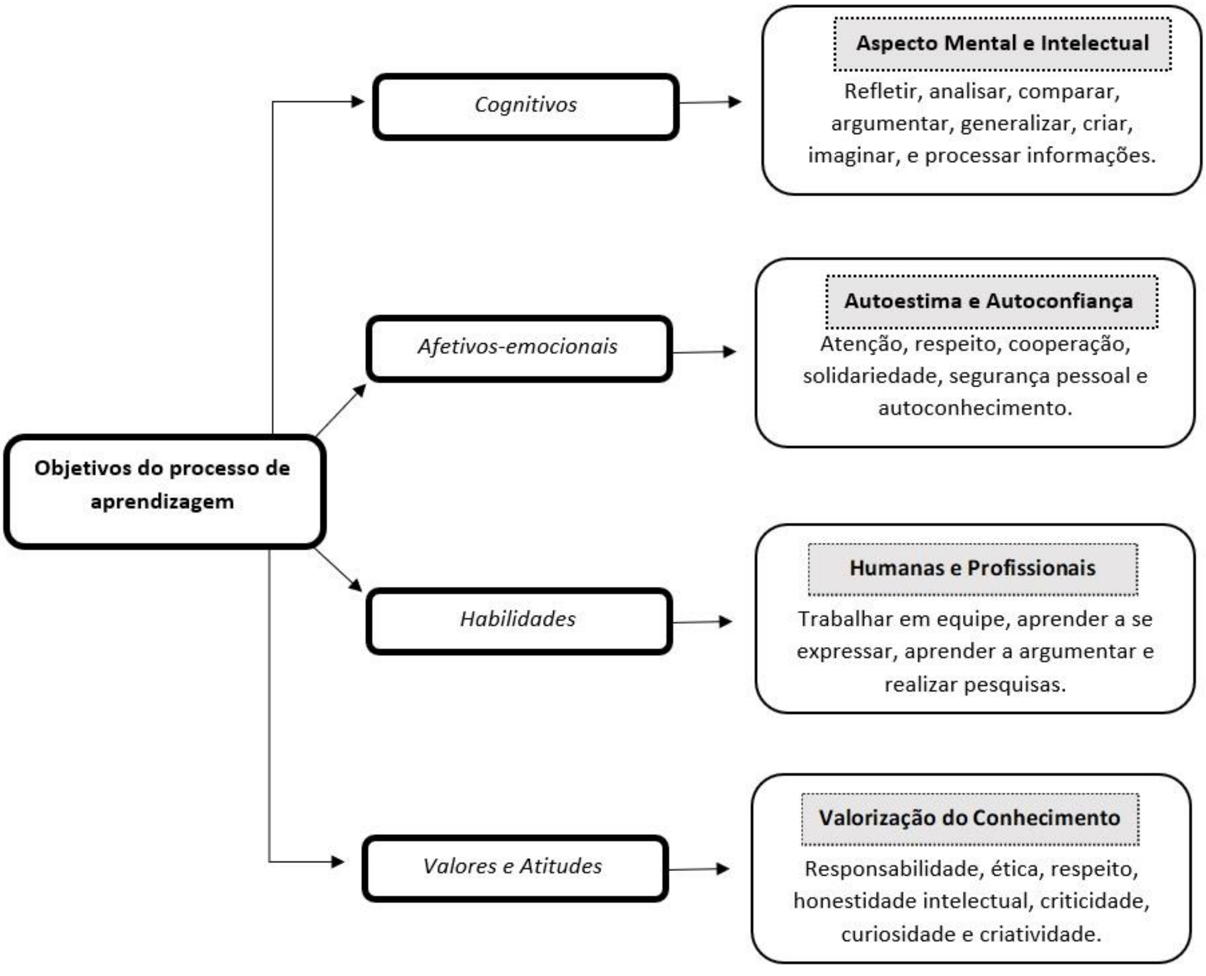
Diferentes autores destacam a importância da habilidade de visualização para o processo de ensino e aprendizagem de Geometria (Gutiérrez, 1996; Fainguelernt, 1999; Costa, 2002; Arcavi, 2003; Kaleff, 2003; Oliveira, 2016; Settimy, 2018), nos levando a compreender que não se deve se limitar a uma abordagem axiomática e abstrata. E na intenção de buscar estratégias que contribuam para o desenvolvimento dessa habilidade de visualização, assim como, para a aprendizagem da Geometria Espacial, a pesquisadora elaborou uma sequência didática lançando mão de recursos concretos e virtuais.

Na fase de análise a priori, é o momento em que se estuda de que forma se pode agir sobre as variáveis, que no contexto dessa pesquisa, são as variáveis micro-didáticas[4], portanto é a fase em que se elabora a sequência didática tendo como base as considerações prévias.

[4] Artigue (1988) distingue dois tipos de variáveis, as macro-didáticas, que se refere a organização global da Engenharia Didática; e as variáveis micro-didáticas, que se refere a organização local, de uma sessão ou uma fase, podendo ser de ordem geral ou específica, depende do conteúdo didático.

Considerando as respostas dos alunos ao questionário inicial, e também pensando em construir um ambiente didático que proporcione uma melhor aprendizagem dos conceitos da Geometria Espacial, ao mesmo tempo permitindo que o aluno participe ativamente da construção de seu conhecimento fazendo da sala de aula um espaço de comunicação e diálogo, foi elaborada uma sequência de atividades, que visa desenvolver competências relacionadas a determinados objetivos: Cognitivos, De habilidades (saber fazer), Afetivo-emocionais e De atitudes e valores. Para Masetto (2012, p.45) se referindo ao processo de aprendizagem, fala que este é "um processo de crescimento e desenvolvimento de uma pessoa em sua totalidade, abarcando minimamente quatro grandes áreas: a do conhecimento, a do afetivo-emocional, a de habilidades e a de atitudes e valores." A seguir, na figura 11, temos uma síntese de como Masetto (2012), organiza esses processos de aprendizagem, conforme seus objetivos e aspectos:

Figura 11: Mapa conceitual dos processos de aprendizagem de Masetto



Fonte: Elaborado pela autora

No contexto dessa pesquisa, esses processos se organizam da seguinte maneira:

(I) Habilidades: 1. Desenvolver a prática de se expressar oralmente e por escrito; 2. Trabalhar de forma colaborativa com o grupo;

(II) Valores e atitudes: 1. Construir relações interpessoais através do diálogo e respeito, desenvolvendo o autoconhecimento;

(III) Aspectos Cognitivos: 1. Compreender os conceitos relacionados às características, classificações e propriedades dos objetos e figuras geométricas; 2. Construir e manipular os sólidos geométricos; 3. Perceber o espaço ocupado pelo próprio corpo e por diferentes objetos, demonstrando noções de relações espaciais; 4. Formar relações entre as diferentes representações planas de objetos espaciais; 5. Interpretar, reconhecer e visualizar a presença da geometria no cotidiano;

(IV) Afetivos-emocionais: 1. Solidariedade durante o desenvolvimento das atividades; 2. Segurança em expor suas ideias, e respeito às ideias e pensamentos alheios.

No quadro 2, temos a apresentação do planejamento, que envolve os objetivos, os tempos de aula, a abordagem metodológica e as competências.

Quadro 2: Planejamento

PLANEJAMENTO – SEQUÊNCIA DIDÁTICA			
Data / Tempo	**Objetivos**	**Abordagem Metodológica**	**Objetivo de Aprendizagem**
08/10/2018 2 horas/aula (Aula 1)	- Verificar os conhecimentos prévios dos alunos em relação a Geometria Espacial; - Analisar as concepções dos alunos em relação a Matemática. - Revisar o conceito de área e perímetro de figuras planas; - Reconhecer as formas geométricas em obras artísticas; - Investigar artistas que utilizam formas geométricas em seus trabalhos;	Aplicação do questionário; Utilização do tangram para a realização de uma revisão dos conceitos de área e perímetro de figuras planas. Identificando formas geométricas em um trabalho de Piet Modrian, e pesquisando artistas que utilizam formas geométricas em seus trabalhos. Como proposta de atividade para ser realizada em casa, fazer um quadro se inspirando nas obras desses artistas.	(I). 2 (III). 2 - 5 (IV). 1

11/10/2018 2 horas/aula (Aula 2)	- Visualizar as formas geométricas espaciais presentes nas obras de Oscar Niemeyer; - Desenvolver reflexões sobre a presença da geometria na arte; - Estudar os conceitos de área e perímetro através da elaboração de plantas. (geometria plana)	Apresentação de slide com o tema “Matemática e Arte”, contendo um breve relato da biografia de Oscar Niemeyer, bem como, alguns exemplos de suas obras. Construção de plantas da “escola do futuro”.	(III). 3 – 4 – 5 (IV). 1-2
18/10/2018 2 horas/aula (Aula 3)	- Identificando e nomeando os sólidos geométricos; - Visualizando a planificação dos sólidos. - Reconhecendo objetos e formas espaciais no nosso cotidiano.	Construção dos sólidos geométricos com cartolina, utilizando moldes já prontos – Cilindro, Cone, Prismas e Pirâmides. Relacionando os sólidos construídos com objetos e formas espaciais do nosso cotidiano. (recurso concreto)	(I). 1 – 2 (II). 1 (III). 1 – 2 – 4 (IV). 1
22/10/2018 2 horas/aula (Aula 4)	- Investigando as características dos sólidos geométricos (corpos redondos, prismas, e pirâmides).	Utilização dos sólidos construídos na aula anterior para estudar as características presentes em cada sólido, bem como, suas diferenças e semelhanças. (recurso concreto)	(I). 1-2 (II).1 (III). 1 – 2 – 3 - 4 – 5 (IV). 2
25/10/2018 2 horas/aula (Aula 5)	- Estudar as características presentes nos prismas; - Calcular área e volume do prisma.	Construção de prismas no GeoGebra, versão aplicativo para Smartphones. Roteiro com as orientações para as construções dos prismas com GeoGebra. (recurso digital)	(I).1- 2 (II).1 (III). 1 – 2 – 4
29/10/2018 2 horas/aula (Aula 6)	- Resolver problemas envolvendo o cálculo da área e do volume de prismas.	Observação dos prismas construídos para conjecturar maneiras de calcular a área desses sólidos. (recurso concreto) Resolução de problemas, presente no livro didático, envolvendo área e volume dos prismas. (recurso concreto)	(I).1 – 2 (II). 1 (III).1 – 2 – 4

05/11/2018 2 horas/aula (Aula 7)	- Resolver problemas envolvendo o cálculo da área e do volume de prismas.	Correção das atividades propostas na aula anterior, e discussão sobre as dificuldades apresentadas. Implementação de atividades envolvendo a identificação dos prismas, e cálculos da área e volume.	(I). 2 (III). 1 – 2 – 4
08/11/2018 2 horas/aula (Aula 8)	- Estudando as características dos corpos redondos (Cone, cilindro e esfera);	Apresentação de um vídeo feito no GeoGebra para representar os corpos redondos como sólidos de revolução; (recurso digital)	(III). 1 – 4
12/11/2018 2 horas/aula (Aula 9)	- Resolver problemas envolvendo o cálculo da área e do volume dos corpos redondos.	Utilização da planificação do cilindro e do cone, para conjecturar meios de calcular a área e o volume desses sólidos.(recurso concreto)	(I). 1 - 2 (III). 1 – 2 – 4 (IV). 1 – 2
26/11/2018 2 horas/aula (Aula 10)	- Relacionar os estudos de Geometria Espacial com a Arquitetura. - Refletir sobre os estudos referentes a Geometria Espacial realizados ao longo do bimestre.	Exposição das maquetes que foram construídas ao longo do bimestre, sendo inspiradas nas formas presentes nos trabalhos de Oscar Niemeyer.	(I). 1-2 (II). 1 (III). 1- 2 – 3 – 4 - 5 (IV). 1-2
06/12/2018 2 horas/aula (Aula 11)	- Identificar as características das pirâmides; - Calcular a área e o volume de pirâmides.	Identificando com o auxílio dos sólidos as características presentes nas pirâmides, conjecturando formas de calcular sua área.	(I).1-2 (II). 1 (III). 1-2 – 3 – 4 - 5 (IV). 2

Fonte: Elaborado pela autora

3.4. Experimentação e análises a posteriori

Essa é a fase em que se coloca em prática todo o planejamento, lançando mão dos variados recursos didáticos. Uma fase, que no contexto dessa pesquisa, há uma interação entre o professor (pesquisador) e os sujeitos (alunos), sendo todas as ações registradas.

Inicialmente foi esclarecido aos alunos que eles iriam ser sujeitos de uma pesquisa para o desenvolvimento de uma dissertação de mestrado, e que para isso, as tarefas e questionários aplicados no decorrer do bimestre, seriam recolhidos para uma posterior análise. E também que eventualmente algumas atividades seriam fotografadas, e os diálogos e questionamentos seriam registrados no diário de campo do pesquisador.

As atividades desenvolvidas contaram com variados recursos, se iniciando com uma atividade de revisão de cunho interdisciplinar com Artes e História, depois foi trabalhada a planificação e construção de sólidos geométricos, explorando meios concretos e digitais, como recurso virtual foi utilizado o GeoGebra 3D na versão aplicativo, e para aproximar os conceitos de Geometria Espacial com situações do cotidiano foram construídas maquetes sendo inspiradas nas obras de Oscar Niemeyer. Está última também seguiu uma perspectiva interdisciplinar com Artes e História. Para a análise do material da pesquisa, aderimos como critério para identificação dos sujeitos (alunos) a letras inicial dos nomes seguida do número da chamada que consta no diário de classe.

CAPÍTULO IV

4. IMPLEMENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RECURSOS DIDÁTICOS

Neste capítulo, há uma análise das atividades implementadas em sala de aula voltadas para o ensino e aprendizagem da Geometria Espacial através de recursos pedagógicos variados, concretos e digitais, na perspectiva de uma aprendizagem significativa através do desenvolvimento da habilidade de visualização, que é um dos pilares para a construção de um raciocínio geométrico.

4.1. A Matemática é só cálculo?

A implementação e análise do questionário inicial contribuiu para a elaboração de uma sequência didática, a primeira atividade teve como objetivo a revisão de área, perímetro, e outros conceitos da Geometria Plana. Tendo em vista que alguns alunos apresentaram uma concepção de que a matemática se limita a realização de cálculos algébricos, não encontrando nenhum sentindo além desse, e nem mesmo estabelecendo uma relação da disciplina com o cotidiano ou com outras áreas do conhecimento. Sendo assim, com a intenção de despertar no aluno uma visão diferente da Matemática, bem como, revelar a relação dessa disciplina com a Artes e História, a revisão foi feita de um jeito diferente do tradicional.

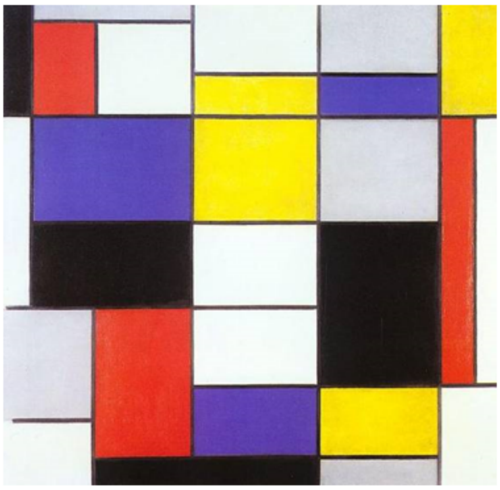
A primeira tarefa foi elaborada antes da implementação do questionário inicial, pois a pesquisadora já tinha a ideia de fazer uma revisão diferente da forma tradicional, então levou uma folha com as atividades impressas, que inicialmente havia o desenho do quebra-cabeça chinês, tangram, e a proposta era para que os alunos realizassem as medidas dos lados de cada peça do quebra-cabeça para posteriormente calcular a área e o perímetro, e assim a professora pôde retomar alguns conceitos da geometria plana. Mas além, dessa breve análise de conceitos já estudados, a pesquisadora teve a oportunidade de contar um pouco da história e da origem do tangram.

Nessa mesma atividade, foi apresentado uma obra de *Piet Modrian*, e eles puderam observar a presença das formas geométricas nessa obra. O que foi uma boa oportunidade para desenvolver reflexões sobre a Matemática, a Arte, e a História, pois nesta atividade, além desse contato inicial com Artes Geométricas, os discentes puderam conhecer também um pouco sobre a Biografia do Artista. Em seguida, eles foram encorajados a utilizar as formas geométricas do tangram, e construir a sua própria obra artística. E como tarefa para ser realizada em casa, a professora propôs uma pesquisa de outros artistas que também utilizaram as formas geométricas em seus trabalhos.

Figura 12: Atividade interdisciplinar com Artes e História

2. A matemática não está presente somente nas fórmulas, ou em exercícios algébricos. Ela nos acompanha em nosso dia a dia, por exemplo, quando vamos fazer compras, ou quando preparamos uma deliciosa receita. A matemática faz parte da natureza, da música, da arquitetura, e etc. Poderíamos ficar um bom tempo pensando na importância da matemática para nossas vidas. Um filósofo e matemático, chamado Pitágoras, disse a seguinte frase: "Tudo é número.". Hoje vamos observar a presença da matemática em uma famosa obra artísticas.

A obra a seguir é de **Piet Modrian**, ele nasceu em 7 de março de 1876, na Holanda. O seu estilo é baseado em uma arte harmoniosa, com linhas e retângulos, em contraposição a violência causada pela Segunda Guerra Mundial. Um dos grandes feitos desse artista, foi o de criar com outros pintores holandeses um movimento chamado de Neoplasticismo.

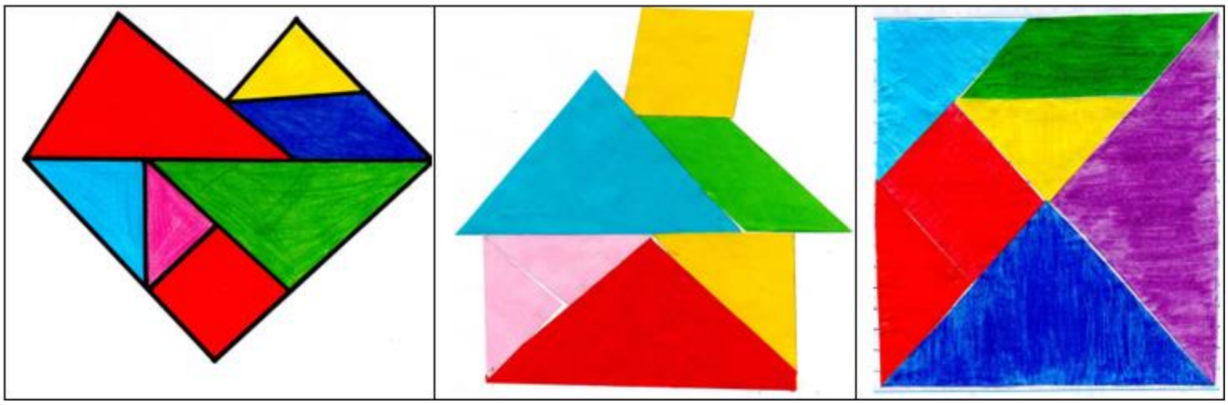


a) Como podem perceber, Piet Modrian, utilizava as formas geométricas para a construção de obras artísticas, o desafio agora é utilizarem as formas geométricas das peças do tangram, para construir a sua própria arte.
b) Pesquisem outros artistas que também utilizem as formas geométricas em seus trabalhos, e façam comentários sobre suas obras, trazendo alguns exemplos.

Fonte: Elaborado pela autora

Na tarefa com o objetivo de os alunos criarem a sua própria obra artística, alguns preferiram fazer a reprodução do próprio tangram, ou outros desenhos que estavam disponíveis na internet, que utilizavam apenas as sete peças do quebra-cabeça, como animais e casas. Como podemos observar na figura 13:

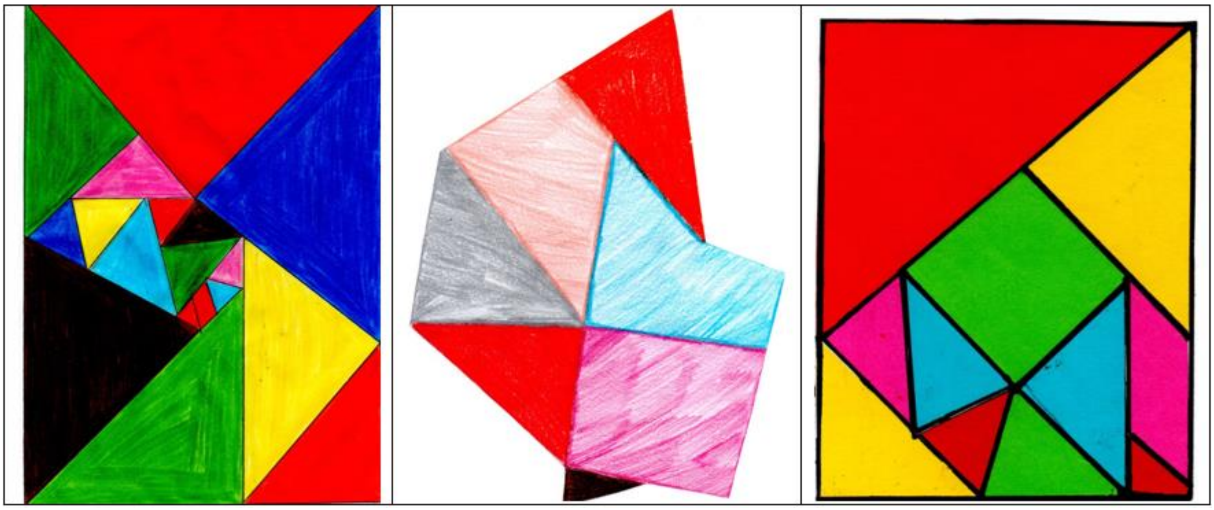
Figura 13: Pinturas e colagens feitas pelos alunos com as sete peças do tangram



Fonte: Acervo digital da pesquisa

Alguns alunos que preferiram deixar a criatividade fluir, e não reproduziram nada de ninguém, simplesmente buscaram a harmonia nas formas geométricas e construíram algo que se distanciou da cópia mecânica de um modelo, conforme podemos observar nas figuras abaixo:

Figura 14: Pinturas e colagens feitas pelos alunos utilizando as formas geométricas



Fonte: Acervo digital da pesquisa

Os estudantes, de forma geral, se sentiram bem animados para a realização dessa etapa da atividade, inclusive alguns produziram mais do que foi solicitado. Na última parte dessa atividade que tinha como proposta uma pesquisa sobre artistas que utilizavam formas geométricas em suas obras, eles trouxeram vinte e três nomes, porém os mais citados, foram

Romero Britto, Beatriz Milhazes, Erik Pevernagie, e Picasso. Em seguida temos a representação de uma das imagens trazidas pelos alunos, que é a do quadro Cat de Romero Britto:

Figura 15: Cat de Romero Britto

Fonte:< https://www.wikiart.org/pt/romero-britto/cat> Acesso em: 25 fev. 2020

Juntamente com a imagem das obras dos artistas, trouxeram também informações sobre a biografia destes, bem como, o estilo e a época de realização, quando se tinha disponível.

Segundo Fainguelernt e Nunes (2015) a conexão entre a Matemática e a Arte é imprescindível para que o indivíduo se desenvolva integralmente, e para se inserir no mundo do trabalho, socialmente e culturalmente, o que contribui para própria evolução da sociedade.

Ao final dessa atividade, é notável as mudanças em seus discursos, e alguns alunos começaram a perceber que a Matemática não se limita a realização de cálculos algébricos, mas que essa área se faz presente em obras de Artes, podendo servir também como ponte para trabalhar os aspectos históricos dessas obras, favorecendo o desenvolvimento da sensibilidade, da criatividade e da cultura.

4.2. A Matemática na Arquitetura

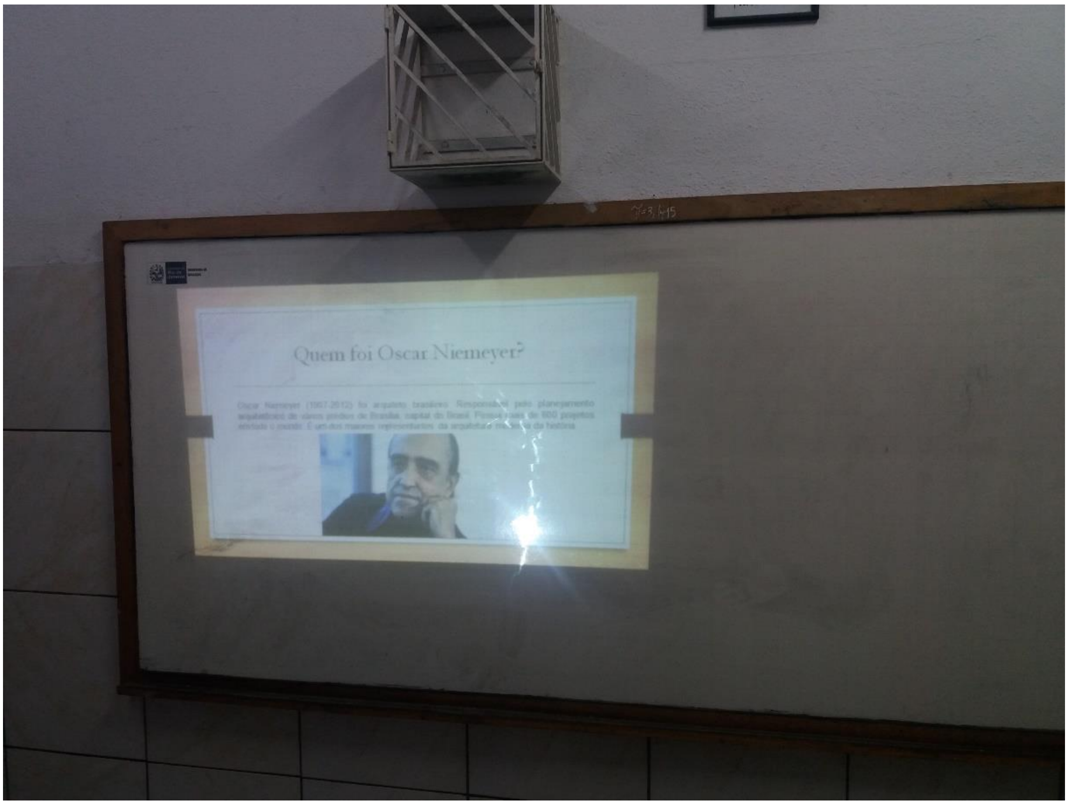
Dando continuidade a uma abordagem interdisciplinar, considerando as respostas ao questionário inicial, e já pensando na introdução dos estudos das formas geométricas espaciais, a pesquisadora juntamente com as professoras de História (Professora A) e Artes (Professora B), apresentaram um pouco do trabalho realizado pelo renomado arquiteto brasileiro Oscar Niemeyer. Em entrevista com as Professoras, temos um breve acompanhamento sobre suas contribuições, bem como, suas perspectivas a respeito desse trabalho. As perguntas nortearam em torno de detalhes sobre o planejamento, sobre o tema Modernismo, e sobre a função social dessa atividade. Inicialmente a Professora A falou que para começar a abordagem do tema com os alunos, levou uma apresentação em slide contendo os traços bibliográficos do arquiteto, alinhando com a construção de Brasília, sendo que esse título faz parte do currículo de História, discursando também acerca de outras obras, não só as construções, mas também as publicações que ele participou e prêmios que ele ganhou, o que levou o tempo de quatro horas-aula. Segundo a Professora A, as obras mais estudadas foram referentes a construção de Brasília e sobre o Complexo da Pampulha em Belo Horizonte, e a avaliação foi voltada a análise da construção das maquetes: "[...] a própria construção da maquete foi uma avaliação para ver se eles tinham assimilado bem a ideia dos traços do Oscar Niemeyer, a preocupação dele com as formas de se fazer prédios diferentes, mais funcionais."

Para a Professora A, não tem como falar sobre Niemeyer sem falar sobre o Modernismo, e a respeito da função social das obras de Niemeyer destaca que, ele construiu a capital do nosso país, e isso é algo que não podemos desprezar. E que apesar de sua arquitetura ser diferente para quem vê pela primeira vez, suas obras são bem funcionais versando por todas as áreas, projetando casas, escolas, igrejas, e etc., havendo diversidade em seus traços.

A Professora B, explicou como foi sua abordagem em sala de aula, em relação ao trabalho sobre o Oscar Niemeyer, explicando que inicialmente apresentou alguns vídeos, slides e aulas discursivas, apresentando alguns exemplos das construções do artista e esboços de trabalhos: "[...] falei por alto sobre Modernismo, comparando com outras obras do Movimento. Fiz uma releitura de suas obras, com as construções atuais sobre prédios e casas construídas com a arquitetura de sustentabilidade do planeta."

Para iniciar essa introdução, a pesquisadora, como um complemento, levou uma apresentação em slide contendo também parte da biografia e das obras do arquiteto, como se pode observar no registro fotográfico a seguir:

Figura 16: Apresentação em slide



Fonte: Elaborado pela autora

A escolha em apresentar os projetos de Oscar Niemeyer, e usá-los como referência para trabalhar a Geometria, se deu por conta de sua história e trajetória profissional, pensando em valorizar a história e cultura de nosso país, considerando que ele foi um dos maiores arquitetos brasileiros. Foi arquiteto chefe de Brasília, ou seja, muitas construções importantes que a todo momento passam nos canais abertos de televisão do Brasil, são vistas pelos alunos e seus familiares. Sem falar nos CIEPs[5], uma construção conhecida por todos os estudantes, e muitos não tinham ideia que foi Niemeyer quem fez o projeto. Desse modo, conseguimos falar sobre a Geometria no mundo real, não através de exemplos fictícios ou somente lançando mão de fórmulas, que valorizam apenas uma memorização mecânica.

A Geometria nos ajuda a descrever e a interagir com o espaço que nos cerca, assim, estudar conceitos relacionados a Geometria Espacial por meio da arquitetura, possibilita a compreensão de que essa área da Matemática está ligada à realidade.

[5] Os Centros Integrados de Educação Pública (CIEPs), popularmente apelidados de Brizolões, foram um projeto educacional de autoria do antropólogo Darcy Ribeiro, que os considerava “uma revolução na educação pública do País”.

O objetivo principal dessa apresentação é reconhecer as formas geométricas espaciais presentes na arquitetura de Niemeyer, o que contribui para que o aluno reflita sobre a presença da matemática no seu dia a dia. Nessa aula, eles descobriram as principais obras desse arquiteto, como a do Congresso Nacional, Catedral de Brasília, Museu de Arte Contemporânea de Niterói, Parlamento Latino Americano, Sambódromo, o Centro Integrado de Educação Pública (CIEP), e etc, como representado na figura seguinte.

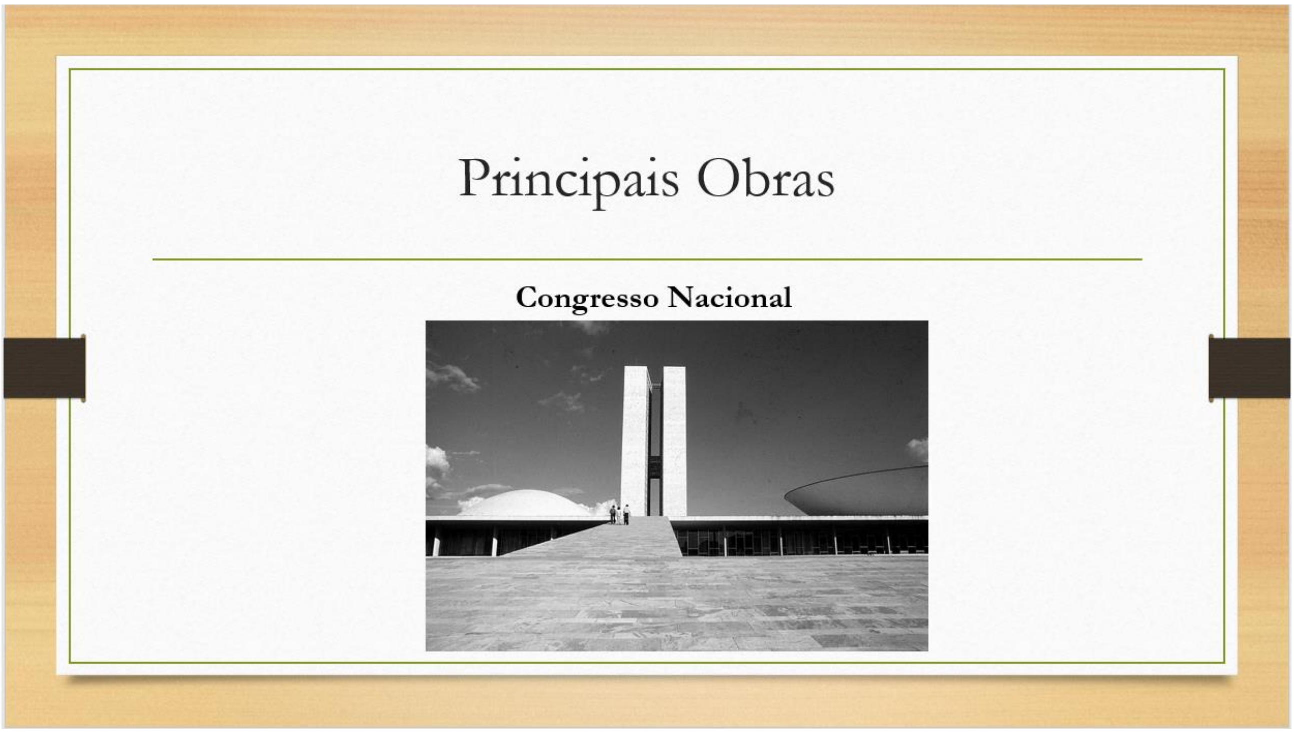
Figura 17: Apresentação dos Monumentos Importantes

Fonte: Elaborado pela autora

Durante a aula, os alunos puderam visualizar as formas geométricas espaciais nas construções, desenvolvendo reflexões sobre a presença da geometria na arquitetura, e como culminância dessa apresentação os alunos foram estimulados a desenhar plantas da "Escola do Futuro", e para isso eles se inspiraram nos projetos de Oscar Niemeyer.

O esboço de plantas, que foi uma atividade sugerida pelo professor, proporcionou a possibilidade de mais uma breve revisão em relação aos conceitos de geometria plana, como o cálculo de áreas e perímetro, além de utilizarem o conceito de escala associando as medidas da planta as medidas reais da escola. Vejamos a seguir, algumas fotos que os discentes tiveram acesso através da apresentação em slide:

Figura 18: Apresentação do Congresso Nacional



Fonte: Elaborado pela autora

Observando as principais obras do Oscar Niemeyer, os alunos aos poucos foram identificando o estilo desse renomado arquiteto, bem como, as formas geométricas presentes em seus trabalhos. No Congresso Nacional identificamos seu prédio principal, que é suporte para duas torres com o formato de paralelepípedos, localizado entre duas cúpulas, uma voltada para cima e outra voltada para baixo, a beleza da geometria é evidente nessa construção, através da simetria, do contraste visual, e das curvas nas cúpulas. No quadro seguinte, temos a maneira em que foi organizada a apresentação:

Quadro 3: Organização da apresentação

1º Passo	Quem foi Oscar Niemeyer?	Apresentação de fotos do Arquiteto e exposição de sua biografia.
2º Passo	Monumentos de destaque	Fotos dos monumentos que mais se destacam nas mídias, como a do Congresso Nacional, Sambódromo, Museu de Arte Contemporânea de Niterói, Palácio da Alvorada, e os Centros Integrados de Educação Pública, discorrendo um pouco sobre a história dessas construções e sobre o que elas representam para o nosso país.
3º Passo	Como tudo começou?	Apresentação dos projetos e plantas elaborados por Oscar Niemeyer,

		falando da importância do planejamento na Arquitetura.
4º Passo	Identificando as formas geométricas espaciais	Reflexão e comparação das obras projetadas por Oscar Niemeyer com as formas geométricas espaciais.

Fonte: Elaborado pela autora

Figura 19: Apresentação do Museu de Arte Contemporânea de Niterói

Fonte: Elaborado pela autora

4.3. Construindo Sólidos Geométricos

É importante que o discente no estudo de Geometria, para que alcance uma aprendizagem significativa, tenha a oportunidade de investigar, descrever, descobrir, por meio de representações, construções e do diálogo. Portanto, a terceira atividade proposta foi a construção física de alguns sólidos geométricos, e os alunos foram organizados em grupos de 4 a 6 pessoas, para que pudessem interagir e analisar as formas espaciais presentes em cada sólido.

Partindo do princípio que a construção e manipulação de sólidos geométricos pode contribuir para que o aluno crie uma imagem mental desse objeto, o que ajuda no desenvolvimento do raciocínio visual, essa atividade consistiu na construção por meio de recursos concretos e na observação de prismas, pirâmides e corpos redondos. Para facilitar essa construção, a professora levou os moldes para que os alunos recortassem e colassem na cartolina, para depois iniciar a montagem, nesse processo os estudantes já tiveram a oportunidade de associar cada sólido a sua planificação, como na figura 20.

Figura 20: Montando os sólidos geométricos

Fonte: Foto da autora

À medida que as construções eram realizadas, alguns estudantes prontamente iniciaram uma comparação com as formas presentes no seu dia a dia, e também com algumas formas que foram observadas na apresentação em slide de algumas obras de Niemeyer. O diálogo entre a professora e a estudante E11, a seguir, nos revela um momento de reflexão em que a aluna começou a associar as formas dos sólidos que tinha construído juntamente com os colegas de classe, com as formas espaciais presentes no cotidiano, estabelecendo uma conexão com a realidade, trecho que foi registrado no diário de campo durante a implementação da tarefa:

> Estudante E11: Professora... Olha esse aqui!
> Professora: O que você observou desse sólido?
> Estudante E11: Ele se parece com aquele prédio que você nos mostrou na outra aula.
> Professora: Qual prédio?

> Estudante E11: Aquele redondo. (A aluna estava se referindo ao prédio do Parlamento Latino-Americano.)
> Professora: Ah sim... Ele tem um formato cilíndrico.
> Estudante E11: É isso aí! Cilíndrico!

É importante organizar o ensino, articulando com a realidade concreta, para que o estudante possa perceber e traduzir o conteúdo na vida real. À vista disso, o educador deve criar situações que permita que o discente compreenda, analise, e relacione diferentes situações.

Continuação do diálogo entre a Professora e a Estudante E11:

> Professora: E os outros sólidos, eles se parecem com o que?
> Estudante E11: Esse aqui, se parece com uma caixa de leite. (Nesse momento ela pegou o paralelepípedo.)
> Professora: Muito bem!
> Estudante E11: Esse é um cone e esse é uma pirâmide. (A aluna falou apontando para a pirâmide de base quadrangular e para o cone).
> Professora: E esse aqui? (A professora aponta para o prisma de base hexagonal)
> Estudante E11: Esse eu não sei... (A aluna responde após ficar um tempo analisando o sólido)

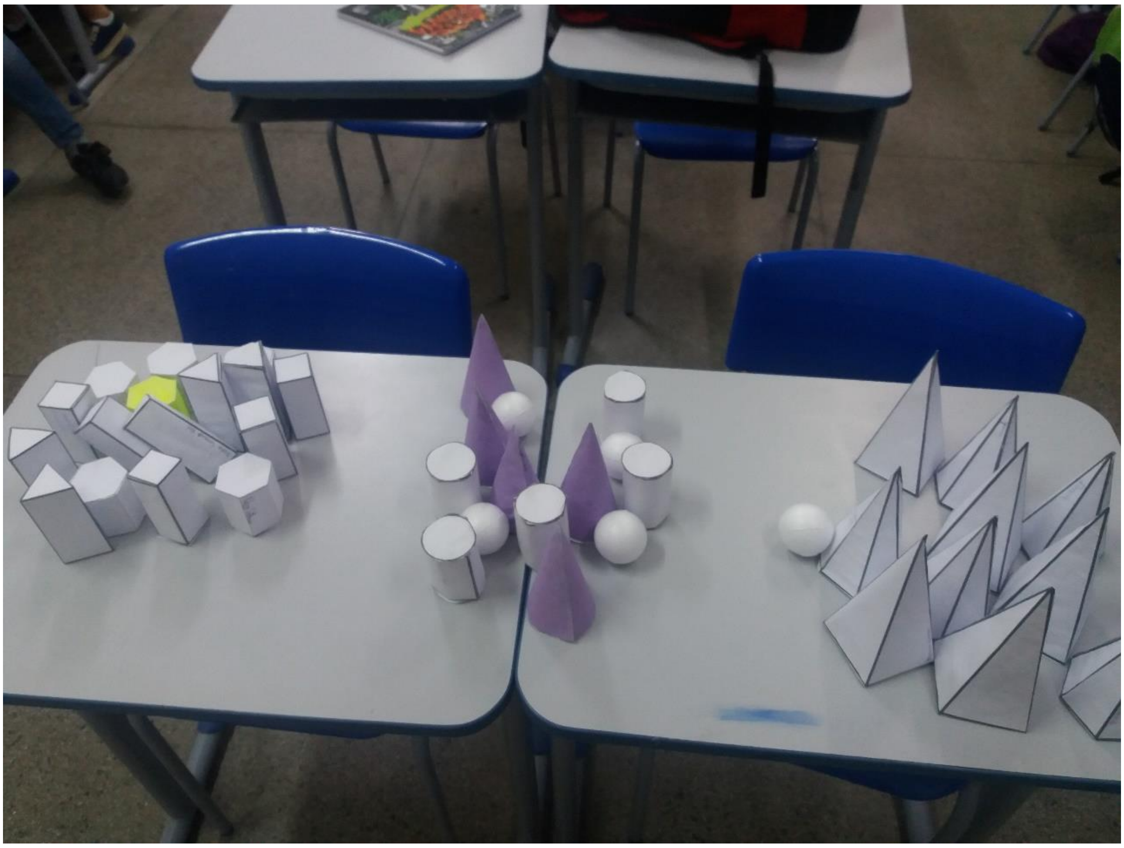
Os alunos do mesmo grupo e dos outros grupos começaram a se envolver no assunto buscando também associar as formas dos sólidos a objetos e outras formas espaciais presentes no seu dia a dia. Relacionaram o cone ao cone utilizado no trânsito, as pirâmides, com as pirâmides do Egito, o prisma triangular a estrutura do telhado de uma casa, mas apresentaram dificuldades para identificar objetos com as formas do prisma hexagonal. Durante o desdobramento da atividade, os alunos se mostraram bem entusiasmados com a proposta, talvez por ser um trabalho manual e não formal.

4.4. Classificando os Sólidos Geométricos

Essa atividade, realizada em grupo, tinha como proposta que através da discussão e da observação dos sólidos geométricos os alunos pudessem identificar suas características e elementos, realizando uma classificação prismas, pirâmides ou corpos redondos.

Os sólidos, que tinham sido construídos pelos estudantes, foram dispostos sobre as mesas, conforme podemos observar na figura 21, e então eles teriam que seguir duas etapas: (1) classificar os sólidos em prismas, pirâmides e corpos redondos; (2) identificar as características de cada um, conforme a sua classificação.

Figura 21: Sólidos Geométricos



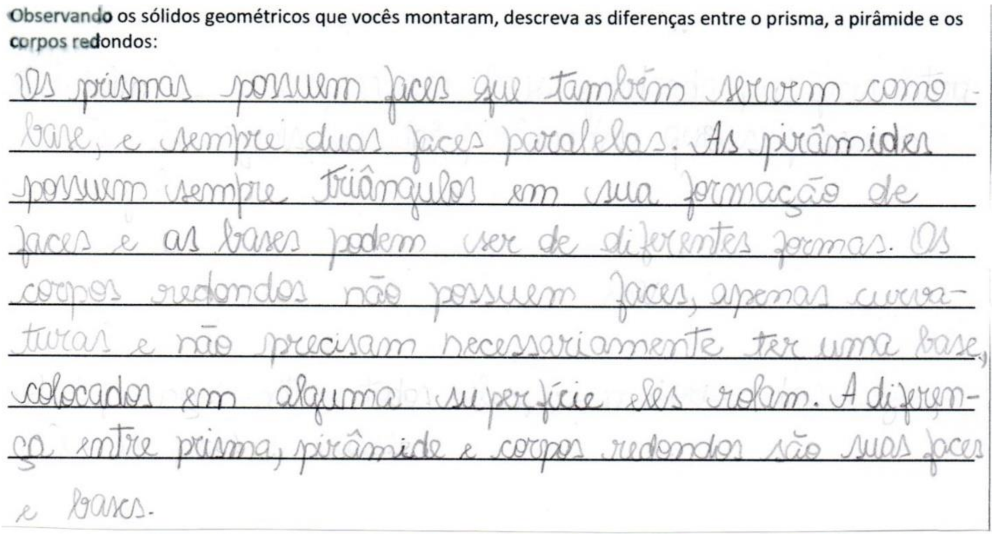
Fonte: Foto da autora

No decorrer da atividade eles puderam manusear os objetos, e discutir com o seu grupo sobre as diferenças, características e regularidades de cada um. Logo que os sólidos foram dispostos sobre a mesa, a professora pediu para que os grupos, oralmente, classificassem em pirâmides, corpos redondos e prismas, sem nenhuma dificuldade, prontamente eles fizeram a classificação dos mesmos. Em seguida, eles foram incentivados a justificar as suas repostas, identificando suas características.

Uma folha, cujo enunciado pedia para que os alunos descrevessem as diferenças entre os sólidos, foi entregue para cada integrante dos grupos que foram formados. Para que após as discussões, os alunos pudessem expressar as suas considerações.

Na figura a seguir apresentamos a resposta da aluna L26, em relação as características dos sólidos apresentados na atividade.

Figura 22: Resposta da aluna L26 a atividade 4



Observando os sólidos geométricos que vocês montaram, descreva as diferenças entre o prisma, a pirâmide e os corpos redondos:

Os prismas possuem faces que também servem como base, e sempre duas faces paralelas. As pirâmides possuem sempre triângulos em sua formação de faces e as bases podem ser de diferentes formas. Os corpos redondos não possuem faces, apenas curvaturas e não precisam necessariamente ter uma base, colocados em alguma superfície eles rolam. A diferença entre prisma, pirâmide e corpos redondos são suas faces e bases.

Fonte: Elaborado pela autora

> "Os prismas possuem faces que também servem como base, e sempre duas faces paralelas. As pirâmides possuem sempre triângulos em sua formação de faces e as bases podem ser de diferentes formas. Os corpos redondos não possuem faces, apenas curvaturas e não precisam necessariamente ter uma base, colocados em alguma superfície eles rolam. A diferença entre prisma, pirâmide e corpos redondos são suas faces e bases."

Analisando a resposta da estudante L26, inicialmente ela diz que "Os prismas possuem faces que também servem como base, e sempre duas faces paralelas." O que nos leva a entender que a aluna observou que o prisma pode ficar apoiado sobre qualquer face, por isso a afirmação de que qualquer face pode servir como uma base. Porém, ao mesmo tempo que ela faz essa observação, ela diz que um prisma, sempre terá duas faces paralelas. E realmente, todo prisma tem pelo menos duas faces paralelas, que são classificadas como as bases. Continuando a análise, a estudante destacou características importantes da pirâmide, explicando que suas faces são triangulares e que as bases possuem diferentes formas.

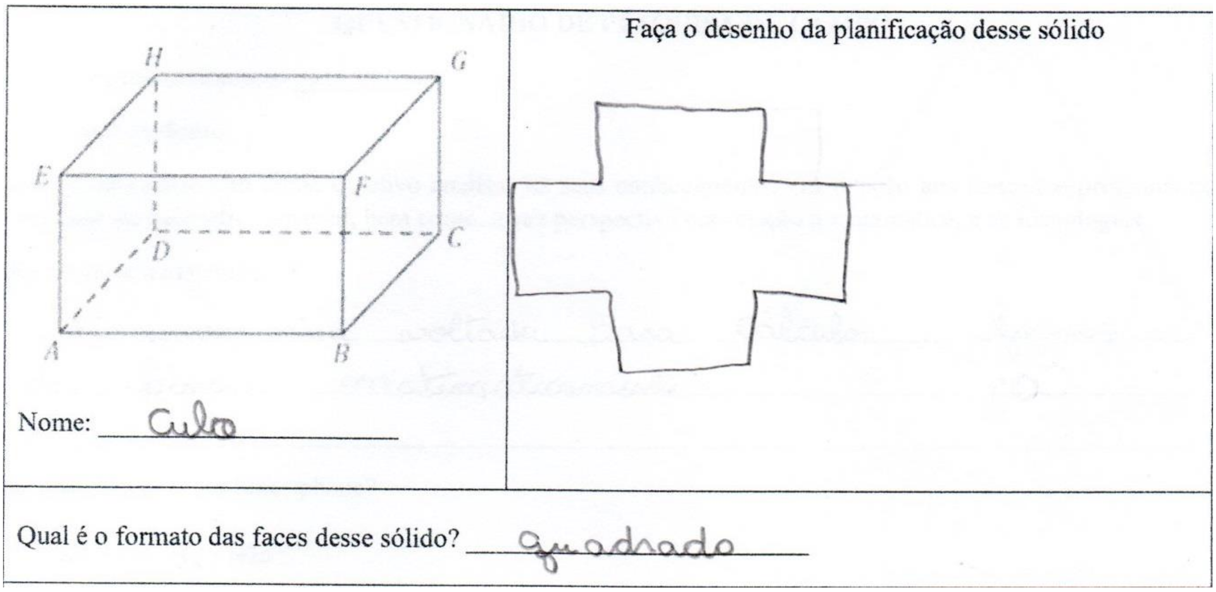
A aluna L26 ao descrever as características dos corpos redondos, salientou que nem todos possuíam base (se referindo a esfera), chamando a atenção para o formato curvilíneo, e visualizou que esses sólidos rolam quando colocados sobre uma superfície plana.

A atividade implementada permitiu os alunos, através do diálogo, manipulação, e observação dos sólidos geométricos, classificar esses sólidos, levando em consideração seus elementos comuns, e também as características que os diferem. Ao final da atividade, cada grupo explicitou seus pareceres, formando então o conceito de prismas, pirâmides e corpos redondos.

4.5. Todo paralelepípedo é um cubo?

Muitos alunos, ao visualizar a imagem estática do paralelepípedo, que estava representado no questionário inicial, o classificaram como um cubo, como segue na figura 23:

Figura 23: Paralelepípedo



Fonte: Elaborado pela autora

A maioria dos alunos não soube, por meio da observação da imagem presente nesse questionário, classificar o paralelepípedo, bem como, representar corretamente a sua planificação. Apesar de não ter a medida das arestas, visualmente, é possível perceber que elas não possuem a mesma medida? Dessa questão, partem duas situações, os estudantes não conhecem as características de um cubo (todas as arestas devem ter a mesma medida), ou a figura estática no papel não era suficiente para a identificação da proporção das arestas, o que nos leva a crer que a utilização de outros recursos são importantes para a visualização dos objetos tridimensionais no estudo da geometria espacial. Alguns, inclusive, identificaram esse sólido como um polígono, não como um poliedro, o nomeando de retângulo.

Considerando essa dificuldade, foi elaborada uma atividade, utilizando como recurso didático o GeoGebra 3D na versão aplicativo para *Smartphone*[6], para trabalhar especificamente a forma geométrica espacial prismática. Para a realização da tarefa os estudantes foram

[6] A escolha do GeoGebra 3D na versão aplicativo para Smartphone se deu por conta da falta de um laboratório de informática na escola, considerando também, que todos os alunos daquela turma possuíam um Smartphone.

organizados em grupos de 3 ou 4 alunos, tendo a possibilidade de dialogar com os demais colegas, e também seguiram um roteiro que se dividiu em seis etapas:

Quadro 4: Etapas para a realização da quinta atividade

1ª	Breve ambientação[7] com o GeoGebra 3D e construção do paralelepípedo;
2ª	Realizar a medida das arestas, e calcular a área total;
3ª	Identificar as características do paralelepípedo;
4ª	Construir um cubo através da ferramenta rápida e medir suas arestas;
5ª	Identificar as diferenças entre um cubo e um paralelepípedo;
6ª	Construir um prisma de base triangular, e calcular a área total do prisma.

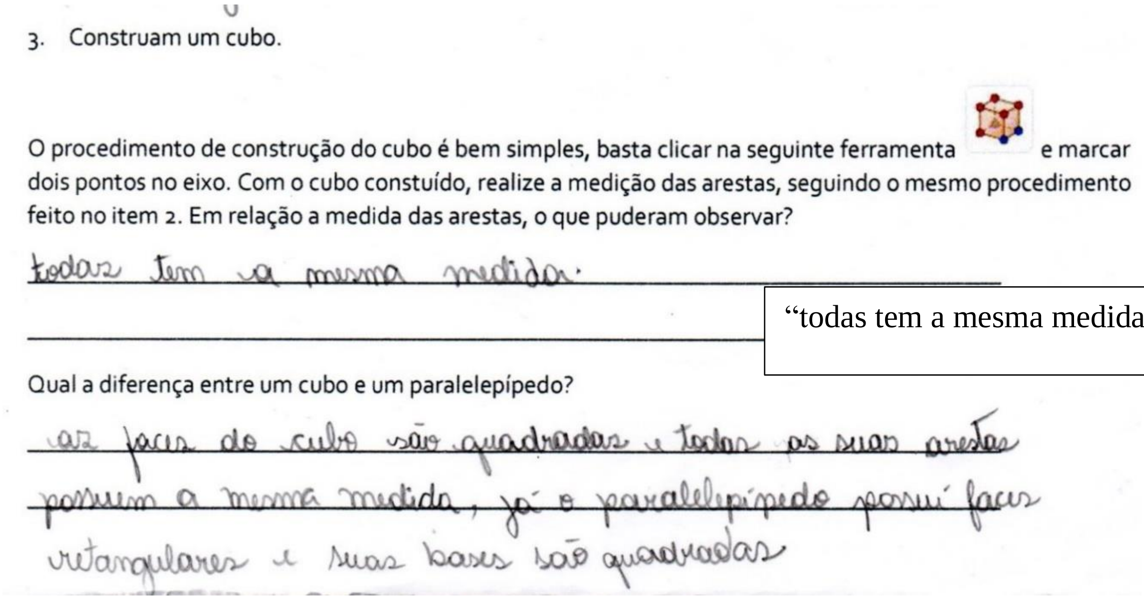
Fonte: Elaborado pela autora

Na primeira etapa, da quinta atividade, mesmo os alunos estando acostumados a utilizar o GeoGebra, tiveram grande dificuldades para realizar a construção do paralelepípedo, por causa da tabela dos Smartphone que é pequena, logo tiveram que refazer a construção algumas vezes e com o auxílio da professora.

Realizando a medição das arestas, eles conseguiram compreender as diferenças entre um cubo e um paralelepípedo, é o que podemos analisar por meio da resposta do grupo formado pelos alunos A5, D9 e P43:

[7] Os discentes já tinham desenvolvido, nos bimestres anteriores, atividades com o GeoGebra nessa versão aplicativo para Smartphones, inclusive o GeoGebra 3D. Portanto, eles tiveram uma breve ambientação, somente para relembrar algumas funções do aplicativo.

Figura 24: Resposta dos alunos A5, D9 e P43 a atividade 5


3. Construam um cubo.

O procedimento de construção do cubo é bem simples, basta clicar na seguinte ferramenta e marcar dois pontos no eixo. Com o cubo constuído, realize a medição das arestas, seguindo o mesmo procedimento feito no item 2. Em relação a medida das arestas, o que puderam observar?

todas Tem a mesma medida.

Qual a diferença entre um cubo e um paralelepípedo?

as faces do cubo são quadradas e todas as suas arestas possuem a mesma medida, já o paralelepípedo possuí faces retangulares e suas bases são quadradas

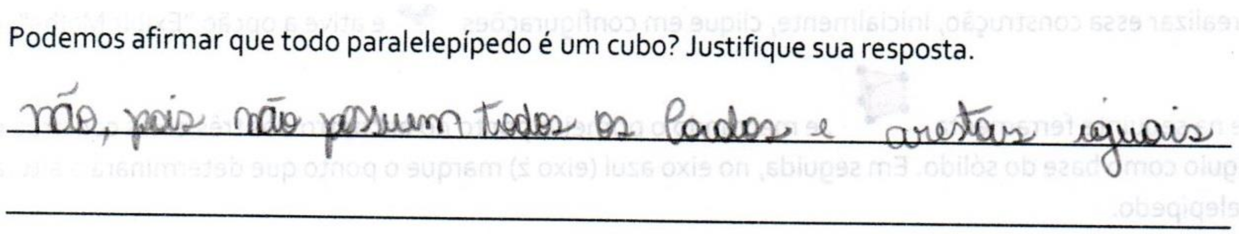
“todas tem a mesma medida”

Fonte: Elaborado pela autora

“as faces do cubo são quadradas e todas as suas arestas possuem a mesma medida, já o paralelepípedo possuí faces retangulares e suas bases são quadradas”

Para dar continuidade a análise dessa atividade, voltamos ao questionamento inicial presente no final do roteiro, como podemos observar na figura 25:

Figura 25: Resposta dos alunos A5, D9 e P43 ao questionamento inicial


Podemos afirmar que todo paralelepípedo é um cubo? Justifique sua resposta.

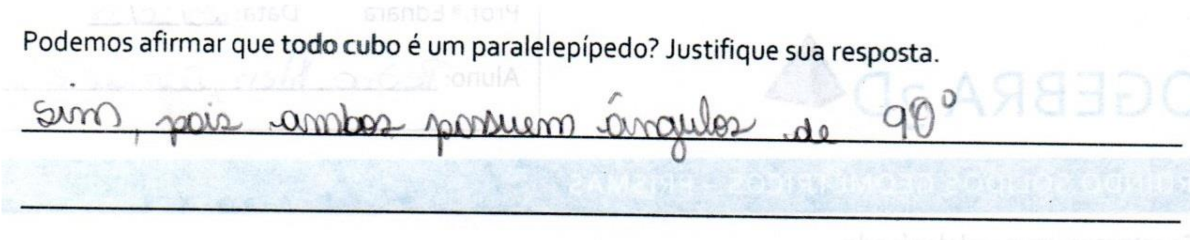
não, pois não possuem todos os lados e arestas iguais

Fonte: Elaborado pela autora

“não, pois não possuem todos os lados e arestas iguais.”

Os alunos identificaram que um cubo possuí todas as faces congruentes, e todas as arestas com a mesma medida. Mas, tiveram dificuldades para explicar que todo cubo é um paralelepípedo:

Figura 26: Resposta dos alunos A5, D9 e P43 ao comparar o cubo e o paralelepípedo


Podemos afirmar que todo cubo é um paralelepípedo? Justifique sua resposta.

sim, pois ambos possuem ângulos de 90°

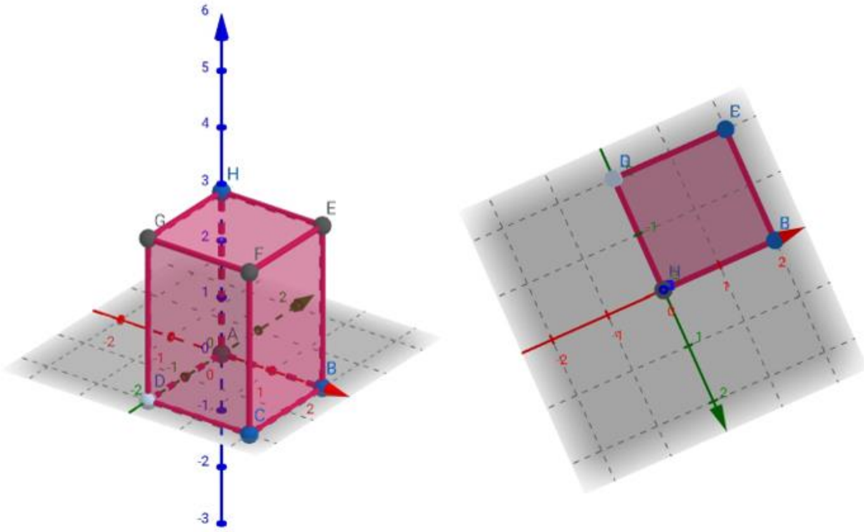
Fonte: Elaborado pela autora

“sim, pois ambos possuem ângulos de 90º”

Ao estudar as características do paralelepípedo, não conseguiram justificar o porquê de o cubo ser classificado como um paralelepípedo. Essa justificativa que o grupo apresentou, foi baseado no fato de eles só terem visualizado, até esse momento, os paralelepípedos retos – retângulos que apresentam ângulos retos entre cada uma das faces. Logo, deduziram que todos os paralelepípedos possuíam ângulos de 90º entre as faces, e observando essa mesma característica no cubo, utilizaram-na como explicação.

Outra parte importante, para a análise dessa atividade, foi em relação ao cálculo da área total do paralelepípedo reto-retângulo. A turma não recebeu nenhuma fórmula para a realização desse cálculo, eles dialogaram com os seus colegas de classe e professor, buscando regularidades, pensando em uma maneira de calcular a área. Assim, mediram as arestas, e perceberam que esse sólido (paralelepípedo reto-retângulo), que eles haviam construído tinham as quatro faces laterais iguais, e duas bases também iguais, como podemos ver na figura 27:

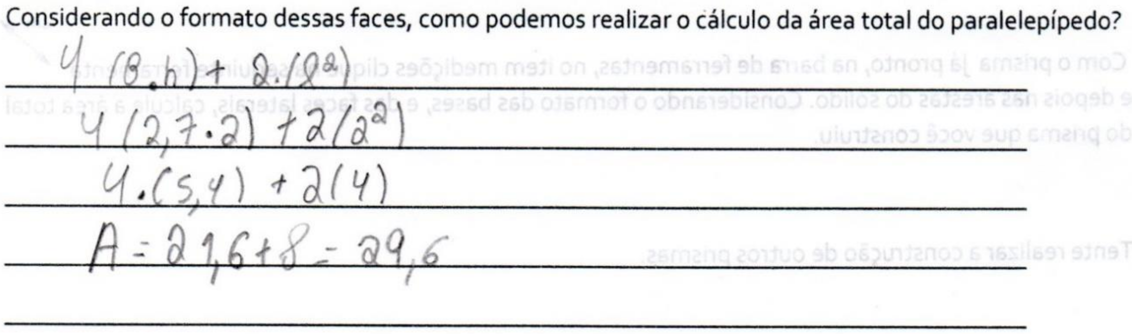
Figura 27: Captura da tela do Smartphone da atividade com o GeoGebra 3D



Fonte: Elaborado pela autora

Assim, analisando as respostas do grupo formado pelos alunos J19, G14 e T40, pode-se perceber que eles calcularam a área de uma face lateral, e multiplicaram por quatro. Depois calcularam a área de uma base, e multiplicaram por dois. E para o cálculo da área total, somaram os resultados dos dois cálculos, como segue na figura abaixo:

Figura 28: Cálculo realizado pelos alunos J19, G14 e T40, referente a quinta atividade


Considerando o formato dessas faces, como podemos realizar o cálculo da área total do paralelepípedo?

$4(B.h) + 2.(l^2)$

$4(2,7 \cdot 2) + 2(2^2)$

$4.(5,4) + 2(4)$

$A = 21,6 + 8 = 29,6$

Fonte: Elaborado pela autora

O cálculo realizado por esse grupo, sugere que eles identificaram algumas regularidades ao visualizar o sólido. Estabelecendo um padrão para o cálculo do mesmo.

Exemplo:

$$A = 4 \cdot (B \cdot h) + 2 \cdot (l^2)$$

A primeira parte da expressão se refere a área lateral, como a área lateral é formada por quatros retângulos, eles multiplicaram a área de uma face (base × altura), por quatro. Depois calcularam a área de uma base, que era formada por um quadrado (lado × lado), e multiplicaram por dois, pois o prisma possui duas bases. Finalmente realizaram a soma da área lateral com a área da base, chegando ao resultado da área total.

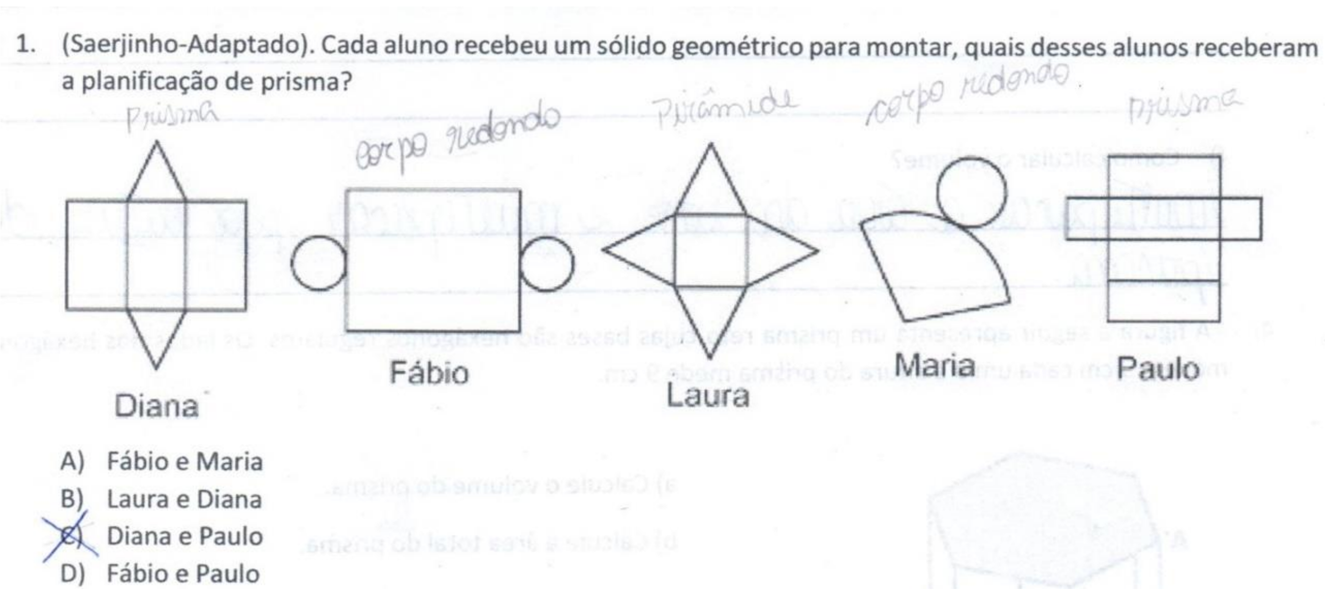
4.6. Investigando e conjecturando com os prismas

Essa atividade teve como objetivo, que através da observação e manipulação de prismas os estudantes pudessem investigar e conjecturar meios para realizar o cálculo da área e do volume do mesmo, tendo em mãos também suas planificações. Para a realização dessa tarefa, os alunos foram organizados em duplas e receberam uma folha com algumas questões referentes a identificação da planificação dos sólidos, análise das formas geométricas de alguns prismas, e cálculo da área e do volume.

Analisando a resposta escrita dos alunos L25 e L26, como representado nas figuras a seguir, conseguimos verificar como as atividades implementadas anteriormente o ajudaram a formar um padrão para o cálculo da área dos prismas, ressaltando que esses alunos durante as aulas não tiveram contato com fórmulas que permitem a realização desses cálculos.

Nessa atividade a primeira tarefa visava a identificação da planificação de alguns sólidos, como podemos observar na figura 29:

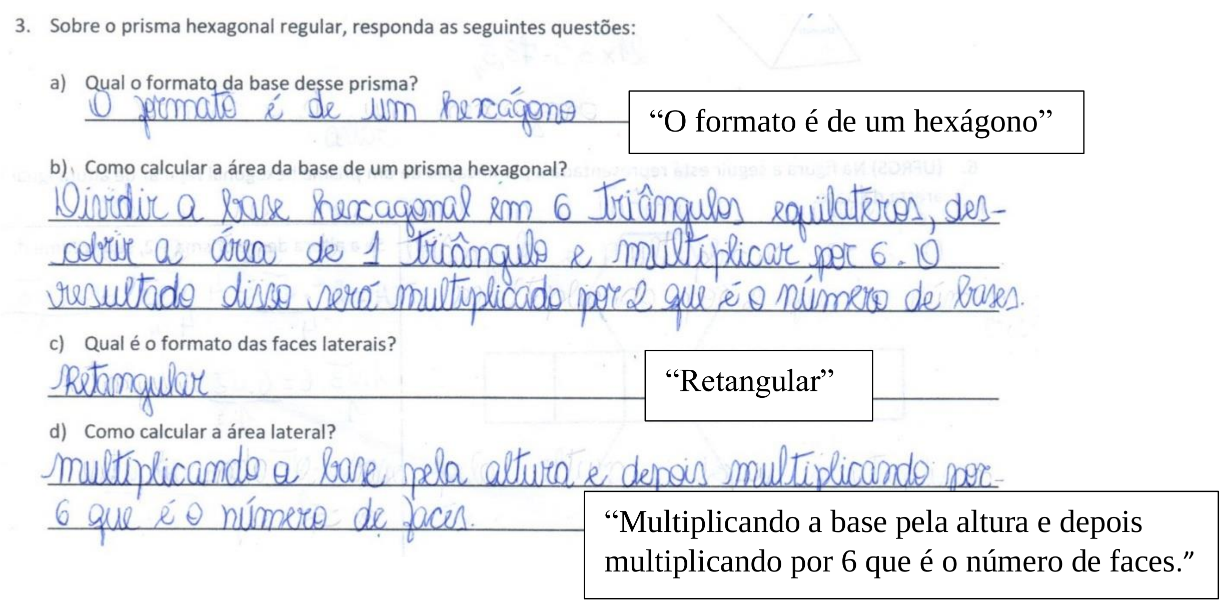
Figura 29: Análise da planificação dos sólidos



Fonte: Elaborado pela autora

Após a manipulação dos sólidos geométricos, por meio de materiais concretos e virtuais, podemos perceber um avanço em relação a identificação das planificações e classificação desses sólidos em comparação as respostas dadas no questionário inicial. Os alunos L25 e L26 conseguiram identificar e classificar corretamente os sólidos, e também como iremos ver na figura 30, conjecturaram e encontraram padrões para o cálculo da área dos prismas, vejamos:

Figura 30: Resposta da atividade 6 dos alunos L25 e L26


3. Sobre o prisma hexagonal regular, responda as seguintes questões:

a) Qual o formato da base desse prisma?

O formato é de um hexágono

“O formato é de um hexágono”

b) Como calcular a área da base de um prisma hexagonal?

Dividir a base hexagonal em 6 Triângulos equiláteros, des-
cobrir a área de 1 triângulo e multiplicar por 6. O
resultado disso será multiplicado por 2 que é o número de bases.

c) Qual é o formato das faces laterais?

Retangular

“Retangular”

d) Como calcular a área lateral?

multiplicando a base pela altura e depois multiplicando por
6 que é o número de faces.

“Multiplicando a base pela altura e depois multiplicando por 6 que é o número de faces.”

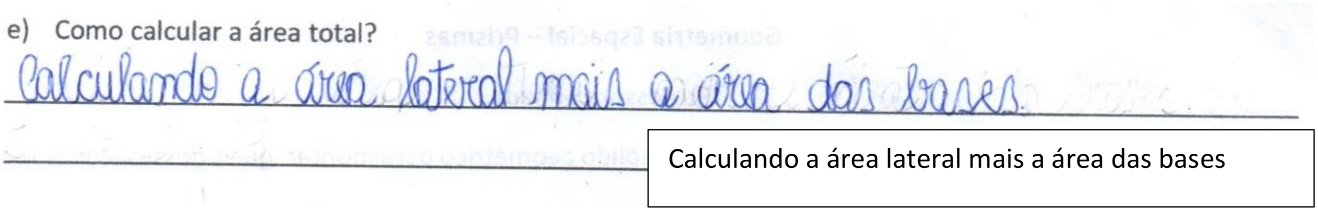
Fonte: Elaborado pela autora

(b): “Dividir a base hexagonal em 6 triângulos equiláteros, descobrir a área de 1 triângulo e multiplicar por 6. O resultado disso será multiplicado por 2 que é o número de bases.”

Nessa etapa da atividade 6, os alunos foram estimulados a dialogar entre eles e com a professora sobre as formas do prisma hexagonal regular, e escrever na folha de atividades as suas considerações. Salientando, que eles tinham em mãos os sólidos, e além de conversarem sobre suas formas, buscaram meios para calcular a sua área.

Com o auxílio da professora, os alunos L25 e L26, conseguiram visualizar através da observação e manipulação do sólido, que a base do prisma hexagonal regular, pode ser dividida em seis triângulos equiláteros. Portanto, inferiram, que para calcular a área de uma base desse prisma, bastava calcular a área de um triângulo equilátero e depois multiplicar esse resultado por seis. Como o prisma possui duas bases, eles entenderam que deveriam multiplicar por dois o resultado final, e então teriam o resultado da soma das duas áreas das bases. Os alunos visualizaram também, o formato retangular das faces laterais, e assim deduziram que para calcular a área da face lateral, eles poderiam calcular a área de um retângulo e em seguida multiplicar por seis, pois é o número de faces de um prisma hexagonal. Logo, como podemos observar na figura 31, eles entenderam que para calcular a área total deveriam somar o resultado da área lateral com o resultado da área das bases:

Figura 31: Resposta dos L25 e L26 sobre a área total de um prisma hexagonal


e) Como calcular a área total?

Calculando a área lateral mais a área das bases.

Calculando a área lateral mais a área das bases

Fonte: Elaborado pela autora

4.7. Os sólidos de revolução

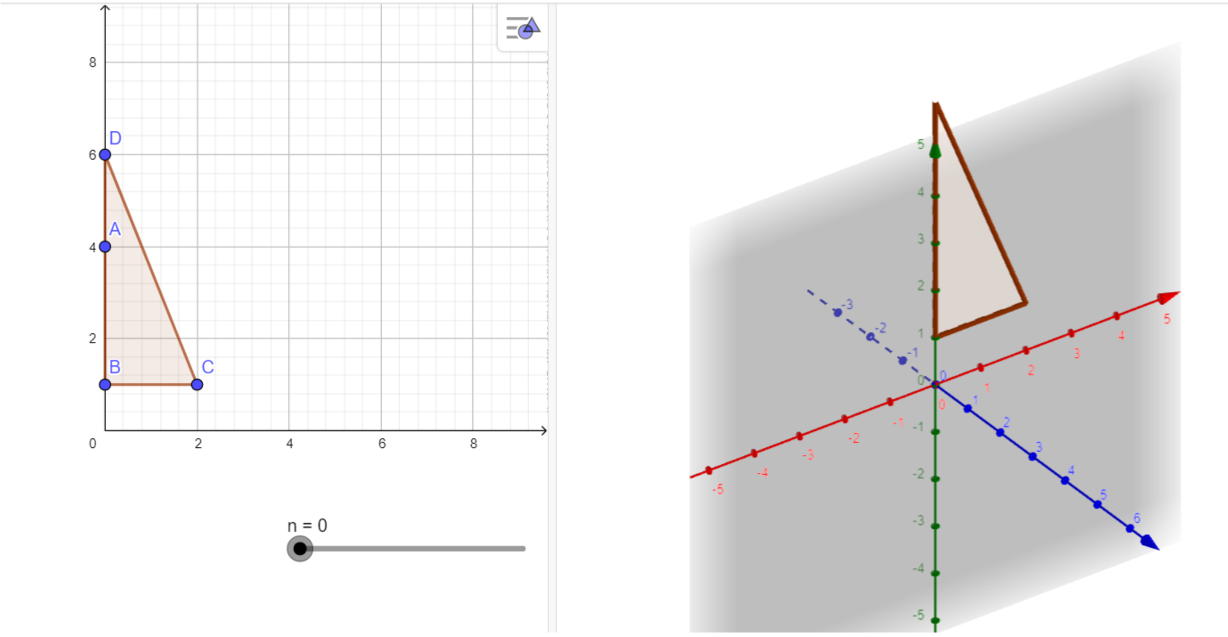
Na quarta atividade os alunos, a partir da observação e manipulação dos sólidos geométricos, realizaram uma classificação conforme as características que visualizavam nesses corpos redondos que foram apresentados, o cilindro, o cone e a esfera, e então identificaram suas formas arredondadas, e disseram que ao colocar esses sólidos em uma superfície plana, eles rolam. Porém não sabiam porque eram classificados como sólidos de revolução, então a professora fez uma apresentação no programa GeoGebra 3D, para que pudessem visualizar que esses sólidos são formados pela rotação de uma figura plana ao redor de seu eixo, como segue nas figuras:

Figura 32: Foto da apresentação realizada no GeoGebra

Fonte: Foto da autora

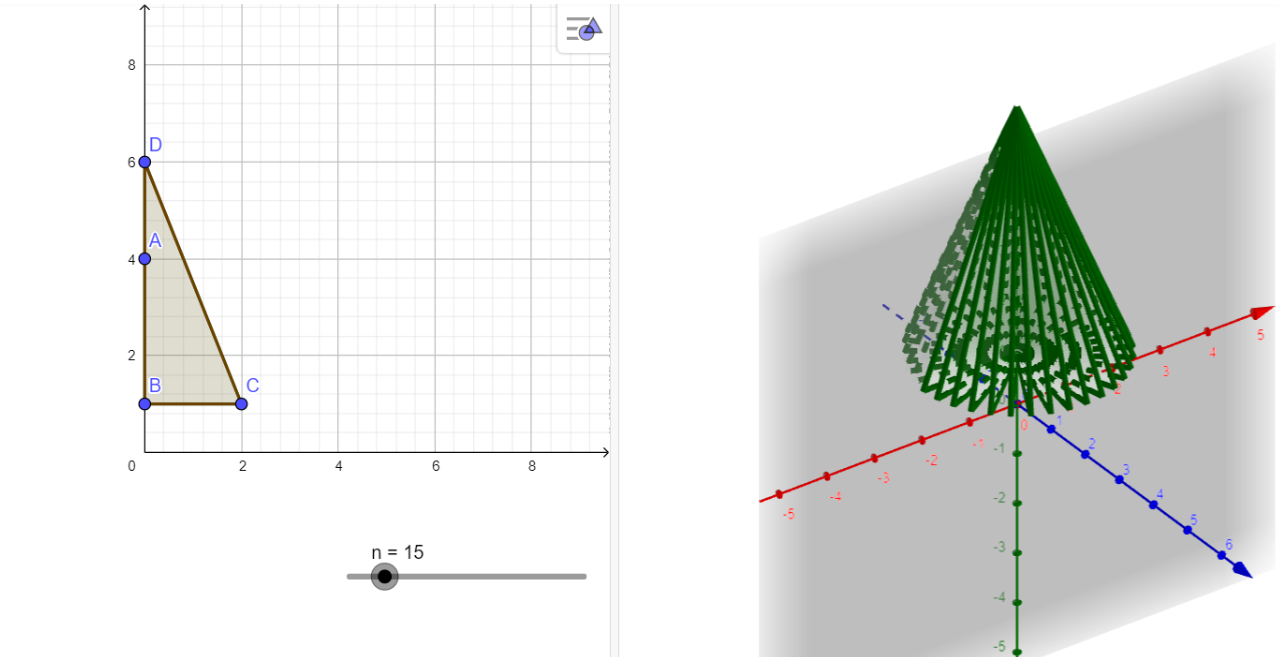
Inicialmente eles visualizaram a formação do cone através da rotação do triângulo em torno do eixo, como podemos observar nas figuras 33 e 34:

Figura 33: Início da rotação do triângulo em torno do eixo



Fonte: Elaborado pela autora

Figura 34: Formação do cone através da rotação do triângulo em torno de seu eixo

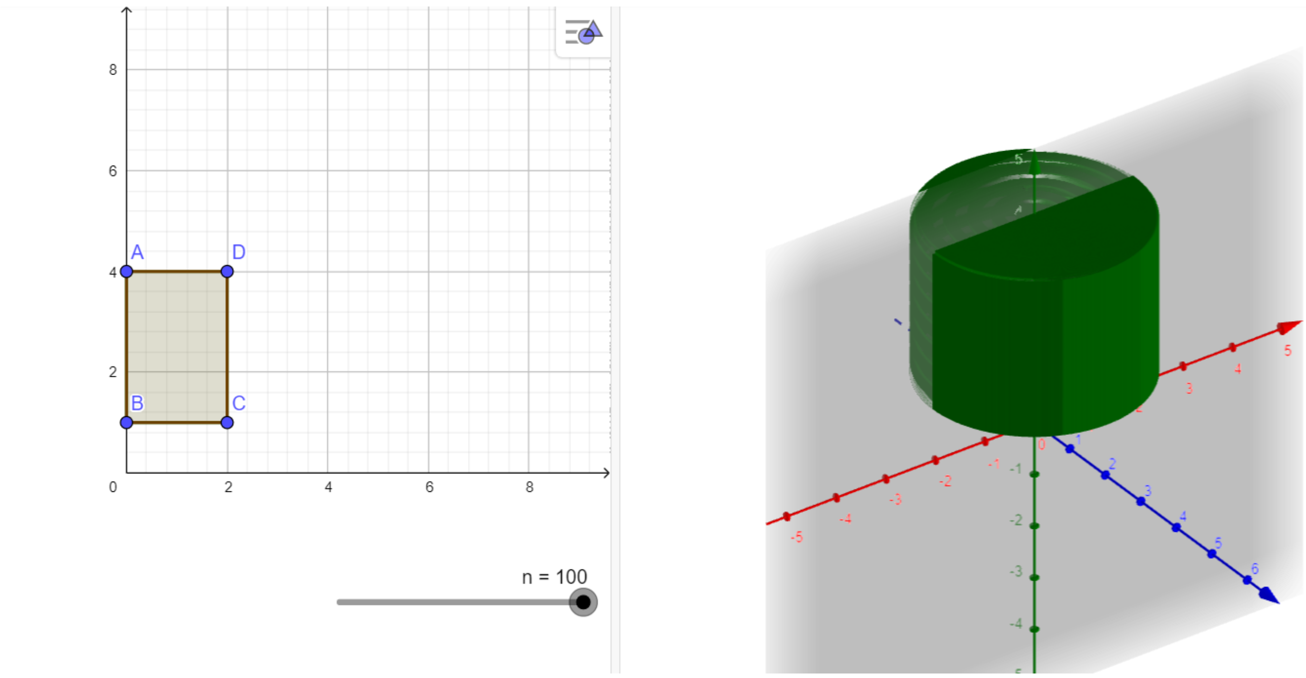


Fonte: Elaborado pela autora

Para que os alunos visualizassem que os sólidos de revolução eram formados pela rotação de uma figura plana em torno de seu eixo, a tela foi dividida em duas janelas 2D e 3D. Assim eles puderam visualizar, e perceber algumas características mais específicas, no caso do cone, os estudantes identificaram através do diálogo com os colegas e professora: (a) que é formado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de seu eixo; (b) que o segmento BD na apresentação, representa a altura do cone; (c) que o segmento BC, um dos catetos do triângulo, representa o raio da base; (d) e que a hipotenusa do triângulo representa a geratriz do cone.

Na segunda etapa dessa atividade, os alunos visualizaram a formação do cilindro, como se pode observar na figura 35:

Figura 35: Formação do cilindro através da rotação do retângulo em torno do seu eixo



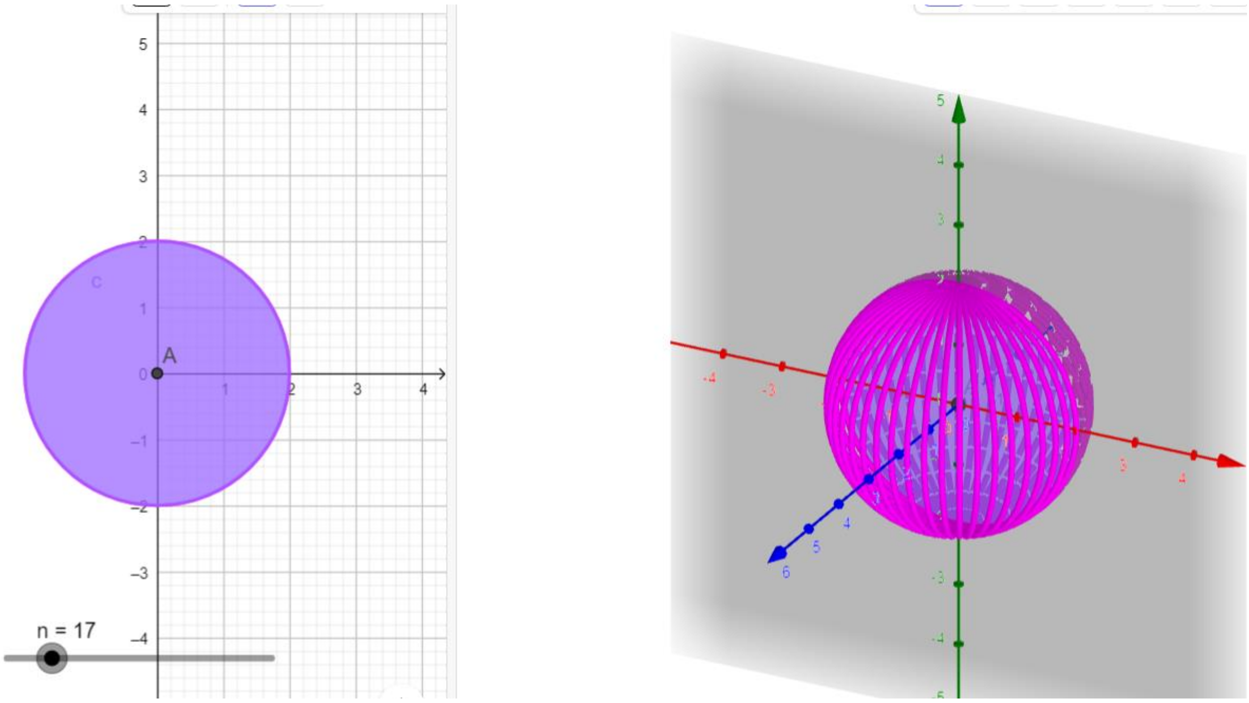
Fonte: Elaborado pela autora

Os discentes também conseguiram identificar algumas características específicas do cilindro: (a) que é formado pela rotação de um retângulo em torno de seu eixo; (b) que o segmento AB representa a altura[8]; (c) que o segmento DC representa a geratriz, pois é o lado que gira em torno do eixo formando a superfície lateral; (d) e que o segmento BC representa o raio da base do cilindro.

[8] Nessa parte, os alunos também visualizaram que em um cilindro reto, a altura possui a mesma medida que a geratriz.

A última etapa dessa apresentação, consistiu na formação da esfera, como segue na figura 36:

Figura 36: Formação da esfera através da rotação da circunferência em torno do eixo



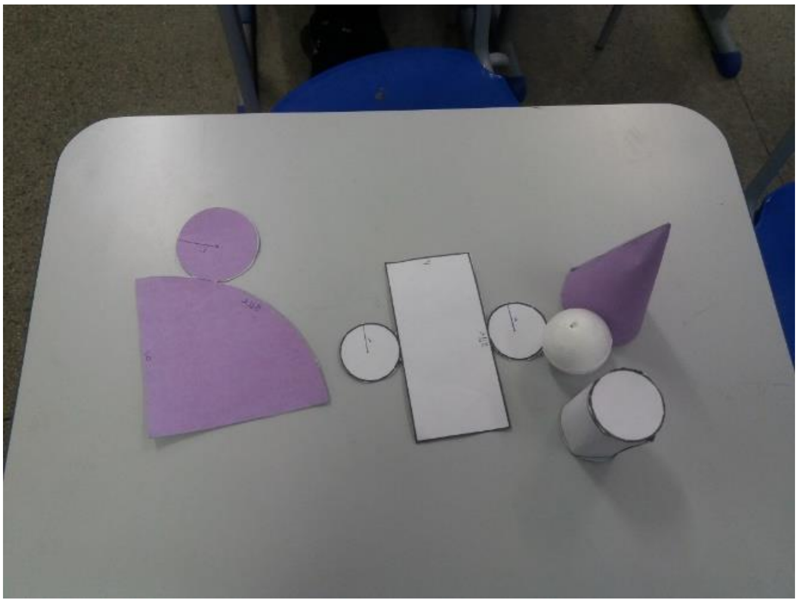
Fonte: Elaborado pela autora

A esfera também é um sólido de revolução, e pode ser formada pela rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo, porém, nessa apresentação não foi possível realizar a rotação somente da semicircunferência, então realizamos a rotação da circunferência.

Nessa etapa, os estudantes juntamente com a professora, identificaram: (a) que a esfera pode ser formada pela rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo; (b) que nessa apresentação, o A é o centro da esfera; (c) e o raio da esfera.

Para um estudo mais completo dos corpos redondos, a professora também levou os sólidos que eles haviam montado em aulas anteriores, bem como algumas planificações, como segue na figura 37:

Figura 37: Planificação dos corpos redondos



Fonte: Foto da autora

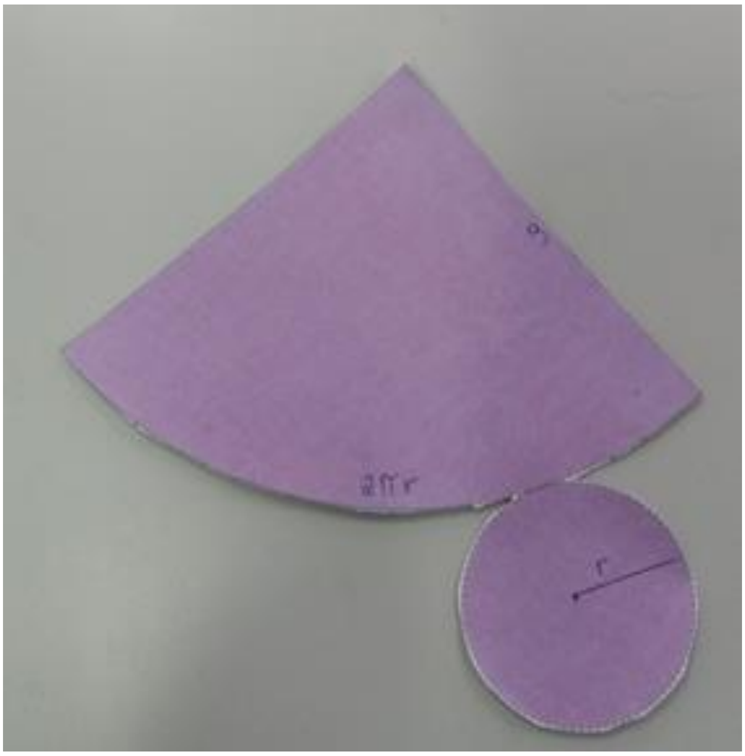
Os discentes puderam compreender características importantes desses sólidos. Focando no estudo do cilindro e do cone, ao unir, comparar e refletir sobre os materiais da sequência didática, fizeram algumas observações a partir de questionamentos levantados pela professora. Para estimular o processo de descoberta a professora perguntou: “Qual é o formato das faces laterais?”, “Qual é o formato das bases?”, e identificaram que o cilindro, por exemplo, a sua superfície lateral planificada tem a forma de um retângulo, e as bases são circulares. Visualizaram que a base desse retângulo é o contorno do círculo, os seja, tem a medida do comprimento da circunferência, e como se tratava de um cilindro reto a altura é a distância entre uma face e outra. Para propagar a continuidade da investigação a professora acrescenta outra questão, “Como podemos calcular a área lateral desse cilindro?”, e os estudantes perceberam que era calculando a área do retângulo, multiplicando a medida da base[9] pela medida da altura. A professora continuou com mais uma pergunta, “Como podemos calcular a área das bases?”, e eles responderam que era calculando a área da circunferência e multiplicando por dois, por haver duas bases, inferindo que para chegar ao cálculo da área total, bastava somar o resultado da área da superfície lateral com o resultado da área das bases.

Já no estudo do cone, os alunos tiveram uma dificuldade para identificar o formato da superfície lateral, pois não lembravam dos conceitos sobre setor circular, e então a professora

[9] A medida dessa base, no caso, a medida da base do retângulo que forma a superfície lateral do cilindro reto é a mesma medida do comprimento da circunferência que é: $2 \cdot \pi \cdot r$.

fez uma breve revisão sobre o assunto antes de continuar. Após a revisão, identificaram que a superfície lateral do cone tem a forma de um setor circular, e que a base, assim como no cilindro, é circular.

Figura 38: Planificação do cone circular reto



Fonte: Elaborado pela autora

Analisando a planificação do cone, os alunos juntamente com a professora, verificaram que: (a) o arco do setor circular, que forma a superfície lateral do cone, possui a mesma medida que o comprimento da circunferência da base; (b) o raio desse setor circular tem a medida da geratriz do cone; (c) a área total do cone circular reto é obtida pela soma da área da superfície lateral com a área da base.

4.8. Construção e exposição de maquetes

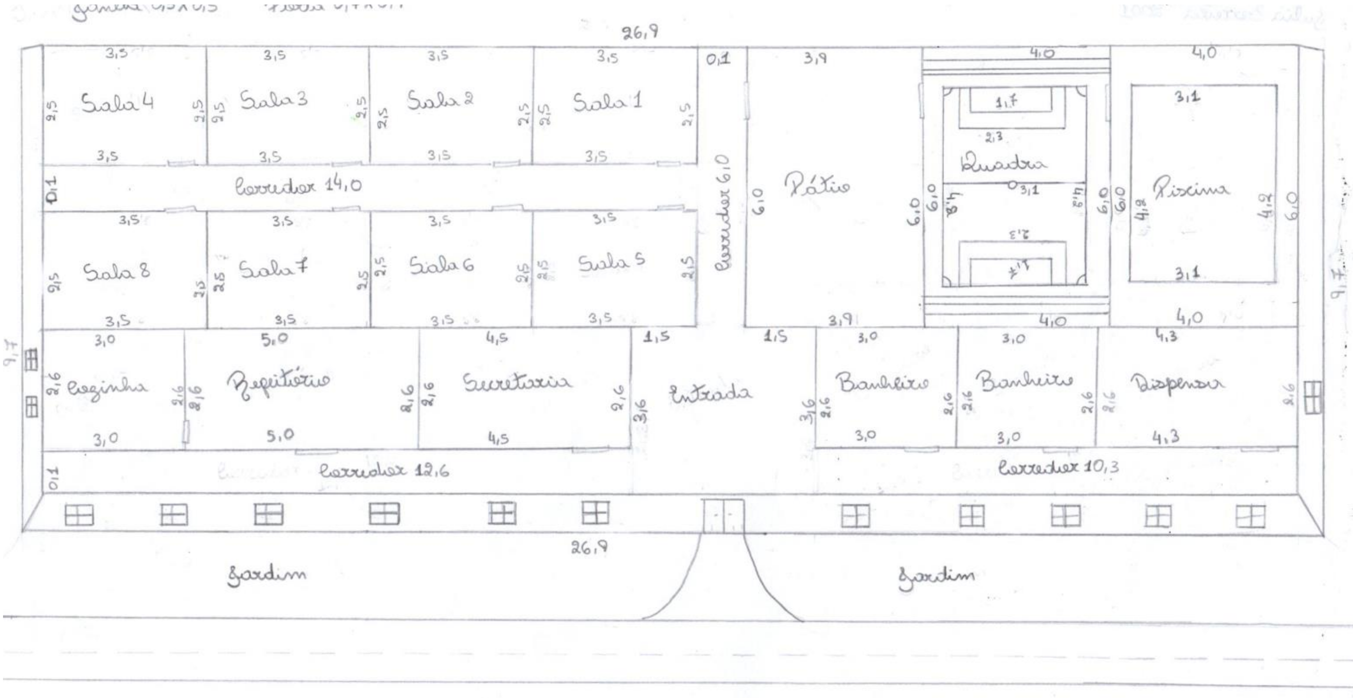
Durante o período da implementação da sequência didática, os alunos foram divididos em grupos, e orientados a elaborar em casa, uma maquete que poderia ser inspirada nas obras de Oscar Niemeyer. Alguns grupos optaram por fazer a maquete de uma escola integral, seguindo o projeto de Darcy Ribeiro com os Centros Integrados de Educação Pública, mas com um modelo de arquitetura diferente do modelo usado por Oscar Niemeyer, e outros escolheram fazer a reprodução de algumas obras do artista. Foi um trabalho desenvolvido com a colaboração das professoras de História e de Artes, que ao longo do bimestre aproveitaram o projeto para discorrer sobre conceitos específicos de suas respectivas áreas.

Biembengut e Hein (2019) falam da necessidade do desenvolvimento de meios para que os estudantes tenham mais facilidade de ler e interpretar a Matemática, e que as crianças e jovens de hoje, precisam de propostas que estimulem a criatividade e a imaginação, portanto, atividades voltadas para a construção de plantas e maquetes com os alunos, é um jeito de modelar a realidade.

Esse trabalho se dividiu em algumas etapas: (a) estudo das principais obras de Oscar Niemeyer; (b) estudo das formas geométricas espaciais; (c) elaboração de plantas, como planejamento das futuras maquetes; (d) construção das maquetes; (e) exposição das maquetes. Essas etapas ocorreram ao longo do bimestre, algumas em sala de aula, como no caso do estudo das principais obras de Oscar Niemeyer, outras em casa, como a construção das maquetes. O estudo das formas geométricas espaciais aconteceu a partir de diversas atividades, com materiais concretos (sólidos geométricos) e virtuais (GeoGebra 3D), como descritos nos tópicos anteriores, neste mesmo capítulo.

A elaboração de plantas foi feita em sala de aula, porém alguns alunos levaram para terminar o esboço em casa. A atividade serviu como base para a realização de uma revisão sobre área e perímetro de figuras planas. Aproveitou-se também, como alguns alunos optaram por fazer a planta de uma escola, para discutir sobre o tema “Escola do Futuro”, e então eles esboçaram as plantas nessa perspectiva, pensando como seria uma escola ideal para o futuro. Portanto, a maioria colocou em seu projeto uma área de esporte e lazer, com jardins, piscinas, e quadras, colocaram também laboratórios de informática e ciências, biblioteca, sala de vídeo, salas de aula e etc. Alguns alunos apresentaram dificuldades para realizar as divisões internas, e também em relação a proporção das áreas, é importante salientar que a atividade foi livre, sem a necessidade de seguir algum modelo. Durante a construção, através do diálogo, entre professor-aluno e aluno-aluno, foram trabalhados os conceitos de área, perímetro, escala, e formas geométricas. Na figura 39 podemos observar a proposta da aluna J22:

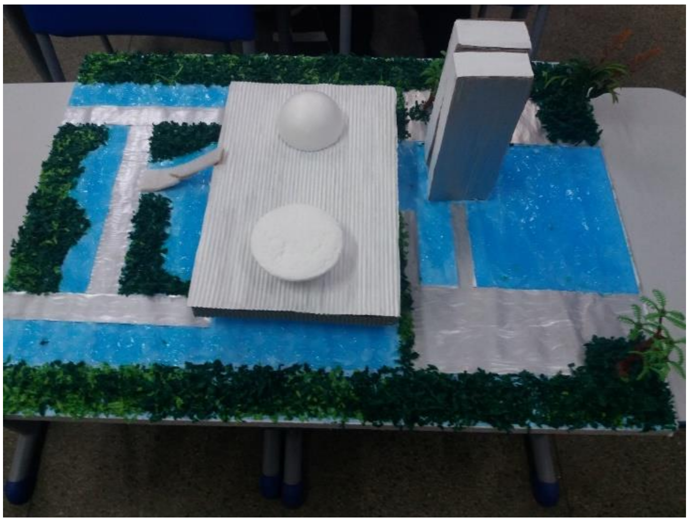
Figura 39: Planta baixa construída pela aluna J22



Fonte: Acervo digital da pesquisa

As últimas etapas dessa tarefa foram a construção e exposição das maquetes, apesar da planta baixa consistir num planejamento para a maquete, os estudantes ao construírem sentiram dificuldades de fazer conforme a planta pré-elaborada por eles, então fizeram adaptações, lembrando que muitos alunos optaram por fazer a reprodução de obras do Oscar Niemeyer. A seguir temos uma maquete do Congresso Nacional construída pelas alunas, E10, I16, L26 e M32:

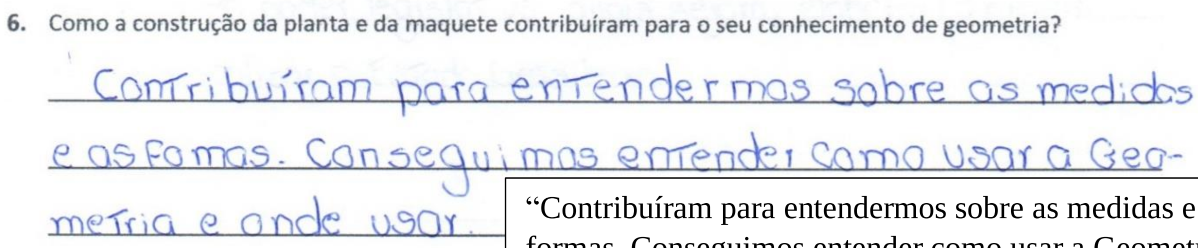
Figura 40: Maquete do Congresso Nacional



Fonte: Elaborado pela autora

No dia em que os alunos trouxeram as maquetes, a professora entregou para cada grupo uma folha com perguntas sobre o processo de elaboração da planta e da maquete, e também sobre a relação entre a geometria e a arquitetura. Abaixo temos a resposta das alunas E10, I16, L26 e M32 a uma das perguntas do questionário:

Figura 41: Resposta das alunas E10, I16, L26 e M32 ao questionário final


6. Como a construção da planta e da maquete contribuíram para o seu conhecimento de geometria?

Contribuíram para entendermos sobre as medidas e as fomas. Conseguimos entender como usar a Geometria e onde usar.

"Contribuíram para entendermos sobre as medidas e as formas. Conseguimos entender como usar a Geometria e onde usar."

Fonte: Elaborado pela autora

Analisando a resposta desse grupo, podemos perceber que a atividade não só contribuiu para o estudo das medidas e das formas geométricas, como também fez com que elas interpretassem a geometria no mundo real.

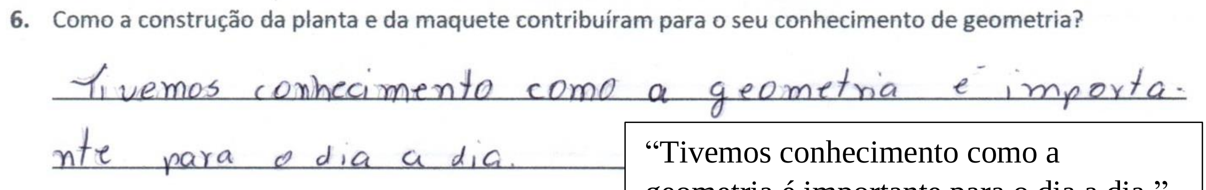
A seguir vejamos as fotos de algumas maquetes construídas pelos alunos:

Figura 42: Maquete do CIEP

Fonte: Foto da autora

A maquete acima foi construída pelo grupo A4, A5, I17 e Y42, e ao serem questionadas sobre a escolha dessa maquete, justificaram dizendo que a proposta inicial do CIEP era uma escola pública de qualidade. A seguir temos a resposta desse grupo a mesma pergunta respondida pelo grupo E10, I16, L26 e M32:

Figura 43: Resposta das alunas A4, A5, I17 e Y42 ao questionário final


6. Como a construção da planta e da maquete contribuíram para o seu conhecimento de geometria?

Tivemos conhecimento como a geometria é importa-nte para o dia a dia.

"Tivemos conhecimento como a geometria é importante para o dia a dia."

Fonte: Elaborado pela autora

Analisando a resposta dos dois grupos, percebemos que ambos entenderam que essas atividades, de construção de plantas e maquetes, aproximaram os estudos dos conceitos geométricos da realidade.

A última etapa dessa atividade, foi a exposição das maquetes, que ficou por uma semana durante os horários de intervalo no pátio da escola, como segue na figura abaixo:

Figura 44: Exposição das maquetes

Fonte: Foto da autora

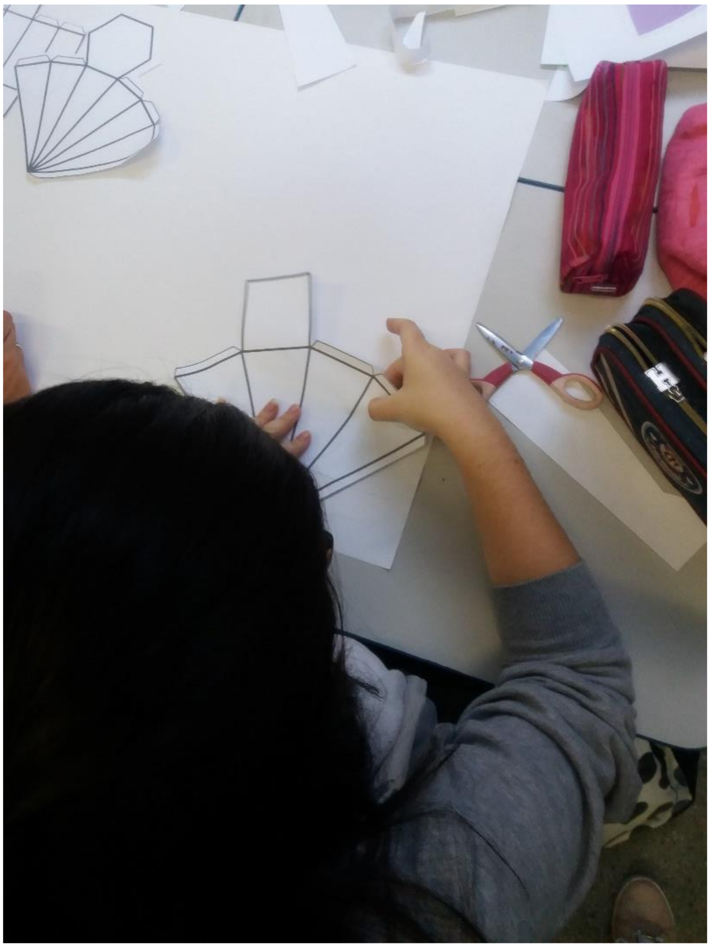
Durante esse horário de intervalo, os grupos responsáveis pela elaboração das maquetes apresentavam o seu trabalho para os alunos de outras turmas, bem como, para outros professores e funcionários da escola.

4.9. Investigando com as Pirâmides

Essa foi a última atividade dessa sequência didática, e para a realização dela, os alunos foram divididos em grupos de 3 ou 4 alunos, para que através da observação e manipulação dos sólidos (pirâmides), identificassem suas principais características, conjecturando meios para calcular a sua área.

Os discentes já haviam construído em aulas anteriores, com moldes levados pela professora, algumas pirâmides. Sendo assim, a professora levou esses sólidos novamente para aula com o propósito de estuda-los mais detalhadamente. Na figura 45, temos a foto do dia que os alunos fizeram a construção dos sólidos com os moldes:

Figura 45: Construindo sólidos geométricos artesanalmente



Fonte: Foto da autora

Manipulando a pirâmide e dialogando com os colegas e com o professor, eles chegaram a algumas considerações, que se pode acompanhar através das respostas a alguns questionamentos feitos pela professora:

1º questionamento: O que difere uma pirâmide de um prisma?

Quadro 5: Respostas apresentadas pelos alunos ao 1º questionamento

B7: É que a pirâmide tem uma ponta e o prisma não tem.
A5: E os lados são triângulos.
B7: Os lados do prisma são retângulos e da pirâmide são triângulos.
J22: As pirâmides têm um ponto fixo.

Fonte: Elaborado pela autora

As respostas apresentadas por esses estudantes, representa a resposta da maior parte da turma, o aluno B7 relata que a pirâmide, diferentemente do prisma, possui uma "ponta" metáfora que utilizou para se referir ao vértice, a aluna J22 fez a mesma observação, mas nomeou o vértice de "ponto fixo". Outra observação importante foi a dos alunos A5 e B7 sobre as faces laterais da pirâmide e do prisma, identificando que na pirâmide as faces laterais são triangulares e que no prisma são retangulares.

2º questionamento: Como podemos calcular a área total de uma pirâmide?

Quadro 6: Respostas apresentadas pelos alunos ao 2º questionamento

B7 e J22: Somando as áreas dos triângulos com a área debaixo.
Professor: Com a área da base?
J22: Isso!
A5: Aí soma tudo! Se a base for um quadrado tem quatro triângulos e se for um hexágono tem seis triângulos.

Fonte: Elaborado pela autora

Podemos perceber a partir das respostas do quadro 6 que os alunos conjecturaram corretamente um meio para calcular a área da pirâmide. A aluna A5 aponta para o fato de que a quantidade de faces laterais da pirâmide, depende do polígono da base, se for um quadrilátero a pirâmide terá quatro triângulos formando a face lateral, se for um hexágono terá seis triângulos e assim em diante.

CAPÍTULO V

5. CONSTRUINDO REFLEXÕES SOBRE A PESQUISA

Este é o último capítulo deste trabalho, em que é desenvolvido reflexões sobre a implementação da sequência didática, bem como, descobertas e dificuldades enfrentadas ao longo da pesquisa.

5.1. Reflexões gerais sobre o planejamento e organização da pesquisa

A aprendizagem não é um processo previsível e controlável, e como já dito anteriormente, possui uma característica multifacetada. Mas fica a encargo do professor, buscar estratégias e criar situações para que na escola o aluno tenha a oportunidade de perceber o significado dos conceitos estudados, de ser agente ativo, e crítico do saber. E é nesse sentido que nessa pesquisa buscou-se elaborar um planejamento de uma sequência didática que abrangesse uma variedade de recursos didáticos para o estudo da geometria espacial, recursos que valorizam o desenvolvimento da habilidade de visualização, que é base para uma aprendizagem significativa da geometria, e que também proporcionasse durante as tarefas a interação e o diálogo entre os sujeitos envolvidos (aluno-aluno/professor-aluno), estimulasse os sentidos táteis através da construção e manipulação de materiais concretos, a criatividade através de atividades de cunho interdisciplinar com a Arte e História, a conexão com a realidade por meio da arquitetura, e o caráter inovador com o uso do GeoGebra.

Para Colinvaux (2008, p. 9) “os alunos deixaram de ser vistos como mentes racionais, solitárias e desencarnadas para se tornarem pessoas inteiras, sujeitos sociais inseridos em múltiplas situações e atividades.”. Para atender esse público é necessário que o docente lance mão de diversos artifícios e procure constantemente meios para aperfeiçoar sua prática pedagógica. Assim, de forma geral e resumida essa pesquisa se organizou conforme o Quadro 7:

Quadro 7 - Organização

Organização Geral da Pesquisa	
Parte 1	Delineamento dos objetivos gerais e específicos.
Parte 2	Estudo bibliográfico sobre aprendizagem significativa, visualização em geometria, e desenvolvimento do pensamento geométrico com recursos didáticos variados.

Parte 3	Análise e avaliação dos conhecimentos e dificuldades em relação a conceitos da geometria espacial de alunos do 2º ano do Ensino Médio.
Parte 4	Elaboração da sequência didática.
Parte 5	Implementação da sequência didática.
Parte 6	Reflexão sobre os desafios e potencialidades da sequência didática.

Fonte: Elaborado pela autora

5.2. Desafios e potencialidades das atividades propostas e recursos utilizados

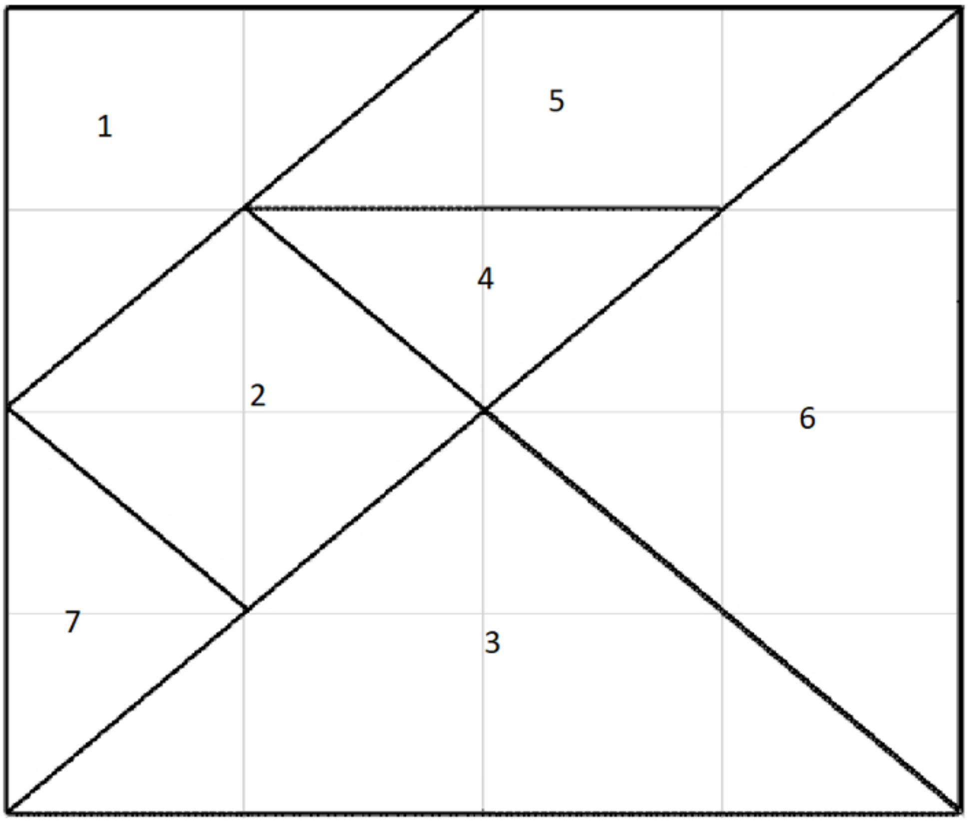
Agora iremos discorrer sobre as dificuldades e potencialidades encontradas pelos alunos durante a realização de cada uma das atividades propostas, para que posteriormente seja aperfeiçoada a sequência didática inicial que será o produto final desse trabalho.

5.2.1. Atividades de cunho interdisciplinar com Artes

Essas primeiras atividades funcionaram também como uma revisão para alguns conceitos presentes no estudo da geometria plana, como área e perímetro. Inicialmente a pesquisadora levou duas atividades, uma envolvendo o tangram e a outra apresentando obras de artes como a de *Piet Modrian.* A atividade envolvendo o tangram foi boa para que eles pudessem relembrar o cálculo da área e do perímetro da figura plana, a professora teve que ajudar alguns grupos que apresentaram dificuldades quanto a esses conceitos, principalmente em relação a área do triângulo, e também com o cálculo utilizando números decimais. Ao imprimir a folha de atividades, o tangram acabou perdendo a proporção em suas medidas, portanto, para evitar esse tipo de situação e ainda tornar a atividade mais dinâmica, seria interessante montar o tangram com os alunos em sala de aula, que pode ser feito com E.V.A., cartolina, papel cartão, ou até folha de ofício. Na figura 46, está representado a atividade envolvendo o tangram:

Figura 46: Atividade com o tangram

1. O tangram é um quebra-cabeça chinês formado por 7 peças, dois triângulos grandes, dois pequenos, um médio, um quadrado, e um paralelogramo. Considerando as dimensões reais da figura abaixo, calcule a área e o perímetro de cada uma das peças.

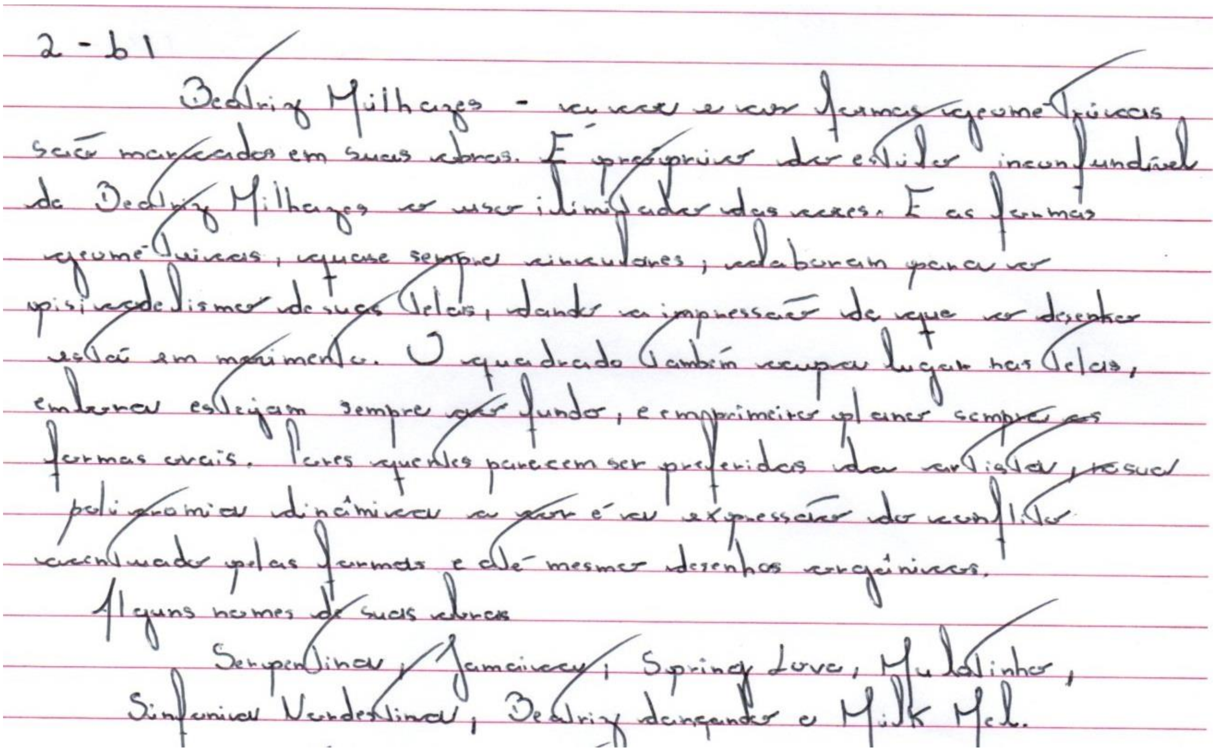


Fonte: Elaborado pela autora

O uso do tangram é uma boa estratégia para desenvolver conceitos referentes a geometria plana, porém, para tornar a aula mais dinâmica, dando a oportunidade para o aluno criar, e manipular o objeto, é melhor que o professor faça a construção do mesmo juntamente com a turma.

A segunda parte dessa mesma atividade trouxe a proposta de os estudantes utilizarem formas geométricas artisticamente, abrindo espaço para a criatividade, podendo perceber a presença da Matemática na Arte. E também a professora pediu que os alunos pesquisassem outros artistas além de *Piet Modrian* que também utilizassem formas geométricas em seus trabalhos. Logo na aula seguinte, a turma trouxe um pouco da história, bem como, fotos das obras de alguns artistas. A aluna L27, conforme as figuras 47 e 48, trouxe parte do que ela encontrou sobre a biografia e história de Beatriz Milhazes e Romero Britto:

Figura 47[10]: Pesquisa da aluna L27 sobre Beatriz Milhazes



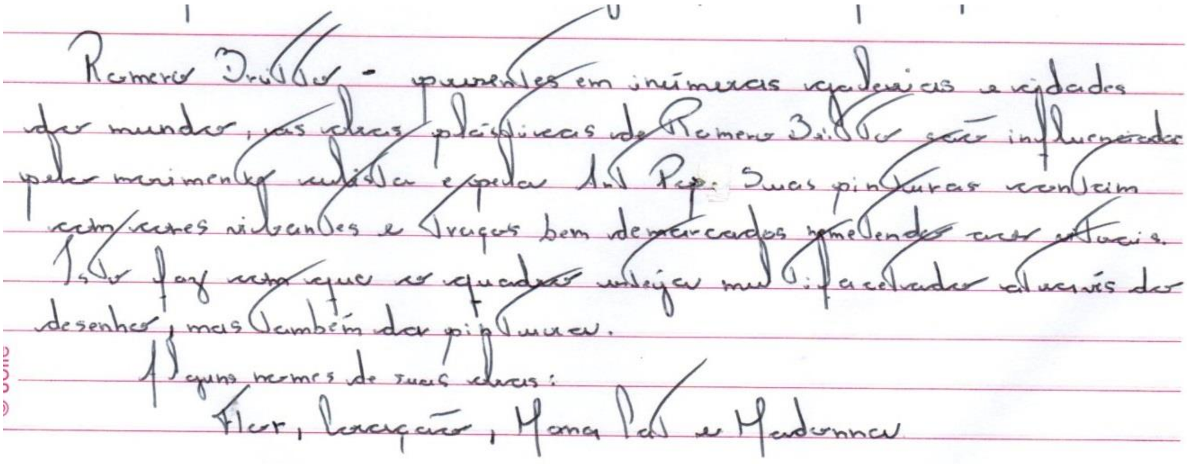
Fonte: Acervo digital da pesquisa

> “Beatriz Milhazes – a cor e as formas geométricas são marcadas em suas obras. É próprio do estilo inconfundível de Beatriz Milhazes o uso ilimitado das cores. E as formas geométricas, quase sempre circulares, colaboram para o psicodelismo de suas telas, dando a impressão de que o desenho está em movimento. O quadrado também ocupa lugar nas telas, embora estejam sempre ao fundo, e em primeiro plano sempre as formas ovais. Cores quentes parecem ser preferidas da artista, na sua policromia dinâmica a cor é a expressão do conflito acentuado pelas formas e até mesmo desenhos orgânicos.
> Alguns nomes de suas obras: Serpentina, Jamaica, Spring Love, Mulatinho, Sinfonia Nordestina, Beatriz dançando e Milk Mel.”

Grande parte da turma trouxe alguma informação que encontraram durante suas pesquisas sobre a artista Beatriz Milhazes, que realmente apresentam diversos elementos geométricos em suas obras, se destacando pela variedade de cores e sobreposição dos desenhos geométricos.

[10] BORGES, Regiane. **As cores e as formas geométricas nas obras de Beatriz Milhazes**. Disponível em <http://obviousmag.org/pintores-brasileiros/beatriz_milhazes/as-cores-e-as-formas-geometricas-nas-obras-de-beatriz-milhazes.html> Acesso em: 29 jan. 2020.

Figura 48[11]: Pesquisa da aluna L27 sobre Romero Brito


Romero Britto - presentes em inúmeras galerias e cidades
do mundo, as obras plásticas de Romero Britto são influenciadas
pelo movimento cubista e pela Art Pop. Suas pinturas contém
com cores vibrantes e traços bem demarcados remetendo aos vitrais.
Isto faz com que o quadro esteja multifacetado através do
desenho, mas também da pintura.
Alguns nomes de suas obras:
Flor, Coração, Mona Cat e Madonna

Fonte: Acervo digital da pesquisa

“Romero Britto – presentes em inúmeras galerias e cidades do mundo, as obras plásticas de Romero Britto são influenciadas pelo movimento cubista e pela Art Pop. Suas pinturas contam com cores vibrantes e traços bem demarcados remetendo aos vitrais. Isto faz com que o quadro esteja multifacetado através do desenho, mas também da pintura.
Alguns nomes de suas obras: Flor, Coração, Mona Cat e Madonna”

Com essa atividade os discentes puderam conhecer um pouco da história e biografia de diferentes artistas, trazendo o resumo das informações encontradas, e tendo a oportunidade de comentar sobre a escolha dos mesmos.

Segundo Fainguelernt e Nunes (2015) a forma que a Matemática tem sido abordada na escola faz com que o aluno associe a disciplina a práticas de repetição e memorização, gerando sofrimento e dando a impressão de que poucos tem a capacidade de aprendê-la, e quando se dá lugar a um trabalho interdisciplinar com a Arte, abre-se uma caminho para a criatividade, a descoberta, a intuição, a sensibilidade, a percepção, a visualização e o desenvolvimento do raciocínio.

Ao desenvolver essas atividades, criou-se uma nova relação no processo de ensino e aprendizagem da matemática, entre professor e aluno, na medida que os estudantes puderam vivenciar a experiência de ver a aplicação da Matemática no cotidiano, rompendo com a ideia que ela se resume a cálculos algébricos sem sentido algum.

[11] BEZERRA, Juliana. **Biografia de Romero Britto**. Disponível em:<https://www.todamateria.com.br/romero-britto/> . Acesso em: 29 jan. 2020

5.2.2. Reflexões em relação as atividades envolvendo a Matemática e a Arquitetura

Ainda buscando uma aproximação da Matemática com situações do cotidiano e com uma abordagem também interdisciplinar, foram realizadas atividades em que os alunos puderam observar e associar as formas geométricas espaciais na Arquitetura. Pensando no caráter histórico-cultural do nosso país, juntamente com a professora de História, foi apresentado um pouco da história e biografia do renomado arquiteto Oscar Niemeyer. O grande potencial dessa proposta é a oportunidade que os discentes tiveram de descobrir que construções que podem ser vistas durante o dia a dia deles, como a dos CIEPs, possuem uma característica histórica na área educacional do Brasil, e ao mesmo tempo desenvolveram habilidades visuais espaciais interpretando a geometria no mundo real, tornando a experiência de estudar geometria espacial, uma experiência significativa.

> Entendemos por aprendizagem significativa aquela que envolve o aluno como pessoa, como um todo (ideias, sentimentos, cultura, valores, sociedade, profissão). Ela se dá quando o que se propõe para aprender relaciona-se com o universo de conhecimento, experiências e vivências do aprendiz. (MASETTO, 2011, p.608)

As tarefas envolvendo a Matemática e a Arquitetura se pautou nas seguintes etapas:

Etapa 1: Apresentação da biografia e obras de Oscar Niemeyer;

Etapa 2: Elaboração de plantas;

Etapa 3: Construção e exposição de Maquetes.

Cada etapa possuía um objetivo próprio, na etapa 1 o objetivo foi apresentar aspectos histórico-sociais de nosso país, e estimular a percepção das formas geométricas espaciais na arquitetura, a sensibilidade, e a habilidade de visualização. Na etapa 2, a professora buscou reforçar o estudo dos conceitos de área e perímetro, mas também buscou incentivar a criatividade, a intuição, a habilidade de argumentar, e o pensamento crítico. Pois com a proposta de criar a planta de uma escola, eles tiveram que pensar no modelo e organização arquitetônica que uma escola deve ter, além de elaborar argumentos para basear suas escolhas. E na etapa 3, foi o momento de construção das maquetes, em que os grupos tiveram a chance de manipular os materiais para a construção, desenvolvendo a criatividade, e habilidades cognitivas referentes aos conceitos de área e volume da geometria espacial. Na figura 49, temos a imagem de uma maquete sendo construída por um dos grupos, e na figura 50, a maquete já preparada para a exposição:

Figura 49: Maquete em construção

Fonte: Foto da autora

Na figura 49, pode-se notar a riqueza nos detalhes da construção, com as suas divisórias que representam a sala de aula e o cuidado durante o acabamento do trabalho. Já na figura 50, a maquete já está em exposição no pátio da escola. Considerando que essa etapa foi elaborada em grupo, a turma foi estimulada desenvolver o senso de cooperação, a habilidade de argumentar, e a tolerância em relação as próprias limitações e as alheias.

Figura 50: Maquete em exposição

Fonte: Foto da autora

Essas atividades foram elaboradas e desenvolvidas em uma perspectiva interdisciplinar, contando com o apoio da professora de História na etapa da apresentação da história e obras de Oscar Niemeyer, e também com o apoio da professora de Artes quanto a orientação na elaboração das maquetes.

5.2.3. Reflexões sobre o uso dos sólidos geométricos no estudo da geometria

As atividades com sólidos geométricos envolveram os alunos em diversos processos que permitem o desenvolvimento de diferentes competências, contribuindo para uma aprendizagem significativa, no quadro 8 temos a síntese dos resultados obtidos com as atividades envolvendo os sólidos:

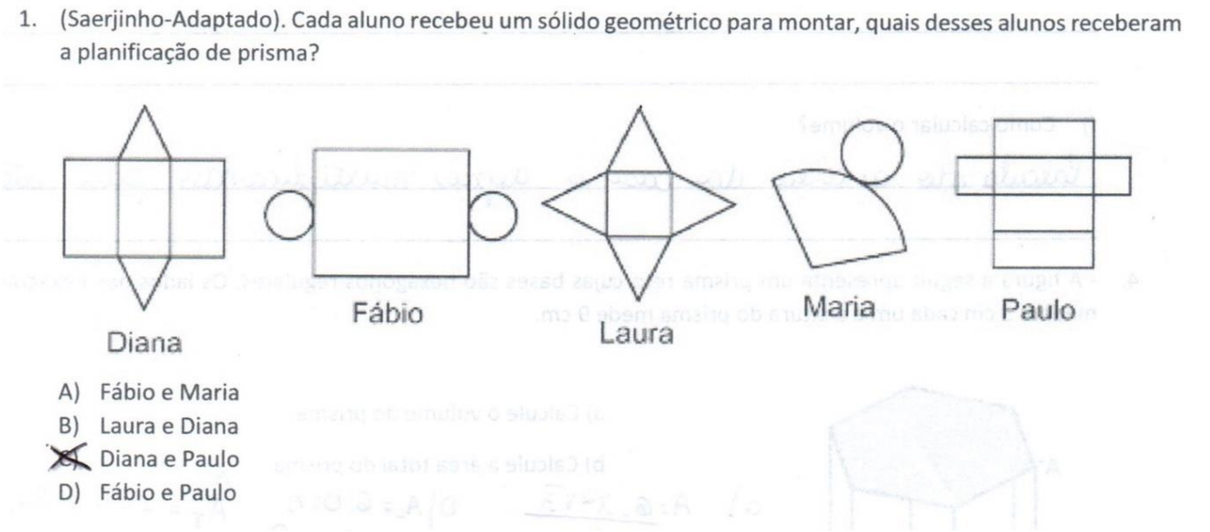
Quadro 8: Reflexões desenvolvidas no decorrer das atividades com sólidos

Síntese dos resultados obtidos com o uso de sólidos geométricos (concretos)		
Atividades	**Contribuições**	**Dificuldades**
Construção dos sólidos a partir do molde levado pela professora.	• Visualização e manipulação dos sólidos planificados; • socialização e divisão de tarefas com o grupo; • Entusiasmo no desenvolvimento de um trabalho manual.	• Coordenação motora, para cortar e colar os moldes.
Classificando os sólidos geométricos.	• Comparação com objetos presentes no cotidiano; • Identificação de características específicas de cada sólido (prismas, pirâmides e corpos redondos); • Habilidade de Visualização; • Capacidade de se expressar oralmente e através da escrita sobre os conceitos matemáticos.	• Não foi identificado dificuldades durante essa etapa da atividade.
Investigando e conjecturando com os prismas.	• Investigar as características específicas dos prismas para encontrar padrões; • Comparar as representações bidimensionais com as tridimensionais;	• Interpretação do enunciado.

	• Conjecturar meios para o cálculo da área e do volume do prisma. • O aluno como protagonista no processo de aprendizagem;	
Investigando e conjecturando com as pirâmides.	• Investigar as características específicas das pirâmides na busca de padrões; • Comparar as representações bidimensionais com as tridimensionais; • Conjecturar meios para o cálculo da área e do volume da pirâmide. • O aluno como protagonista no processo de aprendizagem; • Comparar prismas e pirâmides.	• Identificação de alguns elementos da pirâmide (apótema da pirâmide e apótema da base); • Compreender a relação do Teorema de Pitágoras com a pirâmide regular.

Foram propostas quatro atividades envolvendo os sólidos geométricos concretos que foram construídos artesanalmente pelos próprios alunos a partir dos moldes levados pela professora. Na primeira atividade os alunos apenas se ocuparam com a construção dos sólidos, o que se configurou uma parte importante no processo de aprendizagem, pois durante esse período de construção a turma que foi dividida em grupo teve que se organizar, dividir as tarefas, e conforme os objetos ficavam prontos, os estudantes dialogavam fazendo comparações entre os sólidos, bem como, sua planificação. Na fase de classificação dos sólidos, os estudantes puderam comparar os objetos dispostos sobre a mesa identificando suas semelhanças e diferenças visuais, o que possibilita também o desenvolvimento de uma memória visual, e a criação de uma imagem mental. Na atividade envolvendo os prismas, os discentes manipularam e visualizaram os sólidos durante a realização de uma folha com seis exercícios. Vejamos as respostas das alunas M29 e L23 para essa atividade:

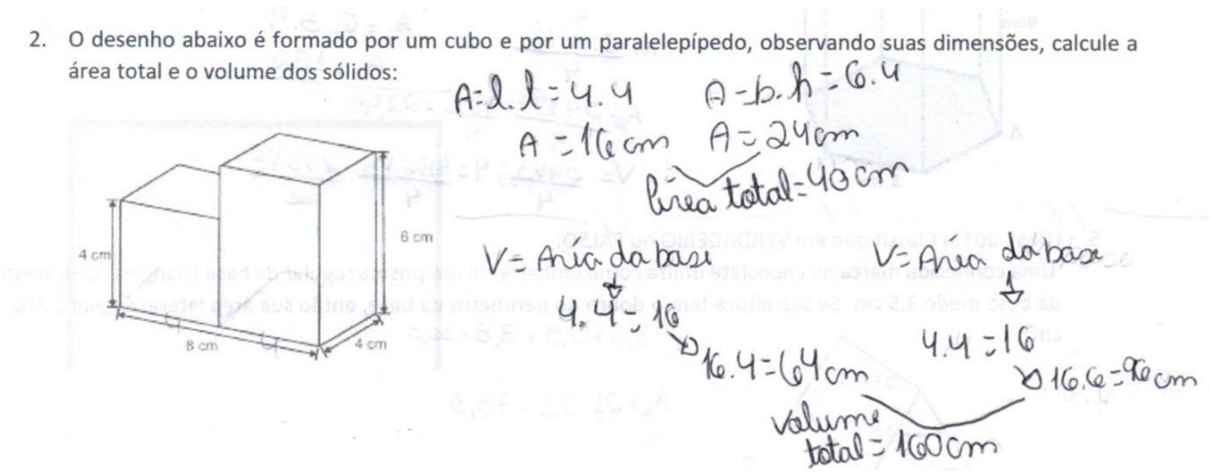
Figura 51: Respostas das alunas M29 e L23 ao primeiro exercício



Fonte: Acervo digital da pesquisa

Esse primeiro exercício serviu para avaliar a capacidade do aluno de identificar em uma representação bidimensional um prisma planificado em meio a outros sólidos. Nesse primeiro exercício nenhuma dupla teve dificuldade para marcar a opção correta, o que se configura um avanço em relação as respostas do questionário inicial que foi implementado no início da pesquisa, ou seja, antes da aplicação da sequência didática com os recursos variados.

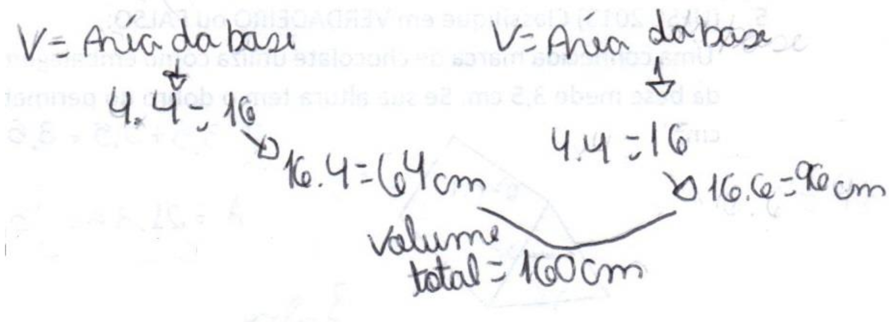
Figura 52: Respostas das alunas M29 e L23 ao segundo exercício



Fonte: Acervo digital da pesquisa

As alunas M29 e L23, assim como grande parte da turma, encontraram dificuldades nesse segundo exercício, que visou analisar a habilidade de calcular a área e o volume do cubo e paralelepípedo em uma representação bidimensional. As alunas não conseguiram calcular corretamente a área total dos sólidos apresentados na figura 52, elas apenas calcularam a área de uma face do cubo, e a área de uma face lateral do paralelepípedo, somando no final os dois resultados. As respostas apresentadas pelas estudantes demonstram que elas não compreenderam o conceito do cálculo da área desses sólidos. No entanto, conseguiram calcular corretamente o volume desses mesmos sólidos, conforme podemos observar na figura 53:

Figura 53: Respostas das alunas M29 e L23 referente ao cálculo do volume do sólido



Fonte: Acervo digital da pesquisa

As estudantes dividiram o sólido em dois, calculando inicialmente o volume do cubo, em seguida o volume do paralelepípedo, para depois somar os dois resultados. Observou-se também que as alunas esqueceram de representar as unidades de medidas corretamente, pois não colocaram o resultado da área em cm² e nem o resultado do volume em cm³. No quadro 9, podemos perceber a maneira como organizaram o cálculo do volume do sólido:

Quadro 9: Organizando as ideias das alunas M29 e L23 para o cálculo do volume

<u>**Cubo**</u>	<u>**Paralelepípedo**</u>
• **1º passo: Calculando a área da base.** Área da base = lado x lado Área da base = 4 x 4 Área da base = 16 cm² • **2º passo: Multiplicando a área da base pela medida da altura.** Volume = área de uma base x altura Volume = 16 x 4 Volume = 64 cm³	• **3º passo: Calculando a área da base.** Área da base = lado x lado Área da base = 4 x 4 Área da base = 16 cm² • **4º passo: Multiplicando a área da base pela medida da altura.** Volume = área de uma base x altura Volume = 16 x 6 Volume = 96 cm³

Volume total do sólido

- **5º passo: Somando o resultado do volume do paralelepípedo com o volume do cubo.**

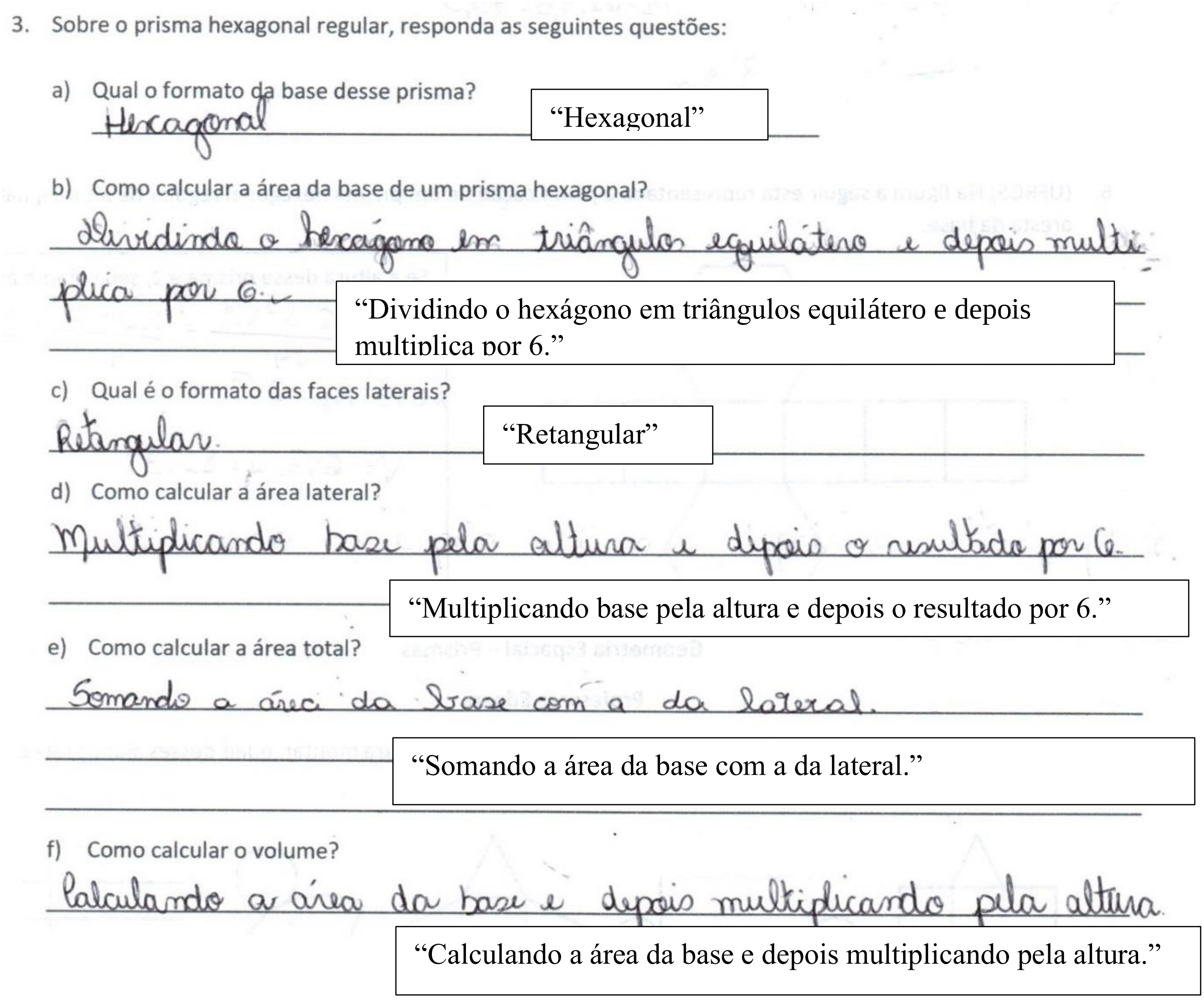
Volume total = volume do cubo + volume do paralelepípedo

Volume total = 64 + 96 = 160 cm³

Fonte: Elaborado pela autora

Para a realização do terceiro exercício, cada dupla recebeu um sólido no formato de um prisma hexagonal regular, o que ajudou eles a responderem corretamente as questões apresentadas no exercício três.

Figura 54: Respostas das alunas M29 e L23 ao terceiro exercício


3. Sobre o prisma hexagonal regular, responda as seguintes questões:

a) Qual o formato da base desse prisma?

Hexagonal

"Hexagonal"

b) Como calcular a área da base de um prisma hexagonal?

Dividindo o hexágono em triângulos equilátero e depois multiplica por 6.

"Dividindo o hexágono em triângulos equilátero e depois multiplica por 6."

c) Qual é o formato das faces laterais?

Retangular.

"Retangular"

d) Como calcular a área lateral?

Multiplicando base pela altura e depois o resultado por 6.

"Multiplicando base pela altura e depois o resultado por 6."

e) Como calcular a área total?

Somando a área da base com a da lateral.

"Somando a área da base com a da lateral."

f) Como calcular o volume?

Calculando a área da base e depois multiplicando pela altura.

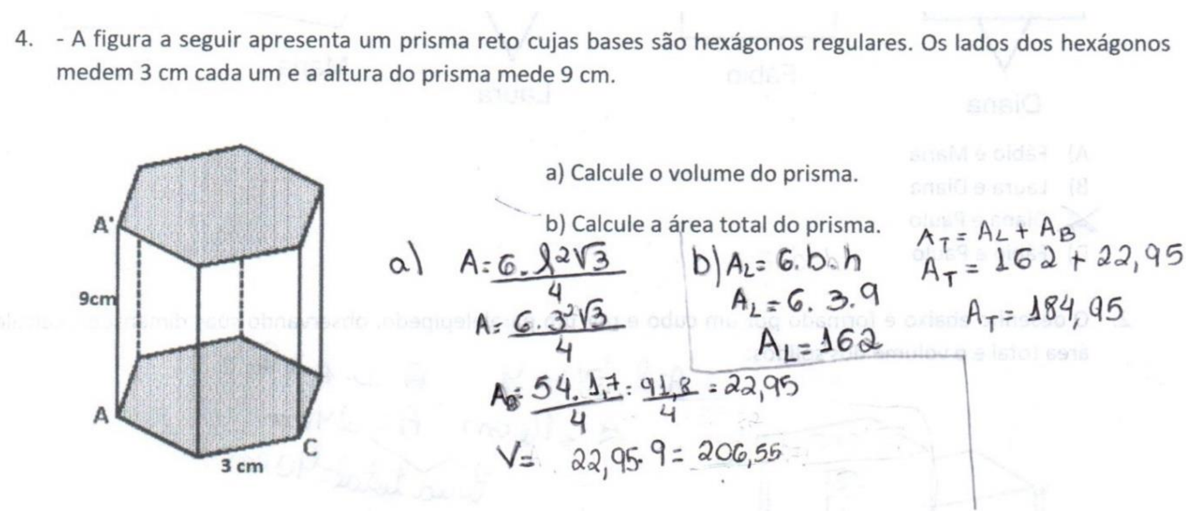
"Calculando a área da base e depois multiplicando pela altura."

Fonte: Elaborado pela autora

A possibilidade de manipular o sólido favoreceu a interpretação de características particulares do mesmo, como o formato da base, que no prisma hexagonal regular pode ser dividido em seis triângulos equiláteros, a quantidade de faces, e o formato dessas faces, para posteriormente buscar padrões em relação a outros prismas de modo que conjecturassem meios para o cálculo da área e do volume do objeto de estudo. Vale ressaltar que a respostas das alunas M29 e L23, são semelhantes as respostas de toda a turma, o que significa que toda as duplas responderam corretamente ao item três da folha de exercício. Comparando as respostas do exercício dois, em que a maior parte dos alunos erraram, com as repostas do exercício três, em que toda a turma acertou, temos uma evidência de que a manipulação do sólido pode ajudar no desenvolvimento do raciocínio geométrico espacial, considerando que durante o exercício dois os discentes não tinham em mãos o sólido, diferente do que ocorreu no exercício três em que todos puderam manipular o prisma hexagonal.

Ainda com o objetivo de avaliar a habilidade dos alunos para identificarem características particulares do prisma hexagonal regular, bem como, efetuar o cálculo da área e do volume desse sólido, foi proposto o quarto exercício. Na figura 55, temos o registro das respostas das alunas M29 e L23, dessa etapa da atividade:

Figura 55: Respostas das alunas M29 e L23 ao exercício quatro

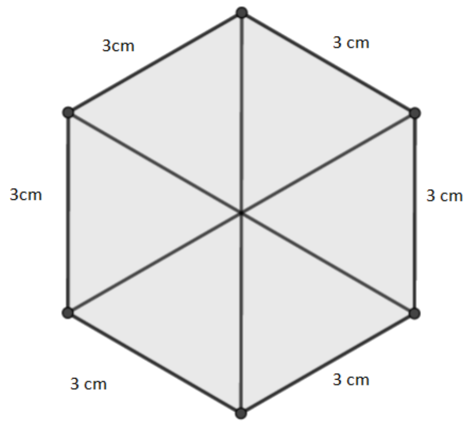


Fonte: Acervo digital da pesquisa

Os registros apresentados pelas estudantes M29 e L23 dão indícios de que elas compreenderam o conceito do volume do prisma hexagonal regular. Inicialmente calcularam a área de uma base do prisma, e depois multiplicaram o resultado da área de uma base pela a altura. Os alunos da turma juntamente com a professora, em aulas anteriores, já tinham conjecturado meios para calcular a área de alguns polígonos regulares, sendo assim, as alunas M29 e L23 já sabiam como calcular a área de um hexágono regular, empregando esse conhecimento no cálculo da área e volume do prisma hexagonal regular. Portanto, para encontrar o volume desse sólido as alunas M29 e L23 seguiram os seguintes passos:

Quadro 10: Etapas seguidas pelas alunas M29 e L23 no cálculo do volume

1º passo: calculando a área de uma base do prisma:



Entendendo que a base se trata de um hexágono regular, e que um hexágono regular pode ser repartido em seis triângulos equiláteros, as estudantes M29 e L23, multiplicaram por seis a fórmula que pode ser utilizada para calcular a área do triângulo equilátero que é $A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, sendo que l representa a medida do lado do triângulo.

Logo, elas calcularam a área de uma base do prisma do seguinte modo:

$$A_B = 6\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_B = 6\ \frac{3^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_B \cong 22{,}95\ cm^2$$

2º passo: Multiplicando a área de uma base pela altura do prisma:

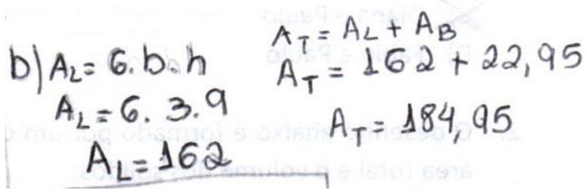
$$V \cong 22{,}95\ \times 9$$

$$V \cong 206{,}55\ cm^3$$

Fonte: Elaborado pela autora

Em relação ao cálculo da área total do prisma hexagonal regular, percebe-se um avanço referente a apropriação do conceito de área de um prisma regular:

Figura 56: Respostas das alunas M29 e L23 referente a letra b do terceiro exercício



Fonte: Acervo digital da pesquisa

b) $A_L = 6 \cdot b \cdot h \qquad A_T = A_L + A_B$

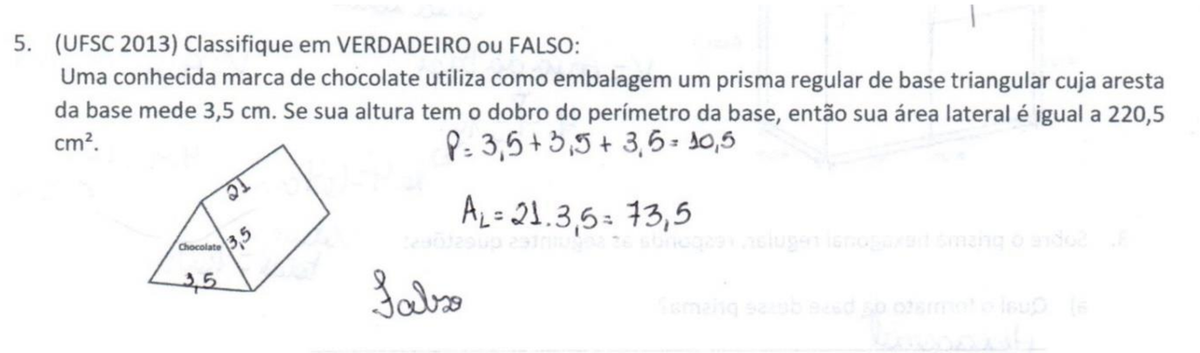
$A_L = 6 \cdot 3 \cdot 9 \qquad A_T = 162 + 22{,}95$

$A_L = 162 \qquad A_T = 184{,}95$

Apesar do evidente avanço referente ao conceito de área do prisma, considerando que as alunas tinham em mãos o objeto geométrico, no momento do cálculo da área total acabaram esquecendo de incluir no cálculo a área das duas bases, considerando apenas o valor da área de uma das bases. Mas conjecturaram corretamente ao apresentar que o valor da área total do prisma é encontrado a partir da soma da área lateral com a área das bases.

No quinto exercício surgiu uma dificuldade em relação a interpretação do enunciado da questão, inclusive alguns alunos solicitaram a ajuda da professora na leitura e interpretação do mesmo.

Figura 57: Respostas das estudantes M29 e L23 ao exercício cinco

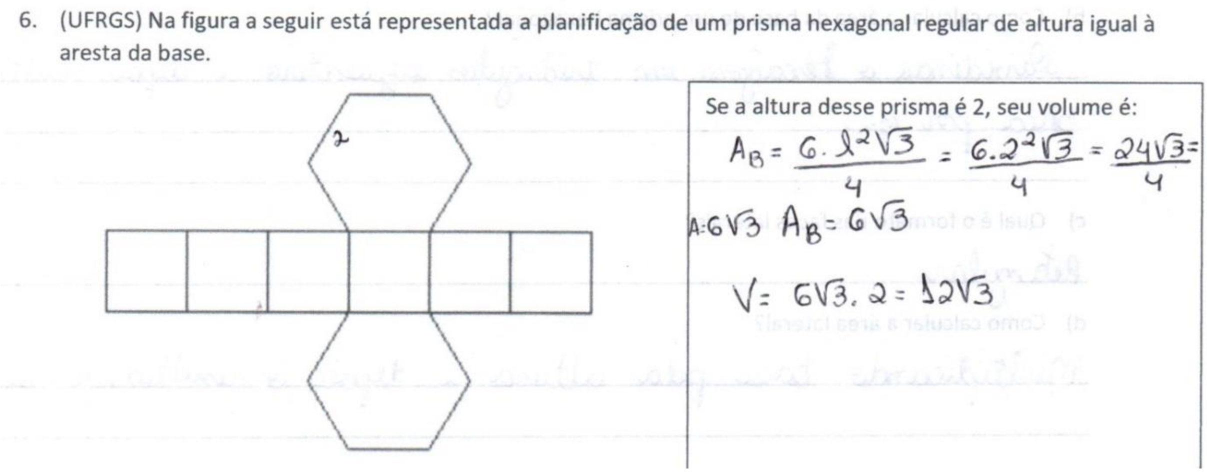

5. (UFSC 2013) Classifique em VERDADEIRO ou FALSO:
Uma conhecida marca de chocolate utiliza como embalagem um prisma regular de base triangular cuja aresta da base mede 3,5 cm. Se sua altura tem o dobro do perímetro da base, então sua área lateral é igual a 220,5 cm².

Fonte: Acervo digital da pesquisa

As discentes M29 e L23 demonstraram compreender em parte a proposta do exercício, mas conforme apresentado na figura 57, ao invés de calcularem a área lateral, calcularam apenas a área de uma face lateral, o que sugere uma dificuldade na interpretação, ou falta de atenção no desenvolvimento da questão.

No último exercício da folha de atividades, a maior parte dos alunos resolveram a questão sem apresentar grandes dificuldades conceituais.

Figura 58: Respostas das alunas M29 e L23 ao sexto exercício da folha de atividades



Fonte: Acervo digital da pesquisa

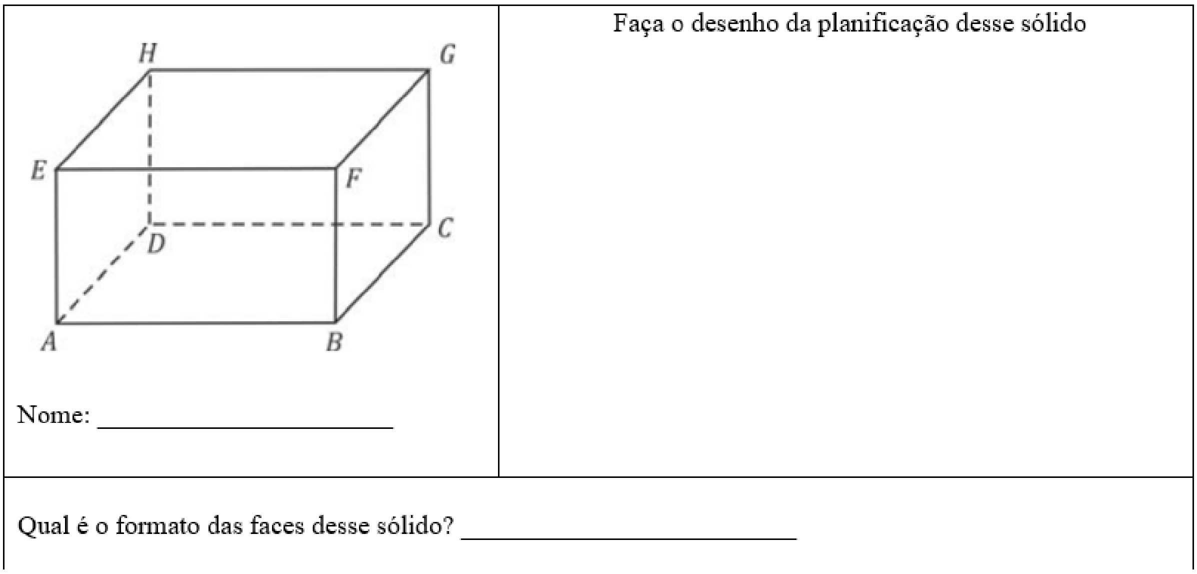
No desenvolvimento da folha de atividades, que foi resolvida em sala de aula, observou-se como a manipulação dos sólidos geométricos favoreceu o desenvolvimento da habilidade de visualização e do desenvolvimento do pensamento geométrico, criando um ambiente de diálogo e descoberta.

5.2.4. Reflexões sobre o ambiente de geometria dinâmica do GeoGebra para o estudo da geometria espacial

Durante o processo de implementação da sequência didática foram propostas duas atividades envolvendo o GeoGebra, a primeira lançando mão do GeoGebra 5.0 na versão aplicativo para *Smartphone*, e a segunda tratou-se de uma apresentação da formação de sólidos de revolução a partir da rotação de uma figura plana em torno de um eixo.

A atividade envolvendo o uso do *Smartphone* foi direcionada, principalmente, ao estudo do cubo e paralelepípedo, mas também foi trabalhado o conceito de outros primas. A representação estática de um paralelepípedo no questionário inicial, não possibilitou que os alunos classificassem corretamente o sólido, por não visualizar corretamente a proporção das dimensões das arestas, ou por dificuldades conceituais. Na figura 59, pode-se ver um dos itens presentes no questionário inicial que era a identificação do paralelepípedo e o desenho da planificação desse sólido.

Figura 59: Identificação do paralelepípedo



Fonte: Elaborado pela autora

Os alunos classificaram o paralelepípedo presente na figura 59 de diferentes maneiras, como no quadro 11:

Quadro 11: Identificando o sólido

Identificação do sólido	**Quantidade de alunos**
Paralelepípedo	8
Cubo	17
Retângulo	11
Quadrado	2
Nome desconhecido	1
Em branco	2

Fonte: Elaborado pela autora

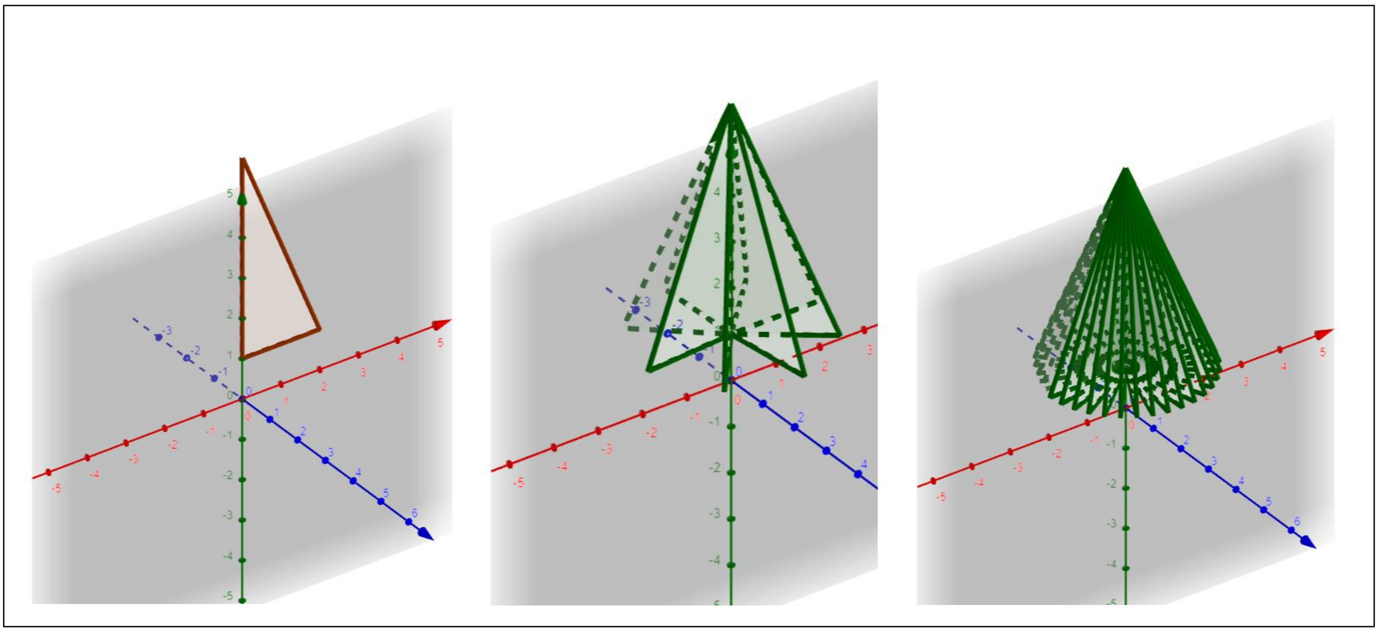
No questionário inicial, havia representado a figura de um paralelepípedo, mas somente 8 dos 41 alunos avaliados, conseguiram visualizar e entender que a imagem se tratava de um paralelepípedo. A grande parte entenderam que estava representado na folha a imagem de um cubo, o que sugere uma dificuldade de visualização por conta da figura ser estática, ou por não entender que um cubo precisa ter todas as arestas com mesma medida, como não havia a medida das arestas na figura, não teriam como saber se era ou não um cubo. Na identificação do sólido, alguns estudantes entenderam que no papel não havia a representação de uma figura tridimensional, portanto, classificaram o sólido como retângulo e quadrado, que se tratam de figuras planas.

Na perspectiva de inovar e na busca também da possibilidade de apresentar um meio dinâmico de visualizar o sólido, a professora levou a proposta da construção do paralelepípedo utilizando o GeoGebra na versão aplicativo para *Smartphone*. A turma já havia passado por uma ambientação com o aplicativo, então após serem divididos em grupos, receberam uma folha com as orientações para as construções.

Durante o desenvolvimento da atividade, foram encontrados alguns desafios, mas também contribuições, referente ao uso do GeoGebra na versão aplicativo para *Smartphone*, para o desenvolvimento dessa atividade. O primeiro desafio, foi a descoberta de que não havia o GeoGebra 3D para *IOS*, somente para *Android*, assim os alunos que possuíam *iPhone*, tiveram que se deslocar para o grupo de alunos com *Smartphone,* não podendo ter a experiência de fazer a construção sozinho, pois apesar da turma ter sido disposta em grupos, a proposta era que cada aluno realizasse suas construções individualmente, a disposição em grupo era com o interesse somente no diálogo e na possibilidade de um aluno ajudar o outro. Outro desafio foi que apesar da ambientação e de eles já terem tido a experiência do uso do GeoGebra para o estudo de outros conceitos, alguns grupos apresentaram dificuldades com as ferramentas do aplicativo, precisando da ajuda da professora para a realização das etapas da atividade. E o último desafio, que já foi apontado também na pesquisa de Henrique (2017), foi a dificuldade em realizar a construção por causa da tela pequena do *Smartphone,* alguns alunos tiveram que refazer a construção várias vezes, por acabar tocando a tela em pontos errados, desconfigurando o objeto. Foram muitas as contribuições, começando pelo caráter inovador da proposta, que despertou a curiosidade e o interesse da turma para a realização da atividade, a manipulação do sólido, possibilitando uma melhor visualização do objeto, a interação, a oportunidade do aluno estar em uma posição investigativa e de descoberta. Ao final da atividade, os grupos conseguiram conjecturar meios para o cálculo da área e volume dos sólidos, e também identificaram as características particulares de um cubo.

Em um outro momento, a professora desenvolveu uma segunda atividade lançando mão do GeoGebra, o objetivo dessa atividade é que os alunos chegassem à compreensão de que os corpos redondos são sólidos de revolução, ou seja, formados pela rotação de uma figura plana em torno de um eixo. Para isso, foi levado uma apresentação já pronta, o notebook foi conectado a televisão para que os discentes pudessem visualizar a formação dos sólidos conforme na figura 60.

Figura 60: Rotação do triângulo em torno do eixo



Fonte: Elaborado pela autora

Os estudantes não apresentaram dificuldades para compreender o conceito de sólido de revolução a partir da visualização da apresentação. Pelo contrário, em poucos minutos construíram o conceito e identificaram alguns elementos importantes dos corpos redondos, como a geratriz, o raio da base, bem como, a figura formadora de cada sólido.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Cabe aos profissionais da área da educação buscarem estratégias para melhorar o processo de ensino e aprendizagem, e essa aprendizagem precisa ser significativa, ou seja, envolvendo o sujeito como um todo, considerando os aspectos culturais, sociais e cognitivos. Essa pesquisa partiu da seguinte interrogação: "De que forma o uso de diferentes recursos didáticos, podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Espacial, bem como, no desenvolvimento da habilidade de visualização de estudantes do 2º ano do Ensino Médio?" Assim, o objetivo geral é apresentar um possível caminho para o desenvolvimento da habilidade de visualização, bem como, do pensamento geométrico espacial no Ensino Médio, numa perspectiva de aprendizagem significativa que lance mão de recursos didáticos variados. Assim, para o estudo da Geometria Espacial, percebemos que há diferentes recursos que podem contribuir para uma aprendizagem significativa, servindo como um apoio didático, auxiliando no desenvolvimento da habilidade de visualização. Quando o estudante desenvolve a habilidade de visualização, ele é capaz de criar representações visuais mentais das formas e dos objetos físicos, podendo operar sobre esses modelos, estabelecendo relações e realizando transformações.

Como recurso digital, utilizamos o GeoGebra 5.0 na versão aplicativo e dekstop, e como recurso concreto trabalhamos com Artes Geométricas, Maquetes, e Sólidos Geométricos construídos artesanalmente.

O GeoGebra, como ambiente de geometria dinâmica, possui características didáticas que podem auxiliar na apropriação de certos conceitos que devem ser desenvolvidos durante a abordagem de conceitos geométricos, vale ressaltar, que como esse programa está disponível na versão aplicativo, as atividades podem ser realizadas em sala de aula por meio dos *smartphones* dos próprios alunos. Destacamos que esse recurso pode se tornar um elemento motivador devido seu caráter inovador e facilitador da aprendizagem, permitindo a visualização das construções em diversos panoramas, a criação de animações, o estabelecimento de conjecturas, a dedução de padrões e propriedades, e a verificação de resultados. Nessa pesquisa utilizamos o GeoGebra para estudar as características dos prismas e de alguns sólidos de revolução. A atividade envolvendo os prismas foram desenvolvidas através de um estudo dirigido, os alunos organizados em grupos puderam realizar as construções, e identificaram padrões comuns a todos os prismas, da mesma maneira que identificaram as diferenças e conjecturaram meios para o cálculo da área sem precisar de fórmulas. Já no estudo dos corpos redondos, através de uma animação, compreenderam que esses sólidos são sólidos de revolução, percebendo alguns elementos específicos dos cones, cilindros e esferas.

A manipulação de materiais concretos também se configura como um importante meio para a abstração de conceitos geométricos, além de tornar o ensino de geometria mais atrativo, ajuda a ler e interpretar as formas presentes no mundo em que vivemos. As atividades envolvendo Artes Geométricas proporcionou que os estudantes alcançassem uma visão menos mecânica e abstrata da Matemática ao conhecerem o envolvimento dessa disciplina com outras áreas do conhecimento, e as atividades envolvendo as maquetes, também trouxe essa perspectiva, porém essa proposta didática explora também a visualização espacial, a manipulação, a observação e comparação das formas espaciais. Na construção dos sólidos geométricos, o aluno visualizou toda a estrutura de cada sólido, no toque pôde sentir os que têm um formato mais arrendodado, e também o formato de cada um conforme o grupo ao qual pertencem (prismas, pirâmides ou corpos redondos), os discentes tiveram menos dificuldades ao desenvolver atividades tendo como o auxílio esses sólidos, mas depois de manipulá-los conseguiram também criar uma imagem mental que foi evocada nas atividades com a ausência desses objetos físicos.

Quando associamos o estudo da Geometria com outras áreas do conhecimento, como História e Artes, revelamos seus aspectos histórico-culturais, ao mesmo tempo que fazemos da sala de aula um espaço criativo e de descoberta.

Nessa pesquisa, a implementação de recursos didáticos variados, trouxe fatores que podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria Espacial, mas também revelou alguns desafios. Como principais contribuições, apontamos para uma abordagem interdisciplinar, em que os alunos puderam perceber a geometria no mundo real, através da Arte e da História; a criação de um ambiente favorável para o desenvolvimento da habilidade de visualização, com a manipulação dos sólidos geométricos, em suas representações virtuais e concretas; e a oportunidade de criar, de se expressar, e de se relacionar com os colegas de classe e professora. Como principais desafios, encontramos a dificuldade, pela falta de hábito dos alunos, em expor as ideias e conceitos que foram construídos ao longo do processo; estabelecer relações entre as representações bidimensionais e tridimensionais; e em construir e manipular os sólidos geométricos nos *smartphones*, por causa da tela pequena.

Como produto dessa pesquisa, foi elaborada uma sequência didática, sendo essa sequência aperfeiçoada com o propósito de atender ainda melhor um público tão heterogêneo, que é o que compõem a Educação Básica. As atividades da sequência didática foram divididas em quatro grupos:

- Grupo 1: Da Arte para a Matemática, com o objetivo de reconhecer a presença das formas geométricas em diferentes obras de artes;
- Grupo 2: Descobrindo a Geometria na Arquitetura, com o objetivo de interpretar, reconhecer e visualizar a presença da geometria no cotidiano partindo de exemplos de construções projetadas por Oscar Niemeyer;
- Grupo 3: Identificando e Construindo os Sólidos Geométricos, trazendo a proposta de construção e observação dos sólidos geométricos, para identificar e nomear esses sólidos descrevendo suas características;
- Grupos 4: A Geometria Espacial em um Ambiente Dinâmico, que visa a partir da construção, observação, e manipulação dos sólidos geométricos no GeoGebra, identificar, nomear e descrever as características dos prismas, pirâmides e corpos redondos.

Portanto, a aprendizagem de Geometria Espacial se baseia no raciocínio visual espacial, mas não se limita a isso, é importante também incorporar nesse estudo situações que mostram como ela se manifesta na realidade, provocando novas descobertas com atividades investigativas através de recursos didáticos concretos e virtuais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S.; Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT -19/ ANPEd. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v.3, n.1, p. 62-77, 2008. Disponível em: < https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2008v3n1p62> . Acesso em 20 Fev. 2019.

ARCAVI, A. The role of visual representations in the leaning of matthematics. **Educational Studies in Mathematics**, p.215-241, 2003.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v.9, n.3, p. 281-308, 1988.

ARTIGUE, M. Engenharia didáctica. In: BRUN, J (Org.). **Didáctica das matemáticas**. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p.193-217.

BAIRRAL, M.A. **Tecnologias da Informação e Comunicação na Formação e Educação Matemática.** 2º Edição. Seropédica: Edur, 2012.

BAIRRAL, M.A.; OLIVEIRA, G.W.B.; IZAR, S.B.; Potencializando a visualização Geométrica em aulas com recursos dinâmicos e interativos. **Revista Digital Formação em Diálogo.** Rio de Janeiro, v.2, n.2, p.49-60, jun. 2019. Disponível em: < https://revistadigitalformacaoemdialogo.blogspot.com/ >. Acesso em 10 Jul. 2019

BIEMBENGUT, M.S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino.** São Paulo: Contexto, 2019.

BORSOI, C. **GeoGebra 3D no Ensino Médio**: uma possibilidade para a aprendizagem da Geometria Espacial. 2016. 158 p. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS. 2016.

BURIOL, M.C.; MACEDO, A.C.; SILVA, J.A. Usando *Smartphone* e Realidade aumentada para estudar Geometria Espacial. **Revista Renote: Novas Tecnologias na Educação.** Universidade Federal do Rio Grande do Sul, v.14, n.2, 2016.

COLINVAUX, D. Aprendizagem: as questões de sempre, a pesquisa e à docência. **Ciência em tela**, Rio de Janeiro. v.1, nº 1, p. 1-11, 2008. Disponível em: <http://www.cienciaemtela.nutes.ufrj.br/volume1/pesquisa_em_ensino.html>.Acesso em 05 Fev. 2018.

COLL, C. **Aprendizagem Escolar e Construção do Conhecimento**. Porto Alegre: Artes Médicas, 2002.

COSTA, C.: Visualização, veículo para a educação em geometria. In: SARAIVA, M; COELHO, I.; MATOS, J. (Org(s), Ed(1). **Ensino e Aprendizagem de Geometria.** Lisboa, Portugal Editora, 2002. p. 157-184.

FAINGUELERT, E.K. **Educação matemática:** representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FAINGUELERT, E.K; NUNES, K.R.A. **Fazendo Arte com a Matemática**. 2ª Edição. Porto Alegre: Artmed, 2015.

FAZENDA, I. C. A. **Interdisciplinaridade:** Um projeto em parceria. 5ª Edição. São Paulo: Edições Loyola, 2002.

GUTIÉRREZ, A. Visualization in 3 – dimensional geometry: in search of a framework. In L. Puig e Gutierrez (Eds.), **Proceedings of 20th PME conference** (Vol. 3, pp 19-26), Valencia: Universitat de València, Dept. de Didàctica de la Matemática, 1996.

HENRIQUE, M. P. **GeoGebra no Clique e na Palma das Mãos**: Contribuições de uma Dinâmica de Aula para Construção de Conceitos Geométricos com Alunos do Ensino Fundamental. 2017. 108 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática), Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2017.

KALEFF, A.M.M.R. **Vendo e entendendo poliedros:** Do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos. Niterói: EdUFF, 2003

KALEFF, A. M. M. R. **Vendo com as mãos, olhos e mente**: Recursos didáticos para laboratório e museu de educação matemática inclusiva do aluno com deficiência visual. Niterói: CEAD/UFF. 2016.

KALEFF, A. M. M. R. **Tópicos em Ensino de Geometria**: A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria. 2ª Ed. Niterói: CEAD/UFF. 2016.

LEIVAS, J.C.P. **Imaginação, intuição e visualização**: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. 287 p. Tese (Programa de PósGraduação do Setor de Educação da Universidade Federal do Paraná), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR. 2009.

LEIVAS, J.C.P.; OLIVEIRA, M.T. Visualização e Representação Geométrica com suporte na Teoria de Van Hiele. **Revista de Centro de Ciências Naturais e Exatas** – UFSM, v. 39, n.1, p. 108-117, 2017.

MASETTO, M.T. **Competência pedagógica do professor universitário**. 2ª Edição. São Paulo: Summus, 2012.

MASETTO, M. T. Inovação na aula universitária: espaço de pesquisa, construção de conhecimento interdisciplinar, espaço de aprendizagem e tecnologias de comunicação. **Perspectiva**, Florianópolis, v. 29, n.2, p. 597-620, jul/dez. 2011. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/perspectiva/article/view/2175-795X.2011v29n2p597>. Acesso em: 27 jan. 2020.

OLIVEIRA, G.W. B. **Épura ao vídeo:** desenvolvimento e uso de um aplicativo para o trabalho com geometria descritiva. 2016. 109 p. Dissertação (Mestrado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares), Instituto de Educação/Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2016.

PAULA, E.A.S.; SAMPAIO, R.C. O desenvolvimento do pensamento e da linguagem geométrica com o auxílio do GeoGebra e material concreto. **Seminário Nacional de Linguagem e Educação Matemática**, Rio de Janeiro, dez. 2018.

PONTE, J.P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula.** Coleção Tendências em Educação Matemática. V.7. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PRESMEG, N. Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Eds.), **Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education**: Past, Present and Future (pp. 205-236), jan. 2006. Disponível em: <https://brill.com/view/book/edcoll/9789087901127/BP000009.xml> Acesso em: 15 de jun 2018

SANTOS, E. O. WEBER, A. Educação e cibercultura: aprendizagem ubíqua no currículo da disciplina didática. **Revista Diálogo Educacional (PUCPR)**, v.13, p.285-303,2013. Disponível em: <http://www2.pucpr.br/reol/index.php/dialogo?dd1=7646&dd99=view> . Acesso em: 15 Dez. 2017.

SETTIMY, T.F.O. **Visualização em sala de aula utilizando recursos didáticos variados**. 2018. 122 p. Dissertação (Mestrado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares), Instituto de Educação/Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2018.

SOUZA, L. A. **Uma Proposta para o Ensino da Geometria Espacial Usando o Geogebra 3D.** 2014. f. 66. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

VIDALETTI, B.B.V. **Ensino e aprendizagem da Geometria Espacial a partir da manipulação de sólidos**. 2009. 107 p. Dissertação (Mestrado Profissionalizante no Ensino de Ciências Exatas), Centro Universitário Univates, Lajeado, 2009.

APÊNDICE A

Questionário Inicial

QUESTIONÁRIO DE PESQUISA DE CAMPO

Data de preenchimento: ___/___/___

Caro(a) Estudante.

Esse questionário tem como objetivo analisar os seus conhecimentos em relação aos conceitos presentes no conteúdo de geometria espacial**,** bem como, a sua perspectiva em relação a matemática, e as tecnologias.

1. O que é a matemática?

____

____

____

2. Você possui um Smartphone?

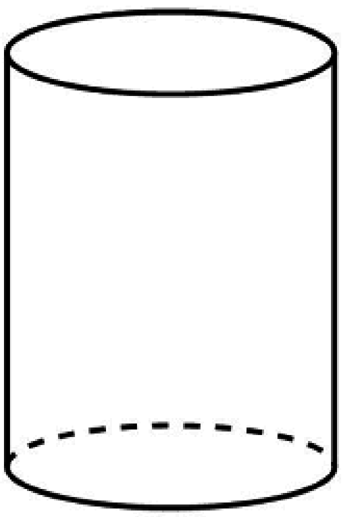
( ) Sim ( ) Não

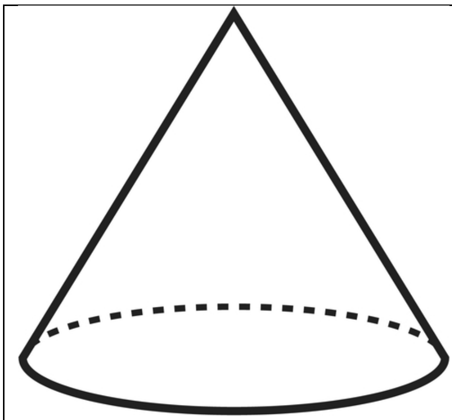
Em caso afirmativo:

Com qual frequência você utiliza o seu smartphone:

( ) Nunca ( ) Raramente ( ) Às vezes ( ) Muitas vezes ( ) Sempre

3. Em relação aos sólidos geométricos, preencha os campos abaixo observando o formato de cada sólido:

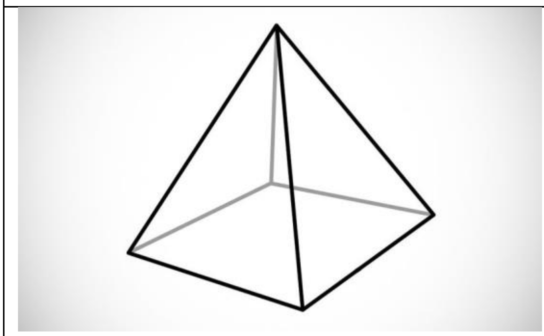
<table>
<tr><td>
Nome: _______________________</td><td>Faça o desenho da planificação desse sólido</td></tr>
<tr><td colspan="2">Qual é o formato da base desse sólido? ______________________________</td></tr>
</table>



Nome: ______________________

Faça o desenho da planificação desse sólido

Qual é o formato da base desse sólido? ____________________________

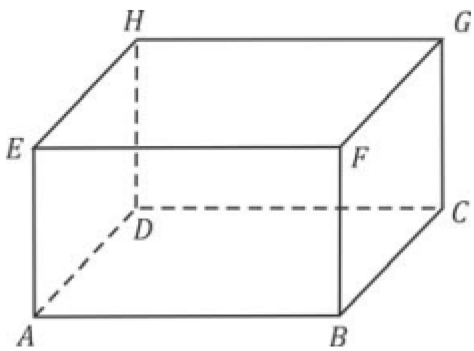


Nome: ______________________

Faça o desenho da planificação desse sólido

Qual é o formato da base desse sólido? _______________________

Qual é o formato das faces laterais desse sólido? __________________________

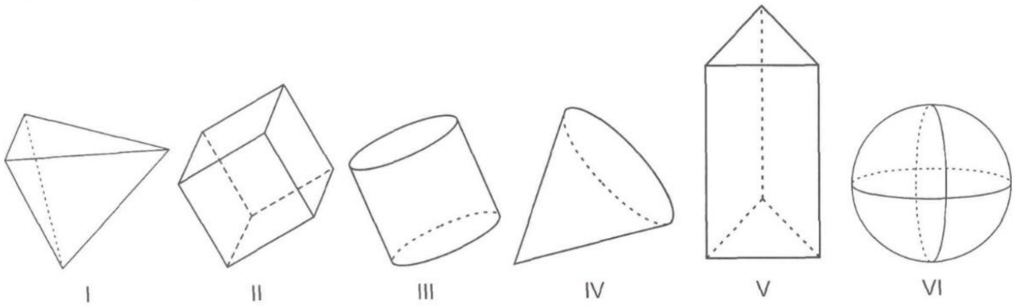


Nome: ______________________

Faça o desenho da planificação desse sólido

Qual é o formato das faces desse sólido? ___________________________
Desenhe um hemisfério (semi-esfera)

4. Observe os sólidos geométricos representados abaixo:



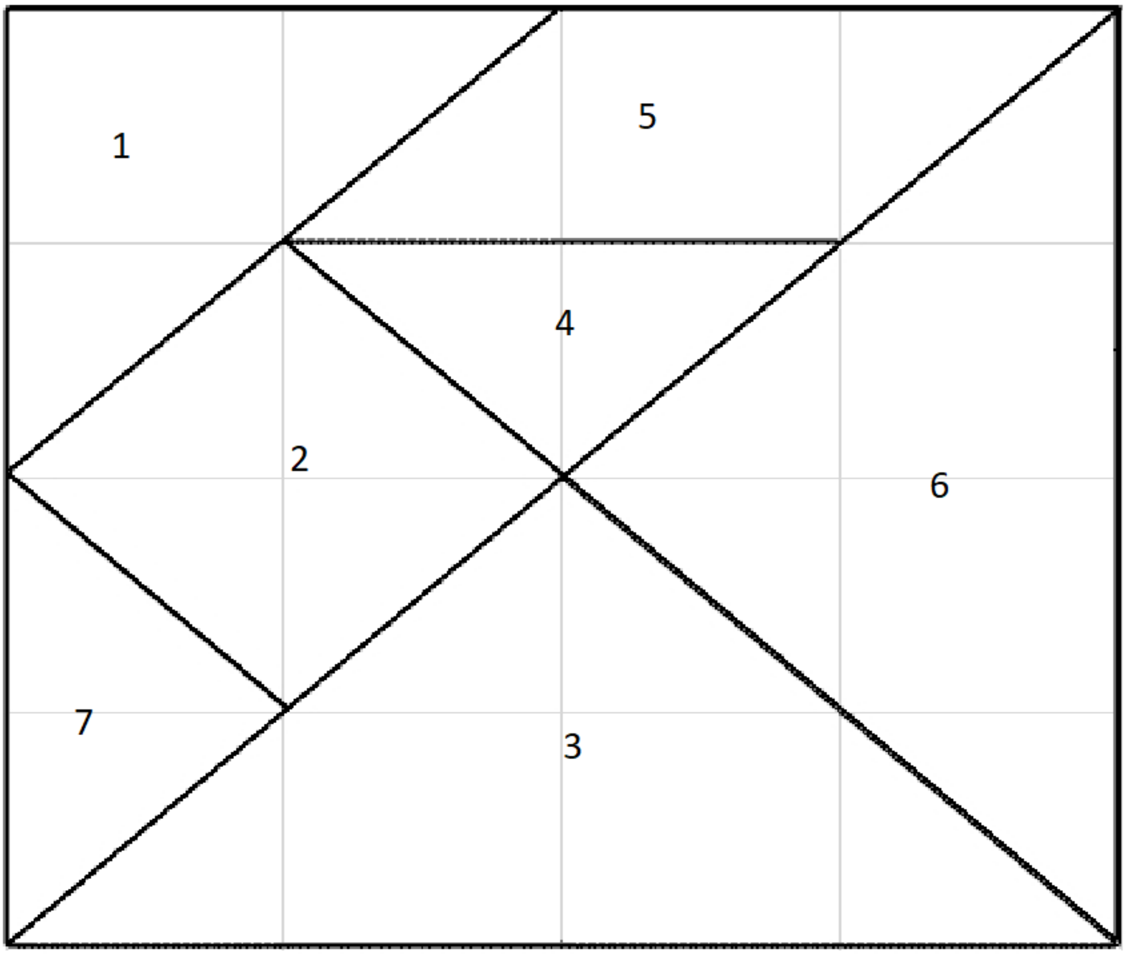
a) Quais desses sólidos podem ser classificados como prisma? ___________________

b) Quais desses sólidos podem ser classificados como corpos redondos? ___________________

APÊNDICE B

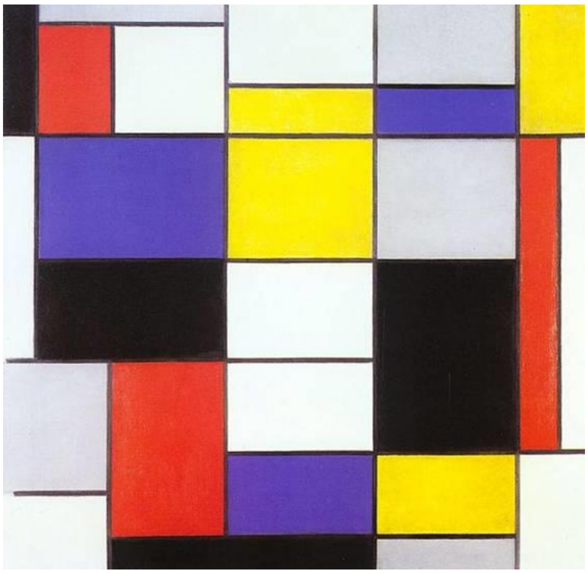
Atividade 1

1. O tangram é um quebra-cabeça chinês formado por 7 peças, dois triângulos grandes, dois pequenos, um médio, um quadrado, e um paralelogramo. Considerando as dimensões reais da figura abaixo, calcule a área e o perímetro de cada uma das peças.



2. A matemática não está presente somente nas fórmulas, ou em exercícios algébricos. Ela nos acompanha em nosso dia a dia, por exemplo, quando vamos fazer compras, ou quando preparamos uma deliciosa receita. A matemática faz parte da natureza, da música, da arquitetura, e etc. Poderíamos ficar um bom tempo pensando na importância da matemática para nossas vidas. Um filósofo e matemático, chamado Pitágoras, disse a seguinte frase: “Tudo é número.”. Hoje vamos observar a presença da matemática em uma famosa obra artísticas.

   A obra a seguir é de **Piet Modrian**, ele nasceu em 7 de março de 1876, na Holanda. O seu estilo é baseado em uma arte harmoniosa, com linhas e retângulos, em contraposição a violência causada pela Segunda Guerra Mundial. Um dos grandes feitos desse artista, foi o de criar com outros pintores holandeses um movimento chamado de Neoplasticismo.



a) Como podem perceber, Piet Modrian, utilizava as formas geométricas para a construção de obras artísticas, o desafio agora é utilizarem as formas geométricas das peças do tangram, para construir a sua própria arte.
b) Pesquisem outros artistas que também utilizem as formas geométricas em seus trabalhos, e façam comentários sobre suas obras, trazendo alguns exemplos.

APÊNDICE C

SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Essa sequência didática é produto de uma dissertação sob o título "Geometria Espacial: a aprendizagem através de diferentes recursos didáticos", sendo que após a realização de reflexões referentes a implementação das atividades, bem como, os desafios e potencialidades encontrados, foi feito um refinamento com o propósito de construir um material de apoio para o ensino e aprendizagem da geometria espacial. Essa sequência didática foi elaborada lançando mão de diferentes recursos didáticos para fornecer uma variedade de opções para o docente trabalhar alguns conceitos geométricos, podendo ser adaptado a novas estratégias e abordagens, possuindo em parte também, uma abordagem interdisciplinar, envolvendo Artes e História. As atividades foram elaboradas para uma turma de 2º ano do Ensino Médio, considerando o Currículo Mínimo da Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro, porém poderá ser ajustada a outras séries e públicos. Cada tópico aqui apresentado, terá como descrição os objetivos, os recursos utilizados, a organização da turma e o tempo previsto.

O objetivo geral desse trabalho é apresentar um possível caminho para o desenvolvimento da habilidade de visualização, bem como, do pensamento geométrico espacial no Ensino Médio, numa perspectiva de aprendizagem significativa através de recursos didáticos variados.

Orientações gerais para a implementação

- As atividades iniciais são de revisão de conceitos referentes à geometria plana, pois no estudo da geometria espacial estamos sempre recorrendo aos conceitos de área e perímetro de diferentes polígonos, ou seja, o estudo da geometria espacial é feito em conjunto com o estudo da geometria plana.
- Cada atividade deve ser desenvolvida sob a orientação do professor, que deverá assumir o papel de mediador, sempre estimulando o aluno à descoberta, ao desenvolvimento do pensamento crítico, e a criatividade.
- Nas atividades que envolvem o GeoGebra, é interessante que o professor leve um notebook com um projetor, e acompanhe os alunos durante as construções, mesmo que

as configurações do GeoGebra para o notebook sejam um pouco diferentes da versão aplicativo para smartphone.

<u>Processos de aprendizagem</u>

Masetto[12] (2012, p.45) quando se refere ao processo de aprendizagem, fala que este é "um processo de crescimento e desenvolvimento de uma pessoa em sua totalidade, abarcando minimamente quatro grandes áreas: a do conhecimento, a do afetivo-emocional, a de habilidades e a de atitudes e valores."

No contexto dessa sequência didática, esses processos se organizam da seguinte maneira:

(I) Habilidades: 1. Construir e manipular os sólidos geométricos; 2. Desenvolver a prática de se expressar oralmente e por escrito; 3. Perceber o espaço ocupado pelo próprio corpo e por diferentes objetos, demonstrando noções de relações espaciais; 4. Formar relações entre as diferentes representações planas de objetos espaciais; 5. Interpretar, reconhecer e visualizar a presença da geometria no cotidiano;

(II) Valores e atitudes: 1. Trabalhar de forma colaborativa com o grupo, 2. Construir relações interpessoais através do diálogo e respeito, desenvolvendo o autoconhecimento;

(III) Aspectos Cognitivos: 1. Compreender os conceitos relacionados às características, classificações e propriedades dos objetos e figuras geométricas.

(IV) Afetivos-emocionais: 1. Solidariedade durante o desenvolvimento das atividades; 2. Segurança em expor suas ideias, e respeito às ideias e pensamentos alheios.

[12] MASETTO, M.T. **Competência pedagógica do professor universitário**. 2ª Edição. São Paulo: Summus, 2012.

ATIVIDADE 1:

Da Arte para a Matemática

Objetivo Principal: revisar os conceitos de área e volume em figuras planas, e reconhecer a presença das formas geométricas em diferentes obras de artes.

Recursos Utilizados: Folha impressa com as atividades, papel A4, lápis de cor, canetinha, régua e Smartphone conectado à internet.

Série: 2º ano do Ensino Médio

Organização da turma: grupos

Etapas	Tempo previsto	Objetivos Específicos
Primeira etapa	100 minutos	- Utilizar o tangram para compreender os conceitos relacionados às características, classificações e propriedades das figuras geométricas planas, calculando sua área e perímetro.
Segunda etapa	50 minutos	- Interpretar, reconhecer e visualizar a presença da geometria no cotidiano através da observação de diferentes obras de artes geométricas.

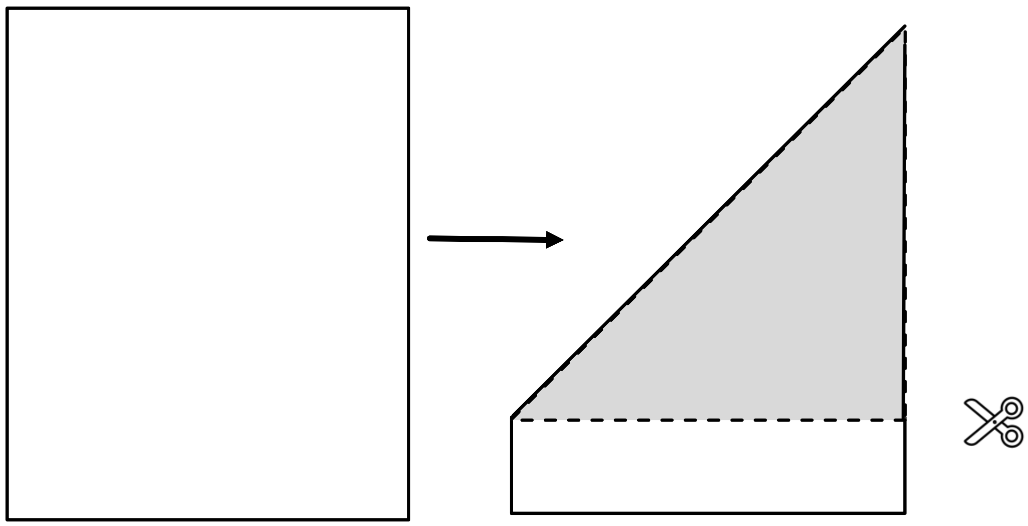
Sugestão de leitura

FAINGUELERT, E.K; NUNES, K.R.A. **Fazendo Arte com a Matemática**. 2ª Edição. Porto Alegre: Artmed, 2015.

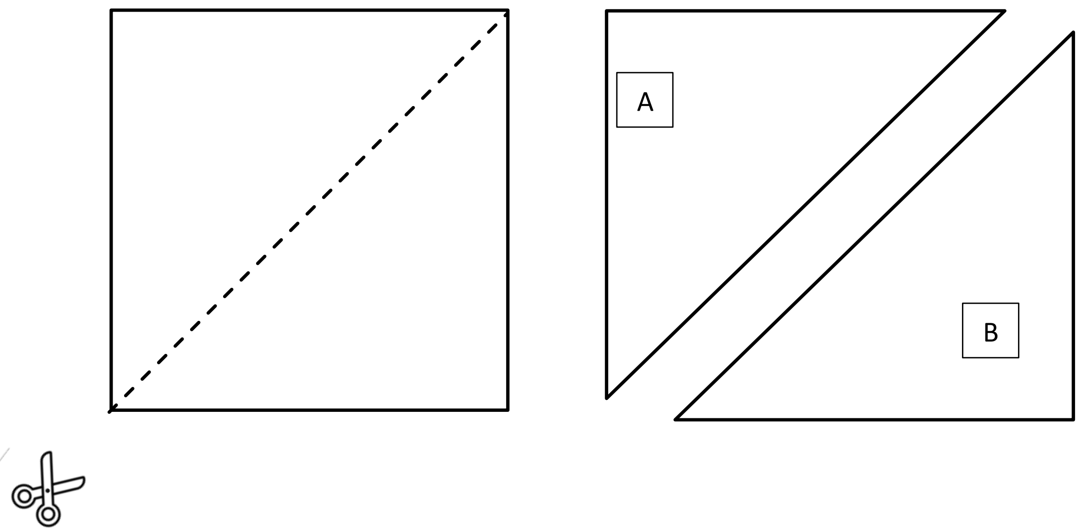
Primeira Etapa

O tangram é um quebra-cabeça chinês formado por 7 peças, dois triângulos grandes, dois pequenos, um médio, um quadrado, e um paralelogramo. Seguindo as instruções, vamos montar o nosso próprio tangram.

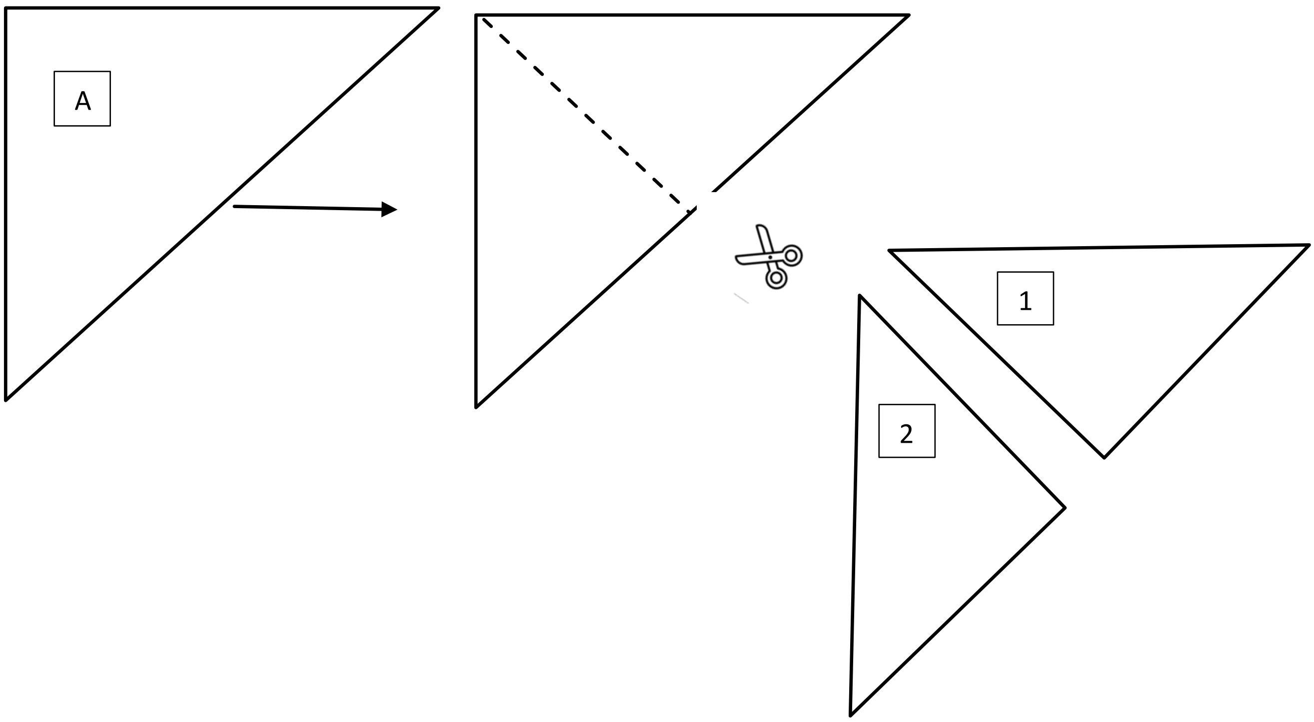
- **1º Passo:** Com uma folha de papel A4 dobre no mesmo sentido da imagem abaixo e recorte na posição do tracejado:



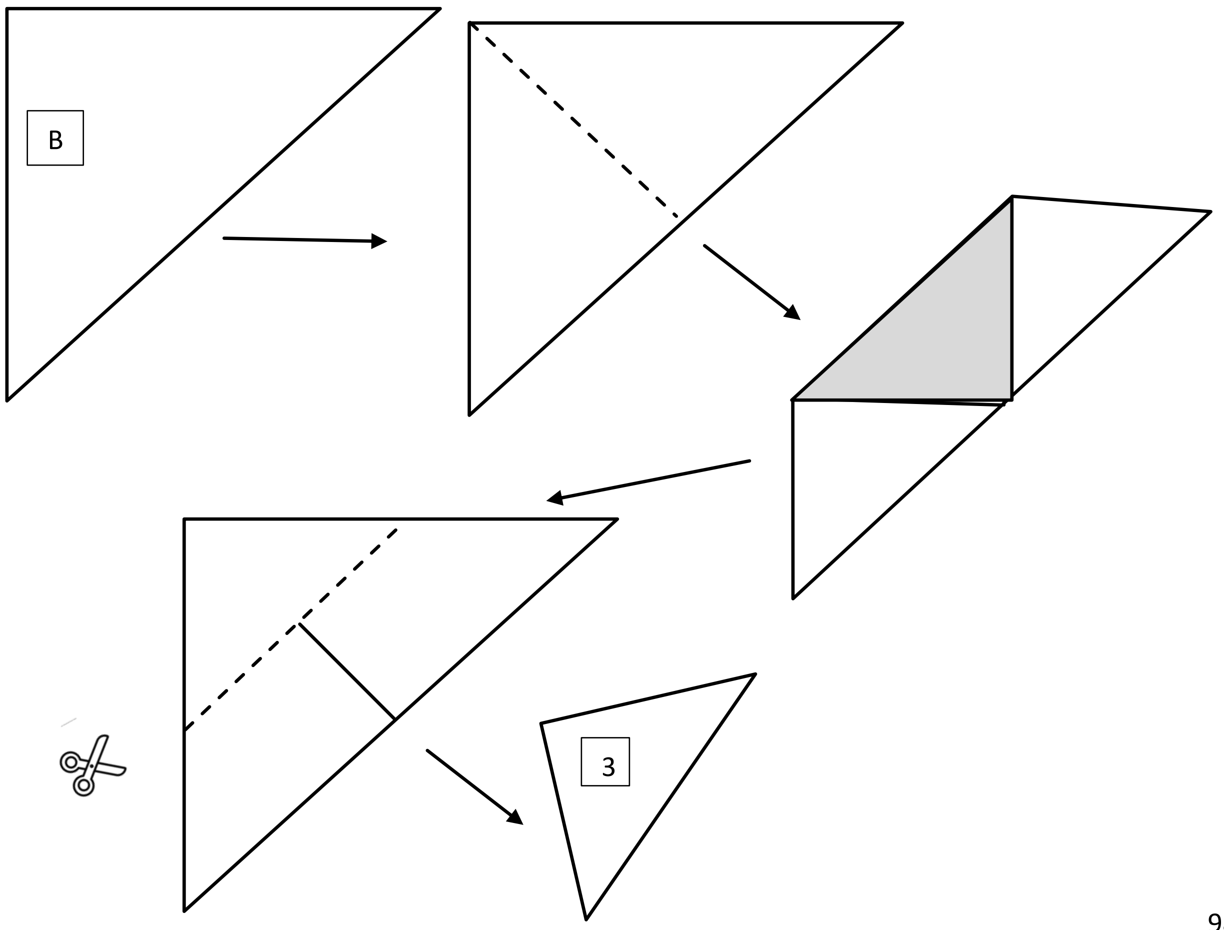
- **2º Passo:** Abra a folha, e terá um vinco no centro, recorte-o de modo a obter dois triângulos:



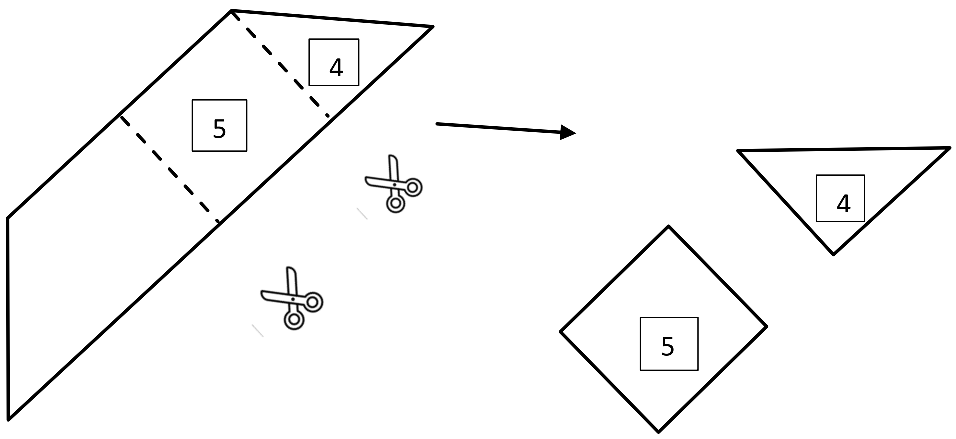
- **3º Passo**: Dobre o Triângulo A ao meio, recorte e obtenha outros dois triângulos:



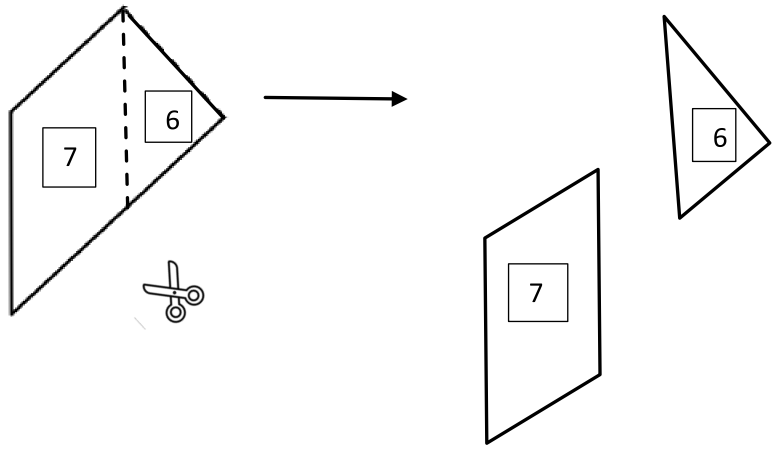
- **4º Passo:** Dobre o Triângulo B ao meio, fazendo um vinco, dobre o vértice oposto, recorte e obtenha o triângulo 3:



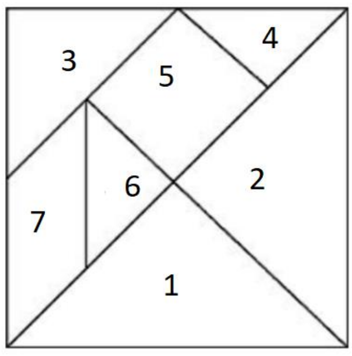
- **5º passo**: Dobre o trapézio ao meio, e dobre também a outra parte, formando o quadrado 5 e outro triângulo 4:



- 6º passo: Dobre, conforme indicado a seguir, e obtenha o triângulo 6 e o paralelogramo 7:



- **7º passo:** Unindo todas as peças, formamos o tangram:



1. Utilizando as sete peças do trangram, complete os desafios propostos a seguir:

a) Construa um triângulo isósceles utilizando os números de peças indicados, e a partir das dimensões reais, calcule aproximadamente a área e o perímetro de cada triângulo formado.

- Duas peças

Total do perímetro	**Total da área**
Monte e cole aqui ⬇	

- Três peças

Total do perímetro	**Total da área**
Monte e cole aqui ⬇	

- Quatro peças

Total do perímetro	Total da área
Monte e cole aqui ⬇	

b) Construa um <u>quadrado</u> utilizando os números de peças indicados, e a partir das dimensões reais, calcule aproximadamente a área e o perímetro de cada quadrado formado.

- Três peças

Total do perímetro	Total da área
Monte e cole aqui ⬇	

- Quatro peças

Total do perímetro	Total da área
Monte e cole aqui ⬇	

- Cinco peças

Total do perímetro	Total da área
Monte e cole aqui ⬇	

c) Construa um hexágono utilizando os números de peças indicados, e a partir das dimensões reais, calcule aproximadamente a área e o perímetro de cada hexágono formado.

- Quatro peças

Total do perímetro	Total da área
Monte e cole aqui	

- Sete peças

Total do perímetro	Total da área
Monte e cole aqui	

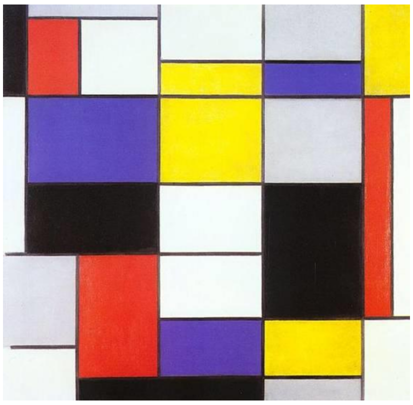
2. Com o tangram podemos montar uma variedade de formas, que tal tentar construir algumas figuras com essas sete peças? Deixe a colagem de uma figura que você montou logo abaixo:

Monte e cole aqui ⬇

Segunda Etapa

3. A matemática não está presente somente nas fórmulas, ou em exercícios algébricos. Ela nos acompanha em nosso dia a dia, por exemplo, quando vamos fazer compras, ou quando preparamos uma deliciosa receita. A matemática faz parte da natureza, da música, da arquitetura, e etc. Poderíamos ficar um bom tempo pensando na importância da matemática para nossas vidas. Um filósofo e matemático, chamado Pitágoras, disse a seguinte frase: "Tudo é número.". Hoje vamos observar a presença da matemática em uma famosa obra artísticas.

A obra a seguir é de **Piet Modrian**, ele nasceu em 7 de março de 1876, na Holanda. O seu estilo é baseado em uma arte harmoniosa, com linhas e retângulos, em contraposição a violência causada pela Segunda Guerra Mundial. Um dos grandes feitos desse artista, foi o de criar com outros pintores holandeses um movimento chamado de Neoplasticismo.



c) Utilizando o seu Smartphone, pesquise outros artistas que também utilizem as formas geométricas em seus trabalhos, e façam comentários sobre suas obras, biografia, trazendo alguns exemplos para a próxima aula:

d) Como podem perceber, Piet Modrian, utilizava as formas geométricas para a construção de obras artísticas, o desafio agora é elaborar a sua própria criação em formatos geométricos:

ATIVIDADE 2:

Descobrindo a Geometria na Arquitetura

Objetivo Principal: A partir de exemplos de construções projetadas por Oscar Niemeyer, interpretar, reconhecer e visualizar a presença da geometria no cotidiano.

Recursos Utilizados: Projetor conectado a um notebook, papel A4, papel A4 quadriculado, folha com as atividades impressas e materiais para a elaboração das maquetes.

Série: 2º ano do Ensino Médio

Organização da turma: grupos

Etapas	**Tempo previsto**	**Objetivos Específicos**
Primeira etapa	100 minutos	- Apresentação em slide das obras e biografia de Oscar Niemeyer identificando as formas geométricas espaciais presentes em seus trabalhos.
Segunda etapa	200 minutos	- Através da elaboração de plantas, compreender melhor como o espaço é composto e sua utilização no dia a dia, bem como, estimular a criatividade, a intuição e o pensamento crítico. - Trabalhar o conceito de área, perímetro e noções de escala.
Terceira etapa	200 minutos	- Desenvolver a habilidade de visualização, e compreender conceitos referentes a área e volume dos objetos espaciais através da construção de maquetes. - Observar e comparar as projeções bidimensionais e tridimensionais.

Primeira Etapa

Esta etapa poderá ter uma abordagem interdisciplinar, se elaborada em conjunto com professores de Artes e História, o que é uma oportunidade para trabalhar temas relacionados ao Modernismo, bem como, aspectos históricos-sociais das obras de Oscar Niemeyer.

Elaboração da Apresentação das Obras de Oscar Niemeyer

A apresentação poderá ser feita em slide, utilizando algum programa de imagens e vídeos. Abaixo temos a sugestão do modo de organização da apresentação:

1º Passo	Quem foi Oscar Niemeyer?	Apresentação de fotos do Arquiteto e exposição de sua biografia.
2º Passo	Monumentos de destaque	Fotos dos monumentos que mais se destacam nas mídias, como a do Congresso Nacional, Sambódromo, Museu de Arte Contemporânea de Niterói, Palácio da Alvorada, e os Centros Integrados de Educação Pública, discorrendo um pouco sobre a história dessas construções e sobre o que elas representam para o nosso país.
3º Passo	Como tudo começou?	Apresentação dos projetos e plantas elaborados por Oscar Niemeyer, falando da importância do planejamento na Arquitetura.
4º Passo	Identificando as formas geométricas espaciais	Reflexão e comparação das obras projetadas por Oscar Niemeyer com as formas geométricas espaciais.

Sites para pesquisa

Os endereços indicados se configuram como um material complementar para o aprofundamento sobre a história e obras de Oscar Niemeyer:

http://www.niemeyer.org.br/

http://visit.rio/editorial/roteiros-niemeyer/

Sugestão extra de implementação

Organização de visitas a construções projetadas por Oscar Niemeyer, no Rio de Janeiro temos um roteiro que pode ser encontrado no site: http://visit.rio/editorial/roteiros-niemeyer/, para a visita de 13 obras do Arquiteto.

Segunda Etapa

O que é uma planta baixa?

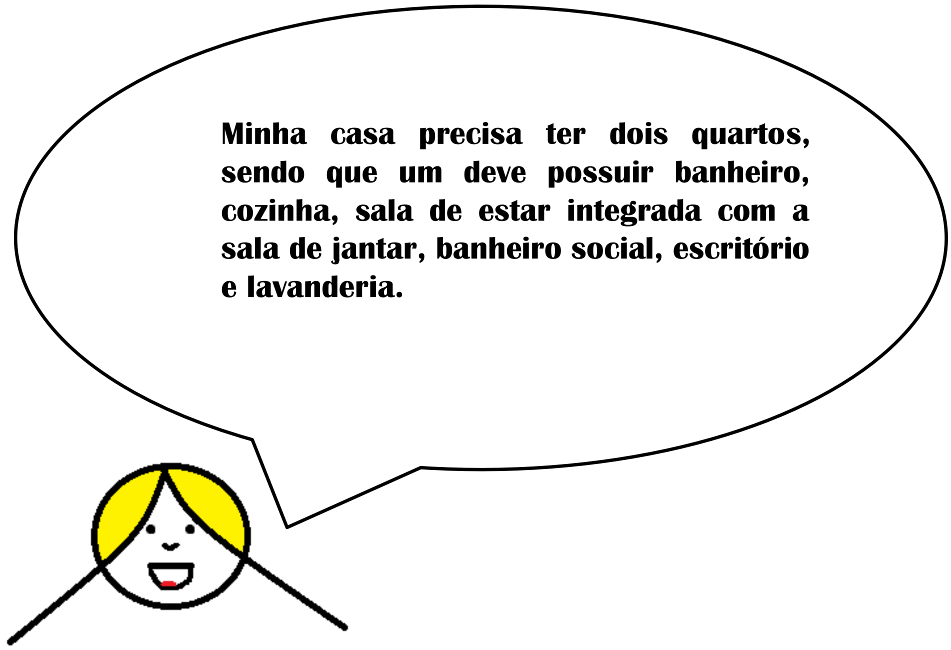
Quando há um projeto de construção residencial, comercial ou com outros fins, elabora-se uma planta baixa, que pode ser chamada também de planta arquitetônica, ou simplesmente de planta. Esta serve para que tenhamos uma ideia de como ficará o projeto final depois de construído, bem como, a sua funcionabilidade, o espaço para a movimentação, se é adequado para o local em que se pretende construir, se o projeto atende o propósito desejado, e para termos uma noção da quantidade de materiais que será utilizado. De acordo com as normas de nosso país, para solicitar um alvará de construção, é necessário apresentar a planta baixa do projeto em questão, portanto, a elaboração de uma planta arquitetônica não é apenas uma opção.

Como construir uma planta baixa?

1. Faça o esboço do projeto.
2. Utilize a malha quadriculada para fazer a vista superior do projeto.
3. Escolha uma escala para respeitar as medidas. Que tal representar 1 cm como se fosse 1m?
4. Pense nos espaços ocupados pelas janelas e portas.

Construindo plantas

Camila e Henrique, já estão noivos há algum tempo, e antes de se casarem querem aproveitar o terreno que compraram para construir uma linda casa, o terreno é plano e possui uma área de 100 m². Camila que é muito detalhista, apresentou suas propostas para o projeto:



1. Utilizando a malha quadriculada e elabore uma planta que busque atender da melhor maneira possível os pedidos de Camila.
2. Descreva o projeto que você elaborou para a Camila e o Henrique, sem esquecer de colocar a área total da construção, e a área ocupada por cada cômodo da casa.
3. Foi possível atender o pedido de Camila? Você mudaria algo nesse projeto proposto por Camila? Explique.

Elaborando um projeto

Chegou o momento de vocês elaborarem o próprio projeto, que pode ser de uma casa, uma escola, uma biblioteca e etc., lembre dos projetos do Oscar Niemeyer, que tal se inspirar nos traços daquele que foi um renomado arquiteto?

1. Explique o seu projeto, e justifique sua escolha.

2. Antes de desenhar a planta, faça um esboço.

3. Qual a área total ocupada pelo projeto? ____

Terceira Etapa

Construindo Maquetes

Agora que já temos uma noção do trabalho de um arquiteto, que tal construirmos uma maquete? Para a elaboração da maquete, seguiremos as seguintes orientações:

1. Escolher o tipo de construção que será feito, se é uma casa, uma escola, ou outra repartição pública ou privada, ou até mesmo tentar reproduzir algum projeto do Oscar Niemeyer. Explique a escolha do seu grupo:

   ____
   ____
   ____

2. Quais os materiais que pretendem utilizar para a construção?

   ____
   ____
   ____

3. Depois da Maquete construída, descreva a sua experiência, quais as formas geométricas espaciais que podemos identificar? Como calcular o espaço ocupado pela maquete? Qual a quantidade de material utilizado? Em algum momento vocês se inspiraram nas formas presentes nos projetos do Oscar Niemeyer?

   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

ATIVIDADE 3:

Identificando e Construindo os Sólidos Geométricos

Objetivo Principal: A partir da construção e observação dos sólidos geométricos, identificar e nomear esses sólidos descrevendo suas características.

Recursos Utilizados: Moldes dos sólidos, cartolina, cola e tesoura.

Série: 2º ano do Ensino Médio

Organização da turma: grupos

Etapas	**Tempo previsto**	**Objetivos Específicos**
Primeira etapa	100 minutos	- Construir os sólidos geométricos a partir dos moldes identificando sua representação plana.
Segunda etapa	100 minutos	- Investigar as características particulares de cada sólido geométrico, e identificando a qual grupo pertencem (corpos redondos, prismas ou pirâmides); - Comparar as formas espaciais dos sólidos construídos, com as formas presentes no cotidiano; - Através da identificação de padrões, conjecturar meios para calcular a área desses sólidos.

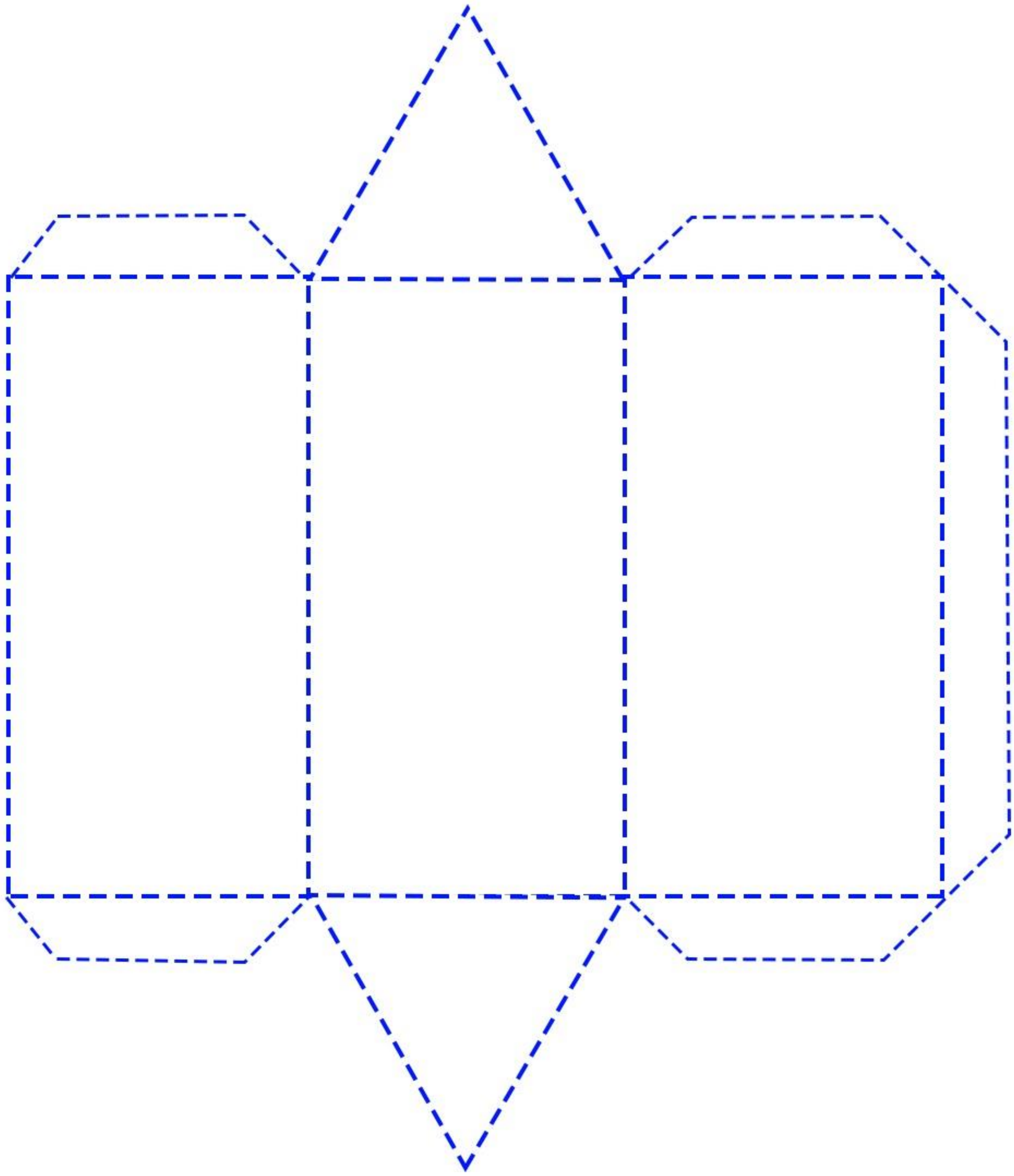
Sugestão de leitura

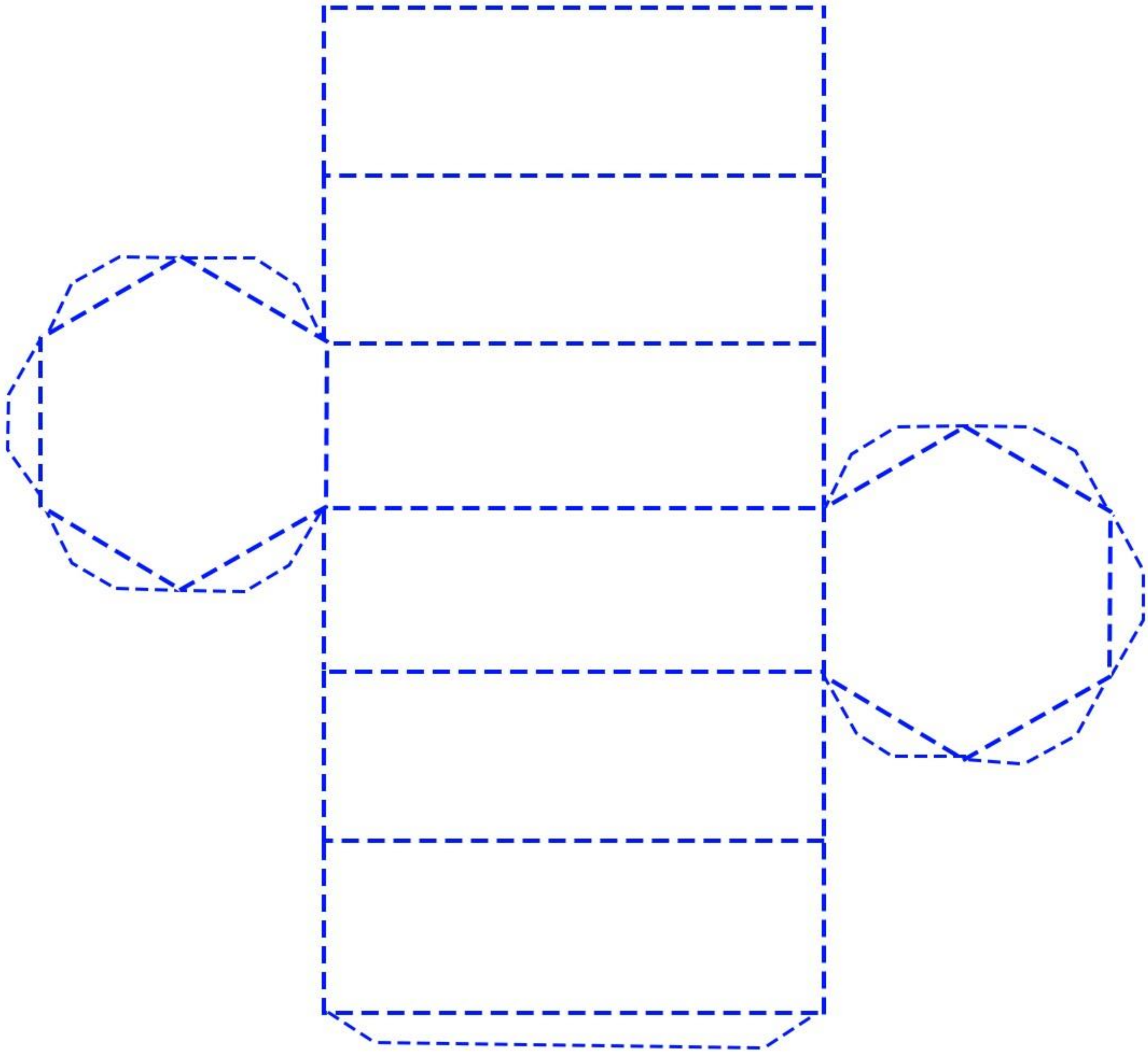
FAINGUELERT, E.K. **Educação matemática:** representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artmed, 1999.

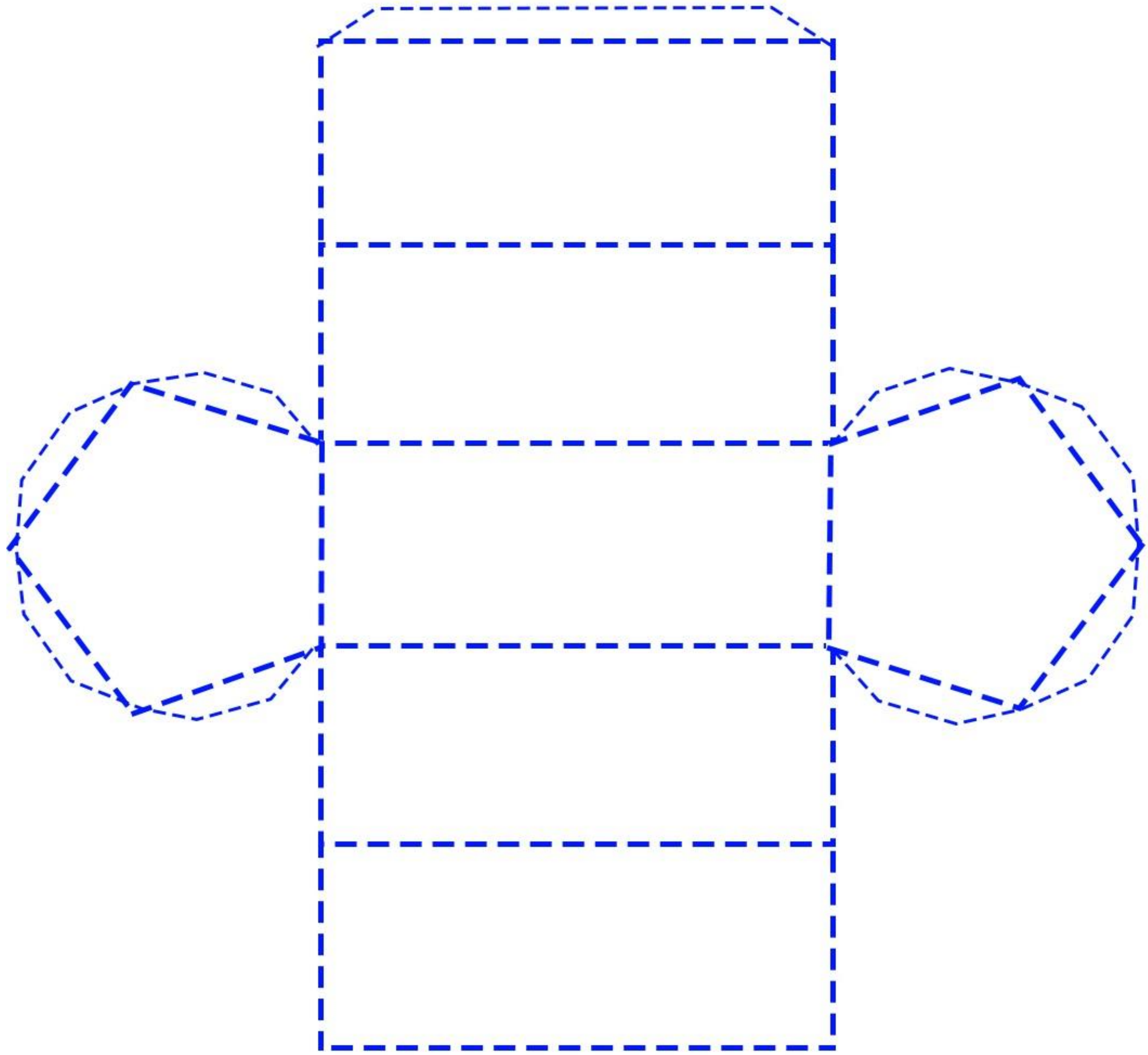
KALEFF, A. M. M. R. **Vendo com as mãos, olhos e mente**: Recursos didáticos para laboratório e museu de educação matemática inclusiva do aluno com deficiência visual. Niterói: CEAD/UFF. 2016.

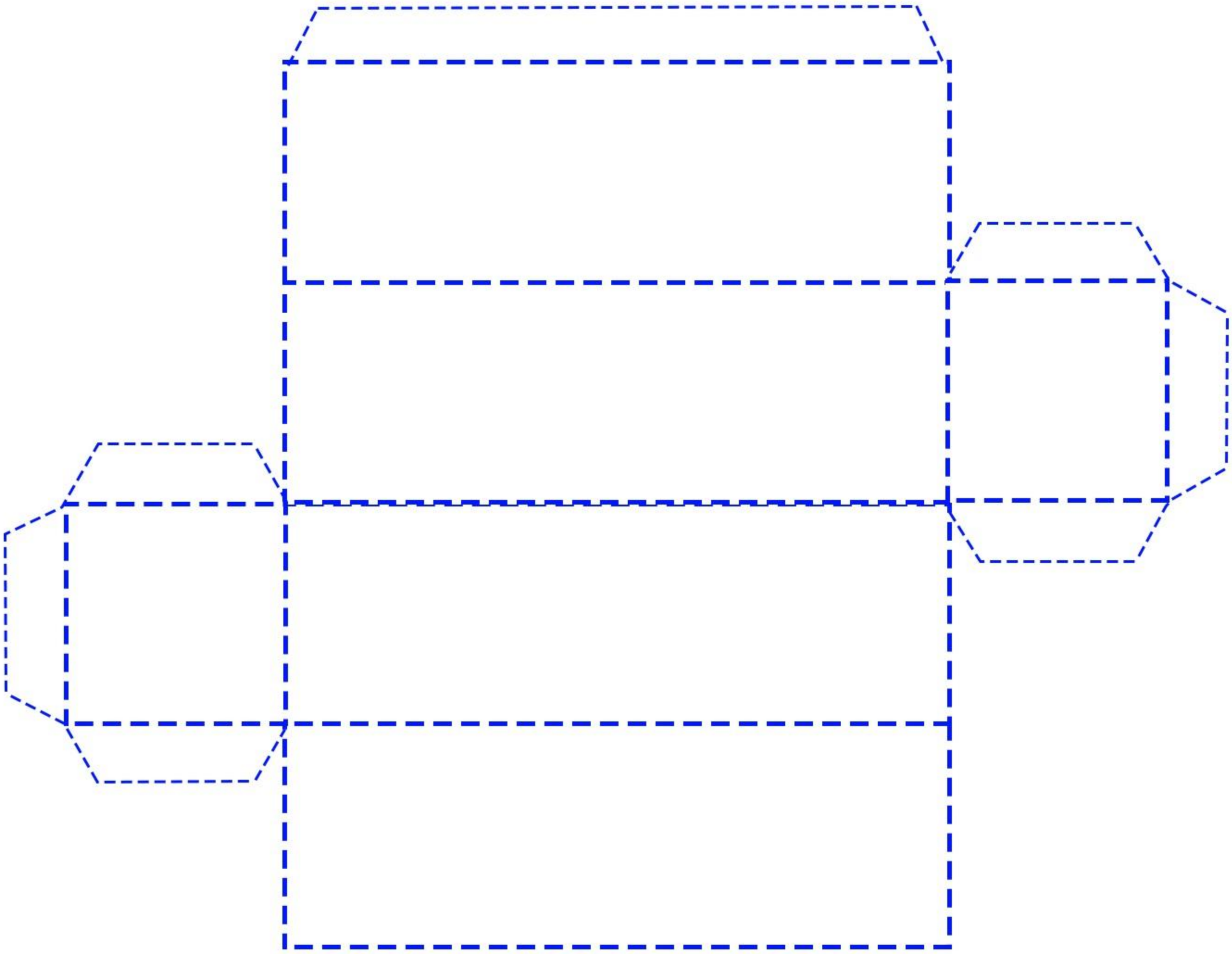
Primeira etapa

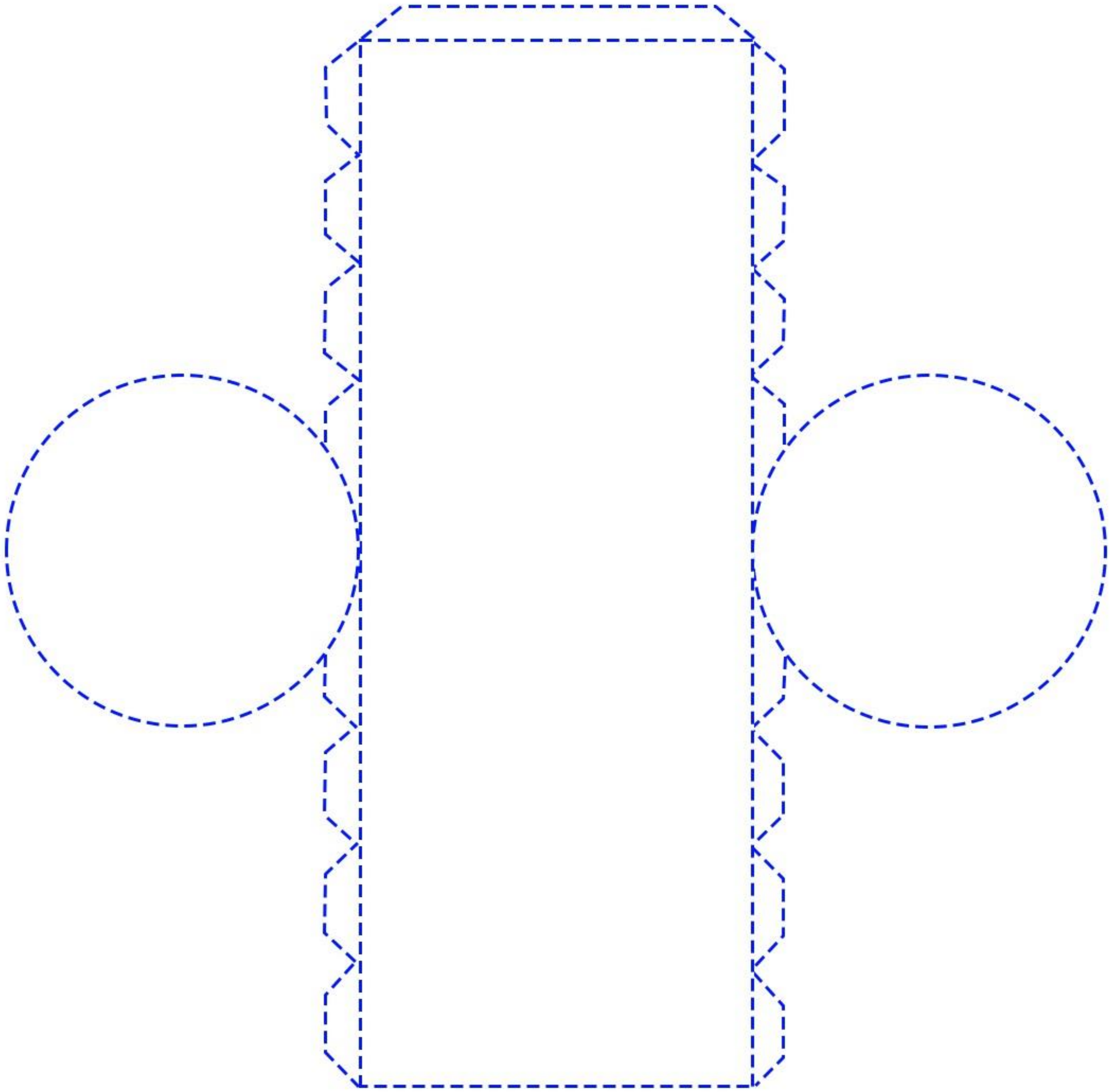
Utilizando os moldes seguintes, cole na cartolina, recorte e monte cada sólido geométrico, com o seu grupo:

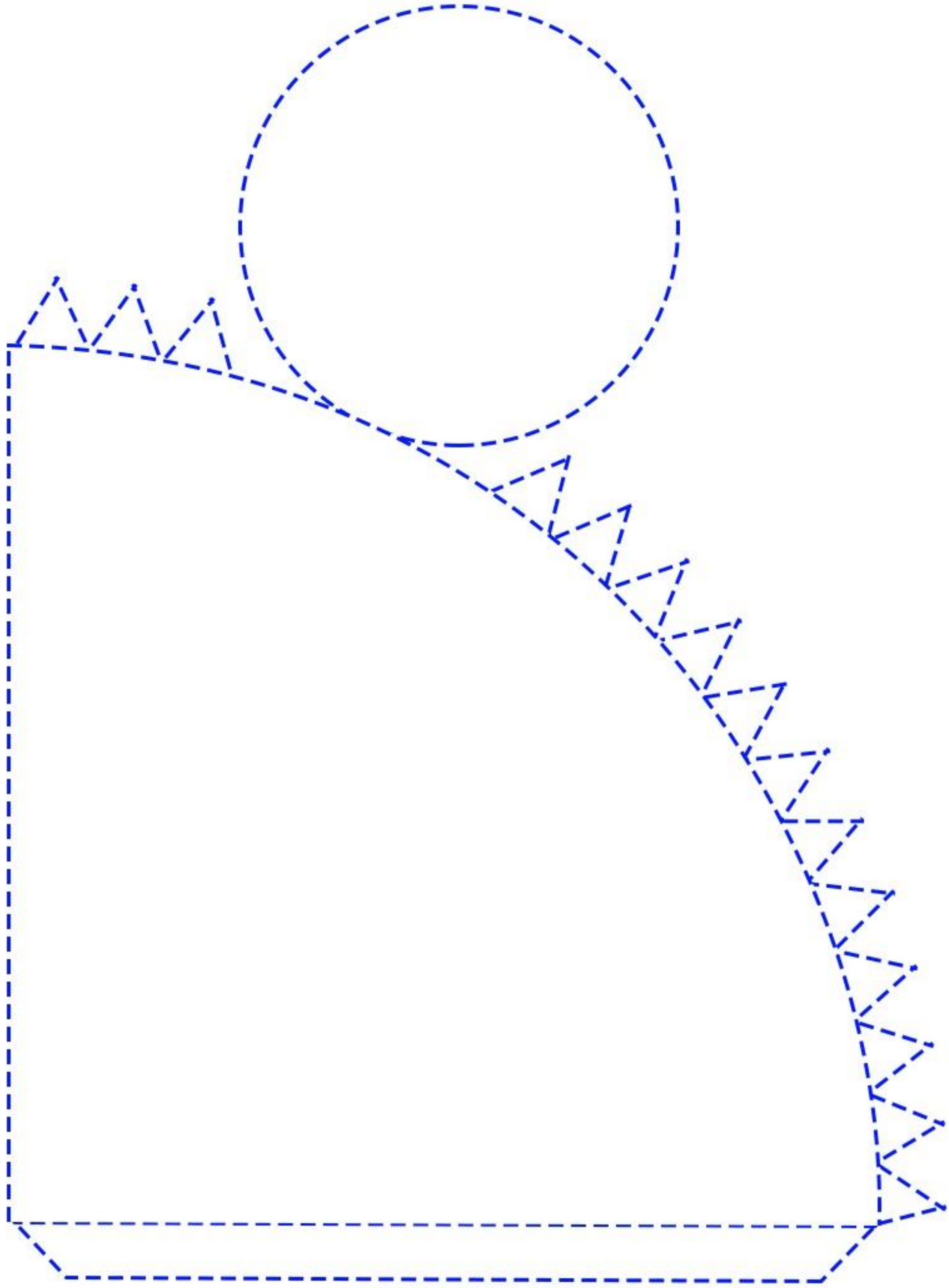


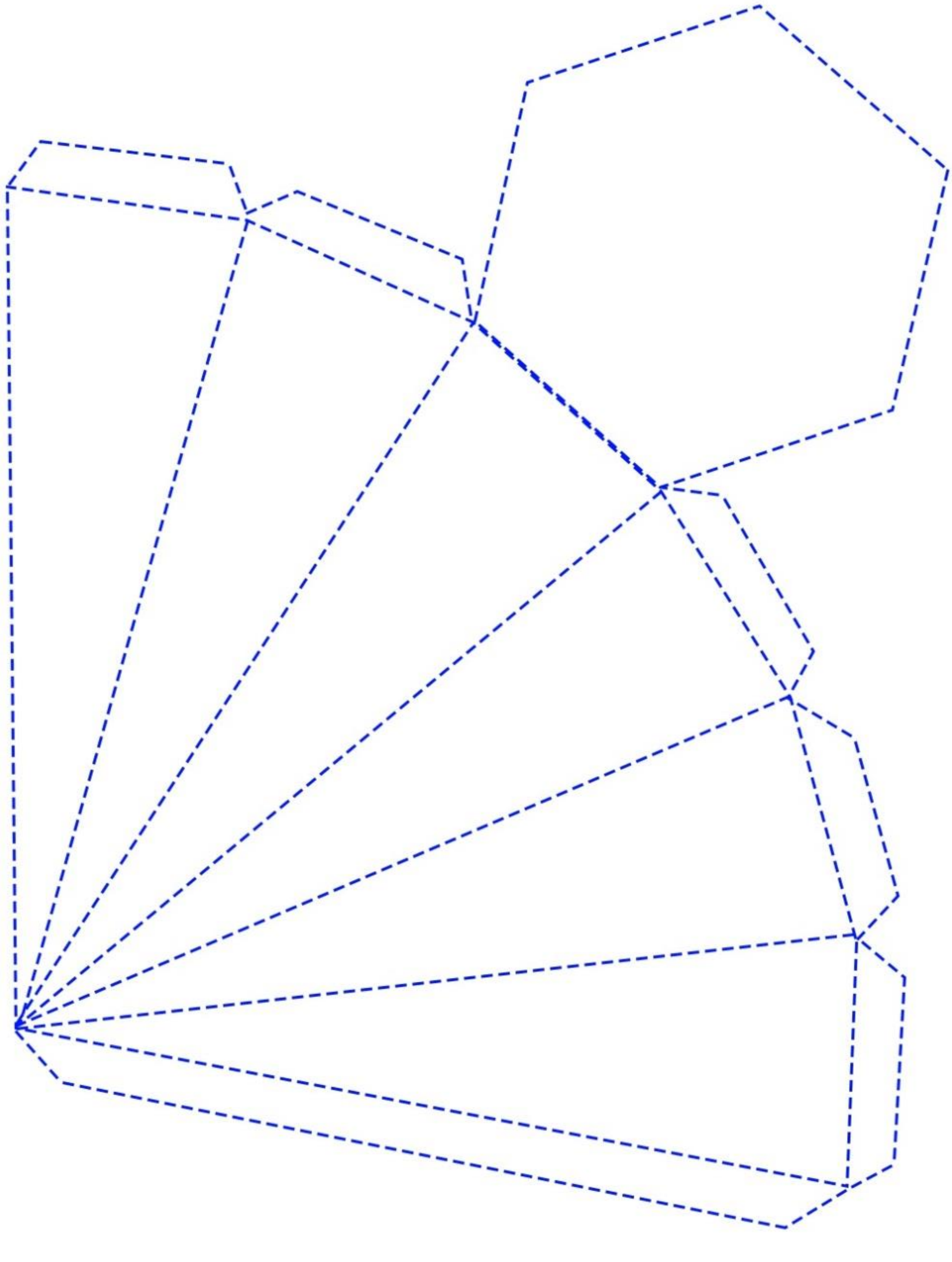


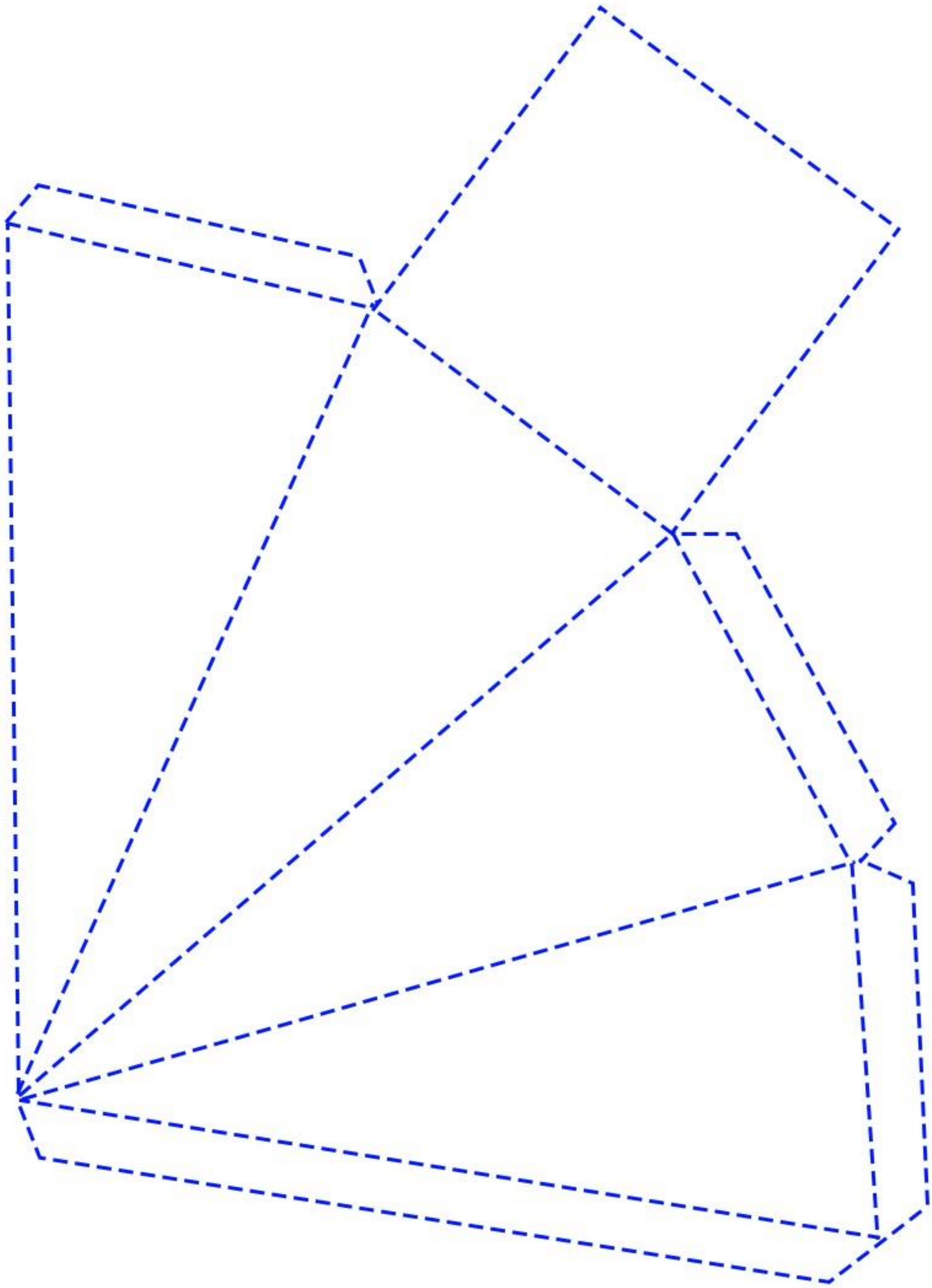


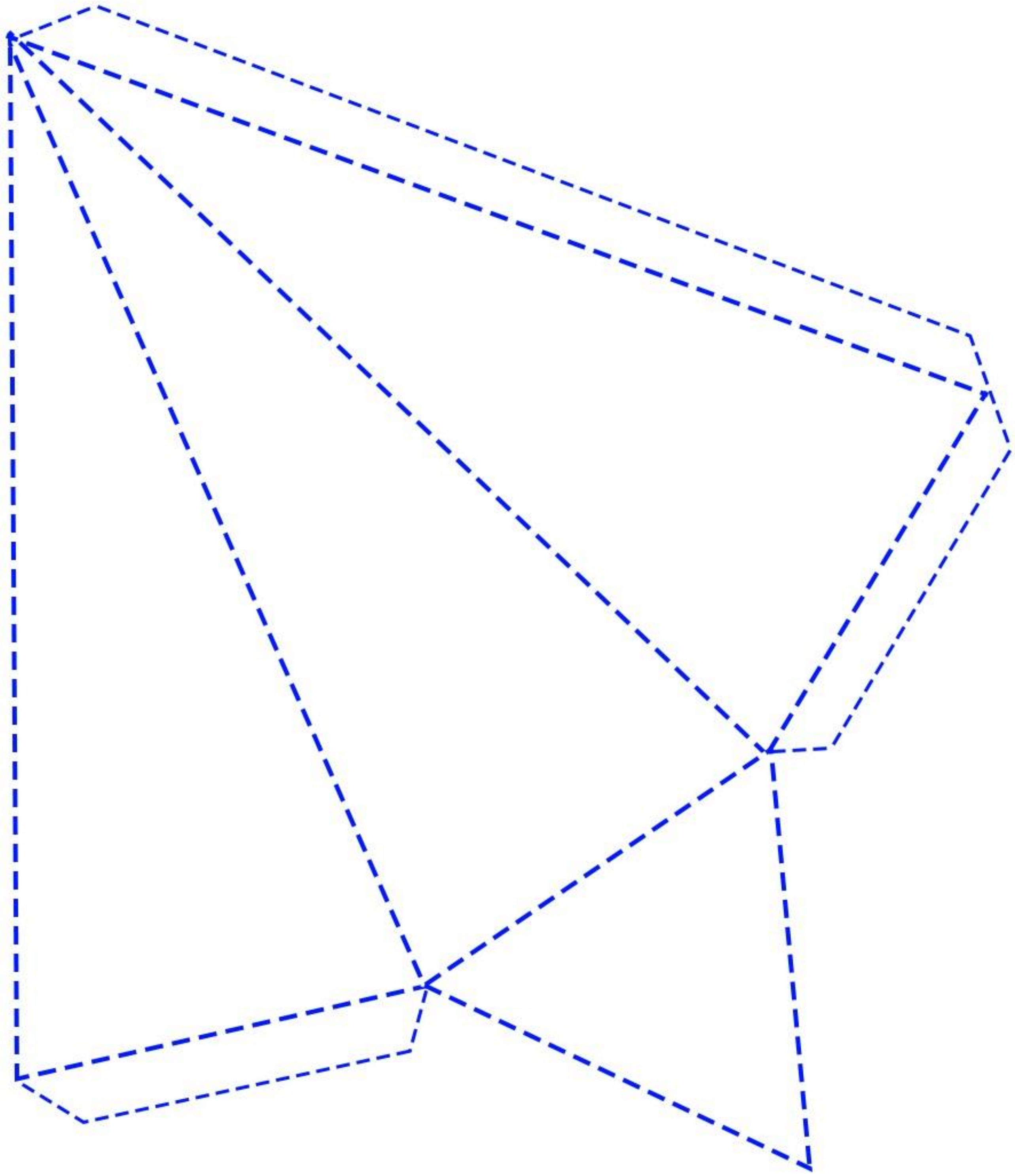












Segunda etapa

1. Agora que os sólidos estão montados, dispondo sobre a mesa, tente separar esses sólidos de acordo com o grupo ao qual pertencem:

Grupo 1	**Grupo 2**	**Grupo 3**
Prismas	Pirâmides	Corpos Redondos

2. Descreva as características em comum entre os sólidos de cada grupo:

Grupos	**Características**
Grupo 1	
Grupo 2	
Grupo 3	

3. Encontramos no cotidiano formas parecidas com as desses sólidos? Em caso afirmativo, exemplifique.

____

____

4. Qual é o formato das faces laterais dos prismas regulares? Como poderíamos calcular a área total desses prismas regulares?

5. Qual é o formato das faces laterais das pirâmides? Como poderíamos calcular a área total de uma pirâmide regular?

6. Um prisma regular de base quadrada, tem cada aresta da base medindo 4 cm, e cada aresta lateral medindo 8 cm.

   - Faça o esboço desse sólido:

   - Como poderíamos calcular a área lateral desse prisma?

   - Qual é a área da base?

- Qual é a área total?

7. Faça o esboço da planificação de uma pirâmide regular quadrangular:

8. Faça o esboço da planificação de um cilindro circular reto:

ATIVIDADE 4:

A Geometria Espacial em um Ambiente Dinâmico

Objetivo Principal: A partir da construção, observação, e manipulação dos sólidos geométricos no GeoGebra[13], identificar, nomear e descrever as características dos prismas, pirâmides e corpos redondos.

Recursos Utilizados: Smartphone com o aplicativo do GeoGebra instalado, notebook, projetor, e folha de atividades.

Série: 2º ano do Ensino Médio

Organização da turma: grupos

Etapas	Tempo previsto	Objetivos Específicos
Primeira etapa	100 minutos	- Como momento de ambientação, permitir que os alunos manuseiem livremente o aplicativo no Smartphone; - Utilizar as ferramentas rápidas para a construção de sólidos, e as ferramentas de medição.
Segunda etapa	100 minutos	- Construir um cubo através da ferramenta rápida e medir suas arestas; - Identificar as diferenças entre um cubo e um paralelepípedo, e construir um prisma de base triangular calculando a área total.
Terceira etapa	100 minutos	- Identificar os corpos redondos como sólidos de revolução; - Identificar as características dos cilindros, cones e esferas;
Quarta etapa	100 minutos	- Identificar as características gerais das pirâmides, identificando os apótemas e as arestas. - Estabelecer a relação do teorema de Pitágoras nas pirâmides.

Sugestão de leitura

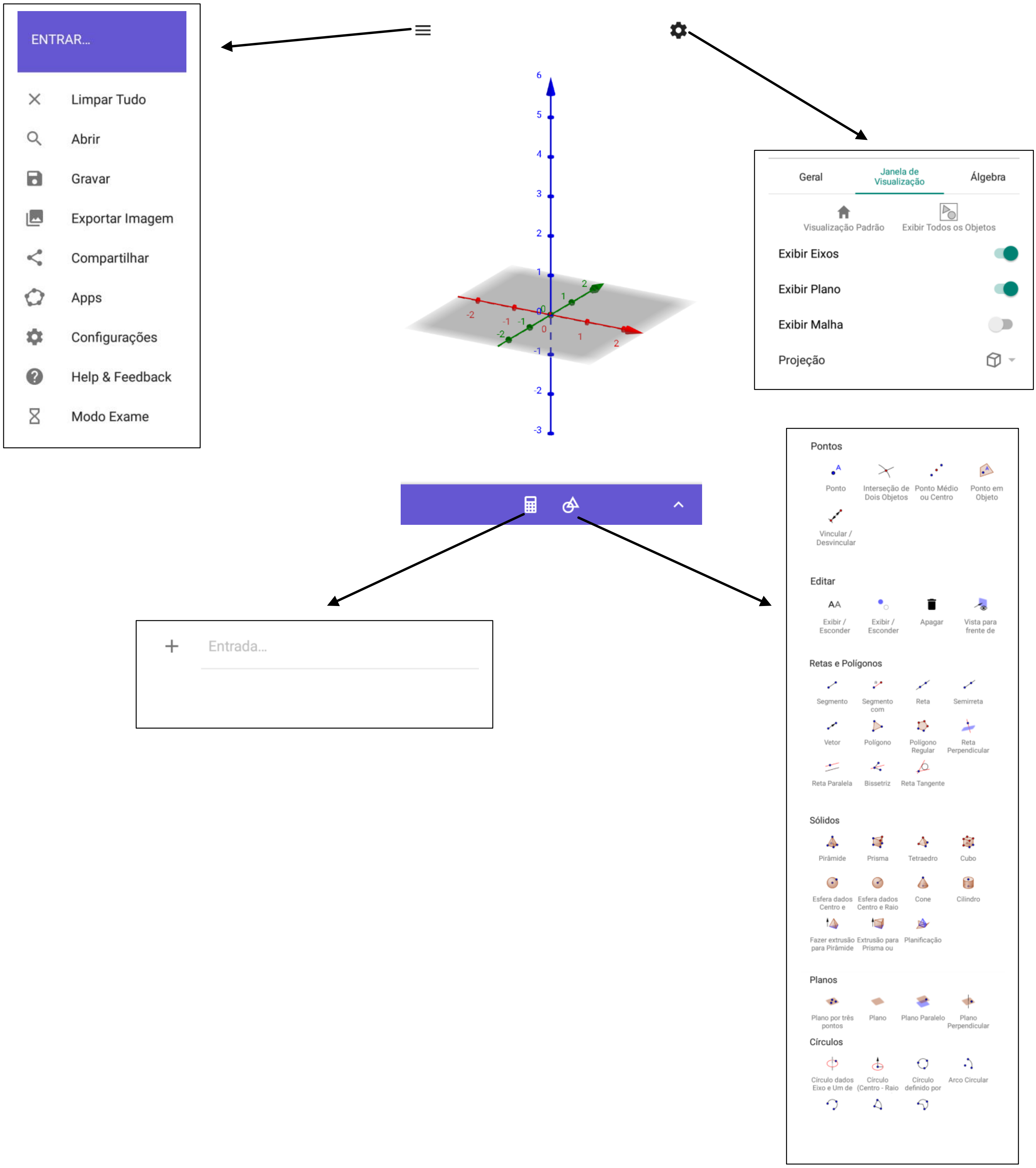
Bairral, M; Assis, A; Silva, B.C. **Mãos em ação em dispositivos touchscreen na educação matemática.** Seropédica, RJ: Edur UFRRJ, 2015.

[13] Disponível em: <https://www.geogebra.org/?lang=pt>. Acesso em: 18 de mar. 2020.

Primeira etapa

Visualizando o ambiente do GeoGebra 3D na versão aplicativo para Smartphone:

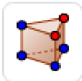
Janela principal de visualização



GEOGEBRA 3D

CONSTRUÍNDO SÓLIDOS GEOMÉTRICOS – PRISMAS

1. Construam um paralelepípedo.

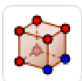
Para realizar essa construção, inicialmente, clique em configurações  e ative a opção “Exibir Malha”, depois clique na seguinte ferramenta  , e marcando o primeiro ponto no encontro dos três eixos construa um retângulo como base do sólido. Em seguida, no eixo azul (eixo z) marque o ponto que determinará a altura do paralelepípedo.

2. Com o paralelepípedo já pronto, na barra de ferramentas, no item medições clique na seguinte ferramenta e depois nas arestas do sólido. Agora temos como saber a medida de cada aresta. Vamos pensar, qual é o formato das faces desse sólido?

Considerando o formato dessas faces, como podemos realizar o cálculo da área total do paralelepípedo?

Quais são as principais características que vocês observaram no paralelepípedo?

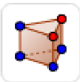
3. Construam um cubo.

O procedimento de construção do cubo é bem simples, basta clicar na seguinte ferramenta  e marcar dois pontos no eixo. Com o cubo constuído, realize a medição das arestas, seguindo o mesmo procedimento feito no item 2. Em relação a medida das arestas, o que puderam observar?

Qual a diferença entre um cubo e um paralelepípedo?

Podemos afirmar que todo cubo é um paralelepípedo? Justifique sua resposta.

Podemos afirmar que todo paralelepípedo é um cubo? Justifique sua resposta.

4. Agora vamos construir um prisma de base triangular, clique em configurações  e ative a opção “Exibir Malha”, depois clique na seguinte ferramenta  , e marcando o primeiro ponto no encontro dos três eixos construa um triângulo como base do sólido. Em seguida, no eixo azul (eixo z) marque o ponto que determinará a altura do prisma triangular.
5. Com o prisma já pronto, na barra de ferramentas, no item medições clique na seguinte ferramenta 

e depois nas arestas do sólido. Considerando o formato das bases, e das faces laterais, calcule a área total do prisma que você construiu.

6. Tente realizar a construção de outros prismas.

Terceira etapa

Nessa etapa, pode-se levar a apresentação já pronta, de modo que os alunos possam visualizar a formação dos corpos redondos, a partir da rotação de uma figura plana em torno de um eixo. Abaixo, temos o link de um tutorial do youtube para a elaboração da apresentação:

Disponível em:<https://www.youtube.com/watch?v=Apd-xOo-jQs>.Acesso em: 18 mar. 2020.

Organizando a Apresentação

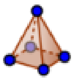
1º Passo	Apresentação do cone como sólido de revolução.	-Visualização da formação do cone através da rotação do triângulo em torno do eixo; - Identificando os segmentos que formam a altura, o raio e a geratriz.
2º Passo	Apresentação do cilindro como sólido de revolução.	- Visualização da formação do cilindro através da rotação do retângulo em torno do eixo; -Identificando os segmentos que formam a altura, o raio e a geratriz.
3º Passo	Apresentação da esfera como sólido de revolução.	- Visualização da formação da esfera como resultado da rotação de uma semicircunferência (ou circunferência) em torno do eixo. - Identificando os raios e o centro da esfera.
4º Passo	Formando padrões.	Conjecturando meios para calcular a área e o volume dos corpos redondos.

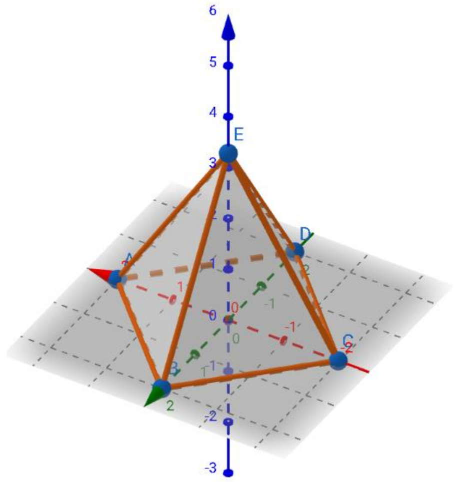
Quarta etapa

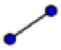
GEOGEBRA 3D 

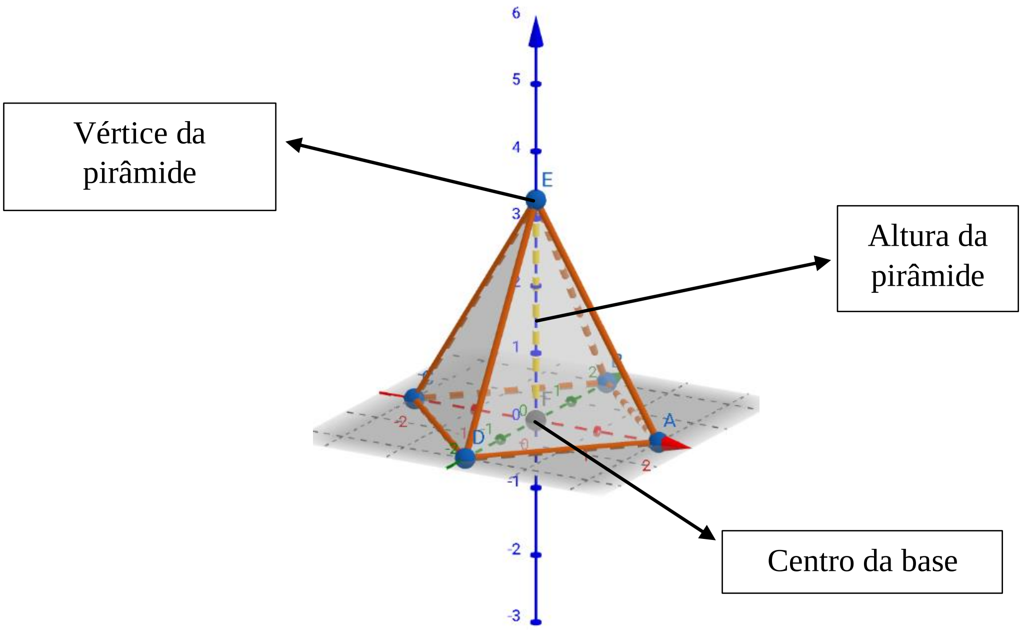
CONSTRUÍNDO SÓLIDOS GEOMÉTRICOS – PIRÂMIDES

1.Construam uma pirâmide quadrangular

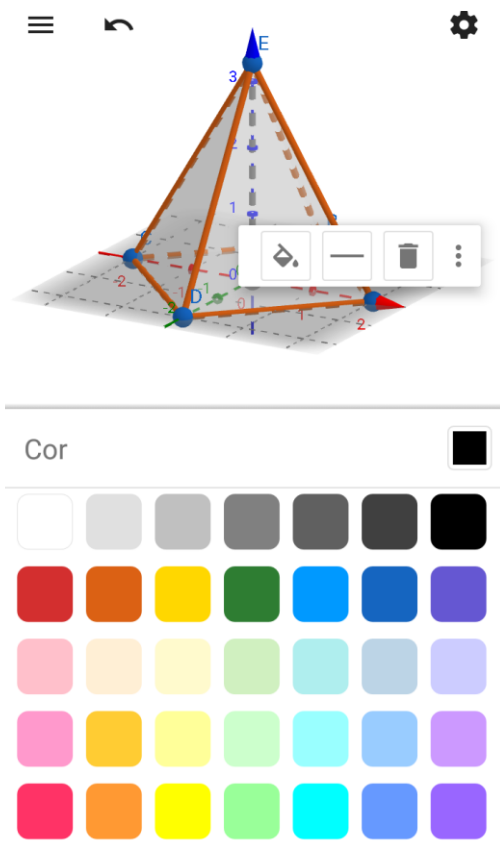
Para realizar essa construção, inicialmente, clique na seguinte ferramenta  , e marque quatro pontos formando um quadrado como base do sólido. Em seguida, arraste o quinto ponto marcando a altura no eixo vertical.



2.Com a ferramenta  , trace a altura da pirâmide, dando um toque no centro da base até o vértice da pirâmide:

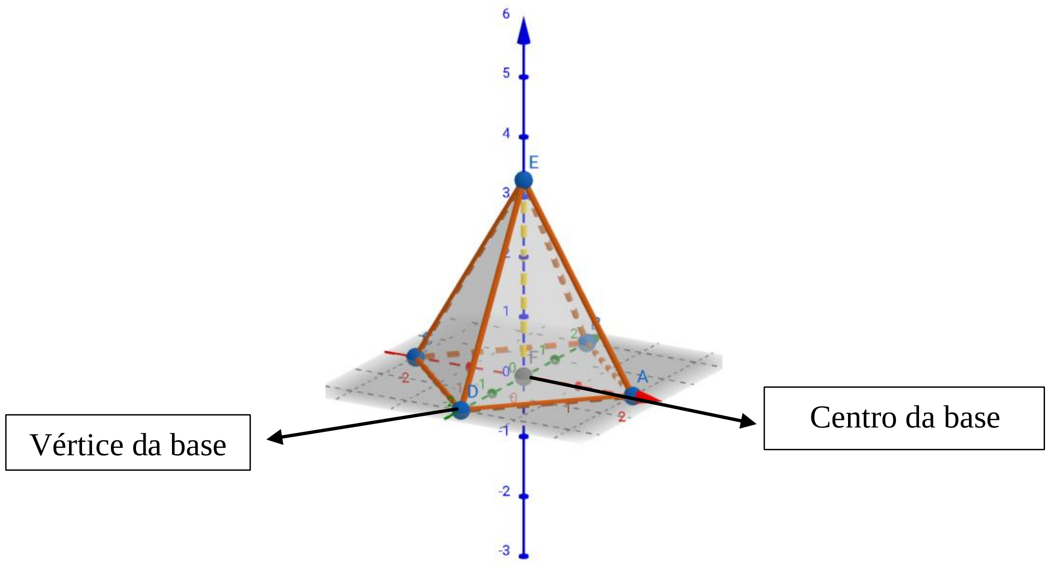


Podemos mudar a cor das faces, arestas, segmentos e pontos que compõem o sólido, basta selecionar o item mover  ,clicar na parte em que deseja mudar a cor, na barra de ferramenta que aparecer, deve-se clicar no item  , e na opção de cor desejada.

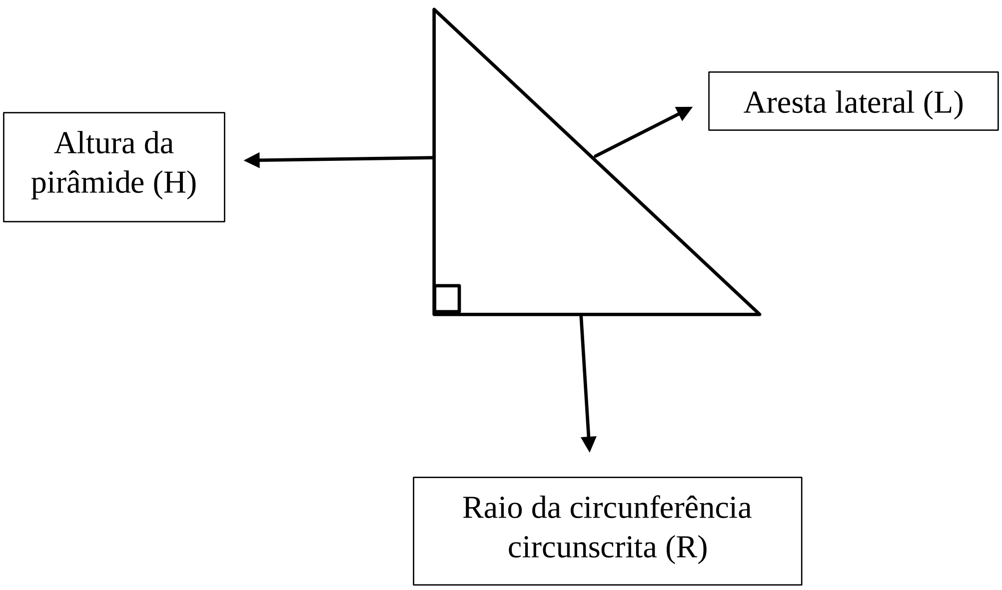


Altere a cor do segmento que representa a altura da pirâmide, coloque a cor amarela.

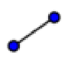
3. Agora vamos traçar um segmento de reta que vai do centro da base até um dos vértices que pertencem ao polígono da base:



Esse segmento é o <u>raio da circunferência circunscrita ao polígono da base</u>. Note, que unindo esse segmento com a aresta lateral, e a altura da pirâmide, formamos um triângulo retângulo:

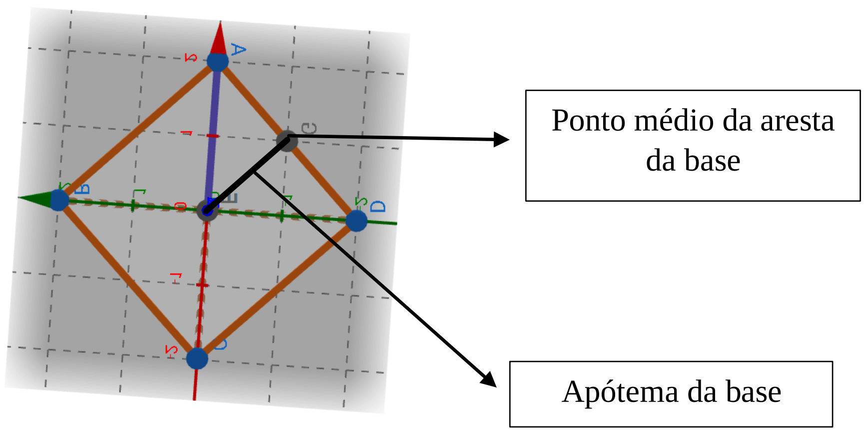


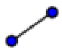
Logo, pelo teoremas de Pitágoras, temos: $L^2 = H^2 + R^2$

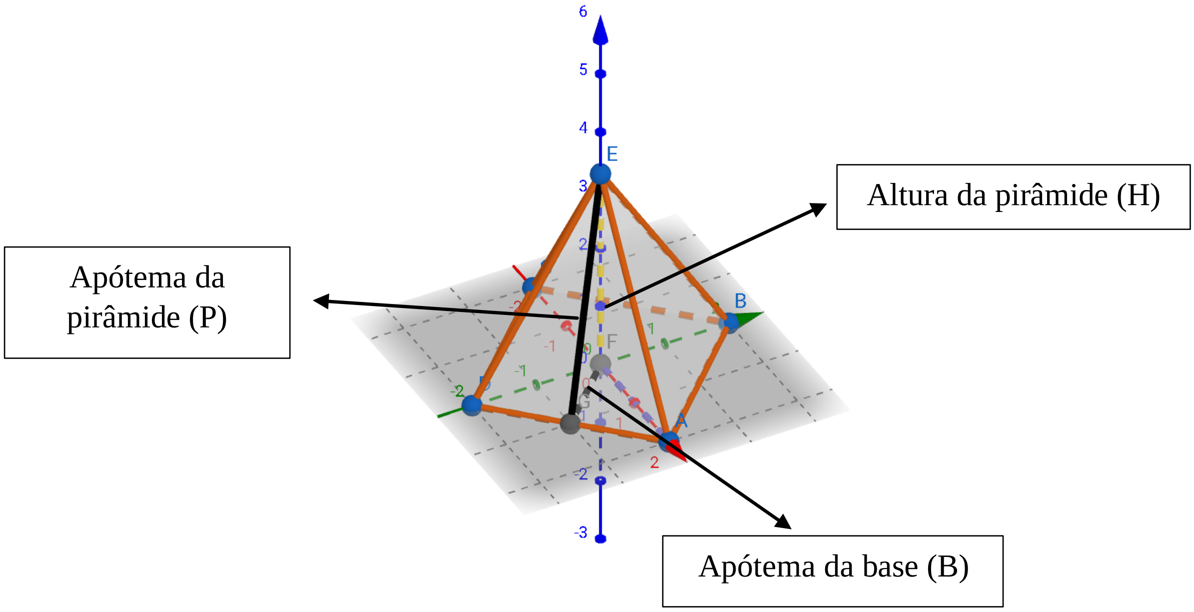
4. Utilizando a ferramenta  trace um segmento de reta que vai do centro da base da pirâmide até a metade da aresta da base, para isso, antes precisará através da ferramenta

 determinar o ponto médio da aresta da base, basta selecionar essa ferramenta e clicar de um vértice ao outro. Esse segmento recebe o nome de <u>apótema da base</u>.

<u>Vista inferior</u>

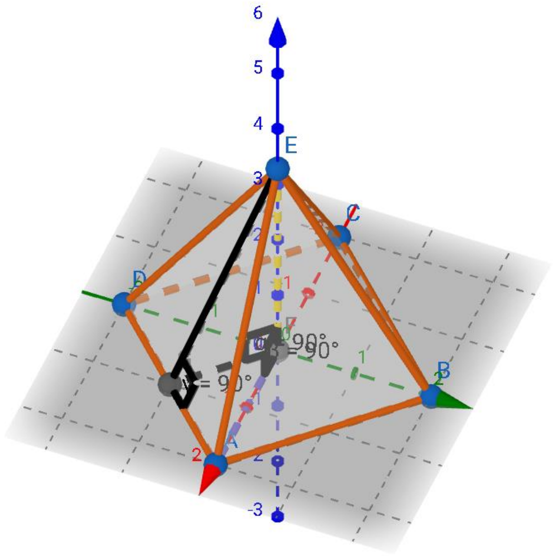


Agora do ponto médio da aresta da base até o vértice da pirâmide, utilizando a ferramenta  trace um outro segmento. Esse segmento recebe o nome de apótema da pirâmide:



Observe que unindo o apótema da pirâmide (P), com o apótema da base (B), e a altura da pirâmide (H), formamos também um triângulo retângulo, portanto: $P^2 = B^2 + H^2$.

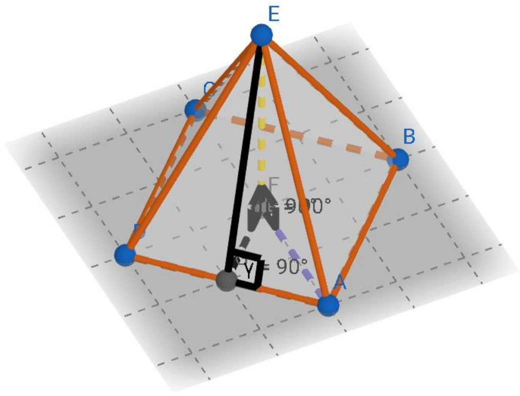
Podemos identificar ainda outros triângulos retângulos na pirâmide regular, e com a ferramenta  identificar a medida dos ângulos formados, observe o exemplo a seguir:



Identifique outro triângulo retângulo na pirâmide, faça o esboço e represente utilizando o Teorema de Pitágoras:

5. Para visualizar melhor a pirâmide, bem como, seus elementos, vamos retirar os eixos, é só clicar no íncone  e na janela de visualização desmarcar a opção “Exibir Eixos”:

Agora pode-se clicar na ferramenta  e mover, ampliar, e rotacionar a pirâmide, visualizando com mais clareza cada elemento:



6. Com a ferramenta  vamos descobrir as medidas de todos o segmentos e arestas da pirâmide, para posteriormente calcular a área total da pirâmide.

7. Qual a área total da pirâmide que você construiu? Explique os procedimentos adotados para encontrar o resultado:

____

____

____

____

____