

UFRRJ

**INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO-SENSU*
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA**

DISSERTAÇÃO

**Uso da Torre de Hanói em uma dinâmica remota incluindo
dispositivos móveis**

Larissa de Almeida Reis

2023



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO –
UFRRJ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO *STRICTO-SENSU*
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA**

**USO DA TORRE DE HANÓI EM UMA DINÂMICA REMOTA
INCLUINDO DISPOSITIVOS MÓVEIS**

LARISSA DE ALMEIDA REIS

Sob a orientação do Professor Doutor
Marcelo Almeida Bairral

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção do grau de **Mestre em Educação em Ciências e Matemática** no Curso de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática.

Seropédica, RJ
Fevereiro de 2023

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

d375u de Almeida Reis, Larissa , 1997-
Uso da Torre de Hanói em uma Dinâmica Remota
Incluindo Dispositivos Móveis / Larissa de Almeida
Reis. - Volta Redonda, 2023.
99 f.: il.

Orientador: Marcelo Almeida Bairral .
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural
do Rio de Janeiro, Programa de Pós-graduação em Educação
De Ciências e Matemática , 2023.

1. Ensino de matemática com Torre de Hanói e
tecnologia . 2. Torre de Hanói . 3. Dispositivos Móveis
com toque em tela. I. Almeida Bairral , Marcelo ,
1969-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio
de Janeiro. Programa de Pós-graduação em Educação De
Ciências e Matemática III. Título.

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA**

LARISSA DE ALMEIDA REIS

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Ciências e matemática**, no Curso de Pós-Graduação em Ciências e Matemática e área de Concentração em ensino.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 07/03/2023

Marcelo Almeida Bairral Dr. PPGEducIMAT/UFRRJ
(Orientador)

Rony Cláudio de Oliveira Freitas Dr. EDUCIMAT/IFES

Marcelo de Oliveira Dias Dr. IM/PPGEducIMAT/UFRRJ

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por sempre guiar e iluminar meus caminhos e me ajudar em todos os momentos.

Aos meus pais, minha avó e minha irmã por todo o apoio, oração e torcida para que eu completasse esse ciclo. Entendo que minha família é a base que me sustenta em meus desafios.

Agradeço aos meus amigos pessoais e aos colegas de mestrado do PPGEducIMAT que de alguma forma me auxiliaram ou me aconselharam e torceram para que cada etapa desse projeto fosse concluída, além dos ensinamentos e do suporte ao longo do mestrado. Em particular, um agradecimento ao meu melhor amigo pelo apoio, conversas e grande incentivo de me fazer continuar firme rumo à conclusão da dissertação.

A meu orientador Marcelo Bairral por sempre me ouvir e por passar ótimos ensinamentos, pelas conversas sobre o tema desta dissertação e as contribuições para o ensino e aprendizagem em matemática. Sua sabedoria foi fundamental desde o início até a conclusão deste trabalho.

Agradeço aos meus colegas de profissão por me inspirarem no exercício da licenciatura e pelo incentivo para seguir esse caminho. Também agradeço sua compreensão e cumplicidade.

Por fim, a todos os meus professores do curso superior e do mestrado profissional; sempre absorvo conhecimentos e práticas de cada um para ser uma profissional melhor.

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. “This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – finance code 001.”

RESUMO

REIS, Larissa de Almeida. **Uso da Torre de Hanói em uma dinâmica remota incluindo dispositivos móveis**. 2023. 99 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2023.

O presente trabalho tem por objetivo analisar possibilidades de uso da Torre de Hanói em ambiente de ensino e aprendizagem remoto. Para tanto, planejou-se um desenho didático que contém um ambiente de aulas desenvolvidas com atividades variadas de exploração de diferentes aplicativos de Torre de Hanói, para analisar os dados obtidos a partir dessa exploração. A metodologia consiste em uma intervenção pedagógica de caráter exploratório com tecnologias digitais. O trabalho de campo foi realizado em 2021 em uma disciplina (Ensino de Matemática II) da licenciatura em matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Foram planejados e implementados sete encontros na plataforma Google Meet, com objetivo de explorar a Torre de Hanói em aplicativos com toques em tela para que os futuros professores compreendessem a diversidade de abordagem desse recurso e fossem inspirados a utilizá-lo em sua prática. Os dados foram produzidos a partir de respostas escritas, diários, captura de movimentos no aplicativo Screen Recorder e outros aplicativos de gravação de tela, apostilas e outros recursos para desenvolver as atividades. Através dessa experiência foi possível constatar que o uso da Torre de Hanói digital no ambiente remoto é exequível e pode ser potente, visto que os licenciandos puderam, colaborativamente, construir conhecimentos ao longo dos encontros.

Palavras-Chave: Torre de Hanói. Dispositivos móveis. Ensino remoto. Tecnologia.

ABSTRACT

REIS, Larissa de Almeida. Using the Tower of Hanoi in a remote dynamic including mobile devices. 2023. 99p. Thesis (Professional Master's Degree in Science and Mathematics Education). Institute of Education, Federal Rural University of Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2023.

This dissertation aims to analyze possibilities of using the Tower of Hanoi in a remote teaching and learning environment. To this end, was planned a didactic design containing a classroom environment developed with exploration activities of different Tower of Hanoi applications, to analyze the data obtained from this exploration. The methodology consists of an exploratory pedagogical intervention with digital technologies. Fieldwork was carried out in 2021 in a discipline (Mathematics Teaching II) of the degree in mathematics at the Federal Rural University of Rio de Janeiro. Seven meetings were planned and implemented on the Google Meet platform, with the aim of exploring the Tower of Hanoi in applications with screen touches so that future teachers would understand the diversity of approaches to this resource and be inspired to use it in their practice. Data were produced from written responses, diaries, motion capture in the screen recorder application, and other screen recording applications, handouts and other resources to develop the activities. Through this experience, it was possible to verify that the use of the digital Tower of Hanoi in the remote environment is feasible and can be powerful, since the graduates were able to build knowledge collaboratively throughout the meetings.

Keywords: Tower of Hanoi. Mobile devices. Remote learning. Technology.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Busca inicial no CTDC	15
Figura 2 – Busca com nova palavra-chave no CTDC	15
Figura 3 – Resultado final das buscas	16
Figura 4 – Imagem do Google Meet.....	35
Figura 5 – Aparência de uma tela sendo gravada.....	37
Figura 6 – Captura de tela do grupo de Facebook.....	45
Figura 7 – Captura de tela da turma no Google Meet	45
Figura 8 – Registro no Facebook da atividade semanal	53
Figura 9 – Registro 2 da atividade semanal.....	53
Figura 10 – Onde conheceu a Torre de Hanói?	62
Figura 11 – Descobertas sobre o número mínimo de movimentos da TH	66
Figura 12 – <i>Screenshot</i> de vídeo com TH	69
Figura 13 – <i>Screenshot</i> de aplicativo TH	69
Figura 14 – TH sem hastes ou pinos	70
Figura 15 – Recebimento da atividade da Aula 5.....	71
Figura 16 – Registro do aluno perante atividade da Aula 5	72
Figura 17 – Registro de uma dupla sobre a atividade da Aula 5	73

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Listagem das dissertações localizadas (Continua).....	16
Quadro 2 – Quantitativo das dissertações apresentadas quanto ao seu foco	18
Quadro 3 – Conteúdos explorados.....	19
Quadro 4 – Descrição quanto às atividades (Continua)	20
Quadro 5 – Aplicações práticas observadas	23
Quadro 6 – Recursos tecnológicos	38
Quadro 7 – Encontros e atividades com Torre de Hanói.....	41
Quadro 8 – Questionário Torre de Hanói	42
Quadro 9 – Notas dos graduandos sobre atividade do Facebook (Continua).....	50
Quadro 10 – Organização da análise (Continua).....	60

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	11
JUSTIFICATIVA	13
1 MAPEAMENTO SOBRE A TORRE DE HANÓI.....	14
1.1 Levantamento de Dissertações de Mestrado Profissional sobre Torre de Hanói	14
1.2 Estratégias de Busca	14
1.3 Material Capturado sobre TH dos Mestrados Profissionais no CTDC	16
1.4 Dissertações sobre a Torre de Hanói Apresentada quanto a seu Foco	18
1.5 Identificação das Dissertações quanto ao Conteúdo.....	19
1.6 Abordagem das Dissertações quanto a Atividades, Exemplos ou Propostas de Sugestão e Apresentação de Aplicações Práticas	20
1.7 Apresentação das Dissertações quanto a Possuir Aplicações Práticas em Turma	23
1.8 Síntese.....	24
2 METODOLOGIA.....	25
2.1 Abordagem da Pesquisa.....	25
2.2 Pesquisa de Intervenção Pedagógica de Caráter de Exploração Tecnológica.....	25
2.3 Organização do Desenho Didático como Produto Educacional	27
3 ABORDAGEM DIDÁTICO-PEDAGÓGICA DA TORRE DE HANÓI.....	29
3.1 Um Pouco sobre a Torre de Hanói	29
3.2 O Desenvolvimento do Pensamento Matemático com a Torre de Hanói	31
3.3 Os DMcTT e o Facebook nos Processos de Ensino e Aprendizagem Matemática ...	33
3.4 Recursos Tecnológicos em Dinâmicas <i>on-line</i>	38
4 OS RESULTADOS DA PESQUISA DE CAMPO SOBRE O DESENHO DIDÁTICO.....	40
4.1 Organização	40
4.2 Procedimentos	42
4.2.1 Encontro 1: descobrindo a TH digital.....	42
4.2.2 Encontro 2: destacando vantagens e desvantagens da TH em aplicativos	43
4.2.3 Encontro 3: surgimento dos primeiros questionamentos.....	43
4.2.4 Encontro 4: o uso positivo da ferramenta de gravação de tela	43
4.2.5 Encontro 5: a descoberta do pensamento recursivo.....	44
4.2.6 Encontro 6: avaliação do aprendizado resultante dessa experiência	44
4.3 Diários de Campo da Pesquisa	44
4.3.1 Relatos sobre a Turma IE-395	45
4.3.2 Diário de campo.....	46
5 ANÁLISE DO DESENHO DIDÁTICO	60
5.1 Orientação das Análises.....	60
5.2 Amplificações das Análises.....	61
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	76
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	78
APÊNDICES.....	83
Apêndice A – Produto Educacional (Desenho didático com uso de dispositivos de toque em tela e ambiente virtual).....	83
1. Procedimentos	84
1.1 Encontro 1: descobrindo a TH digital.....	84
1.2 Encontro 2: destacando vantagens e desvantagens da TH em aplicativos	85
1.3 Encontro 3: surgimento dos primeiros questionamentos.....	86
1.4 Encontro 4: o uso positivo da ferramenta de gravação de tela	87

1.5 Encontro 5: a descoberta do pensamento recursivo.....	87
1.6 Encontro 6: avaliação do aprendizado resultante dessa experiência	88
Apêndice B – Questionário sobre Torre de Hanói.....	89
Apêndice C - Prova de Ensino de Matemática II aplicada	91
ANEXOS	93
Anexo A - registros retirados do artigo de Bairral (2001) analisada no Encontro 5	93
Anexo B – Parecer da COMEP da UFRRJ sobre o Projeto de Pesquisa.....	99

INTRODUÇÃO

O uso recorrente de recursos manipulativos para o ensino de matemática, como jogos, materiais manipulativos didáticos, ambientes de aprendizagem, entre outros, é amplamente discutido por pesquisadores de ensino e aprendizagem dessa disciplina, em uma perspectiva de anunciar suas contribuições para processos cognitivos de aprendizagem.

Nesta dissertação dedicamo-nos ao aprendizado com a Torre de Hanói (TH) e às contribuições desse recurso em um ambiente de ensino remoto que inclui seu uso em dispositivos móveis. A TH será contemplada na forma de aplicativo para uso em dispositivos móveis com toques em tela (DMcTT). A análise será pautada em questionamentos que indiquem potencialidades, dificuldades e desafios da ambiência *on-line* construída frente a demandas da pandemia da COVID-19. Para que pudéssemos compreender os ganhos da pesquisa com TH no ensino de matemática e nos inspirar com sua relevância, utilizamos o Catálogo de Teses e Dissertações da Capes (CTDC) a fim de buscar dissertações de mestrado profissional relacionadas com esta investigação. A busca será mostrada no Capítulo 1, através de um mapeamento com critérios detalhados de análise dos textos selecionados.

A partir dessas considerações a pesquisa tem a seguinte questão norteadora: Que contribuições a TH digital apresenta com seu uso em dispositivos de toque em tela para o ensino de matemática em ambiente remoto? Para isso, foram delimitados os seguintes objetivos específicos: i) Mapear no CTDC dissertações de mestrado profissional que utilizam a TH como um de seus objetos de estudo ou como seu objeto principal; ii) Refletir sobre a relevância de tecnologias digitais e o uso pedagógico da TH para o ensino de matemática; iii) Planejar e realizar um desenho didático de caráter tecnológico, com a metodologia de intervenção pedagógica em turma de Ensino Superior centrada na TH digital em ambiente *on-line*; e iv) Analisar esse desenho didático que constitui o nosso produto educacional, reproduzido no Apêndice A deste trabalho. Esta investigação integra um projeto mais amplo voltado ao uso de dispositivos móveis em educação matemática¹.

Em uma perspectiva tecnológica existem diversos autores que defendem a manipulação através do toque em tela com o uso de dispositivos móveis como ferramenta de ensino. Alguns desses pesquisadores, como Bairral (2017), Assis (2020) e Mercado (2009), aparecem com mais destaque nesta pesquisa no Capítulo 3, que expressa um delineamento do uso de DMC TT e de ambientes remotos de aprendizagem para compor o referencial teórico sobre o uso de dispositivos móveis e ambientes tecnológicos de aprendizagem.

No segundo capítulo apresentamos a metodologia e no terceiro capítulo, a estrutura da nossa pesquisa de campo com embasamentos teóricos sobre o uso pedagógico da TH bem como as potencialidades do uso de tecnologias no ensino de matemática. Foi possível perceber a relevância de utilizar no ensino recursos como jogos, em particular a TH digital, e a importância do uso de diferentes recursos tecnológicos no ensino da matemática.

No Capítulo 4 mostramos a aplicação do desenho didático de intervenção pedagógica, referente ao trabalho de campo. Para tanto, descrevemos nesse capítulo o planejamento de cada aula, com os recursos tecnológicos utilizados e o objetivo de cada

¹ Projeto Construindo e analisando práticas educativas em educação matemática com dispositivos touchscreen (financiado pelo CNPq e aprovado no comitê de ética da UFRRJ com o parecer 2308.003202/2015-21, conforme Anexo B).

atividade presente. Após isso, complementamos o capítulo com o diário de campo de toda a intervenção pedagógica.

Finalizamos a dissertação com o Capítulo 5, no qual analisamos o produto educacional desenvolvido nesta pesquisa, exibido no Apêndice A. O produto é um desenho didático em um ambiente de aulas remotas com uma sequência de encontros pedagógicos para licenciandos em matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), realizado por meio de uma intervenção pedagógica que envolve conhecer e explorar a TH na condição de futuros professores, com uso de ambiente remoto de aprendizagem e DMcTT.

Como gostaríamos de saber quais as possibilidades ou contribuições do uso da TH em ambiente remoto com DMcTT, baseamos nossa pesquisa de campo na teoria de pesquisa de intervenção pedagógica com um caráter de exploração tecnológica.

JUSTIFICATIVA

A temática deste trabalho seria refletir sobre as contribuições do uso da TH em sala de aula com dispositivos móveis. No início da busca pela relevância do tema e pelo referencial para abranger esta pesquisa, entramos em um período de pandemia mundial provocada pelo vírus da COVID-19 que, entre tantas consequências, levou-nos a uma forma de ensino e aprendizagem baseada em um sistema emergencial com aulas remotas.

A partir desse momento, pensamos que – mais do que o fato de a nossa pesquisa ser realizada em um ambiente de encontros virtuais – poderíamos refletir sobre os ganhos e os impactos de trabalhar em ambiente de aulas remotas com o uso de dispositivos móveis um recurso (TH) que usualmente é utilizado em aulas presenciais em sua forma manipulativa.

A pesquisa sugere reflexões para o professor, que poderá considerar uma aprendizagem mais dinâmica com recursos de ensino de matemática mesmo com mídias móveis em ambiente virtual. Ela também compreende toda a complexidade que envolve o uso da TH e serve como subsídio de reflexão para a educação. Esta, por sua vez, tem o ensino de matemática enriquecido com contribuições positivas para a pesquisa sobre um recurso dessa disciplina vinculado à perspectiva do uso de tecnologias em aparelhos digitais móveis em um contexto de aprendizagem em ambientes virtuais criados através de conferências de forma síncrona e assíncrona.

Ressaltamos aqui mais um motivo para a escolha da temática desta dissertação: por meio de nossas pesquisas, foi possível identificar a importância de trabalhar com ambiente *on-line* de ensino, não somente por ser a forma de comunicação emergencial adotada na pandemia mas também porque existem atualmente modalidades de ensino com uso de ambientes *on-line* – como os ambientes virtuais de aprendizagem (AVA); plataformas de ensino virtual, como o Moodle; e Ensino Superior de educação a distância, entre outras modalidades de ensino e aprendizagem em redes *on-line*.

Por fim, destacamos a importância de utilizar o recurso digital para a TH visto que toda a intervenção deste trabalho seria virtual e, assim, seria preciso garantir que todos os envolvidos possuíssem acesso à TH. Além disso, há a praticidade do uso presencial em uma sala de aula, já que qualquer estudante tem a possibilidade de baixar um aplicativo no seu próprio *smartphone*.

1 MAPEAMENTO SOBRE A TORRE DE HANÓI

1.1 Levantamento de Dissertações de Mestrado Profissional sobre Torre de Hanói

É comum, em trabalhos sobre ensino de matemática, que os pesquisadores ressaltem a importância de recursos lúdicos para o aprendizado. Para Antunes (1998), o jogo, por exemplo, auxilia em novas descobertas e simboliza um instrumento pedagógico que leva o professor a estimular e avaliar a aprendizagem.

No ensino da matemática, nós, particularmente, podemos usar alguns jogos ou recursos didáticos interativos para auxiliar nos processos de ensino e aprendizagem – um deles é a Torre de Hanói, que será objeto fundamental de análise nesta etapa.

Este capítulo, produzido a partir de Reis e Bairral (2023, no prelo), é um levantamento de dissertações de mestrados profissionais na área da educação disponibilizados no período de 2013 a 2019 – é de 2013 a dissertação de mestrado profissional mais antiga encontrada no CTDC – que abordem a TH como tema ou tópico do trabalho.

Queremos saber qual a quantidade de trabalhos que abordam a TH como tema principal da pesquisa e quais utilizam esse recurso juntamente com outros. E depois queremos analisar os trabalhos encontrados em tópicos abordados mais à frente.

Ao observarmos os textos selecionados, podemos perceber que a TH é muito ampla em aplicabilidade, e pode ser relacionada a diversos conteúdos da matemática. Assim, percebemos, por intermédio das leituras, que o uso desse recurso apresenta considerável relevância para o ensino da matemática.

1.2 Estratégias de Busca

Iniciamos esta dissertação com a ideia de um levantamento bibliográfico, que, segundo Silveira e Córdova (2009), tem como uma de suas vantagens mostrar a obtenção de dados agrupados. Embora a captura remeta inicialmente ao número de dissertações, a pesquisa é de cunho qualitativo, pois iremos buscar informações de diferentes naturezas e não necessariamente objetivas. Ou seja, a partir do quantitativo de dissertações, iremos observar: o foco (em quantas dissertações a TH é objeto central da pesquisa ou um dos objetos dela); e os conteúdos da matemática e sua abordagem (apresentação de conteúdos e atividades com o recurso como sugestão ao leitor – ou se, além disso, os trabalhos apresentam aplicação prática).

Para organizar a busca por títulos a respeito da TH, em primeiro lugar, entramos no CTDC, uma vez que nesse *site*¹, de acesso gratuito, estão dispostos inúmeros trabalhos, entre teses e dissertações, a respeito de diversos cursos de mestrado e doutorado espalhados pelo Brasil. Ao ingressarmos no endereço eletrônico em questão, vemos inicialmente a palavra ‘Busca’ logo acima de um espaço, para que o visitante ali procure por uma tese ou dissertação específica, ou apenas digite uma palavra-chave para encontrar textos sobre determinados temas. No nosso caso, o primeiro passo para iniciar esse mapeamento foi digitar uma palavra-chave. Primeiramente, digitamos na área de buscas ‘Torre de Hanói’. Na busca realizada em 25 de maio de 2020 apareceram exatamente 1.211.489 resultados, exibidos na Figura 1.

¹ Disponível em: <https://catalogoteses.capes.gov.br/catalogoteses/#/> Acesso em: maio 2020.



Figura 1 – Busca inicial no CTDC

Fonte: CTDC

Nessa primeira busca, encontramos diversos trabalhos que não estavam restritos à área do ensino e outros que nem mesmo se referiam à TH. Diante disso, optamos por utilizar alguns dos filtros disponíveis no *site* para refinar os resultados.

Assim, utilizamos o filtro ‘área do conhecimento’, selecionamos duas opções do filtro ‘educação’, dispostas no site, e refizemos a busca para refiná-los. Desse modo, apareceram 72.963 resultados e, ainda sim, diversos deles não possuíam qualquer relação de semelhança com o que estávamos procurando, como indica a Figura 2.



Figura 2 – Busca com nova palavra-chave no CTDC

Fonte: CTDC

Em seguida, mudamos a palavra-chave para apenas ‘Hanói’. Assim, apareceram 48 resultados e, então, utilizamos novamente os filtros. Como percebemos que grande parte dos trabalhos se referia ao assunto do nosso interesse, filtramos apenas por ‘Mestrado Profissional’, uma vez que haviam aparecido nessa categoria resultados para Mestrado e Mestrado Profissional – a opção de filtrar por esse resultado deveu-se ao fato de que eu, autora, sou aluna de um curso de mestrado profissional. Depois de fazer o refinamento, assim, apareceram 22 resultados, conforme a Figura 3. Quando mudamos a palavra-chave, o filtro ‘Tipo’ deixou de apresentar as teses e, por isso, quando pesquisamos por ‘Hanói’, ele apresentou apenas Mestrado e Mestrado Profissional – ainda com acesso em 25 de maio de 2020.



Figura 3 – Resultado final das buscas
Fonte: CTDC

1.3 Material Capturado sobre TH dos Mestrados Profissionais no CTDC

Após a captura do material, encontramos alguns percalços na seleção dessas 22 dissertações, então consideramos 20 delas. Dentre esses 22 resultados mostrados na Figura 3 (do período de 2013 a 2019), dois foram descartados: o de Holanda (2014), por possuir conteúdo que não se relaciona com a TH; e o de Eller (2015), que, quando acessado em maio de 2020, apresentava a mensagem de conteúdo não encontrado no catálogo. Essa dissertação poderia ser encontrada em buscas no Google, mas optamos por não utilizá-la, pois a mensagem poderia significar que naquele momento a dissertação tinha sido retirada do catálogo e por isso não tinha sido encontrada.

Dessas 20 dissertações restantes, 3 apresentavam divulgação não autorizada no *site* da Capes, como indica o Quadro 1. Porém, ao buscarmos por esses títulos no Google Pesquisa ou no Google Acadêmico, vimos que eles apareciam imediatamente divulgados, então as 3 foram incluídas nesta pesquisa.

Quadro 1 – Listagem das dissertações localizadas (Continua)

Título	Autor e universidade	Status
A Torre de Hanói como ferramenta facilitadora do processo de ensino-aprendizagem de função exponencial e resolução de problemas	Silva, C. (2015) – UFERSA Mossoró	Encontrado no CTDC
Resolução de problemas de contagem usando recorrências lineares	Albuquerque (2019) – UFMA	Encontrado no CTDC

Quadro 1. Continuação

As diversas maneiras de explorar a matemática através do jogo Torres de Hanói	Oliveira (2019) – UFRN Natal	Não autorizado para divulgação no CTDC, mas encontrado no Google Acadêmico
O princípio da Indução Finita e jogos para o ensino de funções	Martins (2015) – UNESP São José do Rio Preto	Encontrado no CTDC
Sequências numéricas no Ensino Médio	Silva, J. (2015) – UEPB Campina Grande	Encontrado no CTDC
Aplicações para o princípio da indução matemática	Silva Junior (2014) – UFG – Goiânia	Encontrado no CTDC
Raciocínio lógico-recursivo: uma proposta para resolução de problemas do Ensino Médio.	Abitbol (2018) – UEMA	Não autorizado para divulgação no CTDC, mas localizado no Google Pesquisa
O lúdico associado à resolução de problemas e jogos no ensino e aprendizagem de funções: uma abordagem diferenciada	Souza (2014) – UTPR Ponta Grossa	Encontrado no CTDC
Explorando matemática no jogo Torre de Hanói	Silva (2018) – UFRSA Mossoró	Encontrado no CTDC
Algumas variações do jogo Torre de Hanói	Santos (2017) – UEFS Feira de Santana	Encontrado no CTDC
Jogos educativos: brincando, ensinando e aprendendo matemática no ensino fundamental	Rocha (2018) – UFC Fortaleza	Encontrado no CTDC
Ensinando matemática com jogos	Souza (2013) – UENF Campo dos Goytacazes	Encontrado no CTDC
Torre de Hanói: uma proposta pedagógica para aprendizagem matemática e aquisição do conhecimento científico no Ensino Superior	Silva (2019) – UFRSA Mossoró	Encontrado no CTDC
Equações de diferenças e alguns modelos	Gomes (2014) – UFPI Teresina	Encontrado no CTDC
Aplicações do princípio da indução matemática	Silva (2017) – UFCA Juazeiro do Norte	Encontrado no CTDC
Análise combinatória: aplicação de técnicas alternativas na resolução de problemas interessantes	Oliveira (2017) – UFRJ Rio de Janeiro	Encontrado no CTDC
Uma abordagem selecionada de sequências recorrentes	Silva (2014) – UECE Fortaleza	Encontrado no CTDC
Estudo de sequências recursivas aplicadas ao Ensino Médio	Carvalho (2019) – FUESPI Teresina	Encontrado no CTDC
Pensamento computacional na Educação Básica: uma proposta metodológica com jogos e atividades lúdicas	Meira (2017) – UFSM Santa Maria	Encontrado no CTDC
Relações de recorrências: para além de PA e PG.	Winter (2013) – UFABC Santo André	Não autorizado para divulgação no CTDC, mas localizado no Google Pesquisa
Oficina de geometria em 3D: uma ferramenta para estimular a aprendizagem da geometria nas etapas do ensino médio	Holanda (2014) – UFPI Teresina	Não se relaciona com Torre de Hanói
Equações de diferenças: Aplicações no Ensino Médio	Eller (2015) – UNESP São Paulo	Conteúdo não encontrado no CTDC

Fonte: elaboração própria

Conforme o Quadro 1, a captura das 20 dissertações inclui, portanto, 17 encontradas no catálogo da Capes e 3 que, embora apareçam citadas nesse mesmo *site*,

possuem a divulgação não autorizada por ele. Definidas as dissertações, a análise do material será discutida quanto ao seu foco. Para esse tópico, as observações foram feitas com os trabalhos divididos em 2 grupos: os que têm a TH como objeto de pesquisa e aqueles nos quais a TH surge como um dos recursos utilizados no ensino de matemática apresentados na dissertação.

1.4 Dissertações sobre a Torre de Hanói Apresentada quanto a seu Foco

Para esta seção, seguimos a seguinte tática de observação das dissertações capturadas: fazer uma leitura parcial dos trabalhos para identificar se a TH está no título e/ou é objeto central da pesquisa – chamamos esse item de análise quanto ao foco. Lembramos que, para nós, a TH ser tema ou objeto central da pesquisa significa que aquela dissertação tem o estudo centrado no recurso, e quando a TH é usada apenas como um dos objetos de pesquisa, não é o objeto central daquele trabalho.

No Quadro 2, organizamos os resultados capturados, em quantitativo, em dois grandes grupos: os trabalhos que têm a TH como tema central da pesquisa, isto é, objeto de estudo, e/ou o nome do recurso no título; e os que dissertam sobre a TH para incorporá-la como mais um recurso didático à pesquisa. Ou seja, nos trabalhos desse segundo grupo a TH não é o único recurso de ensino e aprendizagem apresentado.

Quadro 2 – Quantitativo das dissertações apresentadas quanto ao seu foco

Foco	Quantidade de dissertações
Tema principal (objeto de pesquisa)	6
Foco não principal	14

Fonte: elaboração própria

Observando o Quadro 2, notamos que menos de 30% das dissertações abordam a TH como objeto principal da pesquisa. Nas demais, esse jogo apenas integra a pesquisa juntamente com outros recursos. Assim, podemos observar que poucos trabalhos dissertam sobre a TH como tema norteador de suas pesquisas e sobre suas contribuições para auxiliar no ensino de matemática. Em vez disso, a maioria das dissertações trata desse recurso como forma de complementar suas pesquisas, como parte do estudo, mas não como objetivo principal.

Conforme Oliveira, Calejon e Brito (2016), a TH é considerada por pesquisadores como um importante recurso didático-metodológico para a área de educação matemática. De acordo com essas autoras, mediante esse recurso os próprios alunos são capazes de induzir, perceber as leis matemáticas associadas à TH e desenvolver o raciocínio lógico e estratégico e a socialização, entre outras competências. A esse respeito, é importante que se pesquise sobre a TH com o objetivo de ampliar conhecimentos de professores pesquisadores ao passo que resultados de pesquisas que utilizem esse referido recurso sejam cada vez mais difundidos nas salas de aula.

Para identificarmos o foco das dissertações, fizemos a leitura dos títulos, dos resumos e das introduções, a fim de verificar a presença ou não de outros recursos desenvolvidos nos textos da pesquisa. Em alguns estudos, foi possível identificar a TH anunciada como o ‘problema da Torre de Hanói’, e associada com outros dois problemas de recorrências: o ‘problema da pizza de Steiner’ e ‘os coelhos de Fibonacci’. Todos esses problemas são de recorrências lineares, que é um dos temas fortemente associados à TH.

Esse quantitativo reduzido instiga-nos a verificar em detalhes a natureza das atividades, dos conteúdos e da aplicação prática. A busca pelo foco de pesquisa contribui para que seja possível conferir de que modo é abordada a TH – como objeto de pesquisa

ou relacionada com outros conteúdos – e verificar nos trabalhos em que ela não é o foco o que é considerado relevante no seu tratamento, para incorporar a dissertação em questão a esta pesquisa.

1.5 Identificação das Dissertações quanto ao Conteúdo

Nesta seção, objetivamos identificar nos textos – através de leitura do sumário e de uma leitura menos aprofundada de capítulos – os conteúdos da matemática que se relacionam com a TH, elencá-los em quadro e apresentar quantas dissertações abordam cada um desses conteúdos.

Como nem todos os trabalhos observados incluem em seu conteúdo somente a TH, pelo fato de alguns textos versarem sobre esse e outros recursos de ensino, ocorre de determinado texto trabalhar outros assuntos da matemática que não se relacionam com o jogo. Sendo assim, nesta seção serão abordados os conteúdos da matemática que se relacionam com a TH. Alguns conteúdos estão presentes no título da dissertação por serem o único recurso apresentado naquele texto. As dissertações cujo tema principal é a TH mostram todos os conteúdos de forma que se relacionem a ela.

No Quadro 3 estão os conteúdos da matemática que se relacionam diretamente com o uso da TH no ensino da disciplina e que estão presentes nas dissertações analisadas. Esses conteúdos foram encontrados após a leitura dos textos, conforme indicado no início desta seção. Além disso, é apresentado no Quadro 3 o quantitativo das dissertações nas quais tais conteúdos são localizados.

Ao somarmos as quantidades da segunda coluna do Quadro 3, podemos perceber que obtemos um valor superior a 20, que é a quantidade de dissertações analisadas. Isso acontece devido ao fato de que algumas das dissertações apresentam mais de um conteúdo relacionado à TH.

Quadro 3 – Conteúdos explorados

Conteúdos	Quantidade de dissertações
Estudo das funções	1
Função exponencial	2
Numeração binária	2
Paridade de um número inteiro	1
Potências	1
Princípio da Indução Finita/Princípio da Indução Matemática	9
Recorrências lineares/Sequências recorrentes	12
Raciocínio lógico-computacional	1
Sequências numéricas: progressões aritméticas e geométricas ou aritmético-geométricas	6

Fonte: elaboração própria

No Quadro 3 podemos ver que a TH se relaciona majoritariamente com o conteúdo de recorrências lineares. Isto é, em 12 dos 20 trabalhos é possível notar que a TH é tratada como uma recorrência linear e que a fórmula para determinar o número mínimo de movimentos pode ser demonstrada por uma equação de recorrência. Em seguida, notamos que o Princípio da Indução é usado em 9 dissertações, e sempre para demonstrar a validade da fórmula do número mínimo de movimentos. Não importa de qual modo os autores das 9 dissertações apresentam a referida fórmula ' $m = 2^n - 1$ ' – em que 'm' corresponde ao número mínimo de movimentos e 'n' corresponde ao número de discos da Torre –, ela é sempre demonstrada válida através da indução.

No que concerne às sequências recorrentes, os casos particulares das progressões aritmética, geométrica e aritmético-geométrica aparecem em 30% dos textos ligados ao uso da TH para o ensino – isso porque a fórmula mencionada anteriormente pode ser determinada através da Progressão Geométrica (PG). Esse resultado aparece nas dissertações quando observamos o padrão de movimentos da Torre para cada número de discos, e é possível determinar uma razão para obtermos os movimentos de cada um deles. Além disso, as progressões aritmético-geométricas formam uma sequência recursiva na qual é estabelecida a quantidade de movimentos mínimos da TH, dada pela fórmula do parágrafo anterior.

Os conteúdos de números binários e função exponencial, associados ao uso da TH em sala de aula, e os de raciocínio lógico-computacional, paridade de um número inteiro e potenciação aparecem uma vez em trabalhos distintos, também associados à TH. Vejamos autores que falam sobre o recurso e relação do recurso com conteúdos da matemática.

Conforme indicam Shinkawa-da-Silva e Rossini (2016), o jogo TH é uma ferramenta muito versátil, pois oferece a possibilidade de estudar vários conteúdos da matemática e promove o desenvolvimento cognitivo dos alunos. Essas autoras ainda apresentam alguns conteúdos que podem ser associados à TH: alfabetização matemática e raciocínio lógico; análise e construção de gráficos; potenciação; equação e função exponencial.

Além disso, os autores Oliveira, Calejon e Brito (2016) também ressaltam a importância de conteúdos relacionados à TH para o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, e citam sua aplicabilidade nos conteúdos de função exponencial, PG e sequências recursivas. Assim, os autores das 20 dissertações estão em concordância com os autores citados nesta seção, pois trabalham o jogo com esses conteúdos apresentados e ainda ressaltam em seus textos a importância da TH no processo de ensino e aprendizagem, o que reforça a ideia de se pesquisar mais sobre a TH – considerando a versatilidade de conteúdos abordados.

1.6 Abordagem das Dissertações quanto a Atividades, Exemplos ou Propostas de Sugestão e Apresentação de Aplicações Práticas

O objetivo desta seção é observar nas dissertações de mestrado coletadas – através da leitura do resumo e dos capítulos relacionados ao recurso, identificados no sumário – quantas delas apresentam aplicações práticas com a TH descritas e demonstradas no texto e em quantas outras as atividades e os conteúdos são de informação ou de sugestão para o leitor.

No Quadro 4 revelamos se as dissertações selecionadas possuem sugestão de ideias, exemplos ou atividades para os leitores ou se possuem aplicação em turma apresentada no texto. Com isso, queremos verificar se os trabalhos de mestrado profissional sobre TH são para atingir os leitores com a construção de saberes e sugestões e quantos deles, além de atingirem o leitor no mesmo quesito, também demonstram aplicação prática, ou seja, aplicaram seus estudos em determinadas turmas a fim de mostrar ao leitor novos dados a partir dessas aplicações.

Quadro 4 – Descrição quanto às atividades (Continua)

Autores	Possui sugestão de ideias ou atividades para os leitores	Possui aplicação prática apresentada no trabalho
Souza (2013)	Possui propostas de uso didático da Torre de Hanói e PIM, de modo que possam ser inseridos no contexto de	

	trabalho em sala de aula, especialmente, em turmas do 6º e 7º Anos do Ensino Fundamental.	
Winter (2013)	Esse texto mostra problemas motivadores e atividades propostas para verificação. Utilizando as recorrências: Torre de Hanói, o problema de Josephus e o da procriação de coelhos, e conexão entre computação e equações de recorrência	
Silva (2014)	O texto propõe despertar o interesse, de alunos e professores estudiosos de Matemática, nas sequências recorrentes mostradas na dissertação.	
Silva Junior (2014)	“Mostrar o uso do PIM de maneira lúdica através da torre de Hanói e o problema da moeda falsa. E ao final apresentação de um plano de aula sobre o princípio da indução.”	
Souza (2014)		Esse trabalho propõe investigar os resultados obtidos no ensino e aprendizagem de funções na 1ª série do ensino médio na aplicação ao se utilizar o lúdico associado a outras estratégias de ensino
Gomes (2014)	“incentivar os professores do ensino básico na reimplantação do assunto de recorrência em seus planejamentos de ensino”	
Martins (2015)		“Os alunos entenderam a importância e a necessidade de se provar a validade das expressões encontradas com o Princípio da Indução.”
Silva, J. (2015)	“apresentação de uma proposta didática para o conteúdo de sequências, englobando o tratamento das progressões aritmética e geométrica”	
Silva, C. (2015)	“apresentada uma atividade lúdica onde o professor possa inserir os alunos numa situação problema cuja solução envolve a criação de um modelo matemático fundamentado na função exponencial.”	
Meira (2017)		“elaborar, aplicar e analisar uma proposta metodológica com jogos e atividades lúdicas que busca estimular o desenvolvimento do Pensamento Computacional de alunos de Ensino Fundamental de uma escola pública através de oficina”

Quadro 4. Continuação

Oliveira (2017)	“Ajudar professores e alunos que procuram informações de Análise Combinatória e que sirva como fonte de inspiração e estudo para popularizar o uso de novos métodos de Contagem”	
Silva (2017)	“Mostrar aplicações lúdicas clássicas, que fazem uso desta técnica, como a Torre de Hanói, sugerindo problemas de aplicação à professores de matemática”	
Santos (2017)	“sugestão de um material didático que possa ser utilizado por professores do ensino médio”	
Abitbol (2018)	“Ajudar a despertar novas paixões pela matemática e colaborar para formar gerações mais habilidosas em analisar e resolver problemas recursivos.”	
Rocha (2018)		“Aplicação, relato e sugestão de jogos educativos para despertar a curiosidade e o interesse dos estudantes para aprender Matemática no ensino fundamental.”
Silva (2018)	“referência tanto para pessoas que buscam inovar sua aula com algum recurso, e buscam a aplicação da matemática como para os leitores poderem aprofundar seus conhecimentos”	
Albuquerque (2019)	“Acredita-se que a variedade de exemplos teóricos e práticos apresentados em capítulos, pode ser explorada para motivar a introdução das recorrências lineares na educação básica.”	
Silva (2019)		realizada uma aplicação de uma oficina nos primeiros semestres do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Faculdade de Filosofia Dom Aureliano Matos – FAFIDAM/UECE.
Carvalho (2019)	O texto contribuirá para a comunidade matemática, por mostrar uma outra abordagem embasada em cada questão apresentada, que vai além da dedução da equação de recorrência e dos cálculos de recorrência	
Oliveira (2019)	“oferecer um material que explora diversos tópicos da matemática que possa ser usado tanto por professores do ensino básico como do ensino superior.”	

Fonte: elaboração própria a partir dos autores mencionados

A segunda e a terceira colunas do Quadro 4 apresentam uma breve descrição das atividades que são propostas em cada dissertação – tanto aquelas sugeridas com suas

descrições e metas expostas ao longo do texto quanto as que foram desenvolvidas durante uma aplicação – ou dos seus objetivos. Os trechos com aspas foram justificados com trechos da própria dissertação, enquanto os outros são notas descritas nos textos, escritas a partir da nossa leitura.

Podemos observar, a partir do Quadro 4, que apenas 5 dos 20 trabalhos analisados possuem aplicação prática descrita no texto – 2 deles foram aplicados para estudantes de Ensino Médio; outros 2, para estudantes de Ensino Fundamental; e apenas 1 foi desenvolvido em Ensino Superior. Os demais trabalhos apresentam variedades de exemplos; ou proposta de atividades ou de aulas sugeridas; ou exemplo de problemas motivadores, entre outros, com o objetivo principal de oferecer sugestões ao leitor em vez de trabalhar com resultados de uma aplicação. Essa análise é importante para que possamos saber como as dissertações abordam a TH na prática.

Por exemplo, nas dissertações de Silva, C. (2015) e Oliveira (2019) são apresentadas propostas de atividades para que o leitor possa utilizá-las ou inspirar-se para trabalhar com o recurso em sala de aula. No estudo de Albuquerque (2019) é abordada uma variedade de exemplos teóricos e práticos para motivar a introdução das recorrências lineares em sala de aula pelos professores leitores. A dissertação de Souza (2014) expõe uma aplicação prática com a TH no conteúdo de funções no primeiro ano do Ensino Médio e mostra relato da aplicação e as atividades aplicadas. Ao analisarmos a abordagem da TH nos textos selecionados, percebemos, então, que estes se encaixavam em dois grupos, conforme o Quadro 4.

1.7 Apresentação das Dissertações quanto a Possuir Aplicações Práticas em Turma

Nesta etapa vamos observar, no Quadro 5, se as dissertações de mestrado profissional coletadas demonstram aplicações em sala de aula e/ou oficinas. Queremos verificar se elas aplicam e analisam essa aplicação em sala de aula ou apenas citam a aplicação e sugerem a atividade em questão. Com essa classificação demonstramos o intuito de saber como são tratadas as aplicações nessas dissertações.

Quadro 5 – Aplicações práticas observadas

Quantidade de dissertações	Aplica e analisa	Cita a aplicação e sugere a atividade
5	4	1

Fonte: elaboração própria

É necessário destacar que nenhum dos textos é baseado somente na aplicação, isto é, nesses casos, a aplicação em sala de aula corresponde à parte da pesquisa para sua fundamentação teórica. Desses cinco trabalhos, apenas um somente cita a aplicação sem grandes detalhes e imagens. Isso se dá em seção intitulada “Experiência com o jogo Torre de Hanói em sala de aula”, que, como o próprio título sugere, mostra apenas a vivência do autor em sala.

Os outros trabalhos apresentavam o contexto das aplicações – número de alunos, escolaridade da turma, imagens da aplicação, registro das atividades – e o processo pelo qual elas se desenvolviam, e a atividade ficou como sugestão na dissertação, em anexos, apêndices ou no corpo do texto. Esses detalhes possibilitam que o leitor tenha uma ideia de como a atividade funciona em sala de aula e obtenha uma visão mais prática da leitura da pesquisa.

1.8 Síntese

A partir do primeiro momento pudemos selecionar as dissertações para este trabalho. Depois de definida a palavra-chave ‘Hanói’, com os filtros ‘tipo’ e ‘área’, e excluídos 2 resultados insatisfatórios, chegamos em 20 dissertações para serem analisadas.

Após definirmos as 20 dissertações, fizemos um primeiro levantamento, relacionado ao fato de a TH ser o assunto central da pesquisa ou recurso que faz parte do tema principal da dissertação. Surpreendentemente, entre os 20 trabalhos selecionados, apenas 6 abordam a TH como tema central da pesquisa. Isso reflete a importância de pesquisar a TH em cursos de mestrado, já que esse tema foi usado em 20 dissertações mas em apenas algumas ele é o foco central, ligado à área da educação matemática em cursos de mestrado profissional.

Quisemos apresentar os trabalhos que possuem aplicação prática e registros sobre ela justamente porque em nossa dissertação realizamos uma sequência de aplicações práticas – que constituíram nosso produto educacional, mostrado no Apêndice A desta pesquisa – e analisamos cada atividade sobre o uso da TH digital proposta em nosso desenho didático e sua aplicação em turma de Ensino Superior.

Ao analisarmos as dissertações coletadas, pudemos verificar que os textos com aplicações práticas que usam a TH são próximos da nossa pesquisa, enquanto aqueles que não discutem o uso da TH digital em DMcTT – já que há uma prevalência de abordagens da TH nos cursos de Ensino Superior – são distantes da nossa proposta.

Para finalizar, percebemos ser necessário classificar os trabalhos através de tópicos selecionados nos Quadros 2, 3 e 4 e baseados nos interesses autorais sobre o que é importante notar em um trabalho de mapeamento de recurso de ensino.

2 METODOLOGIA

Neste capítulo apresentamos a abordagem metodológica da pesquisa e uma síntese de como foi desenvolvido o produto educacional, exibido no Apêndice A desta dissertação.

2.1 Abordagem da Pesquisa

A presente pesquisa foi motivada pela perspectiva de discutir atividades de ensino de matemática com a TH, com uso de DMcTT, sob um olhar investigativo. Por conta do recente cenário de pandemia da COVID-19, situamo-nos em um período de isolamento social. Portanto, a pesquisa de campo vinculada a este trabalho foi realizada de forma remota, ou seja, por meio de ambiente virtual, uma vez que nas universidades federais foi adotado o Ensino Remoto Emergencial (ERE) em decorrência da emergência sanitária.

A pesquisa é de cunho qualitativo e envolve a aplicação de um desenho didático materializado em uma sequência de aulas com reflexões e atividades em ambientes de interações síncronos e assíncronos. Esse desenho didático compõe o produto educacional, mostrado no Apêndice A deste trabalho.

Em relação à abordagem qualitativa da pesquisa, os autores Flick, Von Kardorff e Steinke (2000 *apud* GÜNTHER, 2006) elencam que são características da pesquisa qualitativa as seguintes bases teóricas: construção e atribuição social de significados; foco no caráter processual; e reflexão e caráter comunicativo da realidade social, o que permite que o refazer do processo de construção das realidades sociais torne-se ponto de partida da pesquisa. Segundo esses autores, a descoberta e a construção de teorias são os objetos de estudo da abordagem de pesquisa qualitativa. Além disso, a interpretação de dados e os resultados em um contexto cotidiano bem com sua análise centrada no objeto de pesquisa são importantes características dessa abordagem da pesquisa científica.

A pesquisa de abordagem qualitativa tem como objeto, portanto, os fenômenos que ocorrem em determinado tempo e local, sem desconsiderar o contexto em que eles estão inseridos, o que torna necessária uma pesquisa de campo para que o pesquisador possa se inserir naquele contexto e refletir sobre os dados coletados.

2.2 Pesquisa de Intervenção Pedagógica de Caráter de Exploração Tecnológica

A metodologia que representa o tipo desta pesquisa é a pesquisa de intervenção pedagógica, de caráter exploratório com uso de tecnologias digitais. Para elucidar esse método de pesquisa, trazemos os autores Damiani *et al.* (2013), que versam sobre a pesquisa do tipo intervenção pedagógica e suas características; e os autores Bairral e Silva (2018) e Assis (2020), para descrever o caráter tecnológico e digital dessa modalidade de pesquisa.

Para Gil (2010 *apud* DAMIANI *et al.*, 2013), as pesquisas de intervenção pedagógicas são aquelas aplicadas, que têm o objetivo de auxiliar em problemas práticos relacionados ao ensino. Damiani *et al.* (2013) abordam em seus trabalhos os autores Zeichner e Diniz-Pereira (2005 *apud* DAMIANI *et al.*, 2013, p. 59), que entendem desta forma os conhecimentos produzidos no contexto da intervenção pedagógica: “Essas pesquisas são capazes de beneficiar, diretamente, a prática de outros profissionais, ser incorporados em cursos de formação docente inicial e/ou formação continuada; e fornecerem subsídios para políticas educacionais”.

Em nossa pesquisa essas características serão abordadas, já que fizemos uma implementação em turma de graduação entre os dias 10 de março de 2021 e 21 de abril de 2021, totalizando sete encontros, na frequência de um encontro virtual por semana. Nesse prazo, foi possível fazer a reflexão sobre como utilizar um recurso em sala de aula – o que comumente é feito em material físico, mas no nosso caso foi feito de forma digital, em DMcTT –, além disso, os licenciandos puderam refletir de forma profunda sobre os inúmeros conceitos que envolvem a TH e seu funcionamento. O maior ganho desse trabalho foi a apresentação de uma forma de utilizar a TH com DMcTT em uma dinâmica *on-line*, sem ‘perder’ o contato com o desenvolvimento dos alunos ao longo do processo. Para isso, utilizamos, durante o período dos nossos encontros, recursos como aplicativos de gravação de tela e captação de áudio e apresentações com tela compartilhada sobre uma variedade de aplicativos de TH buscados pelos alunos.

Percebemos, ao longo da aplicação, que é possível utilizar de maneira remota – com uso de tecnologia em mídias móveis – recursos comumente usados na forma de material manipulativo e presencial, tanto para o professor ensinar em sala de aula quanto para se refletir a aprendizagem pessoal do futuro docente, como é o caso do desenho didático produzido neste trabalho.

Um destaque da pesquisa de intervenção pedagógica, desse tipo de pesquisa, segundo Damiani *et al.* (2013), é que as pesquisas de intervenção pedagógica podem ainda ser comparadas a experimentos, pois ambos buscam experimentar novidades e posteriormente verificar os resultados.

Sobre o caráter tecnológico da pesquisa, Bairral e Silva (2018, p. 169) comentam que a dinâmica interativa e a aprendizagem dos envolvidos abrangem vários aspectos:

a dinâmica interativa deve respeitar a estreita relação entre a tarefa elaborada e a performance do dispositivo escolhido; as ambiências devem ser criadas para desenvolver estratégias de análise variadas e de manutenção da sedução pela tecnologia; O dinamizador (professor ou pesquisador) intervém no processo e não fica limitado a seguir rigorosamente os instrumentos de coleta como foram planejados e, assim, também aprende na/com a experiência.

Bairral e Silva (2018, p. 170) também trazem considerações importantes para o estudo da relação entre as tecnologias digitais e as situações de aprendizagem nas pesquisas que envolvem intervenções pedagógicas:

- As situações de aprendizagem (atividades, sequências de ensino, jogos, desafios etc.) podem ser modificadas ao longo do processo, se necessário, para a melhoria do aprendizado dos atores;
- Não são apenas as atividades planejadas que determinarão o sucesso da intervenção, mas também as interações deflagradas pelos sujeitos;
- Todos os sujeitos envolvidos são atores no processo e têm direito a vivenciar todas as atividades da pesquisa;
- A tecnologia é vista como extensão física do homem e, ao ser criada por ele, o transforma e também por ele é modificada.

Essas características são relevantes pois levamos a intervenção pedagógica e as considerações de Bairral de Silva (2018) sobre o caráter tecnológico da pesquisa em conta para a construção do nosso produto educacional, reproduzido no Apêndice A deste trabalho.

Em maio de 2020, iniciamos o processo de escrita desta dissertação. Realizamos um levantamento de textos no CTDC para nortear nossa pesquisa, a fim de descobrir quantos são e o que abordam os trabalhos referentes ao uso de TH para o ensino de matemática. Esse levantamento objetivou a verificação de contribuições sobre a TH no

ensino de matemática para que, a partir das suas leituras, pudéssemos iniciar nossa pesquisa centrada em TH. Depois de finalizado o levantamento, ainda em 2020 começamos a pesquisar – a partir de nomes de autores – a respeito do contexto de ambientes de interações síncronas e assíncronas e dispositivos móveis com toque em tela.

No que diz respeito à implementação pedagógica, a pesquisa de campo está representada através do produto educacional, exibido no Apêndice A deste trabalho, como um desenho didático de conhecimento e investigação do recurso TH em DMcTT de forma remota, validado na turma IE-395 – Ensino de Matemática II, disciplina ministrada pelo orientador desta dissertação – do curso de Licenciatura em Matemática da UFRRJ.

Santos e Silva (2009 *apud* BARBOSA; SANTOS, 2020) afirmam que o desenho didático consiste em uma arquitetura que envolve planejamento, produção e operatividade de conteúdos ou situações de aprendizagem. Com ele, é possível construir uma ideia, participar do processo colaborativamente e unir diversos tipos de conhecimento. As autoras afirmam que o desenho didático é aberto a intervenções múltiplas.

A turma IE-395, que conta com 7 alunos, cursava 2 horas de aula nessa disciplina – durante 6 semanas as aplicações do desenho didático para os estudantes ocuparam o tempo de 1 hora e no sétimo encontro ocupamos 30 minutos com essa atividade. No restante do tempo, a turma continuava as aulas, normalmente, com o professor, e estudava outros assuntos. Durante todo esse período, foi realizado um diário de campo que detalhava toda a experiência vivenciada no encontro, e que está disponível no Capítulo 4 deste trabalho.

Finalizado o período da implementação pedagógica, todos os dados colhidos durante o processo foram revisitados e analisados minuciosamente para compor a análise do produto educacional, na qual levamos em conta os aspectos do conhecimento construído pelos alunos. Esses aspectos – revelados pela produção de conhecimento matemático por meio da manipulação de mídias digitais móveis ao longo de cada semana – podem ser embasados por diferentes autores que dissertam sobre a construção da TH. Além disso, observamos três eixos, elencados por Kaplún (2002, 2003 *apud* CORDEIRO; ALTOÉ, 2021), para a elaboração de um produto educacional: comunicacional, pedagógico e conceitual.

Para a análise de resultados, recolhemos todo o material das atividades enviado pelos alunos no grupo do Facebook da turma, onde ocorreu nosso contato assíncrono, e os separamos de acordo com os instrumentos de coleta (aplicativo da TH, gravação de tela, documento de registros escritos enviados pelo Facebook etc.) para visitar cada um quantas vezes fossem necessárias. Reexaminamos também as notas de aulas referentes aos encontros síncronos. Constatamos que todo o material foi suficiente para analisar o produto educacional desenvolvido e disposto no Apêndice A deste trabalho.

2.3 Organização do Desenho Didático como Produto Educacional

Para a realização do desenho didático, vamos dividir a implementação em duas partes: a primeira é a de aplicação de aulas com atividades sobre TH na turma de ensino sob responsabilidade do professor Marcelo Bairral. Essa etapa tem por objetivo apresentar os encontros em formato de tabela, com seus objetivos e atividades propostas. Em seguida cada um desses encontros será exposto com uma síntese das discussões e das expectativas em torno das atividades a serem desenvolvidas com os graduandos.

A segunda parte consiste nas apreciações dessa implementação, que envolvem a análise do encontro pelo Google Meet e das atividades desenvolvidas e descritas em um diário de campo no Capítulo 4. Esse diário contém todo o percurso da implementação e os dados observados, e ressalta cada atividade. Ao final desse diário, obteremos uma

síntese do ganho desse produto educacional, com destaque para, por exemplo, a utilização do recurso de gravação de tela – para acompanhar o desempenho do aluno nas suas movimentações de discos na TH digital em dinâmica *on-line* – e a manipulação de diversos aplicativos de TH trazidos pelos alunos, com a finalidade de discutir o que um aplicativo de TH ideal deve conter para que seja vantajoso e atrativo.

No Capítulo 5 está registrada uma análise detalhada e fundamentada de cada aula, com transcrições e capturas de tela dos registros dos alunos e os relatos que eles fizeram sobre suas descobertas. Além disso, as atividades desenvolvidas para cada aula têm seus resultados expostos nessa análise. Foram desenvolvidas seis atividades, uma para cada encontro planejado. As atividades envolvem desde postagens simples no Facebook e gravação de tela até mesmo uma prova sobre a experiência dos discentes com a TH.

3 ABORDAGEM DIDÁTICO-PEDAGÓGICA DA TORRE DE HANÓI

O objeto deste capítulo é o desenvolvimento do raciocínio¹ matemático em uma dinâmica *on-line* usando a TH em DMcTT. Para tanto, aprofundamo-nos nas potencialidades da TH para o ensino de matemática e, posteriormente, nas contribuições do uso de tecnologias móveis para os processos de ensino e aprendizagem na licenciatura em matemática.

3.1 Um Pouco sobre a Torre de Hanói

Conforme Albuquerque (2019), a TH é um jogo que consiste em uma tábua onde estão fixadas três hastes, batizadas de A, B e C. Em uma das hastes, por exemplo a A, estão enfiados ‘n’ discos furados no centro, de modo que o disco de maior diâmetro é o que está mais em baixo na pilha, e os demais são empilhados em ordem decrescente de diâmetro.

Santos (2017) considera que a TH é um quebra-cabeças, criado pelo matemático francês Eduard Lucas em 1883, constituído, inicialmente, por oito discos empilhados do maior para o menor a partir da base e dispostos em uma haste ou pino. Vale compreender que um quebra-cabeças não é necessariamente um jogo. Segundo o dicionário *Priberam.Org*, um quebra-cabeças é um problema de difícil resolução ou aquilo que merece cuidado ao ser percebido (QUEBRA-CABEÇAS, 2022).

Durante a nossa pesquisa de campo, abordamos a TH como um jogo, pois usamos o recurso digital para explorar suas potencialidades, como estratégia e resolução em um menor número de tentativas, com o objetivo de que futuros professores, a quem destinaremos a nossa série de atividades, possam utilizar esse recurso com suas possibilidades em aula de matemática.

O objetivo da TH é transportar ‘n’ discos de uma haste a outra, no menor número de movimentos possível para cada determinada quantidade de discos. Deve-se, portanto, obedecer às seguintes regras: (1) os discos devem ser movidos de uma extremidade da haste a outra; (2) somente pode ser movido um disco por vez; e (3) um disco maior não pode ser colocado sobre um disco menor.

Há autores que não trazem a regra (1) como obrigação, o que permite, portanto, a conclusão dos movimentos dos discos na haste ou pino central. Esse é o caso de Silva (2018, p. 14), que diz: “Para nossa análise do jogo, sempre buscaremos vencê-lo transportando a torre da haste A para a haste C, no entanto, nada altera o problema se considerarmos B como haste final”.

Sobre o problema da TH, é conhecida uma lenda que dá origem ao recurso. Descrita por Silva (2018), a Lenda de Hanói ou Lenda do fim do mundo conta que o mandarim Edward Lucas, em suas viagens, viu, no grande templo de Bénarès, sob o domo que marca o centro do mundo, três agulhas de diamante assentadas sobre uma laje de latão, altas de um côvado, mas não muito grossas. Sobre uma dessas agulhas, Deus empilhou, no começo dos séculos, 64 discos de ouro, o maior repousando sobre a laje e os outros, um a um, cada vez menores, sobrepostos até o pico. Essa é a torre sagrada de Brahma². Dia e noite, os monges estão ocupados em transportar a torre da primeira agulha de diamante para a terceira, conforme as regras que, segundo a lenda, foram impostas por Brahma: mover um disco de cada vez e nunca permitir que um disco maior fique em cima

¹ Ao longo desta dissertação, usarei “raciocínio” e “pensamento” como sinônimos.

² Brahma é um deus hindu.

de outro menor. Quando tudo estiver terminado, a torre e os monges cairão, pois esse será o fim do mundo.

Grando (1997) relata que a TH é desenvolvida de forma eficiente quando se pode investigar o produto e construir hipóteses para que seu aspecto lógico seja compreendido, de forma que seja possível relacionar o jogo com conteúdo da matemática. Assim, utilizamos esse jogo na modalidade que melhor se adequa ao seu uso de cunho investigativo.

Uma outra estratégia interessante a ser utilizada pelos docentes no ensino da matemática, em suas abordagens com a TH, é a utilização da escrita ou relato. Essa hipótese é levantada por Powell e López (1995), quando dizem que a escrita, o registro, é um veículo da aprendizagem em matemática. Em um processo de aprendizagem investigativa, os registros são necessários.

Fazer constantes relatos sobre as descobertas – mesmo que não somente por escrito, mas que possam ser acessados várias vezes – e sempre atualizá-los é uma forma de refletir sobre elas e complementá-las com novos dados. Também é importante registrar as dúvidas a fim de verificar se, ao longo do processo de exploração, elas puderam ser sanadas.

No trabalho com a TH é importante promover discussões entre os participantes sobre como foram obtidos os resultados e quais estratégias foram utilizadas para obter o número mínimo de movimentos para determinados números de discos. Bairral (2001) ressalta que, como a TH é um recurso cuja resolução demanda investigar e encontrar estratégias, as discussões em grupos enriquecem a dinâmica do trabalho com ele.

A TH poderá ser usada em várias séries, por isso seu estudo aprofundado é importante. É necessário, por exemplo, conseguir estabelecer o número mínimo de movimentos, e posteriormente relacionar o recurso a outros conteúdos utilizados na matemática.

Silva (2018) reforça que a maioria das propriedades do jogo – desde as mais simples, como seu principal objetivo (número mínimo de movimentos), até os fatos mais complexos – é observada através de padrões, de sucessivas repetições. Dessa forma, entendemos que é relevante deixar que os alunos explorem muitas vezes o recurso, façam pesquisas, analisem diferentes conclusões para chegarem em determinados resultados.

Outro importante uso pedagógico da TH é sua relação ou aplicabilidade em diversos conteúdos da disciplina de matemática, o que permite uma ampla usabilidade de diferentes formas em todos os níveis de ensino. No nosso trabalho, o produto educacional, mostrado no Apêndice A, destina-se a utilizar a TH no Ensino Superior como forma de, ao longo do aprofundamento do contato com o recurso, discutir e estabelecer suas potencialidades pedagógicas, em particular, de forma digital.

Sobre a versatilidade do recurso, Santos (2017, p. 9) descreve que existem diversas possibilidades de trabalhar a matemática com uso da TH, e seu emprego é plausível desde o Ensino Fundamental até o Ensino Superior: “Conteúdos como função exponencial, sequências numéricas, indução matemática e recorrências são alguns dos exemplos em que podemos inserir o problema da Torre de Hanoi como uma ferramenta valiosa para o ensino de matemática.”

O foco do nosso produto consiste em apenas discutir e analisar as possibilidades de uso dos quebra-cabeças bem como associar seu uso a diferentes recursos, a partir das observações dos alunos. Definimos como conceitos relacionados à TH os conteúdos que ela abrange e os aspectos pedagógicos de aprendizagens adquiridas no uso desses aplicativos de TH.

3.2 O Desenvolvimento do Pensamento Matemático com a Torre de Hanói

O raciocínio com a TH envolve intrinsicamente reflexões investigativas, pois o sujeito constantemente é convidado a refletir sobre seus questionamentos ou os dos colegas. Entendemos que o uso de questionário é muito importante para a coleta de dados desse tipo de aplicação de um produto educacional no Ensino Superior. O uso de questionário de pesquisa, segundo Gil (1999, p. 128), pode ser definido como “a técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas, tendo por objetivo o conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas etc.”.

Assim, o questionário é uma técnica que servirá para coletar as informações da realidade – tanto do empreendimento quanto do mercado que o cerca –, que serão importantes pilares na construção da pesquisa com utilização de investigação.

Continuando a linha de destacar usos pedagógicos da TH para o ensino de matemática, ressaltamos que a utilização desse recurso faz compreender de forma aplicável os conteúdos de princípio da indução matemática e pensamento recursivo – duas das formas de pensamento matemático associadas à TH. Esses conteúdos matemáticos estão relacionados à demonstração e frequentemente são abordados no Ensino Superior e, com um pouco menos de frequência, no Ensino Médio.

A esse respeito, Martins (2015) relata, diante da sua experiência com a TH e da sua pesquisa, que os alunos de matemática do Ensino Médio possuem muitas dificuldades em fazer generalizações e usar o raciocínio lógico no dia a dia das aulas de matemática. Isso porque, como a autora diz, nas aulas não são frequentes atividades que desenvolvam o pensamento lógico e conduzam o aluno à abstração. Assim, oferecer uma formação em matemática mais completa, com aspectos de abstração e validação, torna-se altamente importante para que o aluno que seguirá essa disciplina no Ensino Superior perceba as aplicabilidades de métodos de demonstrações. A autora acrescenta que

uma das expectativas deste trabalho foi apresentar o Princípio da Indução Finita ao Ensino Médio. A proposta de atividades com jogos e generalizações se mostrou eficiente para este propósito. Os alunos entenderam a sua importância e a necessidade de se provar a validade das expressões encontradas. (MARTINS, 2015, p. 74)

Silva (2017) também relata a positiva associação entre a TH e o princípio da indução. O autor diz que esse quebra-cabeças se configura como uma aplicação lúdica do princípio da indução, e seu uso é muito importante em qualquer nível de ensino, uma vez que muitos estudantes, até mesmo do Ensino Superior, têm dificuldades de entender esse conteúdo em um contexto prático.

Sobre a recursividade, Albuquerque (2019) diz que as recorrências lineares podem estar associadas à resolução de exercícios nos quais se desejam validar descobertas e, ainda, ser utilizadas na educação básica. Dessa forma, o raciocínio lógico presente no aluno será instigado, a partir das construções do pensar recursivo, pois, ao iniciar esse processo, o estudante poderá visualizar padrões numéricos em diferentes tipos de problemas de contagem – ou aplicações lúdicas – e naqueles que envolvem indução finita. Dessa forma, relacionamos essa ação de raciocínio por meio de pensamento recursivo como uma contribuição do eixo pedagógico.

Abitbol (2018) sinaliza que estabelecer o raciocínio recursivo no ensino de problemas clássicos como a TH é importante, pois potencializa a capacidade do aluno de

pensar e até de resolver outros problemas não idênticos, uma vez que ele consegue compreender uma fórmula ou expressão matemática ao invés de simplesmente decorá-la. Assim, consideramos importante o uso da TH associado aos pensamentos indutivos e recursivos, já que o discente, seja no Ensino Médio ou no Ensino Superior, necessita compreender as generalizações trazidas por esse recurso.

Considerando que as generalizações – isto é, a capacidade de compreender o funcionamento da sequência do número de movimentos mínimos com a TH – possam vir de problemas em que foram realizados processos de discussão, observação e validação, entre outras características que compõem o processo de investigação, é importante que esteja estabelecido um cenário para a investigação pautado no aceite do convite por parte do educando, seja ele da Educação Básica ou do Ensino Superior, em todos aqueles problemas propostos no desenho didático foi possível utilizar TH no processo investigativo.

Segundo Skovsmose (2000, p. 6), um cenário para investigação é aquele que convida os alunos a formularem questões e buscarem explicações sobre as ações desenvolvidas:

O convite é simbolizado pelo "O que acontece se...?" do professor. O aceite dos alunos ao convite é simbolizado por seus "Sim, o que acontece se...?". Dessa forma, os alunos se envolvem no processo de exploração. O "Por que isto...?" do professor representa um desafio e os "Sim, por que isto...?" dos alunos indicam que eles estão encarando o desafio e que estão procurando por explicações.

Os alunos inseridos nesse contexto devem tomar a iniciativa de participar do processo de exploração e, posteriormente, de explicação, pois, no cenário da investigação, eles são responsáveis pelo processo. A proposta do docente é percebida como um desafio a ser cumprido. Em nossa intervenção pedagógica, foi necessário que fizéssemos mediações pontuais ao longo do processo para garantir o interesse do aluno pelas atividades.

A importância de utilizar a TH no Ensino Superior é corroborada por Silva (2019), que diz que os alunos, ao ingressarem na universidade, sentem dificuldades, pois encontram, dessa vez, um ensino baseado em teorias matemáticas nunca vistas por eles. Outro fator é que, além de a rotina de estudos ser mais intensa, a abordagem pedagógica do professor universitário é mais exigente e, dessa forma, o aluno necessita de conhecimentos prévios essenciais para a compreensão e construção do conhecimento científico.

Pensando nessas questões, uma das alternativas encontradas por Silva (2019, p. 30) é propor uma abordagem de ensino que possa utilizar jogos de ensino de matemática para trabalhar problemas e resoluções que envolvam, além da teoria, “[...] um enfoque prático e lúdico no Ensino Superior, podendo também, ser trabalhado nos níveis básicos de ensino”.

Silva (2019) ainda aponta que no Ensino Superior, além de ser possível explorar as contribuições pedagógicas do uso da TH – uma vez que o público-alvo são futuros professores –, também se pode trabalhar com conteúdos que são mais comuns nessa fase, como as recorrências lineares de primeira e segunda ordem, o princípio da indução finita (demonstrações de fórmulas) e a paridade de um número inteiro.

Além disso, para Silva (2019), com a utilização da TH no Ensino Superior, pode-se compreender que o uso de jogos no ensino de matemática pode contribuir de forma significativa não somente para o aprendizado mas, ainda, para o desenvolvimento de

conteúdos, mesmo nesse nível de ensino, pois é uma forma de trabalhar a teoria em consonância com a realidade do aluno, visto que este pretende se tornar professor.

Sobre a avaliação do processo de aprendizagem com a investigação acerca do jogo da TH, destacamos Santos e Silva Junior (2014), que apontam o fato de as pesquisas mostrarem que os jogos digitais podem ser usados em favor da educação, de forma estruturada, com um aparato pedagógico e psicopedagógico. Com isso, devemos passar pelas etapas de registrar, investigar, testar, validar e avaliar o aprendizado com determinado jogo. A avaliação irá depender do que foi demandado no processo de investigação.

Santos e Silva Junior (2014) abordam, ainda, uma prática que pautou a nossa pesquisa para a elaboração do produto educacional: a virtualização de um jogo que é comumente utilizado em sua forma manipulativa do material físico. Fizemos a utilização da TH em versão digital para uso em dispositivos móveis com manipulações¹ de toque em tela. Os autores acreditam que

a virtualização dos jogos tradicionais, ou seja, a criação de versões digitais multiplataforma para os jogos tradicionais, já usados com sucesso comprovado no ensino da Matemática, seja uma solução computacional e pedagógica, adequada esta situação, por proporcionar aos jovens em idade escolar e aos seus professores, um meio pelo qual possam ter acessos aos conteúdos visto em sala de aula, de um modo lúdico e descontraído, ao mesmo tempo, sem perder seu caráter pedagógico. (SANTOS; SILVA JUNIOR, 2014, p. 4)

Desse modo, poderemos, de forma educativa, estar presentes efetivamente no cotidiano dos estudantes, que terão à disposição o uso pedagógico e psicológico de jogos educativos.

Aproveitando que iniciamos o discurso sobre o uso de recursos digitais, veremos mais adiante a utilização desse jogo em versão digital, além das potencialidades do uso de tecnologias para o ensino de matemática. Vale dizer, mais uma vez, que este trabalho foi desenvolvido em aulas remotas, assim, trataremos não somente das tecnologias presentes em dispositivos de toque em tela mas também de ambiente remoto para aprendizagem.

3.3 Os DMcTT e o Facebook nos Processos de Ensino e Aprendizagem Matemática

Atualmente, vem se tornando cada vez mais indispensável o uso de tecnologias digitais no ensino, em particular, de matemática. Segundo Lima e Moita (2011, p. 133), tecnologias digitais no contexto de ensino e aprendizagem fornecem instrumentos imprescindíveis para facilitar o processo de aprendizagem por parte do aluno, pois os recursos que elas disponibilizam são capazes de facilitar e agilizar a vida da sociedade contemporânea, “[...] permitindo, assim, a atualização de conhecimentos, a socialização de experiências e a aprendizagem através dos recursos tecnológicos”.

Entendemos, então, que o uso de tecnologias digitais na educação – e no caso do que abrange esta pesquisa – é fundamental para manter diferentes formas de socializar entre os colegas e entre eles e o professor. Além disso, a tecnologia possibilita novas formas de compreender determinado conteúdo, uma vez que é um componente facilitador, além de atualmente estar inserida no cotidiano de grande maioria dos estudantes.

¹ Existem pelo menos duas formas de manipulação com a TH: podemos fazer manipulações em uma TH de material físico ou manipular em tela, no caso da TH digital. Quando falamos da TH digital, em aplicativos, referimo-nos à manipulação em tela.

Falemos, neste momento, dos dispositivos de toque em tela. Essas mídias digitais também são conhecidas como dispositivos móveis, no entanto, têm a especificidade de serem usadas somente com toques em tela. É o caso dos *smartphones* e dos *tablets*, que utilizam em seu manuseio a tecnologia do toque em tela.

O uso dos dispositivos móveis com toque em tela gera uma discussão da qual não participaremos profundamente, mas abordamos esse ponto pois utilizamos essa ideia em nossa aplicação do produto. Estamos nos referindo às interações provocadas ao realizar atividades com DMcTT.

Segundo Bairral (2017), diante do uso didático da TH, podemos perceber a ocorrência de diferentes tipos de interações, como a interação entre sujeito e objeto e a interação entre sujeito e sujeito. Interações dizem respeito a tudo aquilo que acarreta reações. O autor também ressalta que, com o crescente avanço tecnológico, “[...] a interação amplia seu espectro e passa a ser uma ação comunicativa materializada em modos discursivos diversos” (BAIRRAL, 2017, p. 101).

Bairral (2017) ainda destaca as características de atividades promovidas com dispositivos de toque em tela: manipulações feitas com a tela ou a partir dela, movimentos variados e muitas vezes combinados – nem sempre acompanhados de fala. Os toques que realizamos na tela têm intenções comunicativas diversas – eles representam manipulações na tela.

Entre os tipos de manipulação em tela estão: tapa (um toque simples); duplo tapa; tapa longo (pressionar e segurar); arrasto; mudança de tela; e múltiplos toques. Embora não priorizemos avaliar os tipos de toques executados pelos graduandos no trabalho de campo, notamos que eles realizaram esses diversos tipos de toque ao manipularem a TH em tela. Percebemos que a linguagem usada para tratar da TH sofre pequenas alterações na comparação entre a estrutura física e a digital do recurso. Por exemplo, no modo digital, podemos arrastar os discos um de cada vez ou selecionar qual disco desejamos trocar de posição, e tocar na haste ou na direção em que queremos depositá-lo.

Se a TH pode ser usada de forma eficiente, para que usá-la em dispositivo digital? O que ocorre quando inserimos os DMcTT nas aulas de matemática? Para alcançar respostas a esses questionamentos, Bairral (2017, p. 109) faz as seguintes considerações:

Aulas dinâmicas de matemática podem ser desenvolvidas com recursos mais convencionais – papel e lápis, por exemplo. Todavia, é importante destacar que recursos diferentes geram descobertas e aprendizagens distintas. Portanto, os dispositivos móveis podem compor o cenário de aula como mais uma possibilidade de dinamizar o ensino e de promover novas explorações conceituais, procedimentais etc.

Assim, temos mais um recurso que não apenas dá dinamismo às aulas mas, com as possibilidades do seu uso, agrega resultados positivos e permite que se realizem nesse contexto explorações conceituais e interação.

Em nosso trabalho de campo, as interações ocorreram de forma remota, em ambientação virtual. Esse processo ocorre de forma síncrona no Google Meet, plataforma digital de reuniões e videoconferências, que funciona como uma sala de aula virtual, conforme a Figura 4. Temos, ainda, interações de forma assíncrona, em grupo fechado na rede social Facebook.

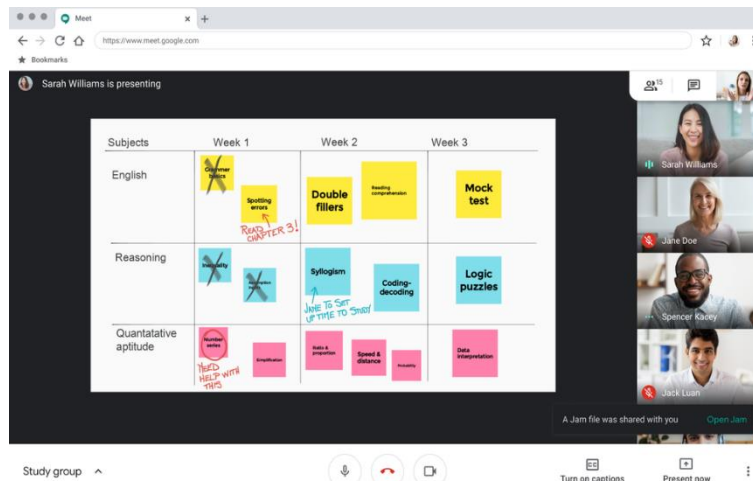


Figura 4 – Imagem do Google Meet

Fonte: desconhecida

Santaella (2013 *apud* BARBOSA; SANTOS, 2020) diz que um dos desafios da educação *on-line* é dar uma atmosfera espontânea e prazerosa a um ambiente virtual em que ocorre aprendizagem, pois, geralmente, não se pensa nos aspectos lúdicos desses ambientes.

Conforme Silva e Bairral (2020), a dinâmica do Facebook é diferente do que acontece no AVA, pois o Facebook avisa constantemente seus usuários sobre atualizações nas redes, e no AVA a forma de aviso para atualização das postagens é o *e-mail* ou a própria plataforma. Além disso, os usuários podem interagir com a plataforma em tempos distintos.

Após embasarmos as escolhas de trabalhar com a TH digital em ambiente remoto de ensino, síncrono e assíncrono, vamos destacar os principais aspectos observados em dinâmica virtual em aulas de matemática. É necessário que seja possível estabelecer formas de acompanhar o desenvolvimento dos educandos, visto que eles não estão diante do docente, especialmente no contexto deste trabalho, a apresentação de um recurso lúdico utilizado através de manipulações em tela.

Barros e Carvalho (2011) reforçam a importância de compreender que os desafios da educação a distância são equivalentes aos desafios do sistema educacional comum. Isso determina que devemos ter o controle dos nossos objetivos e meios para realizar determinadas tarefas, observar a relação do nosso público-alvo com o uso de tecnologias e perceber que abordagens mais adequadas devem ser exploradas para acelerar o processo de inclusão social.

É importante que os contextos virtuais deem conta dos princípios sociointeracionistas, já que oportunizam a comunicação e a intervenção do usuário durante o processo, pois

esses recursos são disponibilizados no ambiente e oportunizam a interação dos alunos com os conteúdos e com colegas e professores. Essas ferramentas são consideradas de informação e comunicação. No caso das interfaces de comunicação destacam-se as ferramentas de interatividade síncronas e as assíncronas. (BARROS; CARVALHO, 2011, p. 218)

Assim, diferentes tipos de interações, síncronas e assíncronas, despertam a comunicação, além disso, dinamizam um ambiente e promovem acessibilidade e

comunicação. As interações, além de serem realizadas com a tecnologia, também são realizadas com os colegas e os conteúdos.

Barbosa e Santos (2020) afirmam que, no dinamismo que envolve o desenho didático e o ambiente *on-line*, o pesquisador deve estar preparado para as mudanças e alterações que poderão ocorrer no avançar da pesquisa. Além disso, as autoras abordam que os desenhos didáticos no contexto da educação *on-line* – como é o caso do nosso produto educacional, exibido no Apêndice A deste trabalho – envolvem planejamento, produção e operatividade, o que funciona muito bem virtualmente, pois contribui tanto para descobertas quanto para dinamizar o ambiente virtual.

Ainda conforme Barbosa e Santos (2020), a educação *on-line* tem como um de seus objetivos tornar o ambiente virtual de aprendizagem mais espontâneo, uma vez que ele foi pensado com forte ênfase em aspectos didáticos e sem foco em aparências lúdicas. Além disso, o uso de jogos ou de outras ferramentas lúdicas abordadas em contexto digital visa aos aspectos da ‘gamificação’, como gráficos, informações de jogabilidade, entre outros: “Cada vez mais as redes sociais estão mais visuais e audiovisuais com memes, vídeos entre outros. [...] Um dos maiores desafios da educação é oferecer, num ambiente formal de aprendizagem, estratégia com o lúdico” (BARBOSA; SANTOS, 2020, p. 16).

Ou seja, esses aspectos tornam o ambiente *on-line* mais visual, para que seja mais atrativo, e contribuem para o avanço do processo de ensino e aprendizagem nesse contexto educacional.

Menezes (2020) entende que o ambiente *on-line* para formação de professores permite que o licenciando aprenda a aprender e potencializa suas vivências pedagógicas para atuar em sala de aula, independentemente de ela ser virtual ou presencial.

O futuro professor pode estar capacitado para enfrentar problemas e desafios do exercício da licenciatura em matemática, uma vez que, como graduando, ele experimentou aplicabilidades de atividades lúdicas e ambiente de ensino remoto. É claro que, neste contexto de pandemia que estamos enfrentando no presente, muitos cursos de licenciatura se viram ‘forçados’ a usufruir de ambientes e plataformas *on-line* e até mesmo foram levados a refletir sobre eles. Porém, mais importante que isso é poder vivenciar e levar o aprendizado adiante.

Neste momento, vamos tratar de outras ferramentas tecnológicas que também estão presentes em nosso trabalho de campo, como os aplicativos de mídias que constam como recurso auxiliar durante o processo de investigação, os de gravadores de tela e as provas *on-line*. Esses recursos, especificamente, auxiliaram não só no processo de desenvolvimento pedagógico do desenho didático mas também na construção de uma análise aprofundada dos dados provenientes dessa experiência.

Os gravadores de tela são ferramentas digitais que permitem capturar movimentos realizados em dispositivo digital ao longo de um determinado tempo estipulado. Comumente utilizado em dispositivos de toque em tela, esse recurso captura em forma de vídeo ações realizadas no dispositivo, e ainda é possível estabelecer captura do áudio do sujeito que está realizando a gravação da tela do dispositivo.

A gravação, para esta pesquisa, tem significativa importância, já que possibilita a análise das movimentações dos alunos na TH digital. Todo o percurso da pesquisa será realizado de forma remota, assim, para acompanhar as dificuldades, as ações assertivas e o desempenho do aluno com um recurso pouco familiarizado por eles, optamos pela gravação de tela.

Concordamos com o argumento de Powell *et al.* (2004 *apud* ASSIS, 2020) quando abordam que registros em vídeos, mostrados na Figura 5, possibilitam um revisitar de situações didáticas que contribui para uma investigação mais minuciosa, e detalhes uma vez não percebidos podem se tornar aparentes em momento posterior.

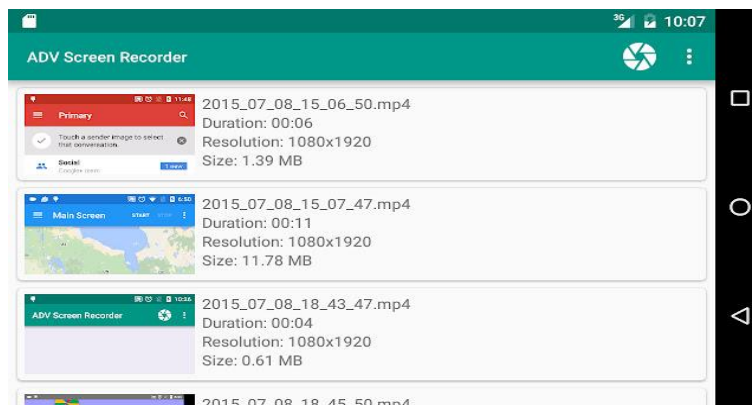


Figura 5 – Aparência de uma tela sendo gravada

Fonte: autor desconhecido¹

Uma folha de papel usada para registro, por exemplo, ilustra raciocínio e estratégias, aspectos que nessa investigação das potencialidades da TH são altamente valiosos. Esses registros também podem ser realizados em *chats* de plataformas virtuais ou *posts* em redes sociais. Porém, o registro mais detalhado e visual, que apresente dados além dos que são capturados em registros e diários de campo, é feito nos aplicativos de gravação de tela, que possibilitam, como observado por Assis (2020), captura de toques e rastros na tela e gravação de áudio – são, então, uma ferramenta complementar, que potencializa o trabalho e a análise de dados.

Com o advento da pandemia, muitos sistemas de avaliações foram adaptados, como é o caso da clássica aplicação de provas, que precisou se transformar em aplicação de provas *on-line*. Não existe um sistema único de padronização de provas em ambientes digitais, porém essas adaptações foram necessárias para manter as avaliações de aprendizagem que já eram conhecidas por todos os discentes.

Mas, se a intenção é aplicar um desenho didático com aulas diferenciadas, dinâmicas e investigativas, com recursos lúdicos e digitais abordados em uma disciplina de ensino do curso de licenciatura, por que a aplicação de uma prova, uma vez que esse é um sistema de avaliação clássico e, algumas vezes, até criticado por pesquisadores em pedagogia?

Para responder a essa pergunta, tomamos como base as seguintes sinalizações de Both (2012, p. 76) sobre a avaliação por intermédio de prova:

A prova poderá reservar para si a incumbência de incentivo à aprendizagem, sem que para tal se aplique nota ou conceito. De fato, pelo baixo valor pedagógico que a prova imprime, deve ela ser preservada de nota ou conceito em processo educacional. Torna-se possível aceitar a prova quando [...] as notas demandam, apenas, para incentivo à aprendizagem.

Relatamos aqui que a prova aplicada não foi realizada como é comumente observado em sala de aula: os alunos fizeram a prova com apoio de material e podiam utilizar a TH a todo momento, inclusive, uma das questões requeria a gravação de tela do aplicativo da TH, para captura dos movimentos do aluno, com áudios em que ele explicava o que tinha sido solicitado pelas questões.

A nota atribuída à prova não consistia na nota final da disciplina, ela foi usada apenas para simbolizar o desempenho do estudante, a fim de incentivá-lo à aprendizagem

¹ Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.blogspot> Acesso em: mar. 2021.

constante, para que saiba utilizar todos esses recursos quando for o professor de uma turma. Também é necessário dizer que os alunos foram avaliados semanalmente na produção das atividades semanais. A prova foi mais um recurso de avaliação de aprendizagem utilizado em todo esse período de experiência.

Durante todo esse trabalho de campo, para constituir o desenho didático em ambiente virtual, os alunos tiveram que baixar ou manter instalados em seus dispositivos móveis a TH *on-line*, o gravador de tela e o Facebook, além da plataforma de vídeo conferência, o Google Meet, que, se usada em computador, tem a possibilidade de acesso *on-line*, sem necessidade de efetuar um *download*. Foram disponibilizados *links* de acesso a cada um desses itens mencionados, além das atividades semanais em grupo fechado do Facebook.

3.4 Recursos Tecnológicos em Dinâmicas *on-line*

Nesta seção abordaremos os recursos tecnológicos que podem ser inseridos em dinâmicas virtuais com a TH. São eles: TH *on-line*; aplicativo de gravação de tela; questionário/formulário no Google Forms; redes sociais de interação, como WhatsApp e Facebook com uso de grupo fechado e *chat* de interação; e aplicativos de videoconferência. No Quadro 6 apresentamos o recurso e a forma como ele foi utilizado em nossa pesquisa de campo.

Quadro 6 – Recursos tecnológicos

Recurso(s)	Objetivo(s)	Aula(s)
TH <i>on-line</i>	Aplicar todas as atividades do desenho didático com uso de TH virtual e diversa.	1 a 7
Aplicativo de gravação de tela	Gravar os movimentos na TH para cada referente número de discos, a fim de aproveitar a atividade como instrumento de coleta de dados.	4 e 6
Formulário no Google Forms	Coletar dados de ordem inicial e obter informações dos alunos sobre suas proximidades com o uso da TH.	1
Redes sociais	Interagir de forma assíncrona através de <i>posts</i> de questionamentos e atividades; respostas; e envio de atividades. No Facebook os alunos realizaram as ações de postar, comentar e curtir.	1 a 6
Videoconferência	Comunicar e interagir ao longo de todas as aulas de forma síncrona, de modo que seja um ambiente de sala de aula virtual.	1 a 7

Fonte: elaboração própria

Esses instrumentos digitais foram amplamente necessários, uma vez que o desenho didático se constituiu em período pandêmico. Toda a tecnologia referente aos desenhos didáticos pode ser adequada às preferências do professor aplicador. No caso das redes sociais, o Facebook pode facilmente ser substituído por WhatsApp e a sala de videoconferência pode ser adaptada às plataformas de ambientes virtuais de aprendizagens – como o Moodle –, que podem reunir as facilidades da rede social, para também desempenharem o papel de sala de aula virtual.

Neste capítulo descrevemos as potencialidades dos recursos digitais bem como dos DMcTT para o ensino de matemática em diferentes níveis de escolaridade, e percebemos também que, assim como as tecnologias mencionadas, a TH é bastante versátil e pode ser usada para explorar diferentes conteúdos da matemática. No capítulo seguinte, mostramos a pesquisa de campo, com detalhes da aplicação do produto

educacional, mostrado no Apêndice A deste trabalho, e o planejamento de toda a pesquisa.

4 OS RESULTADOS DA PESQUISA DE CAMPO SOBRE O DESENHO DIDÁTICO

Neste capítulo apresentaremos a pesquisa de campo com o produto educacional e os resultados obtidos nos registros desse desenho didático. O objetivo do capítulo é mostrar a organização da pesquisa de campo que compõe o nosso produto educacional, exibido no Apêndice A. Também serão expostos os recursos utilizados para a implementação pedagógica e o diário de campo com as realizações e as análises iniciais das aulas ministradas.

4.1 Organização

Nessa implementação fizemos uma sequência de aulas com atividades que envolvem o uso da TH digital com DMcTT para professores em formação, por intermédio de ambiente remoto *on-line* para as aulas. Com isso, podemos dizer que o produto educacional gerado a partir desta dissertação – inserido no Apêndice A – destina-se à formação de professores, no Ensino Superior, como foi o nosso caso. Sendo assim, definimos nosso público-álvo.

A aplicação das atividades foi desenvolvida para que futuros professores enriqueçam sua prática e sejam inspirados a utilizar recursos muitas vezes já conhecidos sob uma nova ótica, mais dependente da tecnologia, neste caso, em dispositivos de toque em tela e de forma remota.

A esse respeito, Santaella (2013 *apud* BARBOSA; SANTOS, 2020) diz que um dos desafios da educação *on-line* é tornar o ambiente virtual espontâneo e prazeroso, pois, geralmente, ele não é pensado em seus aspectos lúdicos. Assim, percebemos que o uso da TH nesse contexto pôde inspirar os graduandos como uma forma de dinamizar as aulas *on-line*.

Para essas atividades, desenvolvemos os seguintes objetivos didáticos específicos: i) conhecer a TH através de manipulação; ii) desenvolver atividades de cunho investigativo, através da manipulação e de interações *on-line*; iii) analisar o desenvolvimento dos alunos ao longo de cada aula virtual e das atividades assíncronas compartilhadas em grupo de Facebook; e iv) identificar o uso e as possibilidades da utilização desse recurso na sua forma digital e com abordagem em ambiente virtual.

Para a implementação do desenho didático, inicialmente dividimos a reunião com os alunos em seis encontros virtuais na plataforma Google Meet e interações semanais através da rede social Facebook em um grupo fechado da correspondente turma. Porém, ao longo da prática do desenho didático, foi preciso conceber um sétimo encontro, curto, apenas para encerrarmos toda a experiência.

As interações no grupo do Facebook foram idealizadas pelas observações de Silva e Bairral (2020). Conforme esses autores, a dinâmica do Facebook é diferente do AVA, pois o Facebook avisa constantemente seus usuários sobre atualizações nas redes, e no AVA as atualizações das postagens são notificadas por *e-mail* ou na própria plataforma. Os seis encontros planejados antes da aplicação do produto foram subdivididos, conforme o Quadro 7.

Quadro 7 – Encontros e atividades com Torre de Hanói

Encontro	Objetivo(s)	Tempo estimado	Instrumentos de coleta
1: Descobrimo a TH digital	Atividade semanal: responder questionário; baixar 3 aplicativos. Aula: Discutir respostas do questionário sobre TH e manipular 3 aplicativos selecionados.	1 hora	Questionário Google Forms; aplicativos da TH.
2: Destacando vantagens e desvantagens da TH em aplicativos	Atividade semanal: escolher algum aplicativo da TH e trabalhar seu uso; trazer fatos interessantes e/ou questionamentos sobre o aplicativo e se é possível entender a lógica do recurso. Aula: Comentar sobre os aplicativos do Encontro 1 e sobre a atividade da semana; discutir a experiência dos alunos no recurso digital.	1 hora	Aplicativos da TH
3: Surgimento dos primeiros questionamentos	Atividade semanal: pesquisar sobre TH para trazer curiosidades ou questionamentos e responder perguntas curiosas no Facebook. Aula: dissertar sobre a atividade semanal e fazer questionamentos sobre o uso da TH; discutir dúvidas anteriores.	1 hora	
4: O uso positivo da ferramenta de gravação de tela	Atividade semanal: 1: Postar no Facebook alguma nova curiosidade ou descoberta na TH. 2: Utilizando um aplicativo da TH da preferência do aluno, gravar os movimentos da torre com 3, 4 e 5 discos e gravar também alguma jogada ou observação curiosa no aplicativo. Aula: discutir a atividade e refletir sobre o uso da TH digital e seu uso de forma remota.	1 hora	Postagens no Facebook e uso do gravador de tela; aplicativos da TH.
5: A descoberta do pensamento recursivo	Atividade semanal: analisar documento no qual constam respostas de alunos à descoberta do número mínimo de movimentos da TH. Os graduandos deverão escolher 2 de 8 grupos de alunos e analisar suas respostas e propor questionamentos. Aula: apresentar o trabalho e discutir cada dois grupos escolhidos.	1 hora	Documento do acervo do orientador com registro de seus alunos anteriores em atividade com TH.
6: Avaliação do aprendizado resultante dessa experiência	Atividade semanal: analisar um roteiro de aula com a TH para a prova e responder perguntas no Facebook. Aula: prova e síntese das discussões de todas as atividades e descobertas desses encontros.	3 horas	Apostila com um roteiro de aula sobre TH; prova.

Fonte: elaboração própria

Detalhes da estrutura dos encontros bem como registro de suas aplicações são apresentados nas seções seguintes. Decidimos realizar uma sequência de aulas como desenho didático, pois, segundo Barbosa e Santos (2020), essa prática representa um conjunto de atividades e estratégias com intervenções elaboradas por parte dos

professores, com o objetivo de fazer os envolvidos compreenderem o conteúdo com uma aprendizagem significativa e prazerosa. Foi o que desejamos ao longo de toda a pesquisa.

4.2 Procedimentos

Apresentamos agora o desenvolvimento dos encontros da pesquisa de implementação pedagógica relacionados ao trabalho de campo com os graduandos da turma de IE-395 (Ensino de Matemática II) do professor Marcelo Bairral, orientador desta dissertação.

Além do *design* do ambiente, mostramos o material bruto gerado na implementação. Esse roteiro de aula foi descrito antes da aplicação como suporte para ela.

4.2.1 Encontro 1: descobrindo a TH digital

Em momento anterior a esse encontro, os alunos baixaram três aplicativos da TH, descritos a seguir. Eles fizeram a manipulação dos aplicativos de forma individual, com uso do seu aparelho celular. Nesse início de interação, ao manipularem os aplicativos, eles puderam indicar seus pontos positivos e negativos, e elaboraram um breve texto comparativo entre eles.

Os aplicativos são: *Towers of Hanói*, *Hanói Towers 3D* e *Tower of Hanói*. Cada aluno teve a função de postar no *chat* do grupo do Facebook da turma uma pergunta e uma curiosidade sobre a TH no seu dispositivo de toque em tela. Planejamos também discutir a realização da tarefa em aula.

Em momento anterior, também entregamos um questionário composto de nove perguntas – mostradas no Quadro 8 –, via Google Forms, para obter um diagnóstico de quanto os futuros professores conhecem sobre o recurso da TH. Na nossa turma em questão, discutimos em aula as respostas dos discentes ao questionário, com auxílio do Google Meet.

Quadro 8 – Questionário Torre de Hanói

Perguntas do Questionário sobre a TH	
1.	Nome;
2.	Idade;
3.	Qual período ou semestre que se encontra?
4.	Você conhece (trabalhou ou só ouviu dizer) a Torre de Hanói?
5.	Se você respondeu não, vá para o final do questionário, se você respondeu sim, onde conheceu?
6.	A Torre de Hanói é um jogo?
7.	Diga pelo menos um conteúdo matemático explorado com a Torre de Hanói;
8.	Deseja fazer algum comentário?
9.	Você imagina o que é a Torre de Hanói?

Fonte: elaboração própria

Realizamos a discussão dessas respostas em sala de aula após elas serem recolhidas no Google Forms. Além disso, fizemos a manipulação no momento da aula – cada aluno com seu *smartphone* – e conversamos sobre a experiência de primeiro contato que o estudante teve com os aplicativos. O aluno que respondeu ‘não’ na questão 4 não respondeu as questões 5, 6, 7 e 8.

4.2.2 Encontro 2: destacando vantagens e desvantagens da TH em aplicativos

Nesse encontro o objetivo foi conversar sobre a atividade da semana, conforme descrito no Quadro 7, e, a partir daí, discutir com os alunos a experiência deles com a TH em mídia digital.

Levantamos os seguintes questionamentos: Com o que eles já conhecem da TH e através da manipulação dos aplicativos, é possível identificar quais as regras da TH? Qual é o objetivo da TH? O que um aplicativo desse recurso teria que apresentar para ser considerado um bom aplicativo para o uso da TH? Para esse último questionamento os alunos obtiveram respostas a partir dos aplicativos que encontraram e dos usados na primeira aula.

A partir das respostas dos alunos e do bate-papo, propúnhamos novos questionamentos e/ou novas tarefas. Conforme o Quadro 7, deixamos uma tarefa para a semana do Encontro 3, para ampliar os conhecimentos da turma sobre o recurso.

4.2.3 Encontro 3: surgimento dos primeiros questionamentos

Para esse encontro, os alunos pesquisaram na internet *sites* ou planos de aula sobre TH para sanar suas dúvidas ou gerar novos questionamentos no uso do recurso. Entendemos ser importante que o discente tenha bem estabelecidas as ideias de TH, seus objetivos e estratégias, para que posteriormente possa aplicar a um aluno.

Nessa aula, como planejado, pudemos ouvir dúvidas ou novos questionamentos sobre a fórmula que revela o número mínimo de movimentos para completar a TH com determinado número de discos.

Após a pesquisa foi possível refletir sobre os conteúdos que estão relacionados à TH, se apareceram nas pesquisas dos alunos, se eles tinham conhecimento desses recursos etc. Ao longo dessas aulas fizemos uma lista de questionamentos curiosos de acordo com as discussões no Google Meet para eles responderem no Facebook quando estivessem preparados.

4.2.4 Encontro 4: o uso positivo da ferramenta de gravação de tela

Na semana desse encontro foram propostas duas atividades: 1. Postar no Facebook alguma nova curiosidade ou descoberta sobre a TH digital; e 2. Utilizando o aplicativo da TH que prefere, o aluno deve gravar os movimentos da TH com três, quatro e cinco discos e gravar também alguma jogada ou observação curiosa no aplicativo selecionado. Essas atividades foram postadas no grupo fechado do Facebook. Sugerimos os aplicativos *Az Screen Recorder* ou *Du Recorder* para a gravação de tela, mas deixamos que os alunos optassem por utilizar outro aplicativo de gravação da preferência deles.

Na aula, cada aluno apresentou sua atividade semanal. Em seguida, os alunos que sabiam responder a dúvida de um colega ou comentar sobre a curiosidade do outro, assim o fizeram. Na segunda atividade, com a gravação de tela, queríamos obter novas respostas para os questionamentos dos alunos.

Discutimos (nós, professor e autora) essa experiência da atividade e fizemos os seguintes questionamentos: É possível perceber alguma estratégia para estabelecer o número mínimo de movimentos com certa quantidade de discos? Existe algum padrão na movimentação dos movimentos? Quais séries da educação básica podem ser contempladas com esse recurso? Houve dificuldade ao aumentar o número de discos?

Os alunos, nessa etapa, puderam responder à maioria dessas perguntas. Além disso, puderam comentar sobre suas experiências com a TH digital associadas ao recurso de gravação de tela.

4.2.5 Encontro 5: a descoberta do pensamento recursivo

A atividade dessa semana foi analisar um documento do acervo do professor e orientador desta pesquisa. Nesse documento constam registros de alguns de seus alunos de Ensino Médio e Ensino Superior sobre a descoberta do número mínimo de movimentos da TH. Os alunos da nossa implementação escolheram, livremente, o registro de dois dos oito grupos do documento, observaram suas respostas e alguns deles até propuseram questionamentos. O documento está disponível no Anexo A deste trabalho.

Na aula referente a esse encontro, os alunos apresentaram suas observações sobre os registros dos grupos escolhidos. Essa etapa foi feita via compartilhamento de tela, que é uma ferramenta disponível na interface do Google Meet. Ao compartilharem o documento que contém os grupos a serem analisados, os estudantes mostraram o contexto da resposta e seu parecer sobre a atividade.

Como havíamos (eu, pesquisadora, e o professor-orientador) planejado, ao final de cada apresentação destacávamos os pontos positivos da exposição e podíamos provocar os alunos com eventuais dúvidas que não haviam sido relatadas nas observações deles. Além da apresentação, essas atividades foram postadas no Facebook para serem observadas no diário de campo, presente neste capítulo.

4.2.6 Encontro 6: avaliação do aprendizado resultante dessa experiência

Para o Encontro 6, decidimos realizar uma prova, pois gostaríamos de verificar o desempenho dos alunos com a TH após todo o desenvolvimento desse desenho didático. O que chamamos de prova aqui é, na verdade, uma avaliação com recursos variados – como consulta à apostila *Aula 19 - Movendo discos, formando Torres e pensando indutivamente* (MACIEL *et al.*, 2006, e gravação de vídeos curtos correspondentes à Questão 5 – e questões baseadas nas opiniões dos alunos.

A prova foi baseada nos resultados dos encontros anteriores para a construção dos questionamentos e ainda contou com uma questão para ser resolvida no DMcTT de cada participante. Eles nos devolveram essa atividade/questão utilizando novamente o recurso de gravação de tela. Diante disso, a avaliação foi construída ao longo dos encontros e finalizada na Aula 6, com as entregas das avaliações via grupo virtual da turma.

Planejamos, em um primeiro momento, corrigir a prova com os alunos, comentar cada questão e sintetizar todas as ideias e questões das reuniões anteriores sobre o uso da TH digital em dinâmica *on-line*. Mas, pelo fato de os estudantes ainda necessitarem fazer gravações de tela com áudio, a prova nos foi devolvida no horário limite da aula, assim, não foi mais possível uma nova reunião no Google Meet nesse dia. Foi necessário um Encontro 7, apenas para refletirmos sobre todas as experiências e registrarmos o *feedback* dos alunos sobre os encontros anteriores.

4.3 Diários de Campo da Pesquisa

Nesta seção apresentamos as notas de aula de cada encontro realizado, com detalhes da experiência e registros dos alunos participantes, e as nossas intermediações na Turma IE-395 Ensino de Matemática II. Todos os encontros contaram com a supervisão e participação do professor da disciplina, orientador desta dissertação.

4.3.1 Relatos sobre a Turma IE-395

O trabalho sobre as TH ocorreu em dinâmica assíncrona (em um grupo no Facebook) e em encontros síncronos semanais no Google Meet. No Facebook, os dados foram produzidos mediante postagens e registros (individuais ou coletivos) enviados em documentos no formato docx ou PDF, vídeos de tela etc. No Google Meet, foram registradas interações no *chat* e interações orais via microfone. Reflexões da pesquisadora sobre esses encontros síncronos e assíncronos também foram feitas em seu diário. Em ambos os espaços, eu (autora-pesquisadora) e o professor Marcelo Bairral (professor-orientador) atuamos como mediadores. A Figura 6 representa a captura da página do grupo fechado do Facebook onde ocorreram as interações assíncronas.



Figura 6 – Captura de tela do grupo de Facebook
Fonte: autor desconhecido¹

A Figura 7 é um *print* de tela do Google Meet, plataforma na qual ocorreram as interações.

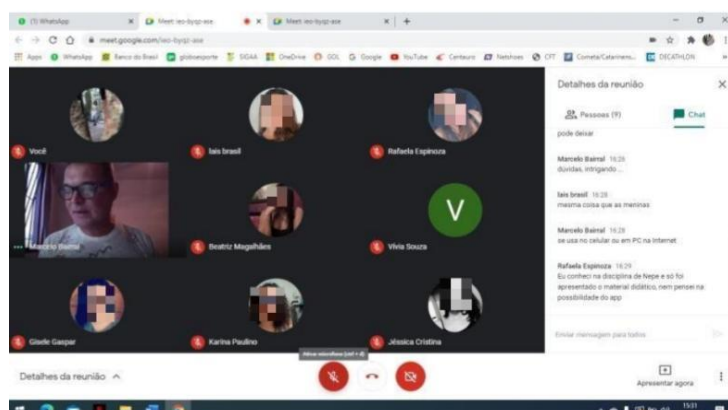


Figura 7 – Captura de tela da turma no Google Meet
Fonte: captura de tela da autora

¹ Disponível em: www.facebook.com/Ensino-de-matemática-II Acesso em: março 2021

A Figura 6 e a Figura 7 correspondem à composição de encontros que foram relatados na implementação. As aulas e as atividades envolveram comunicação entre os participantes e foram realizadas no aplicativo de reuniões e conferências Google Meet (atividades síncronas) e no grupo fechado do Facebook entre professores e estudantes (atividades assíncronas).

4.3.2 Diário de campo

NOTAS SOBRE A SEMANA 1

Em data anterior à aula, os alunos deveriam responder um questionário sobre TH e desenvolver um pequeno texto sobre suas experiências com três aplicativos do recurso. Detalhes dessa atividade serão desenvolvidos nos parágrafos seguintes. Para não identificar os alunos, usaremos de impessoalidade e faremos também o uso de artigos indefinidos.

A aplicação foi realizada no dia 10 de março de 2021 de maneira remota, através de reunião pela plataforma Google Meet. A turma contava com sete alunos, dos quais seis estavam presentes nesse dia. Os objetivos desse encontro síncrono eram que cada licenciando, após o uso prévio de 3 aplicativos da TH – *Tower of Hanói*¹, *Towers of Hanói*² e *Hanoi Towers 3D*³, todos disponíveis para Android e IOs –, indicasse suas (des)vantagens, trouxesse um questionamento e conversasse sobre o questionário que havia respondido, reproduzido no Apêndice B deste trabalho, mas conseguimos realizar apenas uma rápida conversa sobre o questionário, com ênfase somente na pergunta sobre se os alunos já conheciam o recurso, e a breve opinião deles sobre vantagens e desvantagens dos aplicativos. O encontro durou cerca de 1 hora e 5 minutos.

Quando questionamos os estudantes sobre as notas que fizeram em relação ao uso do recurso digital, o primeiro graduando a se manifestar disse que gostou de dois dos três aplicativos selecionados, por mostrarem imediatamente a contagem de movimentos de uma haste a outra, e disse perceber que é fácil relacionar o recurso a uma aula, mas que um deles apresentava um modo ‘randômico’ que gera dificuldades. Ele demonstrou não gostar do *Towers of Hanói*, por não ter variedade de cores e cujo *design*, na opinião dele, parece ser muito simples. O que chamou bastante atenção nesse aluno é que, pelo fato de ele conhecer o recurso, disse que é possível aplicar atividades nas quais o aluno deve construir uma tabela para identificar qual o número de movimentos mínimos para mover uma torre com ‘n’ discos, e, conforme as intervenções do professor, é possível chegar na expressão ‘ $m = 2^n - 1$ ’, onde ‘m’ representa a quantidade de movimentos mínimos e ‘n’ representa o número de discos.

Outras duas graduandas, que realizaram a tarefa em dupla, afirmaram não gostarem dos 3 aplicativos pelo simples fato de que não apresentam uma instrução sobre o modo de executar o objetivo do jogo – parece, segundo elas, que esses recursos devem ser usados por pessoas que já os conhecem e não necessitam, portanto, de instruções. Elas consideram o *Towers of Hanói*, em especial, ainda pior, por não ter variedade de cores. Um ponto positivo dos três aplicativos, na opinião delas, é o fato de qualquer pessoa poder

¹ Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=johan.moller.towerofhanoi> Acesso em: mar. 2021

² Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=ru.kadmium73.games.hanoi> Acesso em: mar. 2021

³ Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.A3dlogical.hanoitowerslite> Acesso em: mar. 2021

usar a TH, mesmo sem ter o recurso manipulativo, pois basta ter um dispositivo móvel para baixar um aplicativo de maneira gratuita.

Para a próxima semana, sugerimos que os alunos elaborassem, em duplas ou individualmente, uma breve descrição sobre algum aplicativo da TH à sua escolha, trabalhassem seu uso e trouxessem fatos interessantes ou questionamentos sobre ele, e se é possível entender a lógica do recurso.

Ao falarmos no Meet sobre o propósito da TH, questionamos os alunos se eles já conheciam o recurso, e foi possível notar que todos já conheciam, por contato na graduação, conforme relataram no questionário. Um aluno chegou a contar que, embora soubesse o número mínimo de movimentos de cada disco, não conseguiu atingi-lo em sua tentativa.

A seguir, transcrevemos as notas – publicadas no grupo do Facebook da turma – sobre o registro dos alunos ao manusearem os três aplicativos indicados.

Registro de uma dupla de alunos sobre a atividade “Acessar cada um dos *sites* abaixo e elaborar um texto comparativo entre os 3 *sites*”:

Baixamos e jogamos nos três jogos, todos são sobre a Torre de Hanoi. Percebemos que o jogo do 1º link, Tower of Hanoi, possui uma interface bem simples, possui um contador de movimentos, mas já começa com uma torre de 6 discos. O jogo do 2º Link, Towers of Hanoi, possui uma interface menos infantilizada, não é tão colorido e possui diferentes níveis, o jogador pode começar pela torre de 3 discos e ir jogando com mais discos gradativamente, mas ele não possui o contador de movimentos que seria importante para algumas atividades. Já o jogo do 3º Link, Hanoi Towers 3D, possui uma interface um pouco mais interessante, ela é em 3D e os discos são coloridos. Ele possui três modalidades, classic style (estilo clássico), puzzle style (estilo de quebra-cabeça). No classic style (estilo clássico), temos a torre convencional e começamos do nível 2 (dois discos) e vamos subindo o nível de acordo com nossos acertos. Além disso, ele possui o contador de movimentos e também um contador que mostra nosso melhor (no sentido de quantidade de movimentos utilizados). No puzzle style (estilo de quebra-cabeça), começamos no nível 2 (dois discos) e vamos aumentando e cada nível, a diferença é que os discos começam espalhados pelos três pinos e nós precisamos juntá-los em um único pino. Nessa modalidade, temos o contador de movimentos. Ainda podemos selecionar qual nível queremos jogar, se não quisermos ir de um em um, podemos selecionar qualquer nível, pelo set level (definir o nível).

Registro da mesma dupla de alunos sobre a questão: “Se você tiver que decidir qual(is) usar dizer qual(is) e o porquê”:

Escolheríamos o 3º Hanoi Towers 3D, pois ele tem uma interface interessante; possui o contador de movimentos (que para algumas atividades seria importante); possui tanto a opção de ir jogando de nível em nível, aumentando a dificuldade a cada nível quanto de escolher um nível específico para alguma situação específica; possui mais de uma modalidade de jogo.

Nesse registro podemos ver que a dupla optou por fazer um comparativo entre os aplicativos e definiu, segundo seu ponto de vista, o que era mais vantajoso, baseado no que eles gostariam de ver nos aplicativos. É importante perceber que eles gostaram do *Hanoi Towers 3D* pelo fato de o jogo possuir um contador de movimentos bem desenvolvido e por ser interessante utilizá-lo em algumas atividades, isto é, as escolhas de pontos positivos de cada aplicativo foram baseadas em utilizá-los como professores.

Registro de um dos alunos:

Os sites apresentados direcionam a três aplicativos sobre o jogo Torre de Hanoi, que se trata de uma atividade que consiste em trocar a torre de discos de uma trave para a outra em alterar a ordem de tamanhos, ou seja, nunca se pode colocar um disco maior em cima de um disco menor. Estes aplicativos mostram o mesmo jogo com a aparência, e recursos diferentes. O primeiro tem como ponto positivo o fato de ter os discos coloridos, e ser bem intuitivo. E como podemos aumentar os níveis, vemos que com a maior quantidade de discos, temos uma quantidade mínima maior de movimentos para resolver a Torre de Hanoi, o que nos permite ver o padrão numérico que se encontra na quantidade de movimentos. Já no segundo, não se foge muito da semelhança com o primeiro, porém tem como ponto negativo o fato dos discos não terem cores diferentes, o que atrapalha um pouco em relação a jogabilidade. Já o terceiro, a meu ver, é o melhor, pois além de ter os recursos dos anteriores, ele é em 3D, o que se aproxima muito mais da verdadeira Torre de Hanoi. Eu escolheria o terceiro, pois além de ser em 3D, ele tem um recurso do modo clássico, que é parecido com o primeiro e segundo aplicativo, e o puzzle style que posiciona os discos aleatoriamente nas traves, o que dificulta mais o jogo, e exige mais do pensamento para conseguir resolver.

As anotações desse estudante sugerem que ele também desenvolveu melhor a parte comparativa dos aplicativos, porém, diferentemente dos autores do registro anterior, optou pelo caminho de vantagem em relação aos desafios.

Atividade de outra dupla de alunos:

Para começarmos a nossa análise, é preciso falar que os três aplicativos não estão disponíveis para o sistema IOS, caso pensássemos em utilizá-los em alguma atividade, poderíamos ter problemas com o acesso. Os aplicativos analisados foram, tower of hanoi desenvolvido por Johan Moller, tower of hanoi desenvolvido por vkraushan e hanoi towers 3D desenvolvido por CatsProduction.Net. O primeiro aplicativo, logo ao abrimos é possível ver que não tem opção para trocar a língua, além disso não tem a possibilidade de desafios ou modos disponíveis, também não possui nenhuma instrução. Um ponto positivo é que o aplicativo respeita as regras de uso da torre convencional, no caso, peças maiores não ficam em cima de peças menores, mesmo tentando. Outro ponto positivo é a possibilidade de contar os movimentos feitos, somado a esse ponto, também temos a possibilidade de sair do app e ele salva as informações de alguma jogada anterior, portanto tu podes retomar de onde parou. O próximo aplicativo só tem opção horizontal, o anterior também tinha a possibilidade de girar de acordo com a orientação do celular, esse aplicativo possui instruções, mas são em inglês. Um ponto positivo é que possui níveis de dificuldade, mas por outro lado não tem a opção de contar os movimentos. Outra característica que reparamos é a tonalidade de suas peças, elas são monocromáticas, o que poderia dificultar a visualização para algumas pessoas. Ao terminar cada nível aparece um aviso, caso você cumpra com o mínimo de movimentos possíveis, ele diz que tu és ganhador, caso você cumpra com mais movimentos, ele dirá o seu resultado mostrando o mínimo. Para finalizarmos nossa análise, o terceiro aplicativo possui níveis de dificuldade de acordo com o número de discos, nele possui a possibilidade de classic style ou puzzle style, a diferença dos modos é que um embaralha as peças pelas hastes do material. Um ponto positivo, é a facilidade da movimentação das peças, através de cliques podemos movimentá-las, um ponto positivo para pessoas que tem alguma restrição motora. Além disso, também possui recurso para contagem de movimentos, mas infelizmente não

possui desafios. Concluimos que todos têm pontos positivos e negativos, mas nenhum possui algum modo acessível, para pessoas daltônicas por exemplo. Acreditamos que a falta das instruções faz com que um usuário deixe de explorar o aplicativo por não possuir algum objetivo para ser alcançado, logo o uso dos app é restrito para pessoas que possuem alguma mediação.

Em todos os registros, embora de forma bem simples, constou tudo o que foi pedido para os licenciandos revelarem sobre suas experiências nos aplicativos selecionados. Esses registros mostram uma versão mais detalhada do que as relatadas na aula do Google Meet.

NOTAS SOBRE A SEMANA 2

Essa aula ocorreu no dia 16 de março de 2021 com todos os alunos presentes. Os estudantes foram orientados a falar sobre seus registros da tarefa da aula passada postados no grupo do Facebook.

A primeira aluna que tomou a palavra disse que usou dois dos aplicativos da aula passada e notou que em um deles é permitido finalizar a Torre na haste intermediária, enquanto o outro não dava o jogo por concluído se a Torre não fosse transportada de uma haste a outra e terminasse na haste extrema. Orientamos essa aluna a utilizar mais aplicativos para verificar esse fato em outros exemplares, investigar qual deve ser o correto e trazer respostas na próxima aula, assim, poderíamos então estabelecer (ou não) uma das regras da TH.

Duas alunas – a mesma dupla que opinou sobre os aplicativos na aula passada – fizeram a atividade em dupla novamente e perceberam que um dos aplicativos tinha explicação sobre a jogabilidade, porém somente no idioma inglês. Com isso, os estudantes concluíram que o fato de o aplicativo não possuir opção de idioma pode desestimular novos usuários a continuar explorando a ferramenta.

O professor questionou os alunos sobre ser possível ou não identificar quais as regras do jogo com o que eles já conhecem da TH – eles aparentaram identificar duas regras principais. Dois alunos responderam que só se pode mover um disco por vez e outro respondeu que um disco maior não pode ser colocado sobre um disco menor. Diante disso o professor perguntou se alguém saberia dizer qual o objetivo de utilizar esse recurso. Houve alguns segundos de espera e, então, uma aluna abriu o microfone e afirmou que o objetivo era usar o menor número de movimentos ao transportar ‘n’ discos de uma haste a outra. Todos os outros alunos concordaram.

Continuando o bate-papo sobre a tarefa que os alunos realizaram, uma aluna relatou que, ao olhar os comentários dos serviços de distribuição de aplicativos (*Play Store* ou *Apple Store*), percebeu que grande parte desses comentários era de alunos que conheceram o recurso de alguma forma nas aulas de matemática e outra parte, de alunos que tiveram contato com ele através do exame da Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), e concluiu dizendo que é importante olhar os comentários antes de baixar um aplicativo. Ela selecionou um aplicativo, que “*dava estrelinhas*” ao concluir o desafio da Torre na menor quantidade de movimentos. Com isso, outro aluno disse também ter encontrado um exemplar bem lúdico, que mudava “*temas de fundo no aplicativo*”.

A seguir, apresentamos o registro dos alunos com os aplicativos especificados e respostas mais detalhadas, no Quadro 9. Nomeamos os pares Dupla 1, Dupla 2 e Dupla 3 como D1, D2 e D3, respectivamente; e o Aluno 1, que fez o registro individualmente, como A1.

Como eram muitas falas, o professor e eu entramos em um consenso quanto à montagem do Quadro 9, com as informações dos alunos sobre os aplicativos analisados e suas demandas para tornar mais visíveis os resultados dessas atividades.

Perguntei aos alunos quantos deles já tinham utilizado a TH em mídia móvel e nenhum deles a tinha usado dessa forma – todos eles apenas haviam tido contato com o recurso físico. Quatro alunos responderam que imaginavam que poderia existir uma versão digital e duas estudantes disseram que não achavam que existisse versão digital.

Quase ao final da aula, uma aluna abriu o microfone e perguntou por que a maioria dos aplicativos apresentava no máximo de 6 a 8 discos e não deixava livre para o jogador determinar a quantidade de discos. Devolvi a pergunta e questionei a turma sobre se mais alguém tinha essa dúvida, ao passo que outra estudante respondeu que, pela sua experiência, tinha visto que com 3 discos o número mínimo de movimentos era 7 e com 4 discos o número mínimo era 15, e que não lembrava qual era o mínimo com 5 discos, mas lembrava que passava de 30, e que não tinha tentado com 6 discos. Ela concluiu: “*parece que a quantidade mínima de movimentos aumenta exponencialmente*” – os outros alunos concordaram e o professor falou que poderíamos concluir essa resposta nas próximas aulas.

Para a próxima aula, deixamos os seguintes questionamentos: O que está por trás dos movimentos? Até com quantos discos é possível fazer os movimentos? Há mais alguma regra? Essa decisão de fazer questionamentos aos alunos em cada aula é baseada em Skovsmose (2000), quando o autor discorre sobre a correta intermediação para que o docente conduza os estudantes a perceberem certas coisas que os mantêm interessados no processo de investigação. Vemos no Quadro 9 uma síntese dos aplicativos utilizados pelos graduandos.

Quadro 9 – Notas dos graduandos sobre atividade do Facebook (Continua)

	Aplicativo	Sistema no qual está disponível	Como se apresenta o funcionamento?	Curiosidade	Idioma	Comentário
A1	Site Clube OBMEP – Torre de Hanoi ¹	Android e IOS	Apresenta explicação e informações sobre o recurso.	Apresenta o contexto histórico da TH. A ação de jogar é feita no GeoGebra.	Português	Há contagem de movimentos. O recurso revela a quantidade mínima de movimentos necessários.
D1	Torre de Hanói – liutauras stravinskas ²	Android e IOS	Não tem descrição do jogo e nem desafios.	O jogo é bem lúdico e colorido e apresenta 4 temas distintos. O aplicativo dá 3 estrelas quando o objetivo é atingido. Apresenta cronômetro.	Português	O menu inicial é simples e direto. Podemos escolher a quantidade de ‘discos’, mas o aplicativo se limita a 8 discos.

¹ Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/torre-de-hanoi/?fbclid=IwAR0fyr5xTsH4BWgb83FCMTiz1ERQDO4aho3YMfTws-n_SRSYZzhU4qHcn0
Acesso em: mar. 2021. (Android)

² Disponível em:
<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.if060051.towerofhanoi> Acesso em: mar. 2021. (Android)
<https://apps.apple.com/br/app/torre-de-han%C3%B3i/id1026838065> Acesso em: mar. 2021. (IOS)

Quadro 9. Continuação

D2	Hanói Enigma	Android	Tem a descrição do jogo apresentada de maneira simples.	A quantidade de discos representa os níveis a avançar no jogo, é possível concluir a torre na haste do meio e da direita.	Espanhol	É ressaltado, ao final da jogada, qual deveria ser o número mínimo de movimentos. Apresenta contador de movimentos.
D2	Tower of Hanói – Fernando Gonzales ¹	Android e IOS	Apresenta modo de jogar em inglês.	A mobilidade dos discos é legal pois basta arrastar o disco para a haste desejada. O jogo é dividido em fases: ao completar um nível, a fase seguinte é desbloqueada. Apresenta cronômetro. O jogo é concluído na haste da direita.	Inglês para Android	O <i>design</i> não é tão atrativo para o público infantil. Apresenta contador de movimentos e no início da jogada é revelada a quantidade mínima de movimentos.
D3	The Tower of Hanói – Yuki Honda ²	Android	Não apresenta explicação ou informações.	Apresenta contagem de movimento e é possível jogar no modo paisagem ou retrato.	Não apresenta	Não é possível selecionar a quantidade de discos; a interface é primitiva e há muito anúncio.
D3	Hanói Tower Fernando Gonzalez Desenvolvido para Ipad	IOS	Apresenta modo de jogar.	Discos diferenciados por cores e números. Possui cronômetros e pausa, além de movimentação por toque único.	Português	A interface é rebuscada. Não possui contagem de movimentos e apresenta alguns <i>bugs</i> . Não tem muita informação.
D3	Tower of Hanói – Shouhui Gi	IOS	Apresenta explicação.	Possui níveis de desafios; possui cronômetro e contagem de movimento e pode reiniciar a jogada.	Inglês	Esse aplicativo apresenta muitos anúncios.

Fonte: elaboração própria

NOTAS SOBRE A SEMANA 3

Para essa semana os alunos deveriam pesquisar sobre TH, a fim de trazer curiosidades ou questionamentos para a aula que ocorreu no dia 31 de março de 2021. Essa aula contou com cinco dos sete alunos.

No início, eles disseram terem encontrado atividades que revelavam uma expressão/fórmula algébrica para encontrar o número mínimo de movimentos para

¹ Disponível em:

https://play.google.com/store/apps/details?id=com.movilfin.TowerOfHanoiFree&fbclid=IwAR3UScW1taHu_jGxU8jNBDodXnYw2L-lPyTrL8wu-tVmrMcYqgM2gS_cEII Acesso em: mar. 2021. (Android)

Disponível em: https://apps.apple.com/us/app/tower-of-hanoi/id943981053?fbclid=IwAR0BTGhpx7OpALR_ekpvfaZpOdUgfbsCl2znPoHMfGwkjixuallvQPQYj3w Acesso em: mar. 2021. (IOS)

² Disponível em: https://apps.apple.com/us/app/tower-of-hanoi/id943981053?fbclid=IwAR0BTGhpx7OpALR_ekpvfaZpOdUgfbsCl2znPoHMfGwkjixuallvQPQYj3w Acesso em: mar. 2021. (IOS)

concluir a TH com determinados números de discos. O primeiro aluno disse que gostaria de entender como poderia chegar nessa fórmula intuitivamente, sem fazer grandes interferências, pois não sabia se a atividade em si deixaria isso claro.

Em sequência da fala anterior, uma aluna respondeu que olhou um *site* em que era trabalhado o conceito inicial de funções e os estudantes, a partir disso, construíam uma tabelinha. Depois disso, nas palavras dela, chegava-se em “*Uma fórmula que era 2 elevado a 'n' menos alguma coisa*”, demonstrada por indução no texto lido, mas a aluna afirma que seria complicado usar a indução nas séries da educação básica. Sobre isso, o aluno anterior concordou.

O professor perguntou se, antes de ele explicar para os alunos, eles mesmos já tinham clara a ideia da expressão do número mínimo de movimentos do recurso. Nesse momento, dois alunos disseram entendê-la superficialmente e uma aluna disse que no momento da leitura entendeu de forma precisa, mas que no momento da aula não se lembrava da ideia.

Houve uma discussão sobre a fórmula em questão e como ela pode surgir em sala de aula. Através da nossa experiência (minha e do professor), concluímos também que era melhor estudarmos mais sobre o funcionamento da TH e termos definido o número mínimo de movimentos de certa quantidade de discos e outras questões interessantes para serem exploradas com esse recurso, para depois pensarmos em como levar esse tópico para um aluno em sala de aula.

Uma outra estudante disse que achou interessante levar a atividade que observou para a sala de aula, pois é muito curioso começar com uma quantidade de peças menor e perceber qual o menor número de movimentos que fizemos com elas, para depois ir aumentando gradativamente a quantidade de peças e registrando quantos foram os movimentos das peças envolvidas, para poder chegar na expressão algébrica. Somente com a repetição os padrões poderão ser percebidos.

Como percebemos que os alunos ainda podiam explorar mais questões relacionadas à TH, deixamos duas atividades para eles realizarem durante a semana: Atividade 1: Postar no Facebook alguma nova curiosidade ou descoberta na TH; e Atividade 2: Utilizar um aplicativo da TH da preferência deles e gravar os movimentos da torre com três, quatro e cinco discos, gravar também alguma jogada ou observação curiosa da TH no aplicativo selecionado. Para gravação de tela, sugerimos os aplicativos *Az Screen Recorder* ou *Du Recorder*. Os alunos poderiam usar outros aplicativos de gravação de tela caso desejassem. A atividade deveria ser enviada no grupo do Facebook ou do WhatsApp até 14 horas do dia 7 de abril, de forma individual ou em dupla.

NOTAS SOBRE A SEMANA 4

Nessa semana, alguns alunos expuseram suas descobertas ou curiosidades sobre a TH no grupo do Facebook, conforme solicitamos na Atividade 1 da aula passada, acontecida no Google Meet. A Figura 8 ilustra parte das atividades postadas no Facebook.

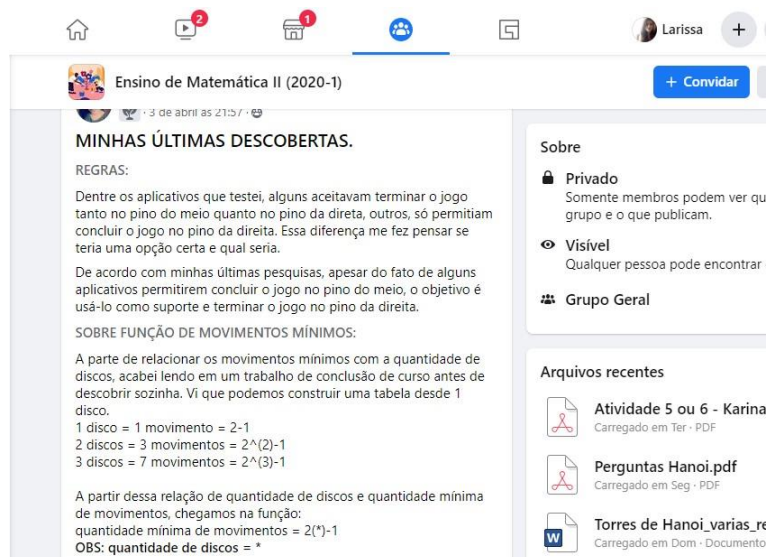


Figura 8 – Registro no Facebook da atividade semanal
Fonte: grupo do Facebook “Ensino de Matemática II”.¹

A Figura 8 apresenta as descobertas de uma aluna sobre sua dúvida anterior, relacionada a em qual haste se acaba o jogo com determinado número de discos. Ela concluiu que esta deve então ser uma das regras: transportar a torre da haste em que ela está para a haste da extremidade. Dessa forma, a haste intermediária serve então de suporte para esse objetivo.

A seguir, na Figura 9, a aluna registra sua pesquisa sobre a fórmula que determina o número mínimo de movimentos, realizada em um trabalho de conclusão de curso sobre o assunto.

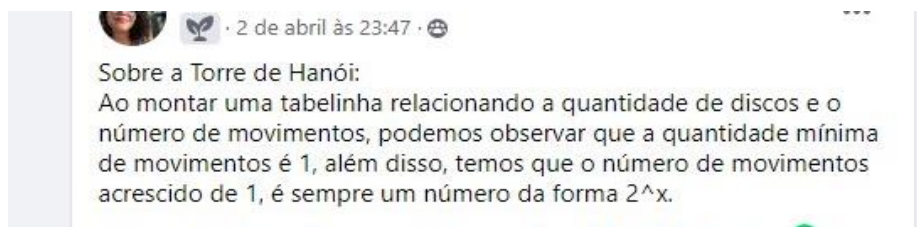


Figura 9 – Registro 2 da atividade semanal
Fonte: grupo do Facebook “Ensino de Matemática II”²

Essa aluna também registra descobertas sobre a expressão de movimentos mínimos, relacionadas às suas pesquisas, e conclui que o número mínimo de movimentos para cada disco, acrescido de 1, é um número da forma 2^x .

Embora ambas as alunas estejam certas em suas conclusões, ainda nos restam dúvidas sobre o quão embasadas estão tais conclusões no que diz respeito ao número mínimo de movimentos. Antes de apresentar a Atividade 2, mostramos a seguir o registro da Aula 4, que ocorreu no dia 7 de abril de 2021 no Google Meet.

¹ Disponível em: www.facebook.com/ensino-de-matematica-II Acesso em: ago. 2021.

² Disponível em: www.facebook.com/Ensino-de-matematica-II Acesso em: ago. 2021.

Iniciamos a aula falando sobre a Atividade 1, e a aluna que tinha postado sobre a questão das hastes nas quais terminaria a Torre expôs para a turma suas descobertas e questionamentos a esse respeito. Outras duas alunas concordaram com esse ponto de vista e acrescentaram que seria muito importante que essa regra fosse explicitada nos aplicativos, pois alguns deles permitem concluir os movimentos na haste central, mas a maioria não. Assim, não teria como os jogadores saberem qual é a regra, pois ela não está definida. Após fazerem algumas pesquisas na internet, alguns alunos entenderam o que a aluna que trouxe o questionamento concluiu.

Aproveitando o assunto de hastes da TH, o professor questionou os alunos sobre se as hastes não envolveriam alguma estratégia. Uma aluna respondeu que sim, pois, ao fazer a Atividade 2 desta semana, ela havia percebido que, quando o número de discos é par, os movimentos devem começar com o disco menor colocado na haste intermediária e, quando for ímpar, o mesmo deve ocorrer, porém na haste da extremidade. Assim, temos um caminho para realizar os movimentos mínimos de acordo com a quantidade de discos. Outros alunos aparentaram não perceber essa relação.

Após o relato da aluna sobre sua experiência com a Atividade 2, uma dupla disse que concluir a Torre com cinco discos ou mais é uma tarefa difícil, pois deve-se pensar muito nos movimentos para concluir o jogo na quantidade mínima de movimentos. Os alunos relataram que, com mais de seis discos, a quantidade mínima de movimentos corresponde a centenas e, portanto, a resolução fica mais difícil – o que retoma o tópico referente à dúvida da colega sobre por que não apresentar o quebra-cabeças com muitos discos.

O professor então perguntou sobre a fórmula de movimentos mínimos. Por que é ' $2^n - 1$ '?

As alunas cujas postagens aparecem na Figura 8 e na Figura 9 relataram o que elas escreveram nas publicações, e outro aluno respondeu no *chat* que a fórmula é assim pois cada valor pode ser escrito como potência de 2 e que precisamos olhar o número anterior. Questionamos os graduandos sobre o porquê de aparecerem potências de 2. Os alunos não revelaram nenhuma resposta.

O professor concluiu ter a sensação de que falta mais posição de questionamento nos alunos, para que entendam melhor suas dúvidas e encontrem o caminho para as respostas – ele considera que os alunos da sala de aula fariam vários questionamentos.

Podemos citar alguns exemplos de questionamentos que poderiam ter sido feitos: Por que temos potências de 2? Com o que a haste contribui para a TH? Se eu usar o recurso físico eu consigo perceber mais alguma coisa? Como posso usar um recurso físico com materiais de casa?

Alguns alunos deram a ideia de trabalhar a TH com discos de papelão, ou fazer as hastes com palitos de picolé em estrutura de isopor, entre outras ideias – e perceberam que a linguagem para falar sobre TH mudaria de acordo com o recurso que fosse utilizado para apresentá-la. Além disso, constataram que materiais recicláveis poderiam também ser uma alternativa de recurso mais barato caso a TH digital não estivesse disponível.

A partir daí, eu, autora, fiz aos alunos os seguintes questionamentos: o que caracteriza a TH como um jogo? Quais séries de ensino poderiam ser contempladas com o recurso? Disse que esses questionamentos apareceriam com o tempo, e que não precisavam ser respondidos naquele momento. Como exemplo disso, surgiu mais um questionamento: Qual disco mais se movimenta? Dois alunos responderam que o maior disco era o menos movimentado e o menor deles era o que mais se movimentava, pois, como o maior disco não poderia ser colocado por cima dos outros, ele se movia apenas para 'chegar' na haste da extremidade.

O interessante foi que uma aluna melhorou a resposta do colega, ao afirmar que poderíamos dizer que o disco maior se movimenta apenas uma vez: quando os outros discos são retirados de cima do maior, ele apenas se movimenta para a posição de destino.

Perguntei sobre a experiência dos estudantes com o uso da TH em aplicativo de gravação de tela (Atividade 2). Uma aluna, das mais participativas, relatou estar acostumada a editar vídeos e não ter tido problemas com essa parte, mas tinha precisado refazer várias vezes a jogada com cinco discos. Outro estudante, o que tinha respondido sobre qual disco se movimentava mais, concordou com ela e relatou ter acelerado o vídeo na parte de cinco discos, em razão da demora para a conclusão. Já outra aluna, que também consentiu com os colegas, utilizou o recurso de pausar as gravações enquanto pensava nos movimentos para cinco discos. Alguns alunos utilizaram o aplicativo de gravar tela que recomendamos e outros, que utilizavam IOS, por exemplo, utilizaram o que já vem instalado no celular.

Nessa conversa surgiram alguns questionamentos: Por que o tempo levado para concluir a jogada com cinco discos foi excessivo? Será que há alguma estratégia que ainda não esteja clara? Até que ponto o uso de aplicativos é um facilitador ou um limitador no ensino com a TH? Esperamos que nas próximas aulas essas questões e outras comecem a ser respondidas.

Para a próxima aula foi proposta a seguinte atividade, reproduzida no Anexo A deste trabalho: Os alunos devem analisar um documento do professor no qual constam respostas de alguns alunos à descoberta do número mínimo de movimentos da TH. Os alunos deverão escolher dois registros de oito grupos de alunos, entre Ensino Médio e Superior, analisar suas respostas e propor questionamentos.

Analisando o vídeo dos alunos, foi possível perceber que todos conseguiram realizar os movimentos com a TH com três, quatro e cinco discos. Conforme os próprios estudantes disseram, eles fizeram várias tentativas sem gravar e, quando conseguiam fazer os movimentos mínimos, enviavam os vídeos. Cada um utilizou um aplicativo à sua escolha e em dois deles houve uma certa demora para realizar os movimentos com cinco discos. Foram recolhidos, no grupo do Facebook, quatro trabalhos, correspondentes a cinco alunos.

Em suma, as reflexões resultantes da análise de cada vídeo revelaram mais detalhes que os próprios alunos tinham revelado na aula do Google Meet. Todos os estudantes realizaram a atividade com número mínimo, pelo conhecimento adquirido até essa aula sobre a TH. Sugerimos que, em uso com alunos, essa atividade com gravação de tela seja a primeira a ser aplicada. A dificuldade no primeiro movimento foi recorrente, o que fez os estudantes refletirem sobre estratégias, mesmo que alguns deles não tenham percebido isso. Houve também preocupação com a atratividade dos aplicativos, e um contexto de uso em aulas de matemática foi pensado pelos futuros professores.

NOTAS SOBRE A SEMANA 5

Na Semana 5, os alunos realizaram a atividade mencionada na seção anterior, em duplas ou individualmente, e apresentaram-na no encontro feito no Google Meet. As apresentações dessa atividade na plataforma foram feitas com a ferramenta de compartilhamento de tela. Estavam presentes na aula cinco alunos.

O primeiro aluno a se apresentar costuma realizar as atividades individualmente e iniciou comentando ter analisado os grupos 3, referente ao Ensino Médio, e 8, referente ao Ensino Superior. O graduando revela que o Grupo 3 parece ter resolvido diversas vezes o problema da TH, com uma quantidade maior de discos a cada vez, e análise da movimentação de cada disco, para obter a soma de movimentos totais com determinado

número de peças. Depois, foi feito um somatório dos movimentos de cada peça, quando o grupo percebeu que elas correspondiam a potências de 2, para obter a quantidade total de movimentos em cada momento.

Ao longo da fala do aluno, foram mostradas as imagens do seu trabalho, para ilustrar o que ele dizia. Além disso, o estudante disse que, se pudesse, proporia àquele grupo o questionamento sobre como, após fazerem as somas, tinham chegado, de maneira tão generalizada, à lei da função ' $f(x) = 2^x - 1$ ', pois esse 'salto' não tinha ficado claro. Ele nos indagou sobre se a tabela de movimentos mínimos que aparece em vários grupos tinha sido 'dada' ou construída pelos alunos, e o professor respondeu que o mediador apenas tinha sugerido a ideia da tabela, mas ela tinha sido construída pelos próprios alunos.

Sobre o Grupo 8, o aluno disse que seus integrantes encontraram o padrão a partir da diferença de movimentos que é feita em cada momento. Eles perceberam que o número de movimentos que se faz em determinado momento é sempre o dobro mais 1 do momento anterior. O aluno afirmou ter a impressão de que a prova por indução estava sendo feita 'ao contrário', pois o grupo tentava provar que a lei da função valia para todos os movimentos, através de movimentos anteriores. Ressaltou, ainda, que o grupo foi muito inteligente no passo 5, ao substituir cada expressão anterior e generalizar como 'n' a quantidade de discos.

Na sequência, apresentou-se uma dupla de graduandas que analisou os grupos 1, do Ensino Médio, e 8, do Ensino Superior. Sobre o Grupo 1, foi dito que os integrantes criaram uma tabela que revelava os números de discos e as jogadas mínimas de cada quantitativo. Em seguida chegaram na fórmula apresentada: ' $f(x-1) = \frac{(f(x)-1)}{2}$ '. As graduandas relataram que, para o grupo chegar em um número de jogadas mínimas específicas, os alunos precisariam saber o número de jogadas mínimas do antecessor e, diante disso, elas propuseram o questionamento: Caso não conseguissem completar a tabela de movimentos mínimos, seria possível descobrir outros valores de jogadas mínimas, com apenas a lei de formação proposta? Caso a resposta fosse não, a proposta seria calcular a diferença entre os números de discos sucessor com seu antecessor e perceber que o resultado seria um número da forma ' 2^x ' e, após isso, se subtraíssem uma unidade de cada um desses resultados, chegariam ao número mínimo de jogadas da tabela, e ela poderia ser completada.

Observamos que, para conceber as subtrações, também precisaríamos construir a tabela até certa quantidade de discos – e dessa forma também seriam necessários os resultados do sucessor e do antecessor –, porém, com a fórmula, é possível completar a tabela pelo fato de a fórmula ' $f(x) = 2^x - 1$ ' dispor o resultado de jogadas mínimas de acordo apenas com o número de discos e não com os números mínimos dos sucessores como o grupo propôs.

As graduandas disseram terem dúvidas na generalização do Passo 4 apresentado pelo Grupo 8 e que havia um equívoco na posição do parêntese, colocações com as quais concordou o primeiro aluno que se apresentou – ressaltamos que ele também avaliou o Grupo 8. De novo com a palavra, as meninas relataram que haviam entendido o pensamento do grupo, mas disseram que não sabiam se era válido generalizar daquela forma a passagem de um passo para outro, e que isso poderia ser feito pelo processo de indução, para mostrar a generalização.

Diante desse questionamento, o professor perguntou à turma que tipo de raciocínio o grupo tinha utilizado para mostrar a expressão matemática que gera o número mínimo de movimentos com 'n' número de discos. Uma das discentes da dupla relatou que poderia ser um pensamento intuitivo, mas o professor falou que era além disso, pois o grupo tinha começado a raciocinar e não apenas intuía de forma ingênua. Outra discente da turma arriscou dizer que o grupo pode ter usado o raciocínio indutivo, pois os alunos

acabavam descobrindo os valores mínimos seguintes até generalizarem, e o professor interveio, afirmou não se tratar de um pensamento indutivo e lembrou a estrutura do princípio da indução para argumentar.

Por fim, a outra estudante da dupla que estava se apresentando, por meio da conversa entre os colegas, concluiu que o grupo estava “*Olhando para frente sob o que eles sabiam anteriormente, portanto o pensamento é recursivo*”. Afirmamos que a resposta estava correta. Ressaltamos que outra estudante até associou o pensamento recursivo, corretamente, à sequência de Fibonacci.

Mediante a resposta da licencianda, explicamos que a TH apresentava uma sequência recursiva, e os colegas que tinham observado o Grupo 8 puderam entender a generalização feita e, principalmente, compreender que o grupo tinha apresentado a fórmula através do método recursivo – assim, foram respondidas suas questões sobre o grupo. Outra estudante comentou que só havia pensado em indução e que agora tinha podido captar o pensamento do grupo.

Devido a problemas de conexão, a última dupla a se apresentar pôde falar apenas sobre o Grupo 7, mas observou também o Grupo 2, do Ensino Médio. Foi falado que o Grupo 7 montou uma tabela para sete discos, detalhando a quantidade de movimentos de cada disco e somando esses resultados para obter a quantidade mínima final de jogadas. Após a elaboração da tabela, o grupo percebeu que os movimentos totais de cada disco formam a sequência de uma PG finita de razão igual a 2 e primeiro termo igual a 1, e ela, a aluna que estava se apresentando, destacou não ter percebido essa relação até o momento. Por exemplo: a quantidade de movimentos mínimos de uma torre com sete discos é a soma dos termos de uma PG finita com 7 termos, de razão 2 e primeiro termo igual a 1.

Os termos seriam ‘1’, ‘2’, ‘4’, ‘8’, ‘16’, ‘32’ e ‘64’ e a soma, 127. Além disso, os integrantes do grupo perceberam que a quantidade mínima de movimentos de uma torre com ‘n’ discos é igual à quantidade mínima de movimentos da torre anterior ((n-1) discos) mais 1. A dupla consentiu que somente pela leitura desse relato finalmente percebeu que o número de movimentos mínimos de cada disco poderia ser encarado como uma sequência numérica e, por isso, os grupos buscavam por padrões.

Uma dupla não compareceu à aula e, portanto, não apresentou seu trabalho.

NOTAS SOBRE A SEMANA 6

O encontro da Semana 6 seria para a realização da prova e uma síntese de ideias de todas as atividades desenvolvidas até o momento. Porém, realizamos apenas a prova e deixamos a discussão para ser feita em um sétimo encontro.

Para esta semana os alunos fizeram a leitura da apostila de Maciel *et al.* (2006), intitulada *Aula 19 – Movendo discos, formando Torres e pensando indutivamente*, para auxiliar na realização da prova. Todos os futuros professores entregaram a avaliação, e os resultados veremos a seguir.

No grupo fechado da turma no Facebook, a prova foi compartilhada pelo professor, e os discentes baixaram o arquivo, para resolvê-la no tempo máximo de três horas. Havia cinco questões, elaboradas por nós.

Na Questão 1 os graduandos deveriam analisar dois grupos de estudantes do Ensino Médio identificados na apostila mencionada e dizer em qual desses grupos estava presente o raciocínio indutivo, e justificar a resposta. Também foi pedido nessa questão que identificassem a presença do Passo 3 da prova por indução, ou seja, “que $P(n+1)$ também é verdadeira”.

Na Questão 1, a maioria dos licenciandos respondeu que o raciocínio indutivo aparece no Grupo 1, com o argumento de que foi mostrado válido o funcionamento da TH a partir de um número mínimo de movimentos com 1 disco, que os componentes do grupo vão aumentando até 'x' vezes e finalmente deduzem a fórmula, e que o terceiro passo da indução ocorre a partir do desenho com as indicações do número de movimentos mínimos em potência de 2, que é mostrado que vale para o sucessor e, então, vale para todos. Dois graduandos responderam que o Grupo 2 obteve o pensamento indutivo – com o argumento de que todos os passos da indução estavam evidenciados a partir da tabela construída, que mostrava que o número mínimo de movimentos é ímpar – e um deles não soube identificar o terceiro passo da indução.

Destacamos, com base nas respostas à Questão 1, que os alunos já conseguem entender bem melhor o contexto que envolve a TH, compreendem com clareza os conteúdos da matemática relacionados a ela e têm visão de diversos pensamentos para encontrar a função de número mínimo de movimentos. Porém, faltou consenso para identificar o tipo de raciocínio usado pelos grupos para encontrar os movimentos mínimos.

Na Questão 2 os alunos deveriam identificar qual o tipo de raciocínio matemático usado pelo Grupo 3 da apostila e justificar a resposta. Todos os estudantes conseguiram identificar o raciocínio recursivo para estabelecer a expressão geradora dos números mínimos de movimentos e justificaram dizendo que, para saber o mínimo de movimentos de uma certa quantidade de discos, dependia-se da quantidade de movimentos com o número de discos imediatamente anterior, o que caracteriza o raciocínio recursivo – com exceção de uma estudante que respondeu que o raciocínio era indutivo, mas não soube justificar sua resposta. Uma discussão semelhante a essa questão foi apresentada na Aula 5, e vimos que os graduandos então compreenderam.

Na Questão 3, o estudante lia a afirmação:

É importante enfatizar que não deve ser objetivo do professor estabelecer comparações do tipo saber mais ou menos. É relevante que os alunos percebam, analisem e respeitem o matematizar do seu colega e contribuam com a continuidade deste processo, pois ensino-aprendizagem é um processo contínuo de aprender a aprender e aprender a ser fortalecido pelas relações interpessoais, e não mera acumulação acrítica de conhecimentos.

Ele deveria dizer se concorda com ela ou não, levando em conta o uso da TH em sala de aula por parte do docente, além de destacar e comentar um aspecto que considerasse interessante sobre qualquer um dos grupos. Todos da turma concordaram com a afirmação e destacaram o aspecto interessante na estrutura do pensamento e raciocínio utilizado pelo Grupo 1 ou pelo Grupo 3.

Essa turma também estudou outros recursos ao longo desse período, além de TH. A Questão 4 abordou um deles: Material Curricular Educativo *On-line* (MCEO). Assim, nessa questão, os discentes apenas deveriam justificar por que a TH não é um MCEO. Todos consentiram basicamente que MCEO não é apenas uma lista de recursos didáticos *on-line*, já que MCEO envolvem publicação de atividades em plataformas com sugestões de utilização, além de que em nenhum aplicativo de TH há contato com o desenvolvedor.

Para a Questão 5, última da prova, os alunos deveriam escolher um aplicativo de TH para uso e relatar o motivo da sua escolha. Em seguida deveriam responder às seguintes questões: (a) Use o aplicativo de gravação e faça um vídeo explicando/movimentando um aspecto do teu aprendizado com a TH, seja a partir da Aula 19, seja em outro momento do seu estudo nesse jogo; (b) Agora relate como foi a tua

experiência com as gravações em tela usando um App; e (c) Comente também como você usaria esse tipo de recurso de gravação com seus alunos.

Os aplicativos escolhidos pelos alunos foram: *Hanói Tower 3D (extrabytes)*; *Hanói Tower* (Fernando Gonzales); *Torre de Hanói* - liutaura Stravinskaskas; *hanói Tower 3D – cats production.net*; e *Tower of Hanói (movilfin)*. Apenas o *Torre de Hanói* - liutaura Stravinskaskas foi escolhido por dois alunos – o restante optou por diferentes aplicativos, o que mostrou que cada estudante apresentava sua preferência específica tanto pelo *design* atrativo quanto pelo fato de haver regras, idioma em português ou fases (não iniciar com vários discos de uma vez). Os alunos destacaram como aspectos importantes o fato de ser possível desenvolver estratégias, a gama de conteúdos da matemática relacionados com TH, os diferentes níveis de escolaridade que ela abrange e a importância da clareza nas regras.

No Item b as respostas foram parecidas. Todos os alunos já tinham ouvido falar de gravação de tela, mas a maioria (quatro alunos) destacou nunca ter utilizado esse recurso – duas alunas disseram nem terem imaginado utilizar o recurso na área da educação. Todos se mostraram surpresos com a facilidade de uso e consentiram que usariam o recurso em sala de aula, pois em situação remota ele se torna bastante eficiente para acompanhar o desenvolvimento do aluno.

Por fim, no Item c, as respostas diziam que a gravação seria usada no ensino remoto, para empregar recursos de ensino em matemática como a TH com versão digital e acompanhar o desenvolvimento do aluno; em avaliação; e dois alunos propuseram gravar atividades desenvolvidas no GeoGebra para serem analisadas pelo professor, como avaliação ou como atividade em ambiente virtual remoto.

NOTAS SOBRE O ENCONTRO 7

Nesse encontro a minha participação, na turma, durou apenas 30 minutos. Isso porque a prova foi finalizada na última aula, então, usamos esse tempo apenas para uma roda de conversa sobre a experiência que os estudantes obtiveram ao longo desses encontros e para que eu, autora-pesquisadora, pudesse me despedir da turma. Abri oportunidade para que cada aluno que se sentisse à vontade ligasse o microfone e relatasse um comentário de sua experiência com os encontros.

Entre os comentários, destaco os de duas alunas que disseram terem se surpreendido com as potencialidades do uso da TH e que utilizarão o recurso futuramente em suas turmas, quando se graduarem professoras de matemática. Outro aluno relatou que achou a TH digital muito vantajosa, pois, com o avanço das tecnologias, cada aluno tem seu próprio *smartphone*, no qual pode baixar o aplicativo, e usá-lo durante a aula.

Por fim, o comentário que mais me chamou atenção foi o de uma aluna, muito participativa em todos os encontros, que afirmou estar bastante satisfeita em saber que é possível utilizar recursos lúdicos de ensino, mesmo em ambiente virtual. Ela alegou que, a princípio, achou que não funcionaria, pois nós, docentes, não estaríamos ao lado dela para vê-la movimentando a Torre e acompanhar seu desempenho, mas disse que se surpreendeu positivamente ao perceber que propusemos uma maneira de sanar essa dificuldade, e viu a possibilidade de, remotamente, construir conhecimento sobre a TH digital. Após as considerações da turma me despedi e coloquei-me à disposição dos licenciandos para eventuais dúvidas ou ideias referentes à experiência com TH.

5 ANÁLISE DO DESENHO DIDÁTICO

No Capítulo 4 apresentamos, a partir do diário de campo, a descrição de todas as aulas e as atividades correspondentes. Neste, faremos uma análise de cada etapa circunscrita ao produto educacional, particularmente, dos aspectos relevantes à aprendizagem da turma de Ensino de Matemática II e à elaboração do produto educacional, que mostramos no Apêndice A.

Com essa análise foi possível perceber que a TH digital contribui para a construção de conhecimento em matemática nos seguintes aspectos: raciocínio lógico e estratégias, identificação de pensamento indutivo e recursivo para a construção de sequências numéricas, paridade de um número inteiro por meio da movimentação de discos, entre outros. Além disso, pudemos encontrar na tecnologia um suporte para que fosse possível acompanhar o desenvolvimento dos discentes em cada etapa.

5.1 Orientação das Análises

O Quadro 10 apresenta uma síntese do desenho didático e quais aspectos serão utilizados na análise. Para fundamentar o estudo de cada aula, utilizamos Kaplún (2002, 2003 *apud* CORDEIRO; ALTOÉ, 2021), que discorre sobre fatores comunicacionais para a elaboração de produtos educacionais. Sob esses fatores, determinam-se três eixos estruturantes: conceitual, pedagógico e comunicacional.

Conforme Kaplún (2002, 2003 *apud* CORDEIRO; ALTOÉ, 2021), o eixo conceitual refere-se aos conceitos e os conhecimentos comunicados no produto. O eixo pedagógico tem por objetivo evidenciar como a prática pedagógica é articulada entre o material e a forma de interação dos sujeitos. Por fim, o eixo comunicacional é a concretização dos outros 2 eixos mencionados. É a articulação da prática pedagógica com o material e as interações entre os sujeitos, ao se comunicarem com o produto.

Para além do que estuda Kaplún (2002, 2003), observaremos também as potencialidades pedagógicas de cada encontro, isto é, o que percebemos de aprendizado por parte dos discentes, a relevância das suas descobertas etc. É o que vemos no Quadro 10.

Quadro 10 – Organização da análise (Continua)

Encontro	Objetivo(s)	Instrumentos de coleta	Aspectos em consideração
1	Atividade semanal: responder questionário; baixar 3 aplicativos e indicar suas (des)vantagens. Aula: discutir respostas do questionário sobre TH e manipular 3 aplicativos selecionados.	Questionário Google Forms; Aplicativos da TH.	Aspecto Conceitual (AC): analisar os relatos que apresentam aspectos da aprendizagem do aluno.
2	Atividade semanal: escolher algum aplicativo da TH e trabalhar seu uso, trazer fatos interessantes e/ou questionamentos sobre o aplicativo e discutir se é possível entender a lógica do recurso. Aula: comentar sobre os aplicativos do Encontro 1 e sobre a atividade da semana; discutir a experiência dos alunos no recurso digital.	Aplicativos da TH.	AC: analisar os relatos que apresentam aspectos da aprendizagem do aluno; observar curiosidades e questionamentos.

Quadro 10. Continuação

3	Atividade semanal: pesquisar sobre TH e trazer curiosidades ou questionamentos e responder perguntas curiosas no Facebook. Aula: dissertar sobre a atividade semanal e os questionamentos sobre o uso da TH; discutir dúvidas anteriores.		Aspecto Comunicacional (ACm): através das observações dos alunos com a TH digital em ambiente <i>on-line</i> , poderemos começar a identificar como o produto se comunica com eles. Observar os questionamentos sobre o funcionamento do recurso e as vantagens e desvantagens do uso no meio digital.
4	Atividade semanal: 1: Postar no Face alguma nova curiosidade ou descoberta na TH; 2: Utilizando um aplicativo da TH que preferir, gravar os movimentos da TH com 3, 4 e 5 discos e alguma jogada ou observação curiosa no aplicativo selecionado. Aula: discutir a atividade e refletir sobre o uso da TH digital e seu uso de forma remota.	Postagens no Facebook; gravador de tela e aplicativos da TH.	Aspecto Comunicacional e Pedagógico (ACm&P) (inovação) para observar AC: Identificar aspectos pedagógicos nos relatos dos alunos e fundamentar a experiência deles com gravação de tela.
5	Atividade semanal: analisar documento no qual constam respostas de alunos à descoberta do número mínimo de movimentos da TH. Os graduandos escolheram 2 de 8 registros de alunos e analisaram suas respostas. Aula: apresentar o trabalho e discutir cada 2 grupos escolhidos.	Documento do acervo do orientador com registro de seus alunos anteriores em atividade com TH.	Aspecto Pedagógico (AP) (registros anteriores de respostas de outros sujeitos): identificar o raciocínio lógico dos alunos ao analisar as atividades para identificar a construção do pensamento pedagógico por parte dos graduandos.
6	Atividade semanal: analisar documento no qual constam respostas de alunos à descoberta do número mínimo de movimentos da TH. Os graduandos escolheram 2 de 8 registros de alunos e analisaram suas respostas. Aula: apresentar o trabalho e discutir cada 2 grupos escolhidos.	Apostila com um roteiro de aula sobre TH; prova.	Momento de culminância conceitual (processos de raciocínios) e pedagógico (aspecto inovador com construção de conhecimento pedagógico) comunicacional (articulação entre os dois eixos e identificar como o produto se comunicou com eles); justificar o pensamento matemático identificado nas provas e nos vídeos e comparar a etapa com a dos vídeos para a experiência anterior.

Fonte: elaboração própria

Agora que definimos os olhares e as observações com os quais construímos nossa análise do produto educacional, reproduzido no Apêndice A desta dissertação, na seção seguinte abordamos com mais detalhes todos os aspectos relevantes observados no diário de campo que revelam contribuições para a construção de conhecimento e elaboração do produto.

5.2 Amplificações das Análises

Nas aulas 1 e 2 identificamos o aspecto comunicacional no desenvolvimento dos estudantes durante a aula e nas respostas às atividades. Iniciamos essa análise pelas respostas do questionário diagnóstico que propusemos.

Antes de iniciarmos a Aula 1, propusemos no grupo do Facebook na semana anterior um questionário com as perguntas apresentadas no Quadro 8. A escolha da presença de um questionário diagnóstico, para iniciarmos as atividades com TH, é baseada em Gil (1999), que diz que é importante para análise de dados da pesquisa científica a aplicação de questionários. Além disso, o autor aborda que o conhecimento de opiniões, ou conhecimento pessoal dos participantes da pesquisa, pode demonstrar interesses e expectativas da amostra e direciona a pesquisa de modo que seja realizada de forma mais eficiente.

Conforme Melo e Bianchi (2015), é importante que, ao construir um questionário, os autores da pesquisa se preocupem com as seguintes perguntas: O que se quer saber? Qual é o público-alvo? Existe padrão de estética? O questionário possui questões dúbias? Utilizamos essa base para a construção do nosso questionário e observamos nas respostas que, embora todos os envolvidos conhecessem a TH, seu conhecimento era superficial, já que todos eles tiveram o primeiro contato com o recurso em atividades do Ensino Superior, conforme mostra a Figura 10.

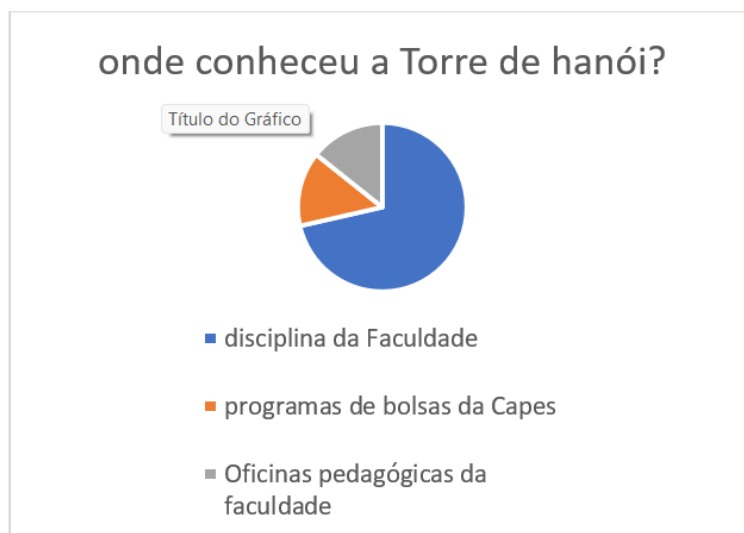


Figura 10 – Onde conheceu a Torre de Hanói?

Fonte: elaboração própria

Após o questionário ter sido respondido e o diagnóstico, discutido, conforme detalhado no diário de campo do capítulo anterior, observamos as respostas às atividades – a Atividade 1 era para indicar vantagens e desvantagens de três aplicativos de TH sugeridos e a Atividade 2, para escolher um ou mais aplicativos de TH e descrever a experiência com seu uso.

Em relação à Atividade 1, destacamos o seguinte trecho do relato de um aluno, referente ao aplicativo *Tower of Hanói*, de Johan Moller:

E como podemos aumentar os níveis, vemos que com a maior quantidade de discos, temos uma quantidade mínima maior de movimentos para resolver a Torre de Hanoi, o que nos permite ver o padrão numérico que se encontra na quantidade de movimentos.

Percebemos nesse relato que o aluno notou, através da manipulação, que existe um número mínimo de movimentos dos discos conforme se aumenta a quantidade deles. Além disso, embora o licenciando não saiba dizer qual padrão numérico pode ser relacionado ao número mínimo, é notável que existe esse padrão e que ele pretende descobri-lo ao longo das aulas.

Esse padrão pôde ser percebido porque o aplicativo em questão indica, quando o estudante termina de realizar seus movimentos, qual deveria ser a quantidade mínima de movimentos a se fazer, para qualquer quantidade de discos. Esse mesmo aluno relatou, durante a aula, que arriscava resolver os níveis seguintes tentando fazer o mínimo possível de movimentos, mas o aplicativo sempre informava que a quantidade mínima era ainda um número menor do que ele estava tentando.

Sobre esses aspectos, Silva, J. (2015) aborda em sua dissertação que a manipulação da TH é necessária pois os próprios discentes podem encontrar padrões e estratégias no desenvolvimento dos seus movimentos. O autor também comenta que, na manipulação, o aluno é capaz de fazer descobertas por si só e desenvolver seu próprio raciocínio. Fomentamos mais uma vez o que Oliveira, Calejon e Brito (2016) relatam – que a TH contribui para o raciocínio lógico, neste caso, para encontrar padrões a partir de estratégias emergentes.

Em relação ao relato do licenciando, Silva (2018) relata que, de fato, é difícil que o graduando seja capaz de realizar os movimentos mínimos na primeira tentativa, pois a maioria das propriedades do jogo é compreendida pela observação de padrões, por meio de sucessivas repetições. Sendo assim, é compreensível que esse discente, embora já soubesse que cada quantidade de discos correspondia a um número mínimo de movimentos, não conseguisse determinar as quantidades mínimas nas primeiras tentativas.

Outro relato que chama atenção e que também pode interferir na aprendizagem com esse recurso é o de uma dupla: “Outra característica que reparamos é a tonalidade de suas peças, elas são monocromáticas, o que poderia dificultar a visualização para algumas pessoas”.

Como não estamos tratando da TH física, a qual é conhecida pelos discentes, não é tão fácil a percepção de diferentes tamanhos de discos. A visão do material físico e o tato ajudam nessa percepção. A dupla refere-se ao aplicativo *Torre de Hanói Towers lite*. De forma virtual, as cores contribuem para uma melhor diferenciação dos tamanhos dos discos. Assim, o tom monocromático para os discos virtuais observado no aplicativo dificulta a aprendizagem, pois interfere na assimilação da regra de que um disco maior não pode estar sobreposto a um disco menor. Isso poderia induzir alguns estudantes ao erro e eles poderiam não compreender o objetivo da TH. A respeito disso, Ribeiro e Ponte (2000) relatam que recursos tecnológicos em si não promovem mudanças ou assimilações e que, se não aplicados corretamente em algumas situações, podem até ser prejudiciais ao aprendizado.

Na Atividade 2 vamos analisar aspectos da aprendizagem dos alunos, novamente com base em seus relatos. Lembramos que nessa etapa os acadêmicos destacaram seus aplicativos de preferência, que não necessariamente são os que indicamos na Etapa 1, e relataram livremente suas impressões e experiência com os aplicativos escolhidos e alguma nova curiosidade ou questionamento surgido desde a última experiência.

Vejamos este relato retirado do diário de campo (Capítulo 4), referente a um questionamento sobre a TH que surgiu na Aula 2:

Quase ao final da aula, uma aluna abriu o microfone e perguntou por que a maioria dos aplicativos apresentava no máximo de 6 a 8 discos e não deixava livre para o jogador determinar a quantidade de discos. Devolvi a pergunta e

questionei a turma sobre se mais alguém tinha essa dúvida, ao passo que outra estudante respondeu que, pela sua experiência, tinha visto que com 3 discos o número mínimo de movimentos era 7 e com 4 discos o número mínimo era 15, e que não lembrava qual era o mínimo com 5 discos, mas lembrava que passava de 30, e que não tinha tentado com 6. Ela concluiu: “parece que a quantidade mínima de movimentos aumenta exponencialmente”.

Essa dúvida é bastante interessante, se observarmos que nesse momento os alunos já entenderam que cada disco adicionado à TH gera um número mínimo de movimentos. Todavia, a graduanda não percebeu que com oito discos a quantidade mínima de movimentos é bem maior. Possivelmente ela não fez a tentativa e, por isso, não respondemos a sua pergunta imediatamente, para que ela pudesse explorar mais a situação.

Em contrapartida, uma outra graduanda tomou a liberdade de responder a dúvida da colega, inclusive, com uma linha de raciocínio interessante, embora sua conclusão não estivesse fundamentada. De fato, destacamos que a TH tem seus movimentos compreendidos em uma função exponencial. Percebemos nesse momento que, apesar de os alunos já terem essa noção, eles não tinham argumentos seguros para realizar tal afirmação.

Nesse desenho didático há dois modelos de interação: interação entre sujeito e sujeito e entre sujeito e dispositivo – a interação intersubjetiva ocorre entre aluno e aluno e também entre aluno e professor. Esses diferentes tipos de interação geram reações que, por sua vez, implicam aprendizagem. Kruger *et al.* (2005 *apud* BAIRRAL, 2017) destacam três vantagens das interações em atividades com dispositivos móveis: compreensão, coordenação e comunicação. Bairral (2017) defende que diferentes tipos de interação nas dinâmicas com DMcTT constituem um campo de significação e de produção de conhecimento.

Concordamos com essa afirmação – na qual se diz que diferentes tipos de interação contribuem para a aprendizagem –, pois no desenvolver das aulas foi possível observar que, através das manipulações em tela da TH e do momento de socialização com os colegas no Google Meet, os alunos puderam construir e ampliar seu conhecimento.

Em suma, o eixo conceitual nessas atividades analisadas constitui-se nas mensagens que são comunicadas pelo material (TH digital) e que fazem com que os alunos reflitam sobre aspectos da sua aprendizagem e os explorem. Por meio da capacidade do estudante de relacionar a TH com conteúdos da matemática – eles foram capazes de entender a TH como uma aplicação de sequências numéricas e relacioná-las ao pensamento recursivo, por exemplo, fazendo essa construção de conhecimento na interação com outros alunos – foi possível perceber que, através dessa etapa do produto, os estudantes puderam manifestar entendimento e conhecimento comunicado.

Nas aulas 3 e 4 pudemos identificar com mais presença o eixo comunicacional, e aspectos do eixo pedagógico puderam ser mais presentes na Aula 4. Com duas atividades desenvolvidas até a Aula 3, nessa mesma aula os alunos deveriam discutir suas impressões sobre as manipulações em tela até aquele momento. Além disso, eles ficaram encarregados de pesquisar curiosidades e questionamentos do funcionamento da TH. Essa dinâmica foi pensada em função do fato de os alunos não estarem conosco presencialmente, o que limita a resolução de dúvidas como ocorre em sala de aula. Além disso, precisávamos buscar estratégias para acompanhar o desenvolvimento da turma sem poder seguir presencialmente seus passos.

Como relatado no diário de campo do Capítulo 4, após as pesquisas os alunos descobriram a existência de uma igualdade matemática em que se determina o número mínimo de movimentos para realizar a TH com ‘n’ discos. Nenhum dos alunos soube

explicar o surgimento da expressão, embora alguns deles a tenham visto sendo demonstrada pelo princípio da indução. Outro ponto de análise é que pudemos perceber que quase todos os alunos direcionaram seus questionamentos ao modo de explicar a fórmula em sala de aula quando forem utilizar a TH como professores. Atribuímos esse ponto ao fato de os participantes serem estudantes de graduação em licenciatura em matemática.

Nesse momento, os alunos estavam questionando entre si sobre como obter a fórmula e como usar o princípio da indução para demonstrá-la. Uma aluna disse a outro estudante que a melhor forma de chegar ao número mínimo de movimentos era através de movimentos repetidos, porque toda vez que ela utilizava o aplicativo da TH para realizar as atividades semanais percebia coisas diferentes – como, por exemplo, melhor posição dos pinos ou a quantidade de movimentos mínimos que cresce quando são adicionados mais discos. Assim, ela concluiu que, se desenvolver mais familiaridade com a TH, ela pode entender a fórmula $(2^n - 1)$. Outros licenciandos concordaram com ela, e uma colega complementou dizendo que a melhor estratégia para ver os padrões é começar com uma quantidade de discos e ir aumentando gradativamente.

Percebemos aspectos comunicacionais a partir dessa aula, pois os alunos, por serem licenciandos em matemática, associaram os conceitos aprendidos com a discussão de estratégias e o olhar pedagógico. O produto comunicou-se com os estudantes nos momentos de intervenção dos professores, que direcionavam os licenciandos a novas descobertas, e também nos momentos de construção de conhecimentos através da percepção de padrões, quando os estudantes realizaram repetidas manipulações na TH e, ainda, quando visualizaram tanto estratégias para vencer o jogo quanto para usar o recurso com seus alunos futuros.

O aspecto comunicacional da produção de produtos, segundo Kaplún (2002, 2003 *apud* CORDEIRO; ALTOÉ, 2021), consolida-se por meio de escolhas que dialogam com experiências individuais e fortalece o universo de significações e sentido dos sujeitos. Assim, tanto para os envolvidos em determinado produto educacional quanto para seu público-alvo, o processo de consolidação da construção de conhecimentos constitui-se parte fundamental na produção de produtos educacionais.

Na Aula 4, os alunos realizaram previamente as seguintes tarefas: Atividade 1: Postar no Facebook alguma nova curiosidade ou descoberta na TH; Atividade 2: Utilizando um aplicativo da TH da preferência deles, gravar os movimentos da torre com três, quatro e cinco discos e gravar também alguma jogada ou observação curiosa da TH no aplicativo selecionado. Vejamos abaixo as análises sobre essa aula.

Na Figura 8 e na Figura 9, localizadas no Capítulo 4, pudemos ver que duas alunas postaram no Facebook suas últimas descobertas, e corroboraram, assim, o aspecto comunicacional iniciado na aula anterior. É importante ressaltar certos aspectos relevantes para a construção de conhecimento pedagógico, o que faremos a seguir.

A estudante cuja atividade foi mostrada na Figura 8 relatou sua dúvida: Em qual haste se conclui a TH com determinado número de discos? Ela concluiu que, embora tenha testado vários aplicativos, alguns dos quais permitem concluir a TH no meio e outros não, documentos pesquisados informaram-na que a haste ou posição central é um elemento de suporte. Devemos dizer que essa aluna não foi a única com essa dúvida, visto que a TH digital tem variações de acordo com o aplicativo. Na aula, discutindo sobre essa questão, os alunos concluíram que, se na regra dissermos “transportar os discos da haste inicial para a haste final ou haste extrema”, isso evita dualidades.

A outra descoberta da estudante foi em relação ao número mínimo de movimentos. Vejamos na Figura 11 o recorte da postagem em que ela manifesta sua descoberta após realizar pesquisas.

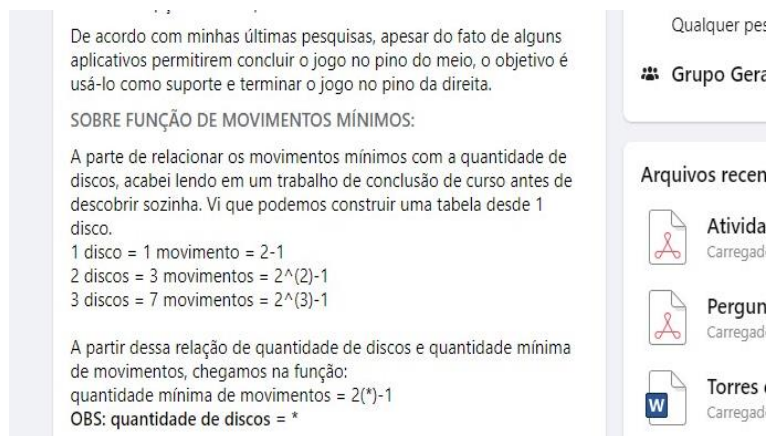


Figura 11 – Descobertas sobre o número mínimo de movimentos da TH

Fonte: grupo do Facebook “Ensino de Matemática II”¹

A licencianda relata ter observado, em um trabalho de conclusão de curso, de que forma é possível estabelecer a função de número mínimo de movimentos. Notou que, ao registrar quantos movimentos são realizados para cada número de discos, percebe um padrão, visto que o número obtido é sempre um número da forma ‘ 2^x ’. Assim, observando os padrões, é possível obter a relação de número mínimo.

Tal observação também foi feita por outra aluna, cuja atividade foi mostrada na Figura 9. Ela conseguiu construir o conceito de que podemos obter a fórmula de número mínimo de movimentos da TH ao observar que sempre que tomarmos o número mínimo de movimentos e acrescentarmos 1, teremos um número da forma ‘ 2^x ’.

Segundo Oliveira (2019), existem várias maneiras de chegar na fórmula de número mínimo de movimentos, e o aluno, por si só, é capaz de fazer essa generalização, que não é um processo simples. Assim, a manipulação da TH, tanto de maneira remota como presencialmente ou na sua forma física ou digital, deve ser usada de maneira correta, na qual os sujeitos tenham possibilidades de explorá-la e fazer generalizações.

Começamos o nosso quarto encontro, então, discutindo os questionamentos trazidos. Um aluno da turma disse que, ao ler o questionamento da segunda colega, também consegue perceber que o número mínimo de movimentos para cada quantidade de discos é sempre o dobro do anterior mais 1. Pergunto se mais alguém percebeu essa relação e mais uma aluna concorda. Os demais relataram não terem reparado nisso antes. Concluimos que existem vários pensamentos envolvidos no processo de obter a relação de movimentos da TH. Eu e o professor planejaremos uma atividade cuja aplicação já havíamos previamente cogitado, que contribuirá verdadeiramente nesse processo de construção pedagógica dos estudantes.

Sobre a conclusão do aluno citado no parágrafo anterior, destacamos novamente Oliveira (2019), que afirma que, dentre as formas de chegar ao número mínimo de movimentos para ‘n’ discos da TH, existe a forma em que se utiliza o pensamento recursivo. A recorrência é uma das formas de generalizar a ideia de números mínimos, mesmo que, em um primeiro momento, o aluno não compreenda que está utilizando a recursividade.

Outro ponto relevante da construção de conhecimento dos alunos nessa aula foram as estratégias que os próprios estudantes perceberam ao manipular o aplicativo: uma aluna

¹ Disponível em: www.facebook.com/Ensino-de-matematica-II Acesso em: nov. 2021.

respondeu que, ao manipular o recurso, percebeu que, quando o número de discos é par, os movimentos devem começar com o disco menor posto na haste intermediária e, quando for ímpar, o mesmo deve ocorrer, porém na haste da extremidade. Gusmão Filho e Castro (2019) afirmam que o uso de jogos de estratégia para o ensino contribui para o desenvolvimento de capacidades matemáticas e o desenvolvimento social. Os autores ainda afirmam que, através desse jogo, os alunos são capazes de formular hipóteses por meio da experimentação e dos esboços.

Mais uma vez citamos Oliveira (2019, p. 19), quando explana suas conclusões sobre a estratégia observada pela aluna:

É possível notar um padrão referente à paridade com a primeira jogada do menor disco, quando o total de discos é ímpar o menor disco inicialmente vai para haste C, em seguida para haste B, por fim haste A, seguindo a sequência (C, B, A, C, B, A, ..., C). Caso o número de discos seja par, a sequência de movimentos muda. O menor disco inicialmente vai para haste B, depois para haste C, depois A, então a sequência fica (B, C, A, B, C, A, ..., B, C).

Percebemos que Oliveira (2019) se refere à Haste B como haste intermediária e à Haste C como haste extrema/final. Dessa forma, a estratégia foi corretamente percebida pela aluna e por outros colegas.

Recebemos também, com referência a essa aula, quatro vídeos correspondentes à gravação de tela. Os alunos fizeram movimentos com três, quatro e cinco discos na TH digital, em aplicativo de sua escolha.

O recurso de gravação de tela, conforme Assis (2020), permite que seja possível acompanhar e analisar atividades realizadas na tela de um dispositivo móvel. Pedimos aos alunos que baixassem algum aplicativo da TH de sua preferência e gravassem os movimentos do jogo, e em seguida narrassem suas ações e curiosidades.

Com isso, queríamos investigar quais são as percepções e as dúvidas dos alunos quando realizam os movimentos, uma vez que remotamente não conseguimos acompanhar com precisão o desenvolvimento dos estudantes. Assim, pretendemos mostrar ao leitor, com os relatos a seguir, sobre os vídeos que recebemos dos alunos, que é possível trabalhar, mesmo de forma remota, com recursos de ensino de matemática que são comuns em ambiente presencial. Pediremos novamente uma tarefa semelhante a essa na prova, mas com a narração dos alunos sobre as atividades.

Vídeo da aluna 1:

No vídeo foi possível perceber a realização das movimentações com três, quatro e cinco discos com a quantidade mínima de movimentos. Para a Torre com três e quatro discos a movimentação da aluna foi rápida, porém a movimentação com cinco discos foi mais demorada e houve alguns momentos de pausa para raciocinar para onde os discos deveriam ir. Entendemos que esse é um processo natural, visto que, quanto maior a quantidade de discos, maior a quantidade de movimentos. Além disso, a licencianda relatou no Facebook, após enviar seu vídeo, o que notou ao fazer as tentativas para gravá-lo:

Notei que para cumprir o desafio com número mínimo de movimentos, quando os discos são em números pares, devemos movimentar o menor disco primeiramente para a haste do meio, e quando os discos são em números ímpares, devemos movimentar o menor disco para a haste do canto (a terceira) primeiramente.

Assim, é possível notar que o vídeo contribuiu de forma positiva para essa aluna, pois, ao se preparar para a gravação de tela, ela notou uma relação de estratégia. Essa atividade foi enviada antes de ocorrer o Encontro 4, no qual mais uma aluna obteve essa percepção.

Conforme Silva (2018), os alunos são capazes de construir estratégias, principalmente se estiverem em um processo de repetição e avaliação. A estratégia descoberta pelas alunas é relatada por esse autor, que ainda afirma que ela é essencial para concluir a jogada com o número mínimo de movimentos. Como os alunos sabiam que teriam seus vídeos avaliados, possivelmente foram estimulados pela repetição (gravar até ficar bom para envio) e pela avaliação que seria feita.

Vídeo da aluna 2:

No vídeo em questão, a aluna também realizou as movimentações necessárias com movimentos mínimos, mas hesitou na primeira jogada, o que revela uma reflexão sobre onde colocaria o disco menor para realizar os movimentos. Após isso, foi mais fácil a conclusão da Torre com três discos. Para cinco discos, também, naturalmente, houve pausas, mas a atividade foi concluída. A aluna utilizou efeitos sonoros, pois relatou que isso acrescenta mais ‘animação’ à atividade e rompe toda a questão da seriedade do desafio, o que faz com que a atividade seja encarada como mais atrativa.

O aspecto lúdico da atividade é relatado por Silva, J. (2015), que disserta sobre a ludicidade influenciar positivamente no processo de aprendizagem e construção do conhecimento. Nesse relato podemos ver que a aluna pensou em realizar a atividade e em como ela pode ser encarada por alunos em uma eventual aplicação em turma. Além da questão de compreender o recurso, também mostrou interesse na didática do seu uso para uso em sala de aula.

Vídeo de uma dupla de alunas:

Esse vídeo apresenta o desenvolvimento da atividade com uma dupla de alunas que utilizou um aplicativo de TH com elementos interativos, isto é, nesse aplicativo os discos são *emojis* de WhatsApp (Figura 12) e as hastes assemelham-se à madeira. Na etapa com três discos houve pausas para decidir em que haste deveria ser colocado o primeiro deles. Para o movimento de quatro discos, a base da TH apresentava-se como uma parede de pedras, com hastes semelhantes a barras de ferro e discos como pneus (Figura 13). Também houve demora para iniciar o movimento com o menor disco (pneu) e mais algumas pausas no decorrer dessa etapa.

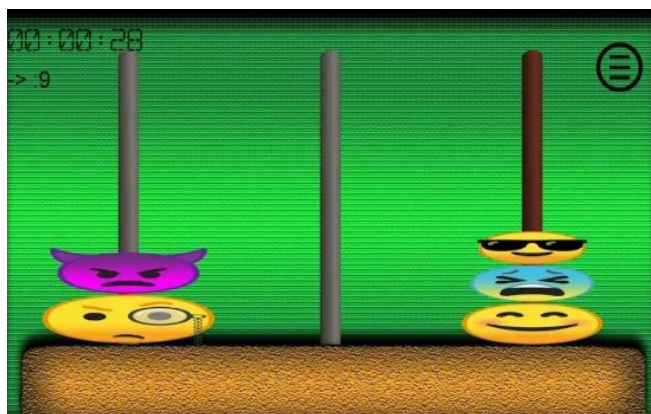


Figura 12 – Screenshot de vídeo com TH

Fonte: aplicativo *Torre de Hanói* – Google Play Store¹



Figura 13 – Screenshot de aplicativo TH

Fonte: aplicativo *Torre de Hanói* – Google Play Store

A passagem com cinco discos é novamente dificultosa, mas há sucesso na conclusão, com pausas em momentos específicos. Mais uma vez a dupla optou por mudar o design da TH, e questionei na aula, que ocorreu na plataforma de reunião do Google Meet, quais impressões elas haviam tido da atividade e o que tinham achado de interessante no aplicativo. Uma delas respondeu que a passagem com cinco discos era mais difícil e que tinha gravado várias vezes, pois não estava conseguindo realizar a atividade com cinco discos no menor número de movimentos.

A respeito do aplicativo, a mesma aluna da dupla respondeu que poder trocar o visual da TH demonstra que seu uso em tecnologia permite dinâmica e modernidade. Por mais que, nas palavras dela, “*seja bobo trocar de tema*”, isso deixa a interatividade com o recurso mais interessante para os alunos que tenham dificuldade em matemática, o que não é possível perceber no material manipulativo. Além disso, com as trocas de tema, foi possível perceber que a configuração com pneus deixa confusa a percepção de qual disco é maior ou menor, o que dificulta ainda mais a conclusão do recurso.

Vídeo de uma aluna:

Esse é o último vídeo de tela localizado no grupo fechado do Facebook. Nele, a TH não apresenta hastes (Figura 14), pois os discos, coloridos e de tamanhos diferentes e facilmente notáveis, movimentam-se uns sobre os outros, de acordo com o toque na tela. Esse ponto levou-nos a refletir sobre a linguagem que utilizamos ao abordar com o aluno o recurso de Hanói. Estamos acostumados com o uso em material manipulativo, com a presença de hastes/pinos e discos. Porém, assim como foi pensado em adaptar esse recurso para uma mídia móvel, a linguagem também deve ser adaptada. Nesse contexto, podem ser formados diversos formatos de TH, e se esse for o primeiro contato do estudante com o recurso, a forma de abordá-lo também é um detalhe importante.

¹ Disponível em: <https://play.google.com/store/apps/details?id=com.if060051.towerofhanoi> Acesso em: fev. 2022.

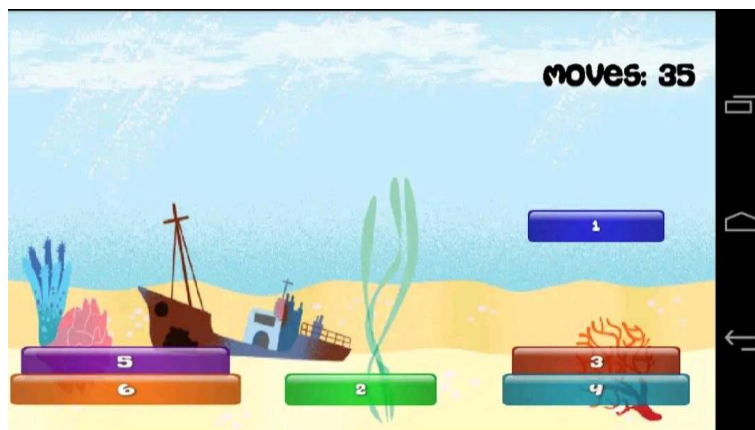


Figura 14 – TH sem hastes ou pinos
 Fonte: captura de tela de uma aluna da turma

Expressões como ‘mover os discos’ e ‘utilizar as hastes’ não fariam sentido nessa configuração. Essa aluna relatou que o fato de o aplicativo já afirmar que existia uma solução melhor, quando ela não concluiu a TH com o número mínimo de movimentos, fez com que ela gravasse a tela diversas vezes até conseguir esse objetivo e entender que havia uma lógica para a movimentação dos discos. Assim, podemos concluir mais uma vez que a repetição de movimentos ajuda na construção de conhecimento por parte dos alunos, e a gravação de tela possibilita essa dinâmica.

Sobre as gravações de tela, podemos destacar suas inúmeras possibilidades para a construção pedagógica em atividades com dispositivos móveis com toque em tela. Assis (2020) destaca que o uso do recurso de gravações de tela tem grande potencial para a análise de dados em uma pesquisa, visto que esse recurso possibilita revisitar situações didáticas quantas vezes forem necessárias, devido à versatilidade de opções disponíveis, como a captura da tela, áudio e rastros, quando for possível.

Concluimos que nessa etapa é possível perceber o aspecto comunicacional para a elaboração desse produto, pois, assim como Kaplún (2002, 2003 *apud* CORDEIRO; ALTOÉ, 2021) relata, nesse eixo são integrados os eixos conceitual e pedagógico para obter a realização do produto educacional. Os alunos construíram conceitos e estratégias tais como: definir quais movimentos têm que ser feitos no início das jogadas para obter o número mínimo com cada disco; e observar que a sequência de movimentos mínimos passa por números que, somados a uma unidade, são escritos como potências de 2. Além disso, nós, aplicadores, pudemos descobrir uma outra forma de comunicação com o produto, na qual o aluno expressa suas descobertas enquanto utiliza a TH digital.

Devido a tantas possibilidades desse recurso, decidimos utilizá-lo mais uma vez na Aula 6. Para a Aula 5, propusemos a seguinte tarefa: analisar documento, reproduzido aqui no Anexo A, no qual constam respostas de alunos à descoberta do número mínimo de movimentos da TH. Os licenciandos escolheram dois de oito grupos de alunos do documento e analisaram suas respostas.

Assim, no quinto encontro, os estudantes analisaram esse documento e fizeram suas escolhas sobre quais grupos, dos que ali constavam, iriam analisar. Todos eles escolheram um grupo do Ensino Médio e outro do Ensino Superior. Vamos destacar apenas dois registros de alunos que nos dão elementos mais relevantes para esta análise, e também temos a intenção de não deixar nossas notas sobre essa atividade muito extensas.

Nosso primeiro registro, postado no Facebook, foi de um aluno que costuma fazer as atividades de forma individual. Ele escolheu os grupos 3 (Ensino Médio) e 8 (Ensino

Superior). A Figura 15 é uma ilustração de como recebíamos essas atividades no grupo do Facebook.

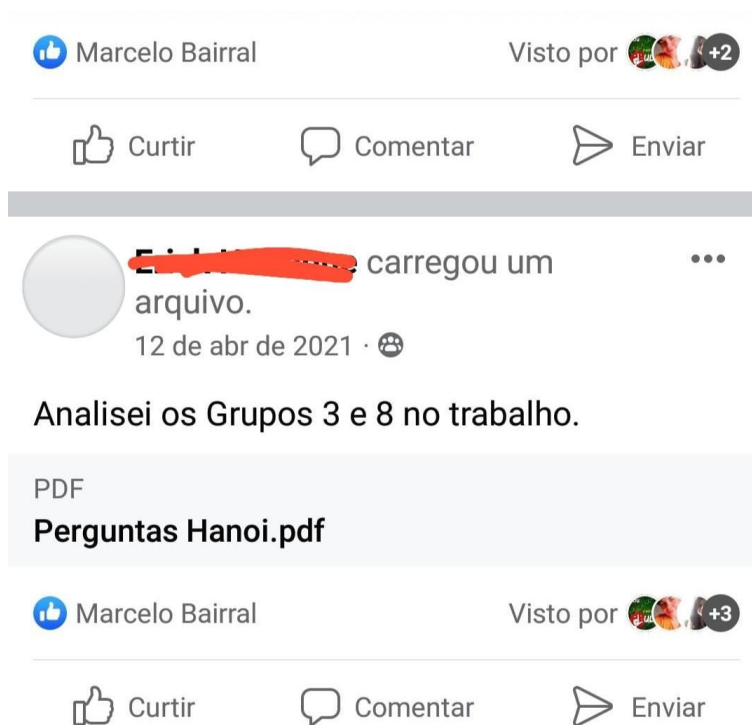


Figura 15 – Recebimento da atividade da Aula 5

Fonte: acervo dos pesquisadores

No arquivo em formato PDF enviado por esse aluno, visto na Figura 16, ele relata que percebeu, pela repetição de movimentos, que o Grupo 3 – presente no documento analisado, que está mostrado no Anexo A desta dissertação – foi aumentando gradativamente a quantidade de discos, e analisando separadamente quantas vezes cada disco se movimentou; ao somarem as quantidades, eles determinaram o número mínimo de cada disco, e perceberam se tratar de potências de 2 subtraídas de uma unidade.

MOVIMENTOS

O que os levou a perceber que o aumento de movimentos de para o disco menor, acontece quando aumentamos o número de discos. E além disso, o crescimento é exponencial, pois quando se passa de um momento para o outro, cada disco passa a ter que fazer duas vezes a quantidade de movimentos do que no momento anterior.

Em seguida, eles fizeram o somatório de movimentos feitos por cada peça no momento em questão, obtendo assim a quantidade total de movimentos em cada momento.

Exemplo:

1º momento: 1 movimento = 1 movimento total

2º momento: 2 movimentos + 1 movimento = 3 movimentos totais

3º momento: 4 movimentos + 2 movimentos + 1 movimento = 7 movimentos totais

4º momento: 8 movimentos + 4 movimentos + 2 movimento + 1 movimento = 15 movimentos totais

O que os levou a perceber um padrão em cada momento, e com isso encontrar uma função que descrevesse os movimentos totais em função do número de peças em cada momento.

$$f(x) = \underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 (\dots)}_{\text{2 VEZES}} = 2^x - 1$$

b) O grupo optou por utilizar da tabela e de desenhos para facilitar a visualização das ideias e padrões que eles perceberam. Mas não foram muito claros no momento em quem eles determinaram

a equação da lei da função.

Figura 16 – Registro do aluno perante atividade da Aula 5

Fonte: acervo dos pesquisadores

Conforme a Figura 16, podemos perceber que o aluno refez os passos do grupo e deixou a reflexão de que ele não tinha entendido como o grupo concluiu que os números encontrados eram potências de 2 subtraídas de uma unidade – se tinha sido pela observação da sequência de números mínimos ou pelo princípio da indução – e, por isso, ele tentou concluir o pensamento pelo princípio da indução e recorreu à ajuda de pesquisas no Google para auxiliá-lo na compreensão desse pensamento aplicado às movimentações da TH, de modo que foi possível para ele entender de forma mais objetiva o pensamento dos alunos.

Destacamos como um ganho pedagógico dessa atividade o fato de que ela instigou o aluno a procurar resolver o problema da TH através do pensamento de outros alunos. Ao analisar o documento, ele sentiu a necessidade de buscar construir seu conhecimento sobre a TH por meio do que foi registrado pelo grupo. Ao apresentar o trabalho para a turma, o aluno demonstrou satisfação de poder ter entendido qual tinha sido o pensamento dos alunos do grupo por meio dessas duas atividades.

Agora vejamos a atividade de uma dupla que analisou os grupos 2 e 8. Sobre o Grupo 2, as integrantes da dupla reforçaram que não saberiam dizer se consideram válida a forma como os alunos tinham explicado o funcionamento da relação da TH, uma vez que era necessário sempre saber o número de movimentos com a quantidade de discos anterior para saber o número mínimo de jogadas para o próximo.

Questionamos: por que não poderia ser válido? Ao passo que as alunas refletiram e disseram que, em vez de dizerem que poderia não ser válido, diriam que “*não sabem se foi a melhor forma*”. Deixamos as alunas seguirem sua apresentação para a análise do Grupo 7. Sobre esse grupo, elas fizeram considerações, conforme a Figura 17.

Não entendemos porque o grupo colocou a última informação, sobre matriz. Ficou parecendo “apenas” mais uma observação, sem uma conclusão final.

Foi muito interessante essa observação da Progressão Geométrica, não tínhamos visto esse tipo de observação em nenhuma de nossas pesquisas e também não tínhamos reparado essa relação.

PERGUNTA: Vocês conseguem, a partir das informações encontradas sobre a Progressão Geométrica, encontrar uma fórmula para calcular a quantidade de movimentos mínimos para uma Torre de Hanói com n discos?

Figura 17 – Registro de uma dupla sobre a atividade da Aula 5

Fonte: acervo dos pesquisadores

Podemos perceber que a dupla manifesta bastante interesse em associar a relação de números mínimos de movimentos da TH com a PG. E, até esse encontro, as alunas não tinham visto que era possível fazer essa relação. Elas afirmaram que deixariam essa dúvida para o grupo se tivessem a oportunidade de encontrar seus integrantes. Discutimos, através do Google Meet, como demonstrar essa relação por meio da PG. Utilizei por base Silva (2018), que mostra ser possível deduzir a fórmula de movimentos mínimos de Hanói através da soma de uma PG, pois cada movimento em determinado número de discos forma números escritos como potência de 2, em uma sequência de PG cuja razão é ' $q = \frac{1}{2}$ ' e o primeiro termo é ' $a_1 = 2^{n-1}$ '. O autor também diz que é possível demonstrar a validade dessa relação através do conceito de recorrências lineares. Frisa, ainda, que a primeira demonstração do número mínimo de movimentos de discos da TH foi realizada utilizando recorrências, em 1884.

Sobre esse assunto, é muito importante ressaltar que a maioria dos alunos, ao observar o Grupo 8, apesar de ter entendido o pensamento envolvido no raciocínio dos alunos do grupo, não compreendeu que a ideia de demonstração que eles tinham feito havia utilizado o pensamento recursivo. O professor perguntou na turma quem identificava o tipo de pensamento utilizado pelo grupo, um aluno pensou ser o raciocínio indutivo, mas logo se corrigiu, ao perceber que a sequência não demonstra ser válida para um número ' k ' de termos ou ' $k+1$ ', conforme estruturamos assim a demonstração por indução.

Instigamos os alunos perguntando o que eles podiam perceber na forma como o grupo achava cada termo, até que uma aluna respondeu que só conseguiu compreender que eles montam uma sequência que só pode ser determinada quando se sabe o termo anterior. Nesse momento outra aluna abriu o microfone e afirmou ser um pensamento recursivo, e que só tinha conseguido perceber isso naquele momento. Os demais colegas mostraram-se satisfeitos com a resposta da aluna, ao passo que outra aluna perguntou se a sequência de Fibonacci era também uma sequência recursiva, já que também precisa que se conheçam elementos anteriores para determinar os próximos.

Sá (2020) destaca que a TH é uma importante aplicação de recorrência linear, na qual é possível perceber o pensamento recursivo pela manipulação dos discos da TH. Assim, ao começar as manipulações com uma quantidade menor de discos, anota-se o resultado de movimentos e em seguida aumenta-se a quantidade de discos para fazer novos registros, processo pelo qual é possível perceber um padrão.

Ficamos satisfeitos com a associação feita pela aluna entre as duas sequências analisadas, que de fato são exemplos de recorrências. Conforme Corradi (2011), o método da investigação, com a correta mediação docente, leva os discentes, com o trabalho em equipe, ao desenvolvimento do pensamento, e a utilização dos argumentos e das

associações feitas oportuniza aos alunos a produção de significados para a matemática. Isso é exatamente o que queríamos com esse momento, pois compreendemos que o envolvimento dos alunos nas atividades potencializa sua construção de conhecimento. Dessa forma, vimos o aspecto pedagógico pela contribuição colaborativa do conhecimento na elaboração dessa etapa do produto.

Destacamos também Skovsmose (2000), que diz que os alunos se envolvem quando procuram explicações, ou desenvolvem mais perguntas para buscar pelas respostas. Esse processo de se envolver nos questionamentos propostos pelo docente indica o aceite por parte do estudante para a investigação.

Por fim, finalizamos toda essa experiência com uma prova. Ressaltamos que não se trata de uma prova conteudista tradicional, pois, nessa atividade, propusemos a consulta em uma apostila como material de apoio e pedimos uma gravação de tela de cada aluno. No Capítulo 4, na subseção intitulada “Notas sobre a Aula 6”, descrevemos passo a passo como foi cada questão da prova e as notas sobre o desempenho do aluno. Neste capítulo concentramo-nos apenas nos aspectos que envolvem a construção de conhecimento por parte do estudante.

Both (2012) afirma que as provas são aceitáveis quando implicam o incentivo à aprendizagem, ou seja, o mais importante não é necessariamente atribuir nota ou conceito. Fizemos a primeira questão da prova baseada em duas situações, com base no material de apoio para prova que está descrito no Capítulo 4 e se encontra nas referências bibliográficas. Uma das situações descritas na apostila de apoio é o desenvolvimento da relação de número mínimo de movimentos e discos de forma indutiva e de forma dedutiva – os alunos deveriam diferenciá-las e destacar aspectos que os fizeram chegar na resposta.

No geral, os alunos apresentaram bons resultados, pelas respostas foi possível perceber que finalmente perceberam os diferentes tipos de pensamentos matemáticos envolvidos com a TH. Como ainda uma aluna não havia conseguido identificar os pensamentos indutivos e recursivos corretamente, discutimos brevemente sobre a prova em um curto sétimo encontro.

Em relação à Questão 5, sobre a produção de vídeos, destacamos o fato de os alunos terem mandado vídeos mais longos que na Atividade 4. Nesses vídeos os alunos fizeram o passo a passo da questão: movimentar a TH para três, quatro e cinco discos e registrar seus aprendizados e curiosidades, e utilizavam mais a fala e explicavam detalhadamente seus movimentos. Todos conseguiram concluir a Torre no seu número mínimo de movimentos, e ainda fizeram observações, entre as quais destacamos: “*É fácil perceber que o disco maior é o que menos se movimenta, em todos os casos apenas uma vez*” ou “*Como estou utilizando um número ímpar de pinos, vou mover o menor disco para a última haste*”. Ou ainda “*Utilizei esse aplicativo (Hanói Tower 3D) porque eu posso apenas tocar nas artes em vez de arrastar, mais fácil*”.

Todos os alunos acharam necessária a gravação de tela e disseram que a usariam em suas aulas de matemática se estivessem de modo remoto, pois dessa forma é possível acompanhar o raciocínio do aluno. Sobre as gravações de tela, Assis (2020) determina que esses recursos são muito úteis à pesquisa, pois permitem avaliar os rastros, movimentos em telas e até captar áudio no processo de aplicação, e ainda poderemos, a qualquer momento, revisitar esse instante e capturar elementos que possam ter passado despercebidos no momento da aplicação. Essa percepção foi exatamente o que incorporamos a esta dissertação. Com a possibilidade de revisitar essa questão da prova, foi possível compararmos o progresso que se deu no uso com a TH da Aula 4 para a Aula 6.

Conforme Damiani *et al.* (2013), a pesquisa de intervenção pedagógica é intensamente benéfica para a construção e o compartilhamento de saberes, por isso, ela é

indicada a ser incorporada em cursos de licenciaturas ou pós-graduação. Notamos, ao longo do estudo, que essa metodologia de pesquisa ajudou a definir nossos resultados com o processo de implementação que visa a investigação e a construção de conhecimento em matemática.

Podemos perceber, no Capítulo 4, no diário de campo, que até mesmo os discentes participantes revelaram terem dúvidas sobre a aplicação da implementação, no que tange ao fato de não ser possível acompanhar em tempo real cada aluno realizando as tarefas.

A partir disso, podemos encontrar algumas vantagens dessa aplicação em ambiente remoto: acompanhar as movimentações e o desenvolvimento de cada estudante, através do envio de vídeos com captura de tela e áudio; e poder usar a TH a qualquer momento, em qualquer aula, visto que é um recurso digital. A colaboração entre os colegas também foi muito importante, visto que em todas as aulas síncronas a turma parecia bem entrosada e, portanto, participativa. Surgiram questionamentos que não esperávamos e, ainda, ideias que somente nos ocorreram com as dúvidas e curiosidades da turma, como incluir na prova questões que relacionassem a TH com o princípio da indução e as recorrências lineares.

Certamente, como em qualquer pesquisa, não houve somente vantagens. Foi preciso a leitura de muitos textos e bastante pesquisa para elaborar uma maneira de observar as movimentações dos discentes no recurso digital, como a gravação de tela. Nas primeiras gravações os alunos utilizaram pouco o recurso de verbalização, e tivemos dificuldades em compreender algumas dúvidas e estratégias que poderiam estar ocorrendo a eles, dessa forma, corrigimos essa questão na prova, e frisamos que os alunos deveriam verbalizar suas descobertas ou curiosidades. Assim, foi possível conceber resultados mais precisos. Além disso, problemas de conexão com a internet ocorreram ocasionalmente durante os encontros, o que foi um fator limitante.

Ainda no Capítulo 4, é possível observar, no relato sobre o encontro da Semana 5, que os estudantes ainda se deparavam com descobertas, como é o caso da aluna que disse não ter imaginado a possibilidade de utilizar a TH relacionada com PG e que, após ler sobre isso, tinha percebido que o número mínimo de movimentos poderia ser matematicamente tratado como uma sequência numérica, daí seria mais fácil fazer essa relação. Foi importante destacar essa fala, pois a aluna já buscava por padrões para poder estabelecer o número mínimo de jogadas, mas só nesse momento compreendeu que estava buscando um padrão em uma sequência. Assim, percebemos que uma atividade investigativa não poderia ser limitada pelo tempo.

Em suma, essa experiência permitiu concluir que é possível trabalhar, ainda que de forma remota, com recursos lúdicos do ensino de matemática na versão digital. Os alunos puderam construir e descobrir passo a passo sua aprendizagem em relação ao uso do recurso e foram também capazes de fazer questionamentos e reflexões sobre potencialidades da TH para o ensino de matemática.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa versou sobre a TH digital em dispositivos de toque em tela, recurso que tem inúmeras possibilidades de uso em diferentes níveis de escolaridade. Sua versatilidade permite observar ganhos relacionados à aprendizagem e ao desenvolvimento do raciocínio e ainda, a compreensão de diversos conteúdos da matemática com os quais é possível relacionar o recurso.

Através do mapeamento foi possível observar que os trabalhos coletados têm seu foco em atividades de cunho presencial e com utilização do recurso físico, embora a maioria delas possa ser adaptada para o uso em recurso digital. Assim, concluímos que nosso trabalho pode inspirar professores em formação ou docentes atuantes para a realização de atividades de ensino de matemática com recurso digital.

Foram mapeadas 20 dissertações, que ajudaram a nortear as intenções da nossa pesquisa. Todos os dados recolhidos levaram a crer que é necessário que se façam pesquisas sobre TH, pois sua versatilidade é potencialmente grande. Nas dissertações coletadas não foi possível perceber a relação do recurso com tecnologias digitais, em particular com dispositivos *touchscreen*.

A partir dos objetivos da pesquisa, esperamos promover nos leitores reflexões sobre os pontos que destacamos a seguir.

A relevância de tecnologias digitais e o uso pedagógico da TH para o ensino de matemática

Ao longo da elaboração da pesquisa de campo, notamos que foram aliados diferentes tipos de tecnologias, como TH em aplicativo digital, gravadores de tela, dispositivos com acesso às redes sociais e aplicativos de videoconferência.

Como estávamos em dinâmica remota, todas essas tecnologias foram essenciais para a realização do produto educacional – pensamos na gravação de tela como recurso para acompanhar as movimentações dos graduandos na TH digital, e ainda utilizamos o recurso de áudio para que os alunos pudessem expor suas dúvidas ou dificuldades. O Facebook funcionou muito bem como meio de interação entre os participantes e os professores, e ainda é fácil localizar todas as atividades e materiais compartilhados no grupo, o que torna possível a revisitação tantas vezes quanto isso for necessário.

Em relação ao uso pedagógico da TH, promovemos atividades de cunho investigativo para que os estudantes pudessem descobrir estratégias e/ou construir relações com conteúdos da matemática através da manipulação constante. Foi possível perceber que os licenciandos fizeram grandes descobertas e foram participativos ao longo de todo o desenho didático.

O planejamento e a implementação de um desenho didático de caráter tecnológico, em turma de Ensino Superior centrada na TH digital em ambiente *on-line*

Nosso produto educacional, reproduzido no Apêndice A deste trabalho, centrou-se na metodologia de pesquisa de intervenção pedagógica de caráter tecnológico. Realizamos um desenho didático de sete encontros em turma de Ensino Superior, cujo objetivo era explorar a TH digital em um contexto no qual era possível fazer descobertas, associar conteúdos da matemática, explorar diferentes formas de tecnologias digitais e inspirar os graduandos a utilizar esse recurso quando estiverem no exercício da licenciatura.

Por meio da análise do produto, percebemos que o desenho didático trouxe muitas contribuições para o ensino da matemática. Analisamos o que cada atividade trouxe para a construção de conhecimento pelos licenciandos e que relações essa experiência faz com os aspectos comunicacionais para a elaboração de um produto educacional.

Pudemos verificar que os estudantes conseguiram descobrir estratégias para vencer a TH e a relação de números mínimos de movimentos para cada disco. Eles conseguiram, ainda, relacionar a TH com diferentes conteúdos da matemática e os pensamentos envolvidos nas manipulações com a TH digital.

Ainda, sobre o desenvolvimento dos alunos ao longo de cada aula virtual e das atividades assíncronas compartilhadas em grupo de Facebook, podemos destacar que os estudantes se mostraram participativos e comunicativos. Cada aula virtual foi um momento de consolidar as atividades semanais, fazer considerações sobre a experiência e sanar dúvidas. Os estudantes, conforme relatado no diário de campo do Capítulo 4, participaram ativamente dos encontros virtuais, apesar de eventuais problemas de conexão com a internet.

No que diz respeito à identificação, ao uso e às possibilidades da utilização desse recurso na sua forma digital e em ambiente virtual, no processo de análise do produto educacional foi possível perceber aspectos da aprendizagem dos alunos: associações como estratégia para vencer o jogo, compreensão de que o número mínimo de movimentos cresce exponencialmente e descoberta de que pensamentos indutivos e recursivos estão relacionados com TH são exemplos do desenvolvimento do raciocínio do estudante ao longo do processo, o que fez com que a experiência do desenho didático se encerrasse positivamente.

O uso de tecnologias para o ensino da matemática torna-se muito potente e relevante para o processo de ensino e aprendizagem. Isso porque os autores aqui citados concordam que os recursos digitais, em particular os DMcTT, contribuem para a assimilação da matemática e para a construção do processo de ensino e aprendizagem, desde que eles sejam usados de maneira adequada, que permita a construção do conhecimento.

Limitações e recomendações da TH digital em ambiente *on-line*

Durante a elaboração e a aplicação do produto educacional, disposto no Apêndice A deste trabalho, entendemos que, devido às individualidades de cada sujeito, não seria possível prever todos os resultados. Diante disso, sentimos a necessidade de realizar adaptações nas aulas planejadas, de acordo com o que era mais relevante para a aprendizagem dos discentes.

Alguns percalços também ocorreram, como o problema de conexão instável com alguns alunos, mas isso não comprometeu o andamento das aulas, uma vez que foram resolvidas essas questões ao longo dos encontros.

Recursos como aplicativo gravador de tela e TH digital foram fundamentais para desenvolver as atividades com os discentes e acompanhar seu progresso, mesmo em dinâmica de ensino *on-line*. Reforçamos a ideia de que essas tecnologias digitais são ferramentas facilitadoras para a construção de conhecimento. Para futuros trabalhos, como pesquisadora, pretendo potencializar o uso de gravações de telas em atividades que envolvam dispositivos móveis para que seja possível fazer acompanhamento e revisitações do material de pesquisa. Continuarei a pesquisar sobre as potencialidades do uso da TH na versão digital, uma vez que não são encontradas muitas pesquisas que utilizam o recurso dessa forma.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABITBOL, P. C. P. **Raciocínio lógico-recursivo: uma proposta para resolução de problemas do Ensino Médio**. 2018. 84 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual do Maranhão, São Luís, 2018.
- ALBUQUERQUE, A. do C. **Resolução de problemas de contagem usando recorrências lineares**. 2019. 73 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2019.
- ANTUNES, C. **Jogos para a estimulação de múltiplas inteligências**. 8. ed. Petrópolis: Vozes, 1998.
- ASSIS, A. R. de. **Alunos do Ensino Médio realizando toques em tela e aplicando isometrias com GeoGebra**. 2020. 186 f. Tese (Doutorado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares) – Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2020.
- BAIRRAL, M. A. As manipulações em tela compoendo a dimensão corporificada da cognição matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática (JIEEM)**, v. 10, n. 2, p. 99-106, 2017.
- BAIRRAL, M. A. Movendo discos, construindo torres e matematizando com futuros professores. **Boletim GEPEM - UFRRJ**, Rio de Janeiro, n. 38, p. 95-110, 2001.
- BAIRRAL, M. A.; SILVA, E. R. da C. Trabalhando quadriláteros em smartphones: alunos de uma escola pública descobrindo e produzindo propriedades. **Debates em Educação**, Alagoas, Maceió v. 10, n. 22, p. 164-190, 2018.
- BARBOSA, A.; SANTOS, E. O. dos. Desenho didático no ambiente virtual de aprendizagem: notas sobre a arquitetura da informação, a navegabilidade e a ludicidade na sala de aula online. *In*: BAIRRAL, M. A. **Ambiências & redes online: interações para o ensino, pesquisa e a formação docente**. São Paulo: Livraria da Física, 2020. p. 17-29.
- BARROS, M. das G.; CARVALHO, A. B. G. As concepções de interatividade nos ambientes virtuais de aprendizagem. *In*: SOUSA, R. P.; MOITA, F. M. G. da S. C.; CARVALHO, A. B. G. **Tecnologias Digitais na Educação**. Campina Grande: EDUEPB, 2011. p. 209-232. *On-line*.
- BOTH, I. J. Avaliação da aprendizagem, sim! Prova para quê? **Revista Intersaberes**, v. 7, n. 13, p. 67-80, 2012.
- CARVALHO, M. D. L. de. **Estudo de sequências recursivas aplicadas ao Ensino Médio**. 2019. 85 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Departamento de Ciências Exatas da Terra, Universidade Estadual do Piauí, 2019.
- CORDEIRO, R. V.; ALTOÉ, R. O. Fatores comunicacionais para a elaboração de produtos/processos educativos em programas profissionais de pós-graduação na área de ensino/educação em ciências e matemática: reflexões emergentes e em movimento.

Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemática, Belém, v. 17, n. 39, p. 253-270, 2021.

CORRADI, D. K. S. Investigações Matemáticas. *In*: SEMANA DA MATEMÁTICA, 10.; SEMANA DA ESTATÍSTICA, 3., 2011, Ouro Preto. **Anais**. Ouro Preto: UFOP, 2011. p. 162-175.

DAMIANI, M. F.; ROCHEFORT, R. S.; CASTRO, R. F. de; DARIZ, M. R.; PINHEIRO, S. S. Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação**, Pelotas, v. 45, p. 57-67, maio/ago. 2013.

ELLER, E. S. **Equações de diferenças**. Aplicações no Ensino Médio. 2015. 142 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio De Mesquita Filho, São Paulo, 2015.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GOMES, D. F. **Equações de diferenças e alguns modelos**. 2014. 70 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2014.

GRANDO, R. C. A construção do conceito matemático no jogo. **Revista de Educação Matemática da SBEM-SP**, São Paulo, n. 3, p. 13-17, 1997.

GÜNTHER, H. Pesquisa qualitativa *versus* pesquisa quantitativa: esta é a questão? **Psicologia: Teoria e Pesquisa** – Instituto de Psicologia da Universidade de Brasília, Brasília, v. 22, n. 2, p. 201- 210, 2006.

GUSMÃO FILHO, S. S.; CASTRO, A. T. G de. Estimulando a dedução com a Torre de Hanói. **Coinspiração – Revista de Professores que Ensinam Matemática – SBEM**, Mato Grosso, v. 2, n. 1, p. 46-57, 2019.

HOLANDA, F. **Oficina de geometria em 3D**: uma ferramenta para estimular a aprendizagem da geometria nas etapas do Ensino Médio. 2014. 62 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2014.

KAPLÚN, G. Contenidos, itinerários e juegos. Tres ejes para el análisis y la construcción de messages educativos. *In*: CONGRESO DE ASOCIACIÓN LATINOAMERICANA DE INVESTIGADORES DE LA COMUNICACIÓN (ALAIIC), 6., 2002, Santa Cruz de la Sierra. **Anais** [...]. Santa Cruz de la Sierra: Universidad de la República, Montevideo, 2002. p. 1-18.

KAPLÚN, G. Material educativo: a experiência do aprendizado. **Comunicação e Educação**, São Paulo, v. 27, p. 46-60, 2003.

LIMA, E. R. P. O.; MOITA, F. M. G. da S. C. A tecnologia e o ensino de química. *In*: SOUSA, R. P.; MOITA, F. M. G. da S. C.; CARVALHO, A. B. G. **Tecnologias Digitais na Educação**, Campina Grande: EDUEPB, 2011. p. 130-154. *On-line*.

MACIEL, A. C.; SILVA, A. L. V.; BAIRRAL, M. A.; OLIVEIRA, R. Aula 19 – Movendo discos, formando torres e pensando indutivamente. *In*: MACIEL, A. C.; SILVA, A. L. V.; BAIRRAL, M. A.; OLIVEIRA, R. **Instrumentação para o ensino de aritmética e álgebra**, Módulo 1. Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2006. p. 233-253.

MARTINS, R. S. **O princípio da Indução Finita e jogos para o ensino de funções**. 2015. 117 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, São José do Rio Preto, 2015.

MEIRA, R. R. **Pensamento computacional na educação básica: uma proposta metodológica com jogos e atividades lúdicas**. 2017. 118 f. Dissertação (Mestrado em Tecnologias Educacionais) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017.

MELO, W. V.; BIANCHI, C. dos S. Discutindo estratégias para a construção de questionários como ferramenta de pesquisa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Curitiba, v. 8, n. 3, p. 43-59, maio/ago. 2015.

MENEZES, R. O. Formação inicial do professor que ensina matemática: proposta de um modelo de ensino online e síncrono no ambiente VMTcG. *In*: BAIRRAL, M. A. **Ambiências & redes online: interações para o ensino, pesquisa e a formação docente**. São Paulo: Livraria da Física, 2020.

MERCADO, L. P. L. Integração de mídias nos espaços de aprendizagem. **Revista Em Aberto**, Brasília, v. 22, n. 79, p. 17-44, 2009.

OLIVEIRA, A. E. de. **Análise Combinatória: aplicação de técnicas alternativas na resolução de problemas interessantes**. 2017. 85 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2017.

OLIVEIRA, E. P. **As diversas maneiras de explorar a matemática através do jogo Torres de Hanói**. 2019. 69 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

OLIVEIRA, S. G.; CALEJON, L. M.; BRITO, A. S. A utilização e aplicação do jogo Torre de Hanói para o ensino de conceitos matemáticos mais atraente e eficaz. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: Campus Anália Franco, 2016. p. 1-7.

POWELL, A. B.; LÓPEZ, J. A. A escrita como veículo de aprendizagem matemática: estudo de um caso. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, n. 33, p. 9-41, 1995.

QUEBRA-CABEÇAS. *In*: Priberam.Org. 2022. Disponível em: <https://dicionario.priberam.org/quebra-cabe%C3%A7as> Acesso em: mar. 2022.

REIS, L. de A.; BAIRRAL, M. A. Levantamento de dissertações sobre Torre de Hanói no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES. *In*: **Elaboração e mapeamentos de pesquisas com tecnologias: olhares e possibilidades**. Rio de Janeiro: Fi, 2023. p. 35-62. No prelo.

RIBEIRO, M. J. PONTE, J. P. A formação em novas tecnologias e as concepções e práticas dos professores de matemática. **Revista Quadrante**, Lisboa, v. 9, p. 3-26, 2000.

ROCHA, D. C. **Jogos educativos: brincando, ensinando e aprendendo matemática no Ensino Fundamental**. 2018. 38 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

SÁ, W. de J. P. **O uso de recorrência na educação básica**. 2020. 122 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2020.

SANTOS, M. S. **Algumas variações do jogo Torre de Hanói**. 2017. 55 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática - PROFMAT) – Universidade Estadual de Feira de Santana, 2017.

SANTOS, W. O.; SILVA JUNIOR, C. G. Uso de jogos no ensino da matemática: uma análise entre os jogos tradicionais e os jogos digitais, baseada em pesquisa e mapeamento dos materiais encontrados na web. *In: SEMINÁRIO JOGOS ELETRÔNICOS, EDUCAÇÃO E COMUNICAÇÃO*, 10., 2014, Salvador. **Anais [ENEM 2016]**. Salvador: Campus Anália Franco, 2014. p. 01-09.

SHINKAWA-DA-SILVA, G. Z.; ROSSINI, M. A. O jogo Torre de Hanói e algumas de suas potencialidades educacionais. *In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 12., 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo, campus Anália Franco, 2016. p. 1-13.

SILVA, B. V. A. da; BAIRRAL, M. A. Uma disciplina, um grupo no Facebook: Reflexões e olhares para a pesquisa educacional. *In: BAIRRAL, M. A. **Ambiências & redes online: interações para o ensino, pesquisa e a formação docente***. São Paulo: Livraria da Física, 2020.

SILVA, C. A. **Torre de Hanói como ferramenta facilitadora do processo de ensino aprendizagem de Função Exponencial e Resolução de Problemas**. 2015. 62 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2015.

SILVA, F. D. M. **Aplicações do princípio da indução matemática**. 2017. 70 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Cariri, Cariri, 2017.

SILVA, J. A. D. L. **Uma abordagem selecionada de sequências recorrentes**. 2014. 114 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2014.

SILVA, J. dos S. **Sequências numéricas no Ensino Médio**. 2015. 84 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática - PROFMAT) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015.

SILVA JUNIOR, N. **Aplicações para o princípio de indução matemática**. 2014. 54 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

SILVA, P. O. **Torre de Hanói**: uma proposta pedagógica para aprendizagem matemática e aquisição do conhecimento científico no Ensino Superior. 2019. 75 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática – PROFMAT) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2019.

SILVA, R. J. M. **Explorando a matemática do jogo Torre de Hanói**. 2018. 43 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Rio de Janeiro, 2018.

SILVEIRA, D.; CÓRDOVA, F. Unidade 2 – A pesquisa científica. *In*: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. p. 31-42. Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Boletim de Educação Matemática – Bolema**, Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 1-24, 2000. Tradução: Barbosa, J. C.

SOUZA, A. E. **O lúdico associado à resolução de problemas e jogos no ensino e aprendizagem de funções**: uma abordagem diferenciada. 2014. 112 f. Dissertação (Mestrado em Ciência e Tecnologia) – Departamento de Ciência e Tecnologia, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2014.

SOUZA, B. O. **Ensinando matemática com jogos**. 2013. 138 f. Dissertação (Mestrado em Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campo dos Goytacazes, 2013.

WINTER, O. C. **Relações de recorrência**: para além de P.A. e P.G. 2013. 108 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do ABC, São Paulo, 2013.

APÊNDICES

Apêndice A – Produto Educacional (Desenho didático com uso de dispositivos de toque em tela e ambiente virtual).

Produto Educacional: Desenho didático a ser aplicado na formação de professores

O desenvolvimento desse Produto Educacional objetiva que futuros professores enriqueçam sua prática e sejam inspirados a utilizar de recursos muitas vezes já conhecidos sob uma nova ótica, mais dependente da tecnologia, no caso em dispositivos móveis de toque em tela (DMcTT) e de forma remota. Para tornar o ambiente virtual espontâneo e prazeroso, percebemos que o uso da Torre de Hanói (TH) digital, nesse contexto, pode inspirar os graduandos com uma forma de dinamizar as aulas online.

O produto educacional desenvolvido trata-se de um desenho didático. Assim é possível construir uma ideia, participar do processo colaborativamente e unindo diversos tipos de conhecimento. É importante ressaltar que o desenho didático é aberto a intervenções e múltiplas explorações.

Na construção do Produto, desenvolvemos os seguintes objetivos específicos: i) conhecer através de manipulação a TH digital; ii) desenvolver atividades de cunho investigativo, através da manipulação e interações online; iii) analisar o desenvolvimento dos alunos ao longo de cada aula virtual e atividades assíncronas compartilhadas em grupo de Facebook, e iv) identificar o uso e as possibilidades da utilização deste recurso utilizado de forma digital e abordado em ambiente virtual.

Para a implementação do desenho didático, o professor deve dispor de 6 encontros virtuais, sugerimos a plataforma Google Meet e interações semanais, conforme o Quadro 1 através da rede social Facebook em um grupo fechado da correspondente turma. Porém ao longo da prática do desenho didático, foi preciso conceber um sétimo encontro, curto, apenas para encerrarmos toda experiência.

Quadro 1 – Encontros e atividades com Torre de Hanói (Continua)

Encontro	Objetivo(s)	Tempo estimado	Instrumentos de coleta
1: <i>Descobrimo a TH digital</i>	Ativ. Semanal: responder questionário (quadro 1); baixar 3 app's. Aula: Discutir respostas do questionário sobre Torre de Hanói e manipular 3 aplicativos selecionados.	1 hora	Questionário Google Forms; aplicativos da TH
2: <i>Destacando vantagens e desvantagens da TH em aplicativos</i>	Ativ. Semanal: escolher algum aplicativo da Torre de Hanói e trabalhar o uso deles, trazendo fatos interessantes e/ou questionamentos sobre o aplicativo e se é possível entender a lógica do recurso. Aula: Comentar sobre os aplicativos do encontro 1 e sobre a atividade da semana; discutir a experiência dos alunos no recurso digital.	1 hora	Aplicativos da TH

3: <i>Surgimento dos primeiros questionamentos</i>	Ativ. Semanal: pesquisar sobre TH para trazerem curiosidades ou questionamentos e responder perguntas curiosas no Facebook Aula: dissertar sobre a atividade semanal e fazer questionamentos sobre o uso da TH; discutir dúvidas anteriores.	1 hora	
4: <i>O uso positivo da ferramenta de gravação de tela</i>	Ativ. Semanal: 1: Postar no Face alguma nova curiosidade ou descoberta na Torre de Hanói. 2: Utilizando um App da TH da sua preferência, gravar os movimentos da torre com 3, 4 e 5 discos e gravar também alguma jogada ou observação curiosa no aplicativo. Aula: discutir a atividade e refletir sobre o uso da TH digital e seu uso de forma remota.	1 hora	Postagens no Facebook e uso do gravador de tela; aplicativos da TH.
5: <i>A descoberta do pensamento recursivo</i>	Ativ. Semanal: analisar documento que consta respostas de alunos à descoberta do número mínimo de movimentos da Torre de Hanói (anexo A). Os graduandos deverão escolher 2 de 8 grupos de alunos e analisar suas respostas e propor questionamentos. Aula: apresentar o trabalho e discutir cada dois grupos escolhidos.	1 hora	Documento do acervo do orientador com registro de seus alunos anteriores em atividade com Torre de Hanói
6: <i>Avaliação do aprendizado resultante dessa experiência</i>	Ativ. Semanal: analisar um roteiro de aula com a TH para a prova e responder perguntas no Facebook Aula: prova (apêndice C) e síntese das discussões de todas as atividades e descobertas desses encontros.	3 horas	Apostila com um roteiro de aula sobre Torre de Hanói; prova

1. Procedimentos

Apresentamos, agora, um planejamento do Produto Educacional para que o pesquisador possa implementar este desenho didático em suas turmas de ensino na licenciatura, este é, portanto, o público-alvo desse produto educacional. Os nomes escolhidos para cada encontro revelam o que é possível destacar em cada aula. Todas as atividades, com exceção da prova, podem ser realizadas em duplas. Ressaltamos que esse roteiro de aulas foi concebido após ser validada todas as etapas em aplicação em turma de Ensino Superior.

É necessário que para aplicação desse desenho didático, o docente tenha conhecimento do funcionamento da TH, da ferramenta de reuniões síncronas Google Meet e da rede social Facebook, se preferir, as interações assíncronas também poderão ser realizadas em grupo de whatsapp. O professor deve orientar seus alunos a postarem as atividades semanais no mínimo com 24 horas de antecedência para o professor ter um maior preparo durante a aula uma vez que já acessou o material.

1.1 Encontro 1: descobrindo a TH digital

Em momento anterior a esse encontro, os alunos deverão baixar três aplicativos da TH. O professor deve orientar seus alunos a realizar a manipulação do aplicativo de forma livre, usando seu aparelho celular. Os três aplicativos sugeridos para os alunos estão

indicados abaixo. Peça também aos graduandos que indiquem seus pontos positivos e negativos ao manipularem os aplicativos, além de elaborar um breve texto comparativo entre eles.

Os aplicativos são: *Towers of Hanói*, *Hanói Towers 3d* e *Tower of Hanói*, até o momento da elaboração dessa tarefa, os três aplicativos estavam disponíveis para android ou iOS. Cada aluno tem como função postar no grupo do Facebook da turma uma pergunta e uma curiosidade sobre a TH no seu dispositivo de toque em tela. É indispensável também, discutir a realização da tarefa em aula.

Em momento anterior, o professor deve enviar um questionário digital (recomendamos via Google Forms) conforme apêndice B, para obter um diagnóstico de quanto os futuros professores conhecem sobre o recurso da TH. O questionário em questão é composto de 9 perguntas. Como apresentado no Quadro 2 a seguir. O professor deve discutir as respostas dos discentes ao questionário em aula, bem como o registro dos alunos sobre a TH digital, com auxílio do Google Meet. O docente deverá perceber que seus alunos vão focar nos movimentos para concluir a TH, nas regras para poder movimentar os discos, o fato de aumentar o número de movimentos quando se aumentam os discos, etc. São observações iniciais que o professor precisa verificar se foram feitas.

Quadro 2 – Questionário Torre de Hanói

Perguntas do Questionário sobre a Torre de Hanói	
10.	Nome;
11.	Idade;
12.	Qual período ou semestre que se encontra?
13.	Você conhece (trabalhou ou só ouviu dizer) a Torre de Hanói?
14.	Se você respondeu não, vá para o final do questionário, se você respondeu sim, onde conheceu?
15.	A Torre de Hanói é um jogo?
16.	Diga pelo menos um conteúdo matemático explorado com a Torre de Hanói;
17.	Deseja fazer algum comentário?
18.	Você imagina o que é a Torre de Hanói?

Fonte: Elaboração própria

Temos a função de discutir sobre essas respostas em sala de aula após recolhidas as respostas do formulário. Além disso, deve ser feita a manipulação em tela da TH no momento da aula, cada aluno com seu *smartphone/Iphone* e discutir sobre a experiência de primeiro contato com os aplicativos por parte dos estudantes. O aluno que respondeu “não” na questão 4, não responde as questões 5, 6, 7 e 8.

Em aula no Google Meet, o professor deve pedir para cada aluno fazer uma breve reflexão sobre suas experiências com os aplicativos mencionados e destacar seus aspectos positivos e negativos. Ressaltamos que assim como ocorreu conosco, os alunos podem saber informações mais profundas sobre a TH como por exemplo, o número mínimo de movimentos que se deve fazer com uma quantidade 'n' de discos. Isso não vai invalidar todo o trabalho a ser feito, pois como constatamos, o conhecimento dos alunos em TH não é tão profundo, uma vez que os alunos acabam a utilizando em raros momentos da caminhada escolar e/ou acadêmica.

Durante a aula, o professor pode fazer os seguintes questionamentos aos alunos: qual desses aplicativos você usaria? Como foi o comportamento do aplicativo ao final de cada jogada? Caso os alunos sejam bem sucintos e pouco informativos em suas falas.

1.2 Encontro 2: destacando vantagens e desvantagens da TH em aplicativos

Nesse encontro o objetivo é discutir sobre a nova atividade semanal, conforme descrita no Quadro 1, e a partir disso, (re)discutir com os alunos a experiência dos mesmos com a TH em mídia digital.

Nesse momento, é importante que o professor levante novos questionamentos, caso os mesmos não se revelem: Com o que já conhecem da TH e através da manipulação dos aplicativos, é possível identificar quais regras? Qual é o objetivo da TH? O que um aplicativo desse recurso teria que apresentar para ser considerado um bom aplicativo para o uso da TH? Como a atividade dessa semana são os alunos mesmos pesquisarem por outras TH digital, esse último questionamento implicará em respostas a partir dos aplicativos que eles encontrarão, somados àqueles usados na primeira aula.

Durante esse encontro, os alunos vão conhecer outros aplicativos e podem surgir questionamentos como: Encontrei determinadas TH digital que é permitida a finalização dos movimentos com os discos na haste intermediária enquanto outras TH só consideram finalizados os movimentos quando os discos estão na haste final. De fato, isso ocorre. Sugerimos que o professor não responda imediatamente nesse momento, a fim de verificar se com novas manipulações em tela e a realização de outras tarefas esse questionamento será capaz de ser sanado. Nessa aula, os alunos deverão ser capazes de reconhecer as regras da TH e saber dizer, com certeza, qual é o grande objetivo da TH. Por isso, os questionamentos acima, podem auxiliar o aplicador.

Outro questionamento que pode surgir a partir dessa aula, é sobre a quantidade de discos que os aplicativos oferecem. A maioria deles oferecerem no máximo entre seis e oito discos no total, por que isso ocorre? O docente antes de dar uma resposta, poderá questionar aos outros estudantes sobre essa mesma dúvida, a fim de deixá-los conversarem e concluírem. Mesmo que eles ainda não saibam qual será o número de jogadas com seis ou oito discos, eles já são capazes de entender que ocorre um aumento grande, exponencial de uma quantidade para a outra de discos.

A partir das respostas dos alunos e do bate papo, novos questionamentos e/ou novas tarefas podem ser feitas. Conforme o Quadro 1, deixe uma tarefa para a semana do encontro 3 para ampliar os conhecimentos da turma sobre o recurso.

1.3 Encontro 3: surgimento dos primeiros questionamentos

Para esse encontro, os alunos, previamente, devem pesquisar por sites ou planos de aula sobre TH para sanar suas dúvidas ou gerar novos questionamentos no uso do recurso. Entendemos que é importante que o aluno tenha bem estabelecido as ideias de TH, seus objetivos e estratégias para que posteriormente possa aplicar à seus alunos.

Nessa aula, como planejado, será possível ouvir dúvidas ou novos questionamentos sobre a fórmula que revela o número mínimo de movimentos para completar a TH com determinado número de discos.

Após a pesquisa é possível refletir sobre os conteúdos que estão relacionados a TH, se isso foi encontrado nas pesquisas deles, se eles tinham conhecimento desses conteúdos, etc. Ao longo dessas aulas o professor poderá fazer uma lista de questionamentos curiosos de acordo com as discussões no Google Meet para eles responderem no Facebook quando estiverem preparados, pois os posts ficam fixos no Facebook. Destacamos como questionamentos curiosos: qual disco faz mais movimento? Existem sequência de movimentos que se repetem?

Nessa aula os estudantes já poderão discutir sobre a fórmula de número mínimo, pois os mesmos eventualmente poderão localizá-las em pesquisas. Recomendamos, fortemente, que o professor monte uma tabela com os alunos em aula, para registrar qual o número mínimo de movimentos (em coluna 2) da TH com determinado número discos

(coluna 1), para que os estudantes percebam certos padrões, caso ainda não tenha feito. Se necessário, peça aos licenciandos para compartilharem tela de seus movimentos com os colegas, para isso, é necessário conectar a reunião pelo dispositivo de toque em tela.

1.4 Encontro 4: o uso positivo da ferramenta de gravação de tela

Na semana desse encontro devem ser propostas duas atividades. 1: Postar no Facebook alguma nova curiosidade ou descoberta sobre a TH digital e 2: Utilizando o aplicativo da TH da sua preferência, o aluno deve gravar os movimentos da TH com três, quatro e cinco discos e gravar também alguma jogada ou observação curiosa no aplicativo selecionado. Essas atividades devem ser postadas no grupo fechado do Facebook ou outra rede social de uso da turma. Sugerimos os aplicativos: Az Screen Recorder ou Du Recorder para a gravação de tela, mas deixamos que os graduandos optassem por utilizar outro aplicativo da preferência deles.

Na aula, é importante deixar que cada aluno ou dupla, apresente sobre sua atividade semanal. Em seguida, os alunos que souberam, sejam encorajados a responder a dúvida ou comentar sobre a curiosidade um do outro colega. Com a segunda atividade, da gravação de tela, objetivamos obter novas respostas de questionamentos dos alunos.

Sobre a atividade 1, o docente terá acesso ao grupo do Facebook e poderá acompanhar as postagens sobre as descobertas dos alunos para discuti-las em aula. Dessa forma, dependendo dos questionamentos, devemos conduzir os seguintes questionamentos aos discentes: É possível perceber alguma estratégia para se estabelecer o número mínimo de movimentos com certa quantidade de discos? Existe algum padrão na movimentação dos movimentos? Quais séries da educação básica podem ser contempladas com esse recurso? Houve dificuldade ao aumentar o número de discos? Qual disco mais se movimentou?

Os graduandos, nessa etapa, já conseguem responder a maioria dessas perguntas. Além disso, os estudantes podem comentar sobre suas experiências com a TH digital associado ao recurso de gravação de tela. É importante o docente saber que existe estratégia: Quando o número de discos for ímpar, devemos iniciar os movimentos colocando o menor disco na haste da extremidade e quando for par, o menor disco se inicia na haste do meio. Além disso, a TH pode ser usada desde os anos iniciais relacionada ao raciocínio lógico, como na educação básica em diversos conteúdos.

No caso de os participantes ainda apresentarem dificuldades para encontrar estratégias, o docente pode conduzir questionamentos mais incisivos como: realize as movimentações da TH com o número mínimo de movimentos para dois, três, quatro e cinco movimentos. O que você observa ao mover o primeiro disco quando a quantidade deles é par? E quando for ímpar? Assim os alunos serão capazes de assimilar.

Sobre as gravações de tela, peça aos alunos manipularem a TH digital, conforme a Atividade 2, verbalizando suas estratégias e considerações sobre o movimento para que seja possível capturar mais dados sobre o desempenho do aluno para um melhor acompanhamento. O docente ao analisar os vídeos, poderá verificar dificuldades na movimentação com 5 discos em diante, consideramos aceitável pois é necessário fazer mais de 30 movimentos no mínimo.

1.5 Encontro 5: a descoberta do pensamento recursivo

A atividade dessa semana cinco, é analisar um documento do acervo do professor e orientador desta pesquisa,. Nesse documento constam registros de alguns de seus alunos de Ensino Médio e Ensino Superior, à descoberta do número mínimo de movimentos da

TH. Os alunos podem escolheram livremente, o registro de dois dos oito grupos do documento, observar suas respostas e alguns deles, até poderão propor questionamentos. O documento está disponível no anexo A.

Na aula referente a esse encontro, os alunos devem apresentar suas observações sobre os registros dos grupos escolhidos. Essa etapa será feita via compartilhamento de tela, que é uma ferramenta disponível na interface do Google Meet, ao compartilhar o documento que contém os grupos a serem analisados, os alunos em sua apresentação terão que mostrar o contexto da resposta e seu parecer sobre a atividade.

Nessa atividade o professor deve pedir aos alunos para destacarem o que foi possível entender sobre o pensamento do aluno, e se deixariam algum questionamento para o grupo. Nessas apresentações alguns alunos passarão pela observação do grupo 8. O professor pode questionar aos alunos que tipo de pensamento¹ está envolvido no desenvolvimento daquele grupo. Nesse encontro, os discentes deverão ser capazes de observar os diferentes raciocínios (recursivo e indutivo) envolvidos com a TH. É importante saber que, no geral, a TH trabalha com o raciocínio indutivo, porém outras formas de raciocínio podem aparecer na relação com a TH como é o caso do raciocínio recursivo. Para isso o professor poderá mediar a discussão a ponto de se identificar o tipo de raciocínio envolvido.

Ao final de cada apresentação é relevante fazer o destaque de pontos positivos da apresentação e provocá-los com eventuais dúvidas que não foram relatadas em suas observações. Além da apresentação, essas atividades devem ser postadas no Facebook para serem observadas pelo professor com mais riqueza de detalhes.

1.6 Encontro 6: avaliação do aprendizado resultante dessa experiência

Para o encontro 6, o professor deverá enviar com antecedência uma apostila da fundação CECIERJ aos discentes, da autoria de Maciel *et al.* (2006) intitulada: *aula 19 – Movendo discos, formando Torres e pensando indutivamente*,² que será material de estudo e consulta para a realização de uma prova que se encontra no apêndice C. A prova foi baseada nos resultados de nossos encontros para a construção dos questionamentos e ainda conta com uma questão para ser resolvida em DMcTT de cada participante. Estes devem ser orientados a enviar essa atividade/questionamento, utilizando novamente o recurso de gravação de tela. Diante disso, a avaliação foi construída ao longo dos encontros e sugerimos a entrega no último encontro pelo grupo virtual da turma.


Decidimos que é importante realizar uma prova, pois gostaríamos de verificar o desempenho dos alunos sobre TH após todo o desenvolvimento desse desenho didático. O que chamamos de prova aqui é na verdade uma avaliação com recursos variados como consulta a apostila mencionada e gravação de vídeos curtos, além de questões baseadas na opinião dos alunos.

Sugerimos ao leitor que aplique a prova entre duas a três horas para a realização e, caso seja necessário, que se faça um encontro 7 apenas para refletir e concluir toda as experiências e registrar o *feedback* dos alunos sobre os encontros anteriores.

¹ Usamos, nesse produto, as palavras “raciocínio” e “pensamento” como sinônimos.

² Disponível em: Instrumentação para o ensino de aritmética e álgebra, módulo 1. Rio de Janeiro, apostila fundação CECIERJ

Apêndice B – Questionário sobre Torre de Hanói

perguntas respostas  Configurações

Você conhece a Torre de Hanói

olá graduando(a) da disciplina de Ensino de Matemática II, responda o questionário abaixo sobre seus conhecimentos de Torre de Hanói.

1. seu nome

Texto de resposta curta
.....

2. sua Idade

Texto de resposta curta
.....

3. Qual período ou semestre que se encontra *

Texto de resposta curta
.....

4. Você conhece (trabalhou ou só ouviu dizer) a Torre de Hanói? *

sim

não

Figura 1: Questionário sobre Hanói (Parte 1)

Fonte: Acervo dos Pesquisadores

Questionário sobre Hanói (Parte 2)

Perguntas Respostas Configurações

5. Se você respondeu não, vá para o final do questionário, se você respondeu sim, onde conheceu? *

Texto de resposta curta

6. A Torre de Hanói é um jogo? *

Texto de resposta curta

7. Diga pelo menos um conteúdo matemático explorado com a Torre de Hanói. *

Texto de resposta curta

8. Deseja fazer algum comentário sobre Torre de Hanói?

Texto de resposta longa

9. Você imagina o que é a Torre de Hanói?

Texto de resposta longa

Figura 2: Questionário sobre Hanói (Parte 2)

Fonte: Acervo dos pesquisadores

Apêndice C - Prova de Ensino de Matemática II aplicada

UFRRJ – DTPE/IE – Prova de Ensino de Matemática II, 2020.1 (valor: 10,0 pontos)
Professor: Marcelo A. Bairral

“Não quero ser feliz. Quero é ter uma vida interessante”¹
Contardo Calligaris

Caro(a) graduando(a),

Essa prova está constituída de cinco questões para serem refletidas e respondidas, individualmente, em até 3h. Responda todas aqui mesmo ou você pode escrever e fazer *print* das respostas e colocá-las todas em um único doc (salvar o doc com teu primeiro nome) e mandar no privado até às 18h. Caso faça *print* de escritos, desenhos etc. é importante ficar legível. A fonte principal de consulta para a prova é a Aula 19 (MACIEL *et al.*, 2006), mas caso você utilize alguma outra cite-a também colocando o link e a hora de acesso, se for o caso.

Desejo que você faça uma excelente prova!

Questão 1 (2,0)

(a) Dos grupos 1 e 2 do Ensino Médio (Prof^a. Angela, p. 240-241) em qual dele está presente o raciocínio indutivo? Por quê?

(b) Indique e explique, no raciocínio e resposta do grupo, a presença do passo três da prova por indução, ou seja, “*que $P(n+1)$ também é verdadeira*”.

Questão 2 (1,0)

Qual o tipo de raciocínio matemático usado pelo grupo 3 (p. 244-245)? Por quê?

Questão 3 (3,0)

(a) Você concorda com a afirmação (p. 248)? “*É importante enfatizar que não deve ser objetivo do professor estabelecer comparações do tipo saber mais ou menos. É relevante que os alunos percebam, analisem e respeitem o matematizar do seu colega e contribuam com a continuidade deste processo, pois ensino-aprendizagem é um processo contínuo de aprender a aprender e aprender a ser fortalecido pelas relações interpessoais, e não mera acumulação acrítica de conhecimentos*”.

(b) Destaque e comente um aspecto de qualquer um dos grupos (daqui do PDF da Aula 19) que você considera interessante e justifique.

Questão 4 (1,0)

Por que a Torre de Hanoi não é um material curricular educativo online (MCEO)? Justifique.

Questão 5 (3,0)

Nessa questão você trabalhará na Torre de Hanoi *online* ou de um aplicativo, o que você preferir. Quando responder ao item:

¹ Disponível em: <https://www.revistaprosaveroarte.com/nao-querer-ser-feliz-querer-e-ter-uma-vida-interessante-contardo-calligaris/> Acesso em: 19 abril 2021.

(a) diga qual está usando e o motivo da sua escolha. Será necessário também usar um aplicativo de captura de tela (DU Recorder ou qualquer outro). Este APP não precisa justificar a escolha.

(a) Use o aplicativo de gravação e faça um vídeo explicando/movimentando um aspecto do teu aprendizado com as Torres, seja a partir da Aula 19, seja em outro momento do seu estudo nesse jogo.

(b) Agora relate como foi a tua experiência com as gravações em tela usando um APP.

(c) Comente também como você usaria esse tipo de recurso de gravação com seus alunos.

ANEXOS

Anexo A - registros retirados do artigo de Bairral (2001) analisada no Encontro 5

ATIVIDADE

Orientações: (individual ou dupla) Escolham e analisem de respostas de apenas dois grupos de alunos. Vocês devem escolher um grupo do Ensino Médio e um do Ensino Superior.

A seguir as contribuições do Grupo 1:

Atividade de semana:

- Após lerem e analisarem o escrito de cada grupo façam uma descrição sobre o que cada grupo fez, ou seja, expliquem o que o grupo fez, pensou, escreveu. Neste momento não opinem.
- Agora vocês deverão fazer comentários e pedirem esclarecimentos ao grupo. Elaborem, pelo menos, uma pergunta para instigar o grupo.
- Respondam a sua pergunta.

Orientações

- Trabalhem, preferencialmente, em dupla e postem no Face quais grupos analisarão. É **importante que todos os grupos sejam analisados**.
- Portem no grupo do Face até as 14h do dia 07/04/21.

Alunos do Ensino Médio (1º ano) – Grupo 1 ao 6

Todos os alunos (Ensino Médio ou Superior) trabalharam presencialmente em torno de 6 aulas com as Torres.

Grupo 1

Tudo começou quando a professora Angela nos levou para a sala de informática e nos apresentou um jogo chamado Hanói. O jogo consiste em 3 barras e tantos discos quanto você pedir, e o objetivo é passar todos os discos da barra A para a barra C, com a ajuda da barra B, deixando os em ordem do menor para o maior (de cima para baixo). Depois de jogar por alguns minutos, o grupo resolveu fazer uma tabela relacionando o número de discos com o número de movimentos mínimos usando esses discos.

Esta tabela segue abaixo:

Número de discos	3	4	5	6	7	8	9	10
Jogadas mínimas	7	15	31	63	127	255	511	1023

“o número de jogadas mínimas era sempre o dobro, acrescido de um, do número de jogadas mínimas anteriores a ele”. Então formulamos a seguinte teoria que diz:

$$f(x-1) = (f(x) - 1) / 2$$

Depois que a aula de matemática acabou, um dos componentes do grupo acabou por descobrir a fórmula observando a tabela acima. Mas depois, descobriu-se que haveria várias formas de se chegar a este resultado. Uma delas seria analisando o gráfico da função.

A seguir as contribuições do Grupo 2:

Não achamos a fórmula, a única coisa que descobrimos foi que o nº de movimentos mínimos por grade dessa forma, multiplica-se por 2 e soma 1.

	Pecas	Nº Mínimo de Movimentos	
$2^x - 1$	3	7) $2x + 1$
	4	15	

A seguir as contribuições do Grupo 3:

nº de discos	nº de movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
(...)	

1 1+2 4+2+1 8+4+2+1
 1 3 7 15

$f(x) = \underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots}_{x \text{ vezes}} = 2^x - 1$

$f(x) = 2^x - 1$

A seguir as contribuições do Grupo 4:

- Achamos também umas fórmulas:

- $f(3) = \underline{2x+1}$
- $f(4) = 2f(3) + 1 \rightarrow \rightarrow \rightarrow 2(2x+1) + 1 \rightarrow \underline{4x+3}$
- $f(5) = 2f(4) + 1 \rightarrow \rightarrow \rightarrow 2(4x+3) + 1 \rightarrow \underline{8x+7}$
- $f(6) = 2f(5) + 1 \rightarrow \rightarrow \rightarrow 2(8x+7) + 1 \rightarrow \underline{16x+15}$
- $f(7) = 2f(6) + 1 \rightarrow \rightarrow \rightarrow 2(16x+15) + 1 \rightarrow \underline{32x+31}$

- Sempre que há número de pinos igual a par, deve-se começar o jogo pondo o primeiro pino no terceiro receptor.

- Sempre que há número de pinos igual a ímpar, deve-se começar o jogo pondo o primeiro pino no segundo receptor.
- De acordo com o gráfico acima, podemos perceber que a diferença entre o número de jogadas é uma sequência de múltiplos de 2, sendo que esse mesmo $n^{\circ} - 1 =$ ao $1^{\circ} n^{\circ}$ relacionado.

E assim sucessivamente. Depois disso, concluímos que isso tudo é igual a:

$$f(n) = 2 f(n-1) + 1 \rightarrow N > 0$$

Vendo as várias fórmulas que foram apresentadas antes da fórmula final, percebemos que, o número que vem antes do x é igual ao número de diferença entre as jogadas, e o que vem depois do sinal de $+$ é igual ao número de jogadas anterior.

A seguir as contribuições do Grupo 5:

É preciso 7 jogadas para deslocar os 3 primeiros discos para a torre 2 e mais 1 jogada para deslocar a maior peça para a torre 3. Novamente, fizemos 7 jogadas para deslocar os 3 discos para a torre 3.

- Para sermos mais objetivos, formulamos esta tabela que indica o número mínimo de jogadas para o número de discos utilizados:

Peças	Número de Jogadas			Total
3	7	1		
4	7	1	7	15
5	15	1	15	31
6	31	1	31	63
7	63	1	63	127

- Por esta tabela pudemos deduzir que a fórmula é:

$$2^x - 1$$

A seguir as contribuições do Grupo 6:

Nós conseguimos deduzir, descobrir, a fórmula que estabelece o número mínimo de movimentos para cada quantidade de discos, e aí está ela: $2^n - 1$. Nós a descobrimos depois de muito trabalho, depois de passarmos horas e horas com uma folha em frente com o número de discos e seus respectivos números mínimos de movimentos, estabelecendo relações até não poder mais, e vamos tentar explicar como chegamos a essa fórmula.

Primeiramente, observamos que de um número mínimo de movimentos para o outro, era só descobrir a diferença entre eles e multiplicar por 2, que aí você teria o próximo número mínimo de movimentos, que seria: $2y + 1$, você coloca o número mínimo de movimentos, multiplica por 2 e soma 1, por exemplo: o número de discos é 3, e seu número mínimo de movimentos é 7, você pega o número 7 e multiplica por 2 ($7 \times 2 = 14$) e soma 1, e você obterá o número 15, que é o número mínimo de movimentos de 4 discos e assim por diante.

Observamos também que todos os números mínimos de movimentos são primos e ímpares, e que todos seguem uma sequência a partir do último número, e esta sequência seria: 7, 5, 1 e 3; como podemos ver 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023,...(respectivamente, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 discos)

ALUNOS DO ENSINO SUPERIOR

A seguir as contribuições do Grupo 7:

Quantidade de discos Torres(n)	Quant. de movimentos das peças nas Torres	Total de movimentos						
		Pç 2	Pç 3	Pç 4	Pç 5	Pç 6	Pç 7	
1	1	0	0	0	0	0	0	1
2	2	1	0	0	0	0	0	3
3	4	2	1	0	0	0	0	7
4	8	4	2	1	0	0	0	15
5	16	8	4	2	1	0	0	31
6	32	16	8	4	2	1	0	63
7	64	32	16	8	4	2	1	127

- A quantidade mínima de movimentos das torres com n discos é igual à soma de uma P.G. finita de razão 2, 1º termo igual a 1 e com n° de termos igual ao n° de discos da torre.
- Ao movimentarmos o número de discos, a quantidade de movimentos de cada peça cresce em P.G. de razão 2, com 1º termo igual a 1.
- O n° de movimentos de uma torre com n discos é igual ao dobro de movimentos da torre com $(n-1)$ discos acrescido de 1 movimento.
- Condições para os movimentos das peças para obtermos o mínimo possível. Consideramos as peças/discos numerados de 1 a 7. Dividimos a torre de Hanoi conforme o esquema seguinte:
- As peças ímpares se movimentam seguindo a ordem crescente dos pinos partindo do n° 1
- As peças pares se movimentam seguindo a ordem decrescente dos pinos partindo do n° 1
- A tabela apresentada anteriormente forma uma matriz triangular inferior, com a diagonal principal contendo todos os termos igual a 1, apresentando 7 divisores do n° 64
- O número de divisores de 64 contido na matriz é igual ao número de discos da torre de Hanoi.

- A matriz é quadrada e de ordem 7.

1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0
4	2	1	0	0	0	0
8	4	2	1	0	0	0
16	8	4	2	1	0	0
32	16	8	4	2	1	0
64	32	16	8	4	2	1

A seguir as contribuições do Grupo 8:

Variando o número de discos e tentando identificar qual o número que expressa o mínimo de movimentos necessários [...] passamos à tarefa de generalizar para um número n de discos. Veja os passos utilizados nesses raciocínios:

1° passo

Número de discos	Número min. Movimentos
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127

2º passo:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2 a_1 + 1$$

$$a_3 = 2 a_2 + 1$$

$$a_4 = 2 a_3 + 1$$

$$a_5 = 2 a_4 + 1$$

$$a_6 = 2 a_5 + 1$$

3º passo:

$$a_7 = 2 a_6 + 1$$

$$a_7 = 2 \cdot 63 + 1 = 127$$

4º passo:

$$a_n = 2 (a_{n-1} + 1)$$

$n = n^\circ$ de discos

$a = n^\circ$ min. de mov.

5º passo:

$$a_7 = 2 a_6 + 1$$

$$a_7 = 2 (2 a_5 + 1) + 1$$

$$a_7 = 4 a_5 + 3$$

$$a_7 = 4 (2 a_4 + 1) + 3$$

$$a_7 = 8 a_4 + 7$$

$$a_7 = 8 (2 a_3 + 1) + 7$$

$$a_7 = 16 a_3 + 15$$

$$a_7 = 16 (2 a_2 + 1) + 15$$

$$a_7 = 32 a_2 + 31$$

$$a_7 = 32 (2 a_1 + 1) + 31$$

$$a_7 = 64 a_1 + 32 + 31$$

$$a_7 = 64 + 32 + 31$$

$$a_7 = 2^{7-1} + 2^{7-2} + 2^{7-2} - 1$$

$$a_7 = 2^{7-1} + 2 (2^{7-2}) - 1$$

$$a_7 = 2^{7-1} + 2^{7-1} - 1$$

$$a_7 = 2 (2^{7-1}) - 1$$

$$a_7 = 2^7 - 1$$

6º passo: $a_n = 2^n - 1$..

Anexo B – Parecer da COMEP da UFRRJ sobre o Projeto de Pesquisa



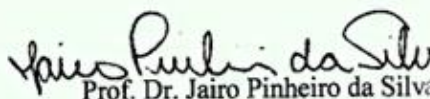
SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COMISSÃO DE ÉTICA NA PESQUISA DA UFRRJ / COMEP

Protocolo N° 604/2015

PARECER

O Projeto de Pesquisa intitulado “*Construindo e analisando práticas educativas em educação matemática com dispositivos touchscreen*” sob a responsabilidade do Prof. Marcelo Almeida Bairral, do Departamento de Teoria e Planejamento de Ensino, do Instituto de Educação, processo 23083.003202/2015-21, atende os princípios éticos e está de acordo com a Resolução 466/12 que regulamenta os procedimentos de pesquisa envolvendo seres humanos.

UFRRJ, 12/04/2016.


Prof. Dr. Jairo Pinheiro da Silva

Pró-Reitor Adjunto de Pesquisa e Pós-Graduação

Jairo Pinheiro da Silva
Pro-Reitor Adjunto de
Pesquisa e Pós-Graduação
Matr. SIAPE 1109555
UFRRJ