

UFRRJ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

DISSERTAÇÃO

**Estudo de quadriláteros, reflexões e rotações no plano, segundo a
teoria de van Hiele: uma experiência com alunos do 9º ano do
ensino fundamental**

Carla Fernandes e Souza

2014



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

**Estudo de quadriláteros, reflexões e rotações no plano, segundo a teoria de
van Hiele: uma experiência com alunos do 9º ano do ensino fundamental**

CARLA FERNANDES E SOUZA

Sob a orientação da Professora

Aline Mauricio Barbosa

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de concentração em Matemática.

Seropédica, RJ

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM Mestrado Profissional em
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT**

CARLA FERNANDES E SOUZA

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre** no curso de **Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT**, área de concentração em matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 22/08/2014

Aline Mauricio Barbosa Dra. UFRRJ
(Orientadora)

Eulina Coutinho Silva do Nascimento. Dra. UFRRJ

José Roberto Linhares de Mattos. Dr. UFF

*Dedico esse trabalho aos professores
engajados, que assim como eu, nunca
desistem da luta.*

*“Don’t tell us there’s no hope at all.
Together we stand, divided we fall.”*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todas as forças que, nesses cinco anos de tentativas (e 35 anos de vida) me fizeram encontrar um caminho.

A minha família, em especial à minha companheira Thais, minha irmã Janaina, minha tia Isaura e meu pai. A primeira por ter aguentado todo o tempo necessário para escrever esse trabalho, durante o qual foi privada de tudo por tabela, com paciência, carinho e ajuda nos momentos em que não podia me retirar do computador. À minha irmã por ter mais fé em mim do que eu mesma, pelas orações, pelo carinho e pelas advertências dadas em horas certas. À minha tia por acreditar, pelas advertências, e por estar por perto sempre que pode e se fez necessário. Ao meu pai, que mesmo sem ter ideia do que se tornou a semente que plantou, ainda me ensina todos os dias que é preciso continuar. Aos meus sobrinhos Júlia, Pedro e Bernardo (que ainda não nasceu) e afilhado Arthur, os quais tiveram a paciência (ou a sorte) em não me terem por perto quando queriam.

Aos amigos meu profundo agradecimento. Silvana Faitão por todas as traduções, perguntas da madrugada, apoio incondicional. Waine por ser Waine e permitir (e brigar) para que eu fosse eu mesma. Obrigada a ambos pela fé depositada, pelos abraços, pelos silêncios, pelos anos de amizade. Aos amigos do IFHEP, em especial Marina e Tobias, que me ensinaram a ser uma professora e, sobretudo, uma pessoa melhor. As amigas Gisela Pinto e Andréa Paura que me apoiaram sempre, com correções e palavras de incentivo desde o tempo que caminhamos juntas, em alguns momentos carreguei, em outros fui carregada.

Aos alunos, meu carinho eterno a todos que fizeram dessa pesquisa uma realidade. A todos aqueles que me ensinaram a ensinar, com os quais eu chorei, ri, briguei e aprendi todos os dias uma coisa nova.

Agradeço a minha orientadora, Aline Mauricio Barbosa, pelo tempo, pelas conferências, pela atenção dedicada e pela paciência.

Aos professores do PROFMAT, em especial ao professor Douglas Monsôres, pelo carinho e atenção dispensados ao longo de três períodos.

À todos que depositaram sua fé, com suas palavras de apoio e incentivo, pelas ligações, pelo querer saber puro e simples “como anda sua pesquisa?”, “precisa de alguma coisa?”, pelos abraços, conversas, troca de experiências, troca de exercícios, aulas das sete da manhã às seis da noite de sábado, agradeço.

À Capes, pelo incentivo financeiro, que ajudou a viabilizar este título.

Todos vocês têm o meu apreço.

RESUMO

FERNANDES, C.S. **Estudo de quadriláteros, reflexões e rotações no plano, segundo a teoria de van Hiele: uma experiência com alunos do 9º ano do ensino fundamental.** 2014. 125 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas – Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Seropédica, 2014.

Apesar de a geometria ser um ramo importante da Matemática, por servir principalmente de instrumento para outras áreas do conhecimento, professores do ensino fundamental apontam problemas relacionados tanto ao seu ensino quanto à sua aprendizagem. Desse modo, procurou-se utilizar maneiras diferenciadas de trabalhar com os conceitos geométricos, fazendo uso de atividades que priorizassem reflexões acerca desses conhecimentos, procurando trabalhar a geometria, não apenas de maneira visual, mas também o estudo de conceitos, facilitando, ao máximo, a aprendizagem dos alunos. Para elaborar tais atividades, foram utilizadas pesquisas baseadas na teoria de Pierre e Dina van Hiele sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico. Essa pesquisa teve como objetivo avaliar que ganhos de conhecimento geométrico, mais especificamente no estudo de isometrias, alunos do 9º ano do Ensino Fundamental da rede municipal de Mangaratiba, poderiam obter quando eram utilizadas atividades propostas em pesquisas baseadas na teoria de van Hiele sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico, ao invés de uma abordagem padrão. Foram aplicados testes para avaliar o nível de conhecimento geométrico, bem como os conhecimentos sobre isometrias. Após a aplicação desses pré-testes, as duas turmas foram divididas em Turma A e Turma B. Com a primeira turma, foram trabalhadas atividades diferenciadas sobre quadriláteros e isometrias de reflexão e rotação, baseadas na teoria de van Hiele e inspiradas nos trabalhos de Nasser (1992) e Nasser e Sant’Anna (1998). Na outra turma, foram realizadas atividades baseadas na metodologia tradicional de ensino de geometria, comumente aplicadas nas escolas ou propostas por livros didáticos. Após isso, foram aplicados os pós-testes para ambas as turmas, com o intuito de avaliar se uma proposta diferenciada no ensino de geometria geraria resultados melhores do que a abordagem tradicional. Para isso, compararam-se os resultados iniciais das duas turmas, bem como os resultados finais, cruzando os dados dos pré e pós-testes, avaliando o percentual de evolução ou involução nesses resultados.

Palavras-chave: Teoria de van Hiele, Isometria, Quadriláteros.

ABSTRACT

FERNANDES, C.S. Study of quadrilaterals, reflections and rotations on planes according to van Hiele theory: an experience with students in the 9th grade, 2014. 125 pages. Masters thesis. Instituto de Ciências Exatas – Departamento de Matemática – UFRRJ. Seropédica, 2014.

Although geometry is an important branch in Mathematics, once it is mainly a tool for other areas of knowledge, primary school teachers point out problems related both to teaching and learning. Therefore, we attempted to use different ways to work with geometric concepts, using activities that prioritized reflections on that knowledge, attempting to work geometry not only in a visual way, but also working with concepts, which facilitates the students' learning to the fullest. In order to elaborate such activities, we used researches bases on the theory of Pierre and Dina van Hiele the development of geometric thinking. this research had the objective of assessing the geometric knowledge gain, more precisely in the study of isometries, students in the 9th grade in a public school in the city of Mangaratiba, in the State of Rio de Janeiro, could have when we used activities proposed in researches based in van Hiele theory on the development of geometric thinking, instead of a standard approach. Tests were applied to assess the level of geometric knowledge as well as the knowledge on isometries. After the application, the two groups were divided into Class A and Class B. with the first class, different activities on quadrilaterals and reflection and rotation isometries, based on van Hiele theory and inspired in Nasser (1992) and Nasser and Sant'Anna (1998) works. With the other group, activities based on the traditional teaching methodology usually used in schools or books were held. Then, post-tests were applied in both groups, with the objective of assessing if a different proposal in geometry teaching would lead to better results than traditional approach. In order to do so, both groups' initial results were compared, as well as final results, matching pre and post test data, assessing the percentage of evolution or involution in such results.

Keywords: Van Hiele Theory, Isometry, quadrilaterals.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	10
1 REFERENCIAL TEÓRICO	13
1.1 O Modelo de van Hiele	13
1.1.1 Níveis de conhecimento geométrico	15
1.2 Pesquisas em Geometria – Aplicações do Modelo de van Hiele	19
1.3 Como é Pautado o Ensino de Geometria no Brasil: Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática	24
1.4 Isometrias	27
1.4.1 Rotação	28
1.4.2 Reflexão	29
2 METODOLOGIA	31
2.1 Escolha do Público-Alvo	31
2.1.1 Sujeitos da avaliação	32
2.2 Metodologia de pesquisa	32
2.3 Aplicação dos Pré-Testes	33
2.3.1 Pré-teste de van Hiele	33
2.3.2 Pré-teste de conhecimentos em isometrias.	36
2.4 Métodos de Análise dos Pré-Testes	38
2.4.1 Pré-teste de van Hiele	38
2.4.2 Pré-teste de conhecimentos em Isometrias	38
2.5 Escolha dos Grupos Experimental e Controle	39
2.6 Aplicação das Atividades para a Turma A (Grupo Experimental)	39
2.6.1 Quadriláteros	30
2.6.2 Simetria de reflexão	44
2.6.3 Simetria de rotação	49
2.7 Aplicação das atividades para Turma B (Grupo Controle)	41
2.8 Aplicação dos Pós-Testes	55
2.9 Análise Dos Pós Testes	55
3 RESULTADOS E DISCUSSÕES	57
3.1 Resultados dos Pré-Testes	57
3.1.1 Pré-teste de van Hiele	57
3.1.2 Pré-Teste de Conhecimentos em Isometrias	65
3.2 Desenvolvimento das atividades	68
3.2.1 Grupo Experimental	68
3.2.2 Grupo Controle	78
3.3 Resultados dos Pós-Testes	82
3.3.1 Pós-Teste de van Hiele	82
3.3.2 Pós-Teste de conhecimentos em isometrias	86
3.4 Comparação dos Resultados dos Pré e Pós-Testes	88
3.4.1 Níveis de van Hiele	88
3.4.2 Conhecimentos em isometrias	93
4 CONSIDERAÇÕES FINAIS	97
5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	100

6 APÊNDICES	103
Apêndice A Pré-Teste de conhecimentos em isometrias	104
Apêndice B Simetria de Reflexão - Atividade I	105
Apêndice C Simetria de Reflexão - Atividade II	106
Apêndice D Simetria de Reflexão - Atividade III	107
Apêndice E Simetria de Reflexão - Atividade IV	108
Apêndice F Simetria de Reflexão - Atividade V	109
Apêndice G Simetria de Rotação - Atividade I	110
Apêndice H Simetria de Rotação – Atividade II	111
Apêndice I Simetria de Rotação – Atividade III	112
Apêndice J Simetria de Rotação – Atividade IV	113
Apêndice K Pós-Teste de Conhecimentos em Isometrias	114
7 ANEXOS	116
Anexo A Teste de van Hiele	116
Anexo B Quadriláteros – Atividade 1	119
Anexo C Quadriláteros – Atividade 2	121
Anexo D – Quadriláteros – Atividade 4	122
Anexo E – Quadriláteros – Atividade 4	123
Anexo F Quadriláteros – Atividade 5	124
Anexo G Quadriláteros – Atividade 6	125

INTRODUÇÃO

Durante dois anos, a autora lecionou como professora de Geometria em duas turmas de 8º ano, e depois 9º ano, na escola municipal em que trabalha, no município de Mangaratiba. Nesse período, mesmo trabalhando de diferentes maneiras para que os alunos compreendessem o conteúdo de geometria, não foram obtidos resultados satisfatórios quanto ao aproveitamento deles nesse quesito. Sempre precisava retornar aos conteúdos já explorados, pois os alunos raramente se lembravam do básico. Não conseguiam diferenciar figuras planas de figuras espaciais, apresentavam dificuldades em enunciar propriedades e não compreendiam a inclusão de classes dos paralelogramos.

Esse não é um problema específico dessas turmas, mas um consenso entre alunos do Ensino Fundamental, evidenciado em pesquisas como Nasser (1992), e nos resultados dos testes em larga escala realizados nas escolas públicas brasileiras (SAEB, Prova Brasil), nos quais se pode observar que os níveis de insucesso em Matemática são hoje um fator de grande apreensão. A geometria representa uma parte do conhecimento matemático de importância fundamental, com aplicabilidade em diversas áreas de conhecimento. Entretanto, os problemas relacionados ao ensino e a aprendizagem dessa disciplina são inúmeros, sejam ligados às metodologias utilizadas pelos professores ou quanto à efetiva compreensão por parte dos alunos, criando assim lacunas no seu ensino.

Nesse sentido, propor uma abordagem diferenciada do ensino de Geometria, mais especificamente no ensino de quadriláteros e suas propriedades e isometrias surge como uma tentativa de sanar as dificuldades dos alunos com relação a esses conteúdos. A pergunta que norteou a realização dessa pesquisa foi a seguinte: Uma abordagem metodológica envolvendo atividades baseadas na teoria de van Hiele surtirá efeitos mais positivos na aprendizagem de quadriláteros e isometrias no plano do que uma metodologia tradicional de ensino para o grupo de alunos mencionado? Para respondê-la, foi organizado um conjunto de atividades, baseadas em propostas apresentadas por Nasser (1992) e Nasser e Sant'Anna (1998), as quais exploram o conteúdo de quadriláteros e isometrias (simetria de reflexão e rotação), com o auxílio da Teoria de van Hiele de conhecimento geométrico. Segundo essas propostas o aluno

seria avaliado de acordo com esses níveis e o objetivo era fazer com que o mesmo evoluísse com o auxílio das atividades.

Sendo assim, essa pesquisa busca avaliar se uma abordagem metodológica envolvendo atividades baseadas no Modelo de van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico surtirá efeitos mais positivos na aprendizagem de quadriláteros e isometrias no plano do que uma metodologia tradicional de ensino.

Ao lecionar geometria para as turmas citadas anteriormente, a autora percebeu uma grande dificuldade na compreensão dos principais conceitos geométricos relacionados ao reconhecimento de figuras planas (triângulos e quadriláteros) principalmente por meio de suas propriedades. Também foram reveladas muitas dificuldades em classificar os tipos de polígonos e em enunciar propriedades relativas a estes. Quando, na realização de exercícios envolvendo os conceitos de congruência, os alunos mal conheciam os casos em que estabelecemos essa equivalência e não entendiam de maneira clara os encadeamentos que surgem desse conceito.

Percebendo essa gama de dificuldades relacionadas aos conceitos geométricos decidiu-se elaborar, baseados em pesquisas da área, atividades que fortaleçam os conhecimentos necessários à compreensão desses conteúdos. A fim de analisar qual o nível de conhecimento geométrico dos alunos com os quais a autora dessa pesquisa trabalhou, a mesma decidiu aplicar testes baseados na teoria de van Hiele para turmas do 9º ano do Ensino Fundamental. Fazendo uma análise ainda que de maneira superficial, a autora percebeu que esses alunos têm um conhecimento geométrico pouco satisfatório com relação à esta seriação. Desse modo, optou-se por utilizar uma abordagem dos conceitos relacionados aos quadriláteros e às isometrias, baseados na teoria de van Hiele, para verificar se os alunos aprenderiam com mais facilidade tais conteúdos, comparado a uma abordagem tradicional, propiciando um aumento do próprio nível do conhecimento geométrico por meio dessas atividades.

O objetivo geral dessa pesquisa é avaliar que ganhos de conhecimento geométrico, mais especificamente no estudo de quadriláteros e isometrias, alunos do 9º ano do Ensino Fundamental da rede municipal de Mangaratiba podem obter quando utilizam-se atividades propostas em pesquisas baseadas na teoria de van Hiele sobre o desenvolvimento do pensamento geométrico, ao invés de uma abordagem padrão. Como objetivos específicos, a

pesquisa se propõe a avaliar e classificar o nível do conhecimento geométrico inicial dos alunos por meio de testes baseados na teoria de van Hiele, bem como perceber quais são as dificuldades apresentadas na compreensão dos conceitos utilizados e aumentar o nível do conhecimento geométrico dos alunos.

Este trabalho está dividido em três capítulos, Capítulo I – Referencial Teórico, Capítulo II – Metodologia e Capítulo III – Resultados e Discussões. No Capítulo I, a autora apresenta o referencial teórico, explorando a teoria de van Hiele sob a ótica de diversos autores, apresentando o modelo de pensamento geométrico proposto pelo casal van Hiele e diversas outras pesquisas que trabalharam com essa mesma teoria. Neste capítulo, a autora também discute as diretrizes dos Parâmetros Curriculares Nacionais com relação ao ensino do conteúdo que será explorado nessa dissertação, definindo, ao final, as isometrias que foram trabalhadas nessa pesquisa.

No Capítulo II, a autora apresenta toda a estrutura metodológica relativa a esse trabalho. Apresenta a escolha e construção dos pré-testes e das questões que possuem, a aplicação e dos critérios de análise utilizados para classificar os alunos de acordo com os níveis de van Hiele. Disserta também sobre a preparação das atividades a serem aplicadas para ambas as turmas, e de que maneira foram feitos e analisados os pós-testes.

No Capítulo III, a autora apresenta os resultados dos pré-testes de ambas as turmas, classificando os alunos por nível de van Hiele. Descreve também como se desenvolveram as atividades para as duas turmas. Ao final, apresenta os resultados dos pós-testes comparando os resultados finais com os iniciais, a fim de avaliar se houve uma evolução nos níveis de van Hiele apresentados pelos alunos no início da pesquisa. As considerações finais são realizadas após o Capítulo III.

CAPÍTULO I - REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo é feita uma introdução ao modelo de conhecimento geométrico apresentado nas pesquisas do casal Pierre van Hiele e Gina van Hiele Geldof, exibindo os níveis de conhecimento geométricos propostos pelos mesmos, bem como suas propriedades. Em seguida, faz-se uma revisão bibliográfica relativa às pesquisas que se utilizaram dessa teoria para apresentar propostas de ensino de geometria usando o modelo de van Hiele. São destacadas as pesquisas de Jaime (1993) sobre o ensino de isometrias em escolas espanholas e De Villiers (2010), que propõe o uso de mosaicos no ensino de geometria na Rússia. Além disso, são apresentadas as pesquisas de Usiskin (1982), que desenvolveu o projeto CDASSG para avaliar o conhecimento geométrico de estudantes de escolas americanas e Nasser (1992), que procurou traçar um perfil sobre os problemas e deficiências dos cursos de Geometria no Brasil, apresentando uma proposta de ensino de Transformações Geométricas para estudantes de escolas brasileiras e inglesas. Nesse sentido, também é apresentado um breve resumo das recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que norteiam o ensino de geometria no Brasil. Ao fim, são apresentadas as definições de isometrias e simetrias de reflexão e rotação, para situar e esclarecer o leitor sobre que conteúdo pretende-se explorar nessa pesquisa.

1.1 O Modelo de van Hiele

Pierre van Hiele e Dina van Hiele-Geldof foram dois pesquisadores holandeses, que também lecionavam em escolas secundárias. Iniciaram seus estudos na área de desenvolvimento e construção do pensamento geométrico, incentivados pelas dificuldades que alunos apresentavam para aprender geometria. Segundo De Villiers (2010), um dos problemas identificados pelo casal de professores foi que o currículo apresentado na década de 1950 estava acima do nível de compreensão dos alunos. De acordo com Nasser (1992), um dos pontos mais importantes sobre essa teoria é que ela surgiu em sala de aula, unindo aspectos cognitivos e pedagógicos do ensino de geometria.

Segundo Nasser (1992), o casal van Hiele se dedicou a estudar essa problemática e ambos desenvolveram o que é conhecida hoje como Teoria de Van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico. Essa teoria sugere níveis sequenciais de aprendizagem de conteúdo em que a comunicação, a descoberta e o decorrer do trabalho em sala de aula influenciam particularmente no desenvolvimento do aprendizado em geometria.

O núcleo central do modelo de van Hiele está constituído pela ideia de que, ao longo do processo de aprendizagem da geometria, o conhecimento dos estudantes passa por uma série de níveis de conhecimento que são sequenciais, ordenados e tais que não se pode avançar para o nível seguinte sem passar pelo nível anterior. (JAIME, 1993, p.4, tradução nossa).

Como se pode perceber então, o modelo proposto por van Hiele é dividido em níveis de conhecimentos em geometria. A maioria dos pesquisadores utiliza a divisão proposta por Wirszup (1976), que divide os níveis de conhecimento geométrico em cinco níveis distintos. Entretanto, a divisão inicial feita pelo casal van Hiele (1986) constava de apenas três níveis, equivalentes aos níveis 02, 03 e 04 atuais. Após uma série de pesquisadores proporem um nível inferior, ligado à visualização, van Hiele passou a adotar quatro níveis de conhecimento, assumindo também a possibilidade de níveis superiores. Mais tarde, o pesquisador propôs três níveis novamente, eliminando a possibilidade de níveis superiores e fundindo o segundo, terceiro e quarto nível em dois. Contudo, ainda que muitas mudanças na organização dos níveis tenham ocorrido, Jaime (1993) afirma que a essência do que, de fato, deve ser discutido e desenvolvido para o desenvolvimento do pensamento e conhecimento geométrico é o mesmo. Muitos estudiosos continuam adotando a divisão desses níveis em cinco áreas distintas, numerando-os do nível 01 ao nível 05.

Os estudos de Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele culminaram em suas pesquisas de doutorado e outros tantos artigos, que apresentam tal teoria como um modelo para direcionar o ensino de geometria, avaliando o nível de maturidade dos alunos e apresentando uma proposta de experimento educacional.

De acordo com Jaime (1993), esse modelo é baseado em dois aspectos. O primeiro é *descritivo* que trata de identificar diferentes formas de conhecimento geométrico dos alunos, avaliando o seu progresso. O segundo, o *aspecto instrutivo*, oferece diretrizes para que professores possam trabalhar e, dessa maneira, favorecer o progresso dos estudantes nos níveis de conhecimento geométrico propostos pelos pesquisadores.

1.1.1 Níveis de conhecimento geométrico

Segundo Jaime (1993), “Cada nível supõe a compreensão e utilização dos conceitos geométricos de maneira distinta o qual se reflete em uma maneira diferente de interpretá-los, defini-los, classifica-los e fazer demonstrações”, (JAIME, 1993, p.4, tradução nossa). No modelo de desenvolvimento geométrico de van Hiele, o conhecimento geométrico é dividido em cinco níveis de aprendizagem e desenvolvimento. Na prática, segundo Crowley, (1994, p.18), ao ser questionado sobre “Que tipo de figura é essa ■ ? Como você sabe?” o aluno, em qualquer nível, responderia que “é um retângulo” à primeira pergunta. Porém, para cada um dos níveis de van Hiele apresentados abaixo, os alunos dariam um tipo de resposta.

- **Nível 1** (Reconhecimento e Visualização): Identificação, comparação e nomenclatura de figuras geométricas, com base na sua aparência global. O conhecimento geométrico é em nível básico. A descrição e percepção das figuras devem ser feitas globalmente ou individualmente, baseando-se apenas em características físicas (visuais). Introdução do vocabulário matemático na descrição de figuras geométricas. Segundo Crowley (1994, p.18) nesse nível, o aluno daria uma resposta baseada modelo visual, “parece um retângulo” ou “porque parece uma porta”.
- **Nível 2** (Análise): Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas. A capacidade de analisar figuras e descrever minimamente algumas propriedades, bem como outros elementos matemáticos, porém sem relacioná-las, ou demonstrá-las. Segundo Crowley (1994, p.18), a resposta para a segunda pergunta nesse nível seria “quatro lados, fechado, dois lados compridos, dois lados curtos, lados opostos paralelos, quatro ângulos retos”. Ou seja, o aluno relaciona as propriedades, mas não observa a redundância entre elas.
- **Nível 3** (Síntese ou Dedução Informal): Percepção da necessidade de uma definição precisa e de que uma propriedade pode decorrer de outra; argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas. A resposta dada nesse nível seria “é um paralelogramo com quatro ângulos retos”. De acordo com Crowley (1994, p.18), o aluno procuraria dar o número mínimo de propriedades, a fim de evitar as repetições, e se fosse questionado, diria que é redundante dizer, por exemplo, que os lados opostos são congruentes.
- **Nível 4** (Dedução): Domínio do processo dedutivo e de demonstrações; reconhecimento de condições necessárias e suficientes. Ou seja, as demonstrações são realizadas, relacionando propriedades e compreensão das estruturas matemáticas axiomáticas. Nesse nível, o aluno é capaz de demonstrar dedutivamente por que a figura é um retângulo e

sua resposta, de acordo com Crowley (1994, p.18), seria “Isso pode ser provado se eu sei que a figura é um paralelogramo e que um dos ângulos internos é reto”.

- **Nível 5 (Rigor):** Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos, realização de deduções abstratas, percepção da consistência de um sistema axiomático e compreensão da importância do rigor nas demonstrações matemáticas.

O modelo de van Hiele também estabelece como estrutura de desenvolvimento do pensamento geométrico, cinco fases de aprendizagem entre cada um, que sugerem uma organização de atividades, a fim de estimular ao aluno o desenvolvimento do raciocínio entre níveis. As fases determinam o grau de aprendizagem em cada um deles.

Fase 1 - Interrogação e informação

Ocorre o contato com o novo tema de estudo. Troca de informações entre professores e alunos sobre o objeto a ser estudado. O vocabulário é próprio do nível em que os alunos se encontram.

Fase 2 - Orientação dirigida

Exploração do objeto de estudo em atividades pré-selecionadas pelo professor, de forma a dar aos alunos capacidade de ter respostas específicas e objetivas.

Fase 3 - Explicação

Troca de visões entre alunos a respeito das observações feitas na fase anterior. Nesta fase, começa a tornar-se evidente o sistema de relações de níveis.

Fase 4 - Orientação livre

Atividades mais complexas, com diversos resultados. Com isso, o estudante terá condições de tornar explícitas as relações do objeto de estudo, o que lhe trará confiança no aprendizado e autonomia.

Fase 5 - Integração

Síntese do que foi aprendido, com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações.

Outras características importantes do modelo de van Hiele, propostas por Usiskin (1982), são:

- **Ordem fixa:** não é possível alcançar o nível $n+1$ sem antes passar pelo nível n ;
- **Adjacência:** Em cada nível de pensamento, o que era implícito no nível anterior, passa a ser explícito no próximo;
- **Distinção:** cada nível possui seus próprios símbolos linguísticos e sua própria rede de relacionamentos que conecta esses símbolos;
- **Separação:** Duas pessoas com raciocínio em níveis diferentes, no mesmo conteúdo, não podem compreender uma à outra. Entretanto, para conteúdos distintos, uma pessoa pode estar em níveis distintos.

Encontramos também em Guimarães (2006), um quadro (Tabela 1.1) que descreve as habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos, de acordo com cada nível a ser alcançado, segundo o modelo de van Hiele.

Quadro 1.1 – Fonte: Guimarães (2006, p. 15).

Nível/habilidade	Visualização	Análise	Dedução Informal	Dedução	Rigor
Visual	Reconhecer diferentes figuras em um desenho e informações contidas em figuras.	Observar propriedades de uma figura e identificar uma figura como parte de uma figura maior.	Reconhecer interpelações entre diferentes tipos de figura. Reconhecer propriedades comuns de diferentes tipos de figura.	Usar informações sobre uma figura para deduzir mais informações	Reconhecer que afirmações são injustificáveis quando se faz uso de figuras. Conceber figuras relacionadas em vários sistemas dedutivos
Verbal	Associar o nome correto de uma figura dada e interpretar frases que descrevem figuras.	Descrever precisamente várias propriedades de uma figura.	Definir palavras corretas concisamente. Formular sentenças mostrando interações entre figuras.	Compreender as distinções entre definições, axiomas e teoremas. Distinguir o que é dado em um problema do que é pedido para encontrar ou fazer.	Formular extensões de resultados conhecidos. Descrever vários sistemas dedutivos.
Gráfica	Fazer esboço de figuras destacando com precisão as partes dadas.	Transferir informações dadas verbalmente para um desenho. Usar propriedades dadas para desenhar ou construir figuras.	Ser capaz de construir figuras relacionadas com certas figuras dadas.	Reconhecer quando usar elementos auxiliares numa figura. Deduzir de informações dadas como desenhar ou construir uma figura específica.	Compreender as limitações e possibilidades de várias representações gráficas. Representar graficamente conceitos não usuais em vários sistemas dedutivos.
Lógica	Perceber que há diferenças e semelhanças entre as figuras. Compreender a conservação da forma de uma figura em várias posições.	Compreender que figuras podem ser classificadas em diferentes tipos e que as propriedades podem ser usadas para distinguir figuras.	Compreender qualidade de uma boa definição. Usar propriedades das figuras para determinar se uma classe de figuras está contida em uma outra classe.	Usar regras de lógica para desenvolver demonstrações. Ser capaz de deduzir consequências de informações dadas.	Compreender as limitações e possibilidades de hipóteses ou axiomas. Reconhecer quando um sistema de axiomas é independente, consistente e categórico.
Aplicação	Identificar formas geométricas nos objetos do meio ambiente.	Reconhecer propriedades de objetos do meio ambiente. Representar fenômenos físicos em papel ou modelo.	Entender o conceito de um modelo matemático que representa relações entre objetos.	Ser capaz deduzir propriedades de objetos a partir de informações dadas ou obtidas. Ser capaz de resolver problemas que relacionam objetos.	Usar modelos matemáticos para representar sistemas abstratos. Desenvolver modelos matemáticos para descrever fenômenos físicos, sociais e naturais.

Com exceção da Rússia, onde o currículo de geometria foi reformulado na década de 1960 para se adequar ao modelo de van Hiele, o trabalho de Dina van Hiele-Geldof e Pierre van Hiele ainda perdurou por algum tempo antes de ganhar visibilidade internacional. Isso ocorreu pois a tradução das pesquisas para a língua inglesa só ocorreu pouco mais de 30 anos após o início dos trabalhos (CROWLEY, 1994). A partir de então, o modelo proposto pelos van Hiele passou a ser notado em diferentes pesquisas, com a criação de testes para avaliar o nível dos alunos, fosse pontualmente ou ao longo de um processo de aprendizagem, bem como a discussão sobre a divisão entre níveis.

1.2 Pesquisas em Geometria – Aplicações do Modelo de van Hiele

Jaime (1993) desenvolveu sua pesquisa, a fim de apoiar grupos de professores das escolas públicas de educação básica em Valencia, na Espanha. Em sua tese de doutorado, encontra-se uma série de atividades e sequências didáticas para o ensino de isometrias, baseadas no modelo de van Hiele, desde a pré-escola até o fim do equivalente ao Ensino Fundamental brasileiro.

A pesquisa relata as experiências e os resultados obtidos da aplicação dessas atividades em três grupos distintos: alunos do 3º ano E.G.B - educação geral básica espanhola - equivalente ao nosso 3º ano do Ensino Fundamental; alunos do 6º ano E.G.B. – atualmente a última série da escola primária na Espanha, equivalente ao nosso 6º ano do Ensino Fundamental; e 1º BUP – Bachelor Unificado Polivalente – atualmente a última fase da educação secundária obrigatória, equivalente ao nosso 1º ano do Ensino Médio.

São apresentadas sequências didáticas que incentivam o estudo da geometria de maneira crítica, argumentativa e por meio da resolução e discussão de problemas, explorando conceitos de isometrias (simetrias, rotação e translação), separadas por níveis de raciocínio geométrico, de acordo com cada fase de aprendizagem. A mesma expõe os objetivos a serem alcançados de acordo com cada grupo estudado, explorando as bases e definições matemáticas necessárias à aprendizagem de cada uma das isometrias exploradas, fazendo uma relação entre o aprendizado de tais conceitos e a teoria de van Hiele. A pesquisa também apresenta formas de avaliar o aprendizado à luz da teoria proposta.

Em De Villiers (2010), encontra-se um resumo de pesquisa realizada na Rússia, sobre o ensino de geometria, que descortina alguns dos principais motivos de alunos, relativamente bons em outras disciplinas, terem um aproveitamento abaixo do esperado em geometria.

O autor descreve que o Programa de Geometria Russo divide-se em duas fases: a fase intuitiva, da 1ª à 5ª série (equivalente ao período do 2º ao 6º ano do nosso Ensino Fundamental) e a fase descritiva, que vai da 6ª série até o final da escola secundária (equivalente ao período do 7º ano ao fim do Ensino Fundamental). Usando o modelo de van Hiele, foi verificado que alunos que deveriam se encontrar ao final da fase intuitiva (6ª série – entre 12 e 13 anos), apresentavam muitas dificuldades no início da fase descritiva e que alcançavam o nível 2 de van Hiele ao final da fase intuitiva. Contudo, tudo sugere que, para que os alunos tenham um bom aprendizado no início desta fase, já deveriam estar no nível 3. Sendo assim, seguindo os princípios da caracterização e separação entre os níveis, os alunos não podiam compreender o professor e vice-versa (DE VILLIERS, 2010, p.401).

O autor sugere uma reformulação do currículo na geometria do Ensino Fundamental, a fim de melhorar a qualidade do aprendizado na escola secundária. Para tal, sugere uma abordagem diferenciada, que atualmente é subtilizada nos livros didáticos do sistema de ensino russo: o uso de mosaicos no ensino de geometria. Tal abordagem possibilita “um alicerce visual intuitivo” (DE VILLIERS, 2010, p.407) condizente com o nível 01 de van Hiele, para vários conceitos geométricos. Em seguida, sugere tratar de tais assuntos, de maneira mais formal, nos níveis seguintes de van Hiele, em um contexto onde seja possível trabalhar melhor com o processo dedutivo do aluno, adequado às análises de figuras geométricas ou explicações lógicas (ações relativas aos níveis 02 e 03 de van Hiele).

De Villiers (2010) também descreve uma série de atividades norteadoras para o ensino de geometria, usando mosaicos em diferentes níveis de aprendizagem e que fomentam o desenvolvimento entre níveis. Além disso, o autor descreve algumas atividades para serem utilizadas em espaços e situações distintas, como por exemplo, o uso do *software* de geometria dinâmica *sketchpad*¹. Tais atividades permitem aos alunos a descoberta de determinadas propriedades em objetos que possuem características comuns (os diferentes subconjuntos não disjuntos de paralelogramos).

Em Usiskin (1982) encontra-se uma pesquisa detalhada sobre o projeto “*The cognitive development and achievement in secondary school geometry*” (O desenvolvimento cognitivo obtido na geometria da escola secundária) ou, como o próprio autor denominou, Projeto CDASSG. Esse projeto contou com 2699 alunos, divididos em 99 classes, todos iniciando o primeiro ano do curso de geometria. Foram ao todo 13 escolas de ensino médio, em cinco estados norte-americanos. O objetivo principal do projeto foi testar a habilidade da teoria de

¹ Primeiro editor gráfico orientado, que permite a criação e manipulação de objetos. Precursor dos *softwares* atuais de geometria dinâmica.

van Hiele em descrever e prever o desenvolvimento destes estudantes no ensino de geometria da escola secundária.

O autor investigou inicialmente de que maneira os estudantes estavam distribuídos com relação aos níveis de van Hiele e quais as mudanças entre os níveis ocorridas após anos de estudo, separando os alunos por nível e verificando a propriedade de ordem fixa entre os níveis. Também foi investigado em que medida os níveis de van Hiele estão relacionados ao conhecimento concorrente alcançado sobre geometria e como são capazes de prever o conhecimento de geometria após um ano de estudo, bem como as generalizações que podem ser feitas com relação ao nível inicial e o conhecimento previamente adquirido de alunos que são, mais tarde, reconhecidamente mal sucedidos em geometria.

Além disso, Usiskin também analisou em que medida a geometria ensinada aos alunos é apropriada ao nível de van Hiele em que se encontram e como as aulas de geometria nas diferentes escolas e com diferentes configurações socioeconômicas se diferenciam na correção dos níveis de van Hiele de seus alunos. Procurou avaliar também a propriedade de distinção entre níveis, e fornecendo um teste um pouco menos formal da validade dessa propriedade.

Para avaliar todos esses quesitos foram necessários cinco testes. Os dois primeiros foram aplicados durante a primeira semana do ano letivo, para medir o conhecimento inicial em geometria e foi realizado um teste para avaliar os níveis de van Hiele de cada estudante. Pouco antes do final do mesmo ano letivo, os alunos refizeram o teste para reavaliar os níveis de van Hiele, bem como um teste padronizado de conhecimentos em geometria. Uma subamostra da população (1127 alunos) ainda realizou um Teste adicional de Demonstrações.

Os resultados dessa pesquisa permitiram ao autor avaliar os níveis de van Hiele apresentados pelos estudantes que o realizaram, bem como comparar os níveis de conhecimento inicial e final. Além disso, os resultados mostraram que o modelo de van Hiele também possibilitava a antecipação dos resultados no que diz respeito à mudança entre níveis e melhora no que diz respeito às demonstrações em geometria.

Dentre os autores brasileiros, será destacada a pesquisa de Nasser (1992), que descreve, como um dos maiores problemas no ensino de Geometria no Brasil, o enfoque dado à disciplina em sala de aula, estritamente teórico, com poucas aplicações práticas, sem manipulação de material concreto ou de outras mídias que destaquem os aspectos dinâmicos da geometria. Segundo a autora, “Por quase dois mil anos, o lado especulativo da geometria

foi enfatizado pela abordagem Euclidiana para a geometria na educação fundamental, a qual o lado prático era quase ausente.” (NASSER, 1992, p. 15, tradução nossa).

O ensino de álgebra e geometria ainda é feito de forma estanque, sem explorar as diversas conexões entre álgebra e geometria. Além disso, a contextualização no ensino de geometria ainda se encontra de maneira incipiente. Na Figura 1.1 vemos um exemplo da abordagem sobre quadriláteros proposta pelo material de apoio pedagógico das escolas públicas do Rio de Janeiro.

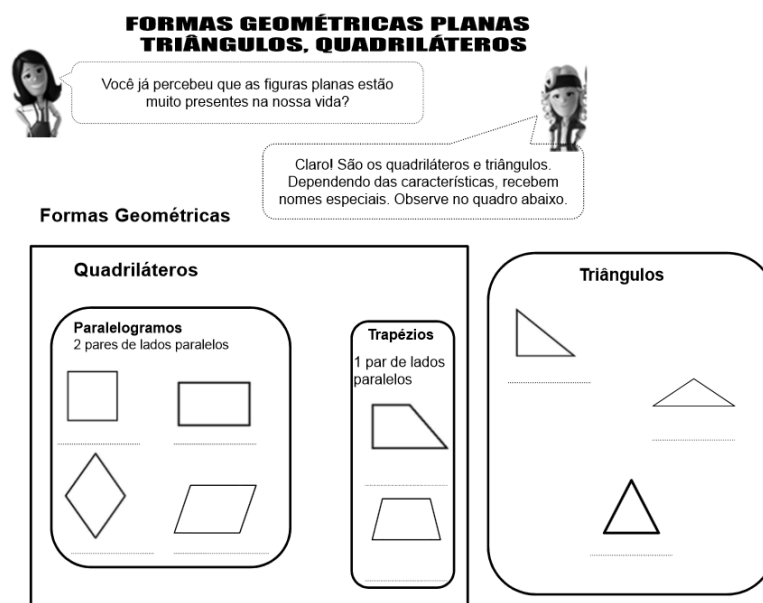


Figura 1.1 – Exemplo de atividade 6º ano. (Soares e Trindade, 2012).

Na figura 1.1 observa-se o diálogo entre duas personagens, onde a primeira afirma que as figuras geométricas estão presentes no nosso cotidiano fazendo uma alusão clara à contextualização que pode ser utilizada no ensino de Geometria. Entretanto, a segunda personagem ignora o sentido do contextualizar, ressaltando apenas os nomes das figuras, sem apresentar suas propriedades ou até mesmo que tipo de aplicabilidade cotidiana tais formas geométricas possuem.

Sobre o ensino de geometria, usando a Teoria de van Hiele, Nasser (1992) apresenta uma visão geral dos problemas e deficiências dos cursos de Geometria no Brasil, por meio da investigação da visão geométrica de estudantes brasileiros universitários, identificando os níveis de conhecimento geométrico dos mesmos. Além disso, a pesquisa trata da extensão da Teoria de van Hiele para o ensino de Transformações Geométricas e, mais especificamente, do tema congruência de figuras planas.

Ao longo do texto, Nasser procura responder questões referentes às dificuldades no aprendizado da geometria plana, no tema congruências, aplicando e analisando os resultados

de testes diagnósticos aplicados em 83 alunos, na faixa etária de 14-15 anos, com os quais o tema em questão teria sido trabalhado no ano letivo anterior.

A pesquisa também responde às questões sobre a diferença entre os níveis de conhecimento geométrico dos alunos e o nível em que o conteúdo é transmitido e, como possibilitar a mudança de nível 01 para o nível 02 no tema congruências, em apenas seis meses, com o uso de atividades estruturadas. Para isso, outros 317 alunos realizaram um série de exercícios desenvolvidos sobre o tema congruência, bem como testes antes e depois dessas atividades, a fim de avaliar os efeitos dessa proposta.

Como últimas questões de pesquisa, a autora ainda investiga se, em dois grupos distintos (um por meio da abordagem tradicional e outro utilizando a teoria de van Hiele), diagnosticados no mesmo nível, seria possível obter os mesmos resultados no aprendizado de congruência. Para tal, 117 estudantes, divididos em grupos Experimental e Controle, de duas escolas distintas, realizaram as atividades propostas e testes avaliadores para verificar se tais mudanças ocorreram.

Em Nasser e Sant'Anna (1998), é apresentado um conjunto de atividades que permite desenvolver o pensamento geométrico dos alunos, com relação à aprendizagem de quadriláteros, isometrias e congruências, com base em atividades simples, mas que também possibilitam discussões e análise com relação aos conteúdos geométricos abordados. As atividades propostas visam o reconhecimento de figuras planas, propriedades e características comuns entre grupos de figuras geométricas distintas; reconhecimento dos tipos de isometrias, seus eixos de simetria, pontos de rotação e introdução aos casos de semelhança e congruência. Todas as tarefas são baseadas no modelo de van Hiele para desenvolvimento do pensamento geométrico. Logo são sequenciais e permitem um encadeamento de ideias e embasamento de outros conteúdos que serão cobrados de maneira mais formal, sempre no próximo nível de estudo.

A autora ainda apresenta um teste para avaliar os níveis de conhecimento geométrico dos alunos, baseado na teoria de van Hiele e adaptado do teste CDASSG (*The Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry*), desenvolvido por Usiskin (1982). São ao todo quinze questões, divididas em três grupos de atividades, de acordo com os níveis 1, 2 e 3 de van Hiele (veja Anexo A – Teste de van Hiele). A equivalência entre as questões e os níveis pode ser organizada de acordo com o quadro 1.2.

Quadro 1.2 – Questões do Teste de van Hiele por nível.

Questões	Nível
<i>01 - 05</i>	1
<i>06 - 11</i>	2
<i>12 - 15</i>	3

Nasser utilizou, como método de avaliação entre níveis, um percentual de 60% de acertos nas questões relativas a cada nível. Ou seja, um aluno só seria agrupado no nível n de van Hiele, se acertasse pelo menos 60% das questões de cada nível k do teste, onde $k=1, \dots, n$. Por exemplo, para estar classificado no nível 1, a autora considera que pelo menos três das cinco questões desse nível estejam corretas. Para estar classificado no nível 3, o aluno deve acertar pelo menos 60% das questões de cada nível 1, 2 e 3.

Outros autores brasileiros tem se preocupado em trabalhar com a Teoria de van Hiele, a fim de analisar e sanar alguns problemas. Por exemplo, em Kaleff, Henriques, Rei e Figueiredo (1994), o Modelo de van Hiele é utilizado para estudar a dificuldade dos alunos, ao final dos cursos de matemática, em relacionar sistemas axiomáticos diversos e sistematizar o pensamento dentro da geometria euclidiana. Em Hamazaki (2004), sugere-se uma elaboração de proposta de intervenção pedagógica, para alunos da licenciatura em matemática, a fim de solucionar a mesma problemática. A teoria de van Hiele também é utilizada em Morelatti e Souza (2006) para auxiliar futuros professores do 1º segmento do Ensino Fundamental nos principais conceitos da geometria básica, além de apresentar uma proposta para o uso das novas tecnologias no ensino de geometria nas séries iniciais.

A teoria de van Hiele é também utilizada em Alves e Sampaio (2010), Baumgartner, Klaus e Pazos (2010), Bogoni, Perin e Brancher (2004), a fim de elaborar propostas de uso de *softwares* de geometria dinâmica e potencializar o ensino de geometria, à luz do modelo pedagógico proposto por van Hiele.

1.3 Como é Pautado o Ensino de Geometria no Brasil: Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática

No Brasil, desde 1998, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) direcionam o trabalho das escolas no que diz respeito à seleção, adequação, tipo de abordagem e avaliação dos conteúdos dos ensinos Fundamental e Médio. Tais diretivas são baseadas em premissas extremamente pertinentes para esse estudo. De acordo com tais parâmetros “A atividade

matemática escolar não é ‘olhar para coisas prontas e definitivas’, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade”. (BRASIL, 1998, p.19).

E ainda,

No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a “falar” e a “escrever” sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados. (BRASIL, 1998, p.19).

Em relação à matemática para os ciclos do Ensino Fundamental, os PCN se dividem em quatro partes. No quadro 1.3 é possível ver a relação dos ciclos, com os anos (seriação atual) e a seriação antiga.

Quadro 1.3 – Comparativo entre ciclos e seriação no Ensino Fundamental

Ciclos	Seriação Antiga	Seriação Atual
1º	1ª e 2ª série	2º e 3º anos
2º	3ª e 4ª série	4º e 5º anos
3º	5ª e 6ª série	6º e 7º anos
4º	7ª e 8ª série	8º e 9º anos

Para cada ciclo de aprendizagem do Ensino Fundamental, os PCN estabelecem objetivos definidos de aprendizagem para o aluno, direcionamento para o ensino (voltado para professores), bem como uma divisão em blocos dos conteúdos matemáticos. Os blocos são denominados *Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação*. Os blocos que nos interessam particularmente nesse trabalho são *Espaço e Forma e Grandezas e Medidas*, bem como seus objetivos e suas diretrizes para o ensino dos conteúdos relativos à geometria.

A Geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. Além disso, se esse trabalho for feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998, p. 39).

No terceiro ciclo do Ensino Fundamental, é esperado dos alunos ampliarem seus conhecimentos no bloco Espaço e Forma que já foram abordados nos anos anteriores, de maneira mais informal. Nesse ciclo são trabalhadas com mais profundidade as noções de direção e sentido, ângulos, paralelismo e perpendicularismo. Já é esperado que os alunos analisem figuras com relação à dimensionalidade das mesmas, fazendo comparações entre elas. Durante esse ciclo também devem ser aprofundadas as transformações isométricas discutidas nessa pesquisa, além de aprofundar a capacidade de orientar-se num sistema de coordenadas cartesianas, como também em mapas ou guias.

Os alunos também devem desenvolver a capacidade de observação, análise e crítica, ainda que superficiais, trabalhando com propriedades das figuras geométricas e conjecturando sobre elas, trabalhando todas as questões relativas à proporcionalidade. Também devem ser iniciadas as construções com régua e compasso e as figuras geométricas como um todo, polígonos, círculos e circunferências. Desse modo, é esperado que, de acordo com o Modelo de van Hiele do pensamento geométrico, os alunos tenham atingido ao final do terceiro ciclo (7º ano do Ensino fundamental) o Nível 1 (visualização), no que diz respeito aos conteúdos de geometria trabalhados nesses anos escolares, mais especificamente, com relação a essa pesquisa, quadriláteros e simetria. Quanto ao primeiro, até o 7º ano do Ensino Fundamental, é esperado que os alunos apenas identifiquem os quadriláteros, reconhecendo seus elementos (lados, vértices e ângulos internos), classificando-os (apenas visualmente) em retângulos, quadrados e losangos. Quanto à simetria, é esperado que os alunos reconheçam figuras simétricas, identificando os eixos de simetria da figura e desenhando figuras simétricas.

No quarto ciclo do Ensino Fundamental, os PCN apresentam como objetivos específicos em matemática o aprofundamento algébrico necessário à resolução de equações e compreensão do conceito de função. O desenvolvimento dos conteúdos geométricos fica também voltado para a compreensão do movimento do ponto ao longo de uma curva, ou seja, ainda ligados à parte algébrica (função) que é discutida durante esse ciclo.

Além disso, também são discutidas as transformações de redução e ampliação de figuras planas, bem como as outras isometrias com mais profundidade, trabalhando os conceitos de paralelismo e perpendicularismo, ângulos, sob uma ótica analítica que culmina nos casos de semelhança e congruência entre figuras planas. São trabalhadas também as noções de medida, comparações e cálculo de áreas e perímetros. Além de aprofundar as propriedades das figuras geométricas, iniciando as conjecturas e demonstrações das mesmas,

as demonstrações empíricas também devem ser bastante trabalhadas para que os alunos utilizem as construções geométricas com régua e compasso, a fim de verificar determinadas propriedades das figuras geométricas no geral, planas ou espaciais.

É importante também na exploração desse bloco desenvolver atividades que permitam ao aluno perceber que pela composição de movimentos é possível transformar uma figura em outra. Construindo figuras a partir da reflexão, por translação, por rotação de outra figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos da figura dada e da figura transformada são as mesmas. As atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a construção da noção de congruência de figuras planas (isometrias). (BRASIL, 1998, p.86)

Ao fim do quarto ciclo do Ensino Fundamental, é esperado que os alunos saibam identificar a relação entre os diferentes tipos de quadriláteros por meio de suas propriedades, identificando as inclusões de classes de paralelogramos. Além disso, o aluno deve identificar e compreender as propriedades relativas aos elementos desses quadriláteros, como por exemplo, diagonais e ângulos opostos. Desse modo, os alunos que concluem o 9º ano do Ensino Fundamental devem ter alcançado o Nível 3 de van Hiele.

Sobre as orientações didáticas para o ensino de isometrias, os PCN destacam que o mesmo deve ser privilegiado nesse ciclo, uma vez que “permite o desenvolvimento de conceitos geométricos de forma significativa” (BRASIL, 1998, p.124). Além disso, os PCN também prevêm o uso de *softwares* de geometria dinâmica, no sentido de auxiliar os alunos a visualizarem melhor as transformações realizadas, bem como o trabalho de comparação entre figuras simétricas por rotação. Ainda destaca que “as transformações isométricas são um excelente ponto de partida para a construção de noções de congruência e compreensão das propriedades” (idem).

1.4 Isometrias

Em Delgado, Frensel e Crissaff (2012, p. 2), encontra-se a seguinte definição para transformações geométricas:

Definição 1.1: *Uma transformação no plano π é uma função $T: \pi \rightarrow \pi$, que a cada ponto $P \in \pi$ associa o ponto $T(P) \in \pi$, chamado imagem de P por T .*

Ou seja, as transformações geométricas no plano são funções que fazem corresponder a cada ponto do plano, um novo ponto do plano.

Definição 1.2: Uma *isometria no plano* π é definida como uma transformação geométrica $F: \pi \rightarrow \pi$ que preserva as distâncias, isto é, para quaisquer pontos P e Q no plano π , a distância d entre eles obedece à igualdade

$$d(P; Q) = d(F(P); F(Q)).$$

Mostra-se que uma isometria no plano preserva a amplitude dos ângulos, veja, por exemplo, Delgado, Frensel e Crissaff (2012, p. 18).

O conceito de congruência de figuras geométricas é obtido da seguinte maneira: “dois objetos geométricos são congruentes quando existe uma isometria que transforma um no outro. As isometrias são os movimentos rígidos da Geometria Euclidiana” (DELGADO; FRENSEL; CRISSAFF, 2012, p. 17).

Neste trabalho serão estudados apenas dois tipos de isometrias, a reflexão e a rotação.

1.4.1 Rotação

Em Delgado, Frensel e Crissaff (2012, p. 10), encontra-se a seguinte definição para rotação no plano em torno de um ponto:

Definição 1.3: A *rotação de ângulo* θ em torno de um ponto P_o é a transformação $R_{\theta, P_o}: R^2 \rightarrow R^2$ que a cada ponto P do plano associa o ponto P' obtido pela rotação de ângulo θ , no sentido positivo, do ponto P em torno do ponto P_o , veja a figura 1.2.

É importante ressaltar que, de acordo com o ângulo θ , a rotação se dará no sentido horário ($\theta < 0$) ou anti-horário ($\theta > 0$).

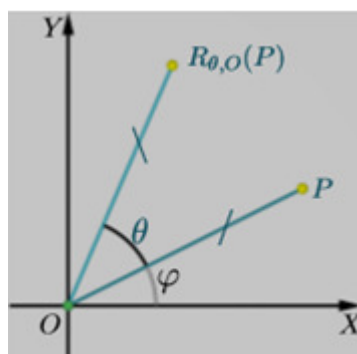


Figura 1.2 – Rotação $R_{\theta, O}$. (Delgado, Frensel e Crissaff, 2012).

1.4.2 Reflexão

A reflexão é uma transformação geométrica que pode ser de dois tipos, a simetria de reflexão com relação a um ponto, ou a simetria axial, ou seja, com relação à uma reta. De acordo com Delgado, Frensel e Crissaff (2012, p. 3-5), tem-se as seguintes definições para ambos os tipos de isometria de reflexão.

Definição 1.4: Dado um ponto P_0 do plano, a transformação R_{P_0} que a cada ponto P do plano associa o ponto $P' = R_{P_0}(P)$ pertencente à reta que passa por P_0 e P , tal que $\overrightarrow{P_0P'} = -\overrightarrow{P_0P}$, é a **reflexão em relação ao ponto P_0** , veja figura 1.3.

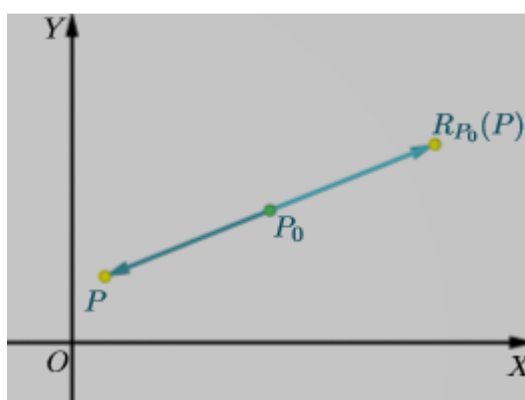


Figura 1.3 – Reflexão R_{P_0} . (Delgado, Frensel e Crissaff, 2012).

Definição 1.5: A **reflexão R_ℓ em relação à reta ℓ** é a transformação que a cada ponto P associa o ponto $P' = R_\ell(P)$ tal que ℓ é a mediatriz do segmento PP' . Ou seja, $P' = (x', y')$ é o ponto do plano tal que a projeção de P na reta ℓ é o ponto médio do segmento PP' , veja figura 1.4.

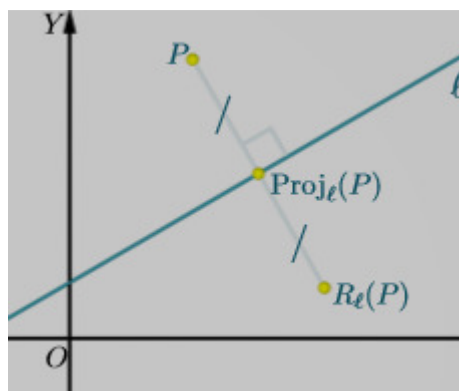


Figura 1.4 – Reflexão R_ℓ . (Delgado, Frensel e Crissaff, 2012).

Segue que a reflexão R_l é uma transformação geométrica que fixa os pontos que pertencem à reta l (também chamado eixo de simetria). Pode ser mostrado que a reflexão em torno de uma reta é uma isometria que inverte a orientação de ângulos, veja Delgado, Frensel e Crissaff (2012, p. 24).

CAPÍTULO II – METODOLOGIA

Neste capítulo descreve-se a metodologia para a realização dessa pesquisa, desde a escolha do público-alvo, aplicação dos testes iniciais, que definiram a escolha dos grupos Experimental e Controle, até a aplicação dos testes finais para avaliar o aproveitamento desses grupos após a aplicação das atividades. Também se descreve que maneira as atividades foram elaboradas e desenvolvidas com as turmas e quais os critérios aplicados na análise dos testes, a fim de avaliar a evolução dos alunos entre os níveis propostos por van Hiele.

2.1 Escolha do Público-Alvo

No ano de 2012, a autora do presente trabalho lecionou, para duas turmas de 8º ano do Ensino Fundamental, um curso de geometria em uma escola municipal em Mangaratiba, Estado do Rio de Janeiro. Durante esse período, a mesma percebeu que os conhecimentos eram apreendidos pelos alunos de maneira muito superficial: apenas o suficiente para realizar avaliações nas quais os conhecimentos necessários não fossem muito aprofundados, ou ainda para realizar questões de aplicação direta, sem a necessidade de análise ou alguma demonstração, ainda que informal. Isso pôde ser percebido principalmente durante o bimestre em que foram trabalhados semelhanças de figuras planas e os casos de congruências de triângulos. Os alunos dificilmente conseguiam perceber qual caso de semelhança ou congruência deveriam utilizar para comprovar ou refutar a ocorrência de uma delas entre figuras geométricas dadas.

Com relação ao estudo dos triângulos, quando a resolução da questão exigia algo puramente algébrico, como calcular a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer, a maioria dos alunos conseguia fazer a questão sem maiores problemas. Mas, se o mesmo envolvesse algum tipo de prova ou demonstração, alguma questão onde fosse necessário averiguar a veracidade ou não de uma demonstração informal, ou ainda avaliar polígonos diferentes, comparando seu número de lados e medida dos ângulos, as dificuldades eram tantas que quase nenhum aluno conseguia realizar sem algum tipo de ajuda.

Essas dificuldades transformaram-se em problemas maiores no ano de 2013, pois os mesmos alunos, agora no 9º ano, deveriam desenvolver sua capacidade argumentativa, melhorando a compreensão dos conceitos para realizar provas e demonstrações, bem como analisar casos de congruência sem grandes dificuldades. Porém, ao iniciar o ano letivo, foi perceptível que os alunos não demonstravam nível algum de autonomia no trabalho com o teorema de Pitágoras, por exemplo.

Pensando em melhorar os conhecimentos geométricos dessas duas turmas, além de buscar uma abordagem diferenciada para o ensino de geometria, resolveu-se que a pesquisa fosse realizada com esse público.

2.1.1 Sujeitos da avaliação

Os alunos que participaram da pesquisa eram de uma escola municipal de Mangaratiba, com faixa etária entre 13 e 16 anos. Foram ao todo 35 alunos, sendo divididos em duas turmas, com 19 alunos em uma denominada Turma A e os 16 restantes na, denominada Turma B. A direção da escola foi consultada, no sentido de autorizar a participação desses alunos nesse experimento. A pesquisadora é professora da turma, o que facilitou o processo de autorizações e de aplicação das atividades, bem como a observação do desenvolvimento dos alunos ao longo do processo de pesquisa. Essa pesquisa foi realizada entre os meses de setembro e novembro de 2013. Conforme dito, na ocasião da pesquisa, os participantes estavam matriculados no 9º ano do Ensino Fundamental.

2.2 Metodologia de pesquisa

A fim de confrontar os resultados obtidos de dois grupos distintos, após a aplicação de atividades diferenciadas com o intuito de melhorar a compreensão de certos conteúdos matemáticos, este trabalho foi realizado adotando-se a *metodologia de pesquisa experimental*.

De acordo com Gil (2008), o método experimental consiste em submeter os objetos de estudo à influência de certas variáveis, em condições controladas e conhecidas pelo investigador, para observar os resultados que a variável produz no objeto. Ou seja, para constatar um evento, utiliza-se da experimentação provocada, manipulando e controlando as consequências de uma situação ou circunstância.

O método experimental é um procedimento lógico destinado à seleção de temas, à realização de observações, à recolha de dados e à organização da evidência, tendo como objetivo comprovar a existência de uma relação causal entre dois fatores, procedimento conforme aos cânones de indução de J. S. MUI. (in GREENWOOD, 1965², apud GIL, 2008, p. 315)

Segundo Greenwood³ (1965) apud Gil (2008), qualquer experimentação requer dois conjuntos de unidades, contanto que num deles ocorra algo que não se verifica no outro. Assim, em trabalhos em que a abordagem experimental seja a mais apropriada, é preciso que haja pelo menos dois grupos bem definidos, um chamado *Grupo Experimental*, no qual se controlam os termos da variável da qual se pretende saber a influência da mesma em outro grupo, denominado *Grupo Controle*, o qual deverá apresentar exatamente as mesmas características do primeiro, exceto a variável aplicada.

Na pesquisa realizada, os participantes foram divididos em dois grupos (Experimental e Controle), após a aplicação de dois pré-testes e de critérios a serem explanados nas seções 2.2, 2.3 e 2.4.

2.3 Aplicação dos Pré-Testes

2.3.1 Pré-teste de van Hiele

A primeira etapa da pesquisa consistiu da aplicação de um teste diagnóstico nas duas turmas, baseado na teoria de van Hiele, a fim de verificar qual era o nível de conhecimento em geometria desses alunos. Para tal, foi utilizado o teste de van Hiele proposto por Nasser (1992, p.315), que foi idealizado com intuito de avaliar o nível de conhecimento geométrico de cada um, baseado na teoria de van Hiele (veja Anexo A). Esse teste consta de 15 questões, divididas em três partes, de acordo com os níveis de conhecimentos geométricos propostos por van Hiele, ficando divididos conforme indicam o quadro 2.1 e as figuras 2.1, 2.2 e 2.3.

² GREENWOOD, Ernest. **Método de investigação empírica em sociologia**, 1965.

³ Idem

Quadro 2.1 – Relação entre as questões e níveis de van Hiele

Questões	Nível
1 - 5	1 ^o
6 - 11	2 ^o
12 - 15	3 ^o

Esse pré-teste foi aplicado em setembro de 2013 para ambas as turmas. Os alunos foram orientados a fazer o teste usando os conhecimentos adquiridos nos anos anteriores e durante o ano letivo, individualmente. Além disso, foram orientados a não consultar qualquer material de apoio. E, se não soubessem de fato responder as questões, que as deixassem em branco. Nas questões de múltipla escolha, foi deixado claro para os alunos aquelas cujas respostas eram únicas.

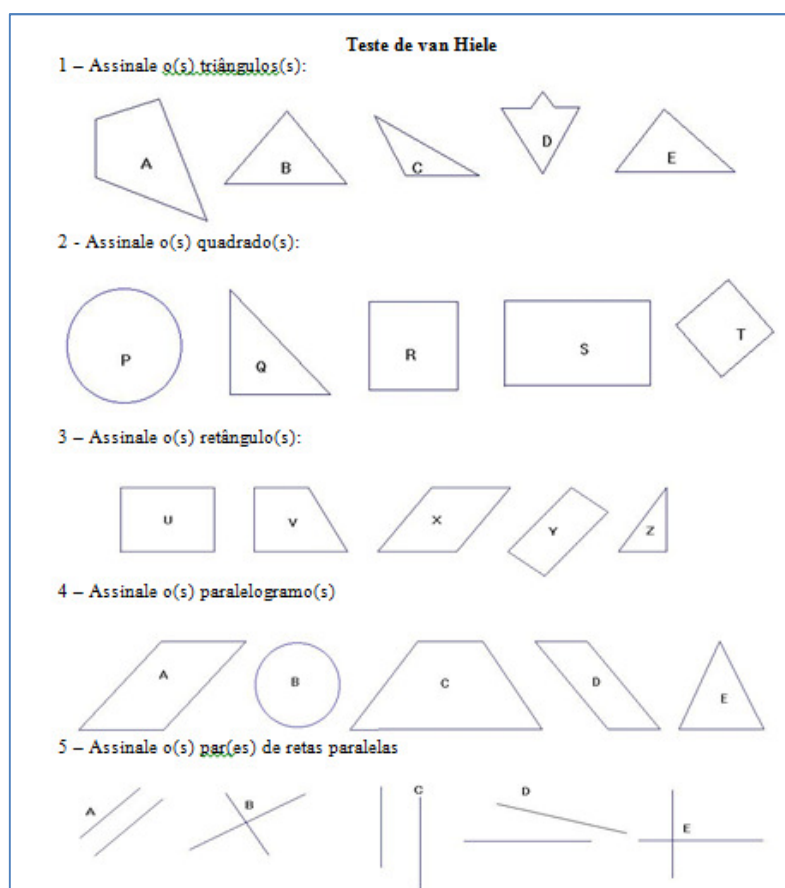



Figura 2.1 – Teste de van Hiele, nível 01. (Nasser, 1992, p.315).


6 – Com relação à figura podemos afirmar que:

a) Têm 4 ângulos retos.
 b) Têm lados opostos paralelos.
 c) Têm diagonais de mesmo comprimento.
 d) Têm os 4 lados iguais.
 e) Todas são verdadeiras.




7 – Dê 3 propriedades dos quadrados:

1
 2
 3




8 – Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais.
 Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:

(a) Pelo menos um dos ângulos mede 60° .
 (b) Um dos ângulos mede 90° .
 (c) Dois ângulos têm a mesma medida.
 (d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.
 (e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.



9 – Dê 3 propriedades dos paralelogramos.

1
 2
 3



10 – Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento.
 Desenhe esse quadrilátero.

11- Assinale a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulo(s):




Figura 2.2– Teste de van Hiele, nível 02. (Nasser, 1992, p.315).

12 – Os quatro ângulos A, B, C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais.

(a) Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado?
 (b) Por que?
 (c) Que tipo de quadrilátero é ABCD?

13 – Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo? Por que?

14 – Considere as afirmativas:

(I) A figura X é um retângulo (II) A figura X é um triângulo.

Assinale a afirmativa verdadeira:

(a) Se I é verdadeira, então II é verdadeira.
 (b) Se I é falsa, então II é verdadeira.
 (c) I e II não podem ser ambas verdadeiras.
 (d) I e II não podem ser ambas falsas.
 (e) Se II é falsa, então I é verdadeira.

15 – Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados:

(a) Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.
 (b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.
 (c) Qualquer propriedade dos retângulos é também válida para os quadrados.
 (d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.
 (e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

Figura 2.3 – Teste de van Hiele, nível 03. Fonte: (Nasser, 1992, p.315).

O teste de van Hiele foi aplicado, em cada turma, em uma aula de dois tempos de 50 minutos. Contando com todas as orientações, os alunos levaram aproximadamente uma hora e trinta minutos para concluí-lo.

2.3.2 Pré-teste de conhecimentos em isometrias.

A segunda etapa da pesquisa consistiu da aplicação de outro teste diagnóstico para as duas turmas, denominado *pré-teste de conhecimentos em isometrias*. O teste consistiu de apenas quatro questões, divididas em duas objetivas e duas discursivas, onde foram avaliados os conhecimentos dos alunos com relação aos diferentes tipos de simetrias (veja o Apêndice A).

Os seguintes pontos foram abordados:

1) Se o aluno sabe o que é reflexão e consegue desenhar uma figura simétrica a outra figura dada, por meio de reflexão em relação a um eixo dado (figura 2.4);

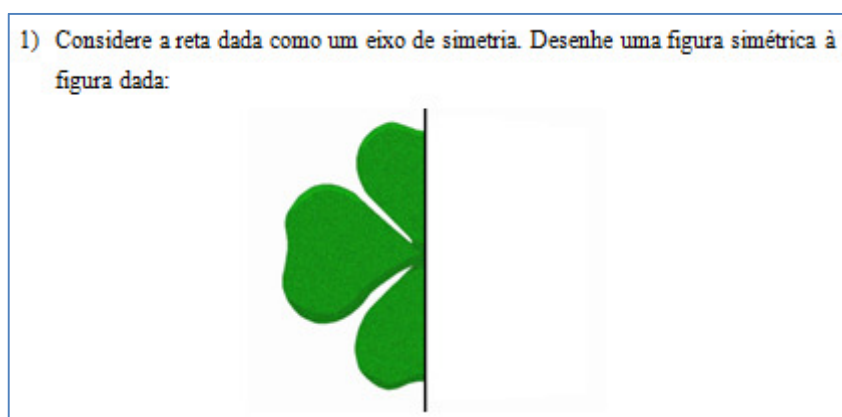


Figura 2.4 – Fonte: [Blog Virtual Terra](http://www.virtualterra.blog.com.br) (2013, adaptada)⁴

2) Dada uma figura, identificar todos os eixos de simetria, caso possua (figura 2.5);

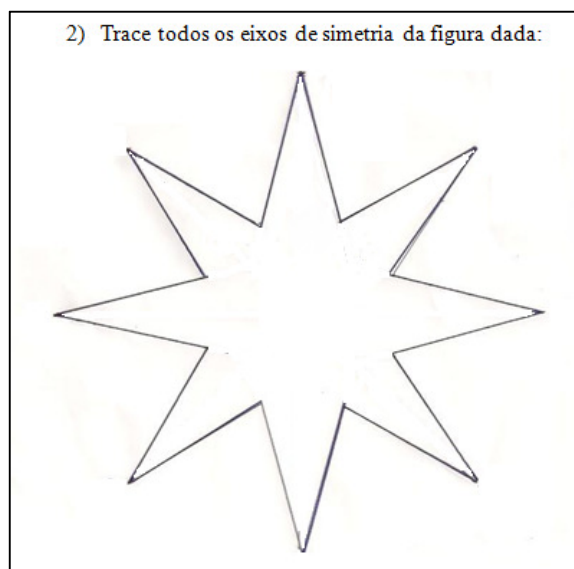


Figura 2.5

3) Dada uma figura A e uma figura B, simétrica a A, identificar o tipo de isometria que foi aplicada (figura 2.6);

⁴ Disponível em: <www.virtualterra.blog.com.br>. Acesso em: 04 ago 2013.

3) Observe as figuras ilustradas a seguir:

Considerando as figuras A e B, podemos dizer que ambas são simétricas com relação à isometria de:

- Reflexão
- Rotação
- Translação

Figura 2.6

- 4) Dada uma figura e o tipo de isometria nela aplicada, indicar qual a figura resultante (figura 2.7).

4) A figura A, a seguir, sofrerá uma rotação de 90° no sentido horário.

Assinale a(s) figura(s) que corresponde(m) à figura A após sofrer tal movimento.

a)

b)

c)

d)

Figura 2.7

Para esclarecer algumas dúvidas que surgiriam durante a realização dos testes, os alunos foram aconselhados a realizar as questões que soubessem, e foi explicado aos mesmos, ainda que superficialmente, que a palavra isometria significava uma transformação de uma figura em outra idêntica, podendo ser uma reflexão, rotação ou translação. Os alunos fizeram inúmeras perguntas acerca da realização do teste, mas em todas as situações foram orientados a realizar da maneira que acreditassem ser mais conveniente. O pré-teste de conhecimentos em isometrias foi aplicado em uma aula de dois tempos, com 50 minutos cada, e foi realizado sem consulta a qualquer material e individualmente, sendo vetada qualquer troca de informações entre os alunos.

2.4 Métodos de Análise dos Pré-Testes

2.4.1 Pré-teste de van Hiele

Após a aplicação, foi feita uma análise para avaliar em quais níveis de van Hiele os alunos poderiam ser classificados. A autora utilizou a mesma abordagem de Nasser (1992) para avaliar os pré-testes de van Hiele. Ou seja, um aluno só seria agrupado no nível n de van Hiele, se acertasse pelo menos 60% das questões de cada nível k do teste, onde $k=1, \dots, n$. Nas questões do Nível 1, apesar de serem objetivas, todas elas tinham mais do que uma resposta. Sendo assim, se apenas as respostas corretas fossem marcadas, a questão era considerada correta; se apenas um subconjunto das questões corretas fosse marcado, a questão era considerada parcialmente correta. Se alguma opção errada fosse marcada, a questão foi considerada errada.

Analisando os dados iniciais, dos 35 alunos que fazem parte da amostra, 12 alunos (34,28%) foram classificados no Nível 1 de van Hiele, enquanto 22 alunos (62,86%) não foram classificados em nenhum nível de van Hiele. Nenhum aluno foi classificado no nível 2 de van Hiele, enquanto 1 aluno (2,86%) foi classificado no nível 3. Os dados serão discutidos no Capítulo III dessa pesquisa (Resultados e Discussões).

2.4.2 Pré-teste de conhecimentos em Isometrias

Após a aplicação do Pré-Teste em conhecimentos em Isometrias, as respostas dos alunos foram analisadas, caracterizando respostas como resultados positivos, de acordo com os seguintes critérios.

- Questão 1 – Reconhece o sentido da palavra simetria, e desenha, ainda que razoavelmente, a figura pedida;
- Questão 2 – Se o aluno encontrou ao menos 4 dos 8 eixos de simetria da figura;
- Questão 3 – Se o aluno marcou a opção correta;
- Questão 4 – Se o aluno marcou a opção correta.

A autora desta dissertação considerou um teste quantitativo, com uma pontuação de 0 a 10, onde cada questão valia 2,5. Nas questões 1 e 2, os pontos foram divididos, podendo variar de 0 a 2,5 de acordo com a resposta dada. A questão 1 foi avaliada em duas partes: se o aluno sabia o que era um eixo de simetria e se desenhou a outra parte da figura de maneira simétrica. Foram descontados poucos pontos caso o desenho fosse muito discrepante. A questão 2 foi avaliada de acordo com a quantidade de eixos de simetria encontrados pelos

alunos. Nas questões objetivas (3 e 4) a pontuação foi dada integralmente para aqueles que marcaram a opção correta.

Por meio desses critérios, verificou-se que a média geral de notas obtidas pelos participantes no Pré-Teste de Conhecimentos em Isometrias foi de 5,46.

2.5 Escolha dos Grupos Experimental e Controle

Os resultados dos pré-testes, posteriormente detalhados no Capítulo III, mostraram que, ainda que as duas turmas mostrassem resultados relativamente semelhantes no Pré-Teste de van Hiele no que diz respeito aos percentuais de alunos não classificados e níveis 1 e 2, estabeleceu-se uma diferença bastante significativa no Pré-teste de conhecimentos em Isometrias. Neste, a Turma A (com 19 alunos) apresentou necessidade mais urgente de uma abordagem diferenciada dos conceitos geométricos. Os dados mostraram que 37,5% dos alunos da Turma B contra 31,58% dos alunos da Turma A obtiveram Nível 1 no Pré-Teste de van Hiele. Com relação aos alunos não classificados a Turma A apresentou um percentual de 68,42% contra 56,25% entre os alunos da Turma B. Além disso, a média no percentual de acertos no Pré-Teste de Conhecimentos em Isometrias foi de 71% na Turma B contra 41% na Turma A (para mais detalhes veja o capítulo III).

Dessa maneira, a Turma A foi escolhida para ser o Grupo Experimental, enquanto a Turma B compôs o Grupo Controle. Seguindo o princípio da experimentação, as variáveis aplicadas ao Grupo Experimental, a fim de alcançar os objetivos dessa pesquisa, foram as atividades baseadas no Modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

2.6 Aplicação das Atividades para a Turma A (Grupo Experimental)

As atividades da Turma A foram aplicadas ao longo de 5 semanas, durante os meses de outubro e novembro de 2013. A autora utilizou uma aula para a aplicação dos pré-testes, sete aulas para a aplicação das atividades e mais duas aulas para a aplicação dos pós-testes. Cada aula teve a duração de dois tempos de 50 minutos. As atividades foram divididas em dois grandes grupos, de acordo com os conteúdos selecionados: *Quadriláteros e suas propriedades* e *Simetrias*, que se subdividiu em *Simetria de Reflexão* e *Simetria de Rotação*.

2.6.1 Quadriláteros

Em Nasser e Sant'Anna (1998, p.10, 11, 13, 15, 16 e 18), encontram-se atividades relacionadas ao ensino de quadriláteros, cada uma buscando atingir a objetivos específicos, dentro dos pressupostos de van Hiele acerca dos níveis de conhecimento geométrico. As atividades 1, 2, 5 e 6 foram aplicadas tal e qual se encontram na bibliografia em questão. As atividades 3 e 4 foram adaptadas na sua maneira de apresentação e aplicação. Segue a descrição de cada uma das atividades e suas aplicações.

Atividade 1

Materiais utilizados:

- Folha impressa com tabela para anotar as semelhanças e diferenças entre os pares de figuras.

Foram propostos doze pares de figuras, conforme a figura 2.8. A atividade completa encontra-se no Anexo B.

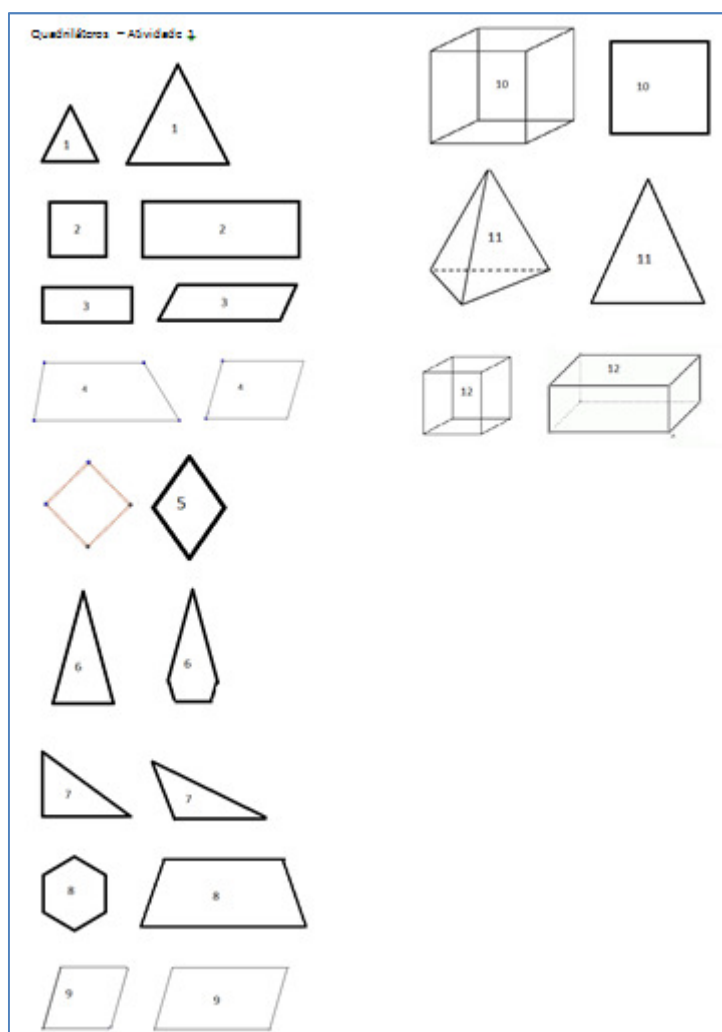


Figura 2.8 – Atividade 2, Estudo de quadriláteros. (Nasser, 1992, p 10).

O objetivo principal da atividade foi estimular o aluno a analisar cada par de figuras, destacando as semelhanças e diferenças encontradas nele. A atividade também visou verificar se o aluno conseguia distinguir figuras bidimensionais e tridimensionais. Caso as figuras do par possuíssem a mesma dimensão, o aluno deveria identificar a existência ou não de outros elementos em comum, como número de lados, comprimento dos lados, medida dos ângulos, entre outros aspectos.

Também se pode destacar como objetivo dessa atividade fazer com que o aluno comece a ter uma preocupação não só visual como também das propriedades das figuras apresentadas. Logo, procurou-se encaminhar o estudo das propriedades de cada figura, para, em possibilidades futuras, trabalhar com congruências e semelhanças.

Atividade 2

Materiais utilizados:

- Lista de diferentes quadriláteros impressa em papel A4, uma para cada aluno. A atividade completa encontra-se no Anexo C

Essa atividade apresentou uma série de quadriláteros que deveriam ser categorizados de acordo com algum critério estabelecido pelo próprio aluno, tarefa relativamente simples para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. A divisão entre essas categorias seria feita de acordo com conhecimentos adquiridos anteriormente, visando que o aluno reconhecesse pelo menos as categorias “*quadrados*”, “*retângulos*” e “*paralelogramos*”. Também se pode destacar como objetivo da atividade a fixação de propriedades elementares relativas aos quadriláteros. A ideia era fomentar a discussão dessas propriedades para categorizar cada figura, desestimulando o simples uso do formato do desenho para tal classificação.

Atividade 3

Materiais utilizados:

- Diversos quadriláteros recortados em papel cartão e colados no quadro;
- Lista das diferentes propriedades dos quadriláteros.

A atividade 3 (Anexo D) teve por objetivos incrementar a discussão sobre as propriedades relativas a cada grupo de quadriláteros destacado na Atividade 2 e iniciar o conceito de classes não-disjuntas de paralelogramos.

Essa atividade consistiu no seguinte: primeiramente, os alunos observaram as figuras geométricas colados no quadro e classificaram cada uma usando o grupo de categorias a seguir: paralelogramos, trapézios, quadrados, retângulos e losangos. Depois, foi dada uma lista com diferentes propriedades que deveriam ser agrupadas em cada categoria desses quadriláteros. As propriedades foram:

- 4 lados iguais;
- 4 ângulos iguais;
- Lados opostos paralelos;
- Lados opostos iguais;
- 4 ângulos iguais;
- Diagonais de mesmo comprimento;
- Diagonais perpendiculares;
- Ângulos opostos iguais.

A turma foi dividida em grupos de três alunos. Cada grupo deveria escolher um representante de cada vez para elencar no quadro branco uma propriedade da figura em questão. Os alunos poderiam opinar sobre a propriedade destacada, a fim de discutir a veracidade da mesma no rol de propriedades da figura em questão.

As três primeiras atividades desse conjunto de tarefas foram realizadas durante uma hora e quarenta minutos, ou seja, dois tempos de aula.

Atividade 4

Materiais utilizados:

- *Datashow*;
- Quadro;
- Apresentação em *Power Point* com slides apresentando partes de um polígono.

Nesta atividade (Anexo E) foi apresentada aos alunos uma lista com vinte *slides* distintos, em cinco grupos de quatro polígonos. Cada um era apresentado para que os alunos conjecturassem sobre o polígono que estavam vendo e, de acordo com o desenho, citassem quais propriedades poderiam reconhecer com aquela parte do polígono. Após essa discussão, um novo *slide* (do mesmo polígono) era apresentado, contendo uma parte maior do mesmo, e assim sucessivamente até que o polígono fosse apresentado por completo e o aluno pudesse

verificar se suas conjecturas estavam corretas ou não. Uma das sequências apresentadas pode ser vista na figura 2.9.

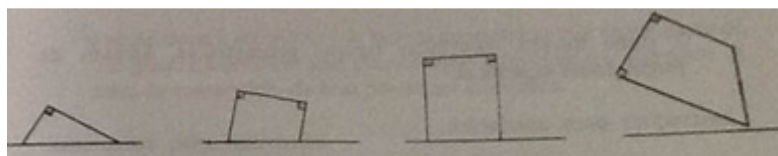


Figura 2.9 – Atividade 4, Estudo de quadriláteros (Nasser, 1992, p. 21).

A atividade foi realizada coletivamente, com os alunos discutindo quais eram as possibilidades de polígonos para cada *slide* apresentado. Cada uma das hipóteses feitas por eles foi escrita no quadro. Após a apresentação do polígono completo, as hipóteses colocadas pelos alunos foram discutidas novamente, para que os alunos pudessem observar se as suposições feitas eram verdadeiras ou não, e que alguns polígonos possuem determinadas propriedades comuns.

Essa atividade foi realizada durante uma hora e quarenta minutos.

Atividade 5

Materiais utilizados:

- Quadro branco;
- Canetas.

Para realizar essa atividade, a turma foi dividida em grupos com três alunos cada. Em seguida, foram escritas no quadro quatro listas de propriedades de quadriláteros. Propôs-se aos grupos que lessem e discutissem o que foi escrito, determinando, para cada lista de propriedades, o tipo de quadrilátero que a satisfaz. A atividade encontra-se no Anexo F.

Atividade 6

Materiais utilizados:

- Quadro branco;
- Figuras geométricas em papel cartão.

O objetivo dessa atividade foi reforçar o conhecimento das propriedades discutidas nas atividades anteriores, para então fazer a inclusão de classes entre paralelogramos, quadrados, retângulos e losangos.

A turma trabalhou em conjunto. Foram questionados novamente sobre quais quadriláteros foram trabalhados e quais as propriedades relativas a cada um. Em seguida foram verificadas quais propriedades tais quadriláteros possuem em comum, e foram lançadas as questões sobre quadrado também serem retângulos ou losangos, e sobre quadrados, losangos e retângulos também serem paralelogramos. Além disso, foi perguntado se a recíproca de cada afirmação era verdadeira ou falsa. Em qualquer um dos casos, os alunos deveriam justificar usando as propriedades estudadas e não com argumentos visuais. A atividade completa se encontra no Anexo G.

As atividades 5 e 6 foram realizadas em dois tempos, totalizando uma hora e quarenta minutos de aula.

2.6.2 Simetria de reflexão

Para elaborar as atividades de simetria de reflexão, a autora dessa dissertação se baseou nas atividades de Nasser e Sant'Anna (1998, p. 24, 25, 28 e 29), fazendo uso das ideias centrais apresentadas pelas pesquisadoras nas Atividades I, II III e V. A atividade IV foi aplicada tal e qual a atividade se encontram na bibliografia em questão (idem, p.32). Segue a descrição de cada uma das atividades e suas aplicações.

Atividade 1

Materiais utilizados:

- Duas figuras impressas em papel A4;
- Lápis e Borracha.

Essa atividade (Apêndice B) teve como objetivo verificar se o aluno seria capaz de reconhecer um eixo de simetria em uma figura plana. O aluno deveria dobrar a primeira figura uma única vez (figura 2.10), de modo que os vértices da mesma coincidissem. Ao dobrar, um eixo de simetria ficaria em destaque, sendo cinco ao todo. O aluno então encontraria ao menos um, e partir daí, seria iniciada a discussão sobre os demais.

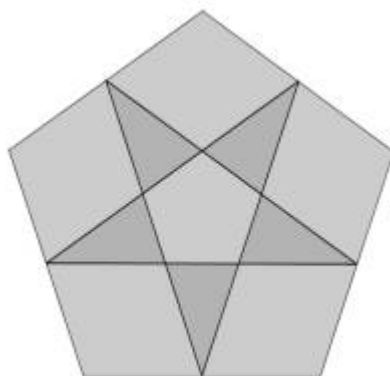


Figura 2.10

Para a segunda figura (Figura 2.11), o aluno escolheria um de seus lados como eixo de simetria e desenharia a figura simétrica ao eixo determinado. Tratando-se de uma figura com cinco lados, seriam cinco possibilidades para o eixo de simetria. O aluno escolheria ao menos um para realizar satisfatoriamente a tarefa. As demais possibilidades seriam discutidas.

A atividade foi realizada individualmente, mas com diálogo livre entre os alunos e a professora.



Figura 2.11

Atividade 2

Materiais utilizados:

- Lista de figuras diversas impressa em folha A4;
- Régua;
- Lápis e borracha.

Essa atividade teve por objetivo fazer com que o aluno identificasse numa lista de figuras, aquelas que possuíam eixos de simetrias e determinasse suas localizações. Foi reforçado pela professora que os eixos de simetria poderiam não ser únicos. Foram ao todo quinze figuras, doze com eixos de simetria e três não (veja Apêndice C). O aluno identificaria a existência ou não de eixos de simetria e, logo em seguida, com auxílio de uma régua, desenharia esses eixos. Alguns exemplos de figuras utilizadas na Atividade 2 podem ser encontrados na Figura 2.12.

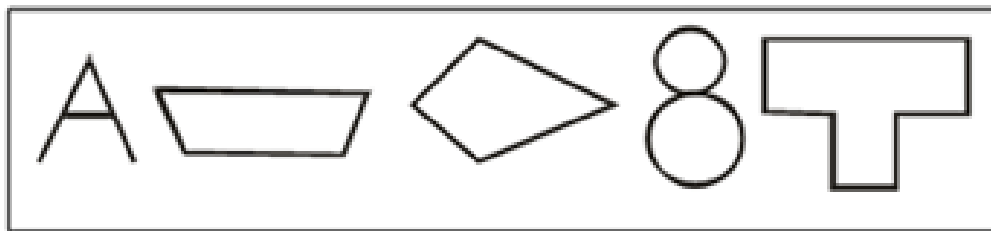


Figura 2.12 – Fonte: Laboratório de Ensino de Geometria da Universidade Federal Fluminense (2010).⁵

Atividade 3

Materiais utilizados:

- Malha quadriculada impressa em A4;
- Régua;
- Lápis e borracha.

O objetivo principal dessa atividade (Apêndice D) foi fazer com que o aluno aprendesse a desenhar uma figura simétrica à outra dada por meio de uma reflexão em torno de um eixo. O eixo de simetria poderia estar contido ou não na figura original. Ela também visou aprofundar os conhecimentos das propriedades da simetria de reflexão, como a conservação dos comprimentos e a perpendicularidade entre eixo de simetria e o segmento formado por dois pontos simétricos por reflexão.

Inicialmente os alunos foram orientados a observar algumas figuras contidas na Atividade 2, a fim de verificar a distância de pontos-chaves (vértices por exemplo) ao eixo de simetria. O intuito era garantir que os alunos visualizassem que tais pontos eram equidistantes, e assim pudessem aplicar o mesmo nessa atividade. Também foi explorada, ainda que superficialmente, a noção de distância entre ponto e reta e o conceito de pontos simétricos em relação a um eixo. Além disso, discutiu-se a perpendicularidade entre o eixo de simetria e o segmento de reta que une dois pontos simétricos.

Um exemplo das figuras apresentadas na Atividade 3 pode ser visualizado na Figura 2.13.

⁵ Disponível em <<http://www.uff.br/cdme/simetria/aluno04.html>>. Acesso em: 09 ago 2013.

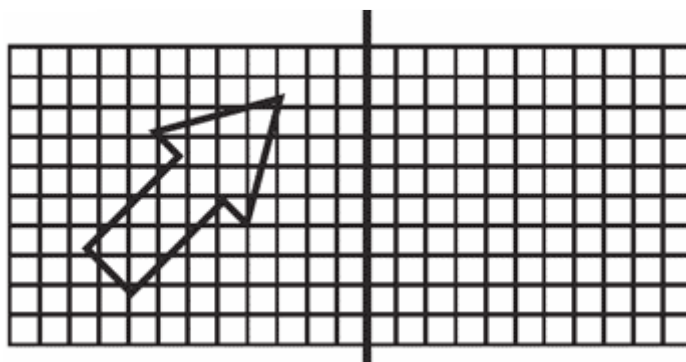


Figura 2.13 – Fonte: Revista Nova Escola (2013).⁶

As atividades 1, 2 e 3 foram realizadas durante uma aula com dois tempos de aula, ao todo uma hora e quarenta minutos.

Atividade 4

Materiais utilizados:

- Material impresso em A4;
- Tabela para anotar as respostas dos alunos;
- Lápis e Borracha;
- Régua.

O objetivo desta atividade (Apêndice E) foi reforçar as propriedades da simetria de reflexão iniciadas na atividade 3, tais como equidistância dos pontos simétricos ao eixo de simetria e perpendicularidade entre o segmento que une dois pontos simétricos e o eixo de simetria.

A atividade era composta por quatro itens, cada um contendo uma reta e dois pontos (veja dois itens na Figura 2.14), além de uma tabela com três perguntas sobre a posição dos pontos e eixo de simetria. O aluno deveria responder se o segmento entre os dois pontos era perpendicular ao eixo de simetria, se os pontos eram equidistantes a esse eixo e, por fim, se o ponto Q é a reflexão de P, pelo eixo de simetria dado.

⁶ Disponível em <<http://revistaescola.abril.com.br/matematica/pratica-pedagogica/geometria-transformacao-reflexao-figuras-planas-621932.shtml>>. Acesso em: 09 ago 2013.

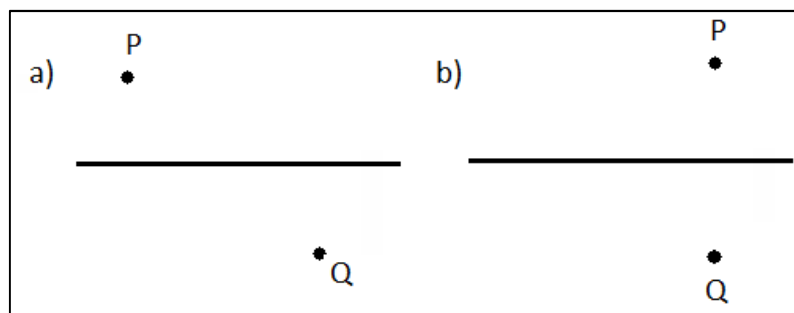


Figura 2.14 – Atividade 4, Estudo de simetrias. (Nasser e Sant’Anna, 1998, p. 32).

Atividade 5

Materiais utilizados:

- Folha de papel com figuras impressas;
- Régua;
- Lápis e borracha.

A atividade teve como objetivo avaliar se os alunos já identificavam bem os eixos de simetria das figuras dadas, e também explorou as propriedades trabalhadas nas atividades anteriores. A mesma pode ser encontrada no Apêndice F dessa pesquisa.

Essa foi realizada por meio da discussão coletiva sobre as propriedades de simetria de reflexão, já trabalhadas em atividades anteriores. Foram ao todo dez figuras, quatro simétricas com relação a algum eixo e seis sem eixos de simetria. Os alunos utilizaram régua para desenhar os eixos de simetria da figura. Se a figura não possuísse eixos de simetria, o aluno deveria utilizar algum argumento válido que justificasse a assimetria da figura, como um argumento visual acompanhado da propriedade que não foi contemplada. Algumas figuras da atividades 5 podem ser visualizadas na figura 2.15.



Figura 2.15– Fonte: Blog Geoweb (2013)⁷

⁷ Disponível em: <<http://www.geoweb.blog.br/design/como-criar-um-logotipo-eficiente/>>. Acesso em: 30 jul 2013.

As atividades 4 e 5 foram realizadas em uma aula com dois tempos de cinquenta minutos cada uma, totalizando uma hora e quarenta minutos.

2.6.3 Simetria de rotação

Para elaborar as atividades dessa seção a autora se baseou na proposta de Nasser e Sant'Anna (1998, p.39, 41, 43, 44), fazendo uso das ideias centrais apresentadas pelas pesquisadoras na elaboração das atividades dessa seção.

Atividade 1

Materiais Utilizados

- Quadro Branco;
- Caneta.

Essa atividade (Apêndice G) teve como objetivo fazer com que o aluno associasse movimentos do seu cotidiano com o movimento de rotação, apresentando aos mesmos diversos exemplos simples, nos quais tal isometria poderia ser reconhecida com facilidade.

Para realizar essas atividades, iniciou-se uma discussão coletiva, e de forma bastante superficial, explicando o que era o movimento de rotação e pedindo também que os alunos explicassem com suas palavras o que eles sabiam sobre esse conteúdo. Em seguida, prosseguiu-se com exemplos comuns, como os ponteiros de um relógio, ou movimento de uma roda gigante em um parque de diversões. Uma vez que os alunos deveriam estar superficialmente familiarizados com o conteúdo, os mesmos deveriam citar os próprios exemplos, explicando por que reconheciam esse movimento como rotação e se sabiam identificar o centro dessa simetria.

Muitos exemplos foram desenhados no quadro para auxiliar os alunos a visualizarem melhor de que maneira o movimento de rotação acontecia, em que sentido, e se o ângulo de rotação era de 360° ou menos.

Atividade 2

Materiais utilizados:

- Papel A4 branco;
- Rosácea de 4 folhas impressa em papel A4.

O objetivo principal dessa atividade (Apêndice H) era reconhecer o centro e o ângulo de rotação de uma simetria. Para realizá-la os alunos receberam uma rosácea de quatro folhas (Figura 2.16) e foram orientados a discutir se a mesma possuía simetria de rotação ou não.

Os alunos reproduziram a figura em uma folha de papel. Logo depois, a professora orientou os alunos a identificar o centro da rotação. Marcando a ponta de uma das folhas, e colocando a rosácea dada sobre o desenho feito, os alunos deveriam girar a rosácea e, considerando cada “encaixar” de folhas como um movimento de rotação, verificar quantos desses movimentos seriam feitos até que a pétala marcada retornasse à posição original.

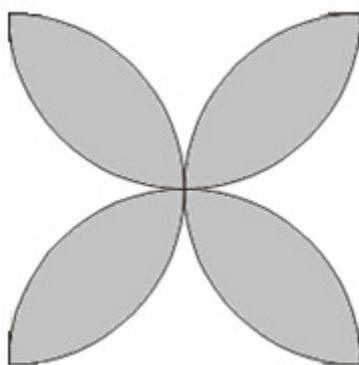


Figura 2.16 – Fonte: Só ensino (CARVALHO e TESTONI, 2013, Adaptada)⁸

Atividade 3

Materiais utilizados:

- Folha impressa com formas geométricas distintas (veja Apêndice I);
- Lápis e borracha.

O objetivo dessa atividade foi reforçar o conteúdo da Atividade 2, ou seja, encontrar tanto o centro como o ângulo de rotação em cada uma das sete figuras dadas. Os alunos foram orientados a continuar com a mesma proposta da atividade anterior, ou seja, verificar se cada uma das figuras dadas possuía simetria de rotação, além de determinar o centro e o ângulo de rotação dessa simetria.

As atividades 1, 2 e 3 foram realizadas em dois tempos de cinquenta minutos.

Atividade 4

Materiais utilizados:

- Folha impressa dividida em três itens sobre o tema; (Apêndice J);

⁸ Disponível em: <<http://www.soensino.com.br/foruns/viewtopic.php?f=5&t=22366>>. Acesso em: 30 jul 2013.

- Lápis e borracha.

Os objetivos dessa atividade foram identificar o sentido da rotação (horário ou anti-horário) em torno de um ponto pertencente ou não a figura dada. Além disso, os alunos deveriam encontrar uma figura congruente à figura dada por meio de um movimento de rotação, dados o centro, o ângulo e o sentido da rotação.

A atividade 4 discutiu todos os conceitos envolvidos nas atividades anteriores sobre simetria de rotação. A professora também deveria discorrer sobre o sentido da rotação, a fim de trabalhar bem o mesmo, assim como exemplos de figuras simétricas por rotação, cujos centros estivessem fora da figura.

2.7 Aplicação das atividades para Turma B (Grupo Controle)

Para o estudo dos conteúdos junto à Turma B, a autora optou pela abordagem padrão do ensino de quadriláteros, fazendo uso do livro didático, sem muita diversificação com os materiais de estudo, expondo a matéria de maneira usual. Logo, as aulas se basearam na estrutura clássica: exposição do conteúdo no quadro, explicação, discussão com os alunos, uso do livro didático para a realização dos exercícios, correção e orientação para atividades para serem realizadas em casa.

Foram utilizadas sete aulas, com dois tempos de cinquenta minutos para trabalhar todo o conteúdo proposto (quadriláteros e simetria de reflexão e rotação), ao longo de cinco semanas.

Aula 1

Materiais utilizados:

- Quadro branco,
- Livro didático (BIANCHINI, 2011) para realização de exercícios;
- Caderno;
- Lápis e borracha.

Os objetivos da aula inicial foram definir os quadriláteros, apresentar os quadriláteros notáveis, definindo e classificando paralelogramos, destacando sempre as propriedades essenciais.

A autora usou como estratégia de aula a exposição do conteúdo seguida de discussão coletiva sobre os conteúdos apresentados. Além disso, foram aplicados exercícios do livro didático, os quais foram realizados individualmente pelos alunos. Depois, houve correção dos exercícios com a apresentação dos erros cometidos. Foram observadas as dificuldades apresentadas durante o processo de realização dessa atividade.

Aula 2

Materiais utilizados:

- Quadro branco;
- Livro didático (BIANCHINI, 2011) para realização de exercícios;
- Quadriláteros notáveis em papel cartão;
- Caderno;
- Papel e lápis.

Os objetivos dessa aula foram revisar e aprofundar os conteúdos da aula anterior, utilizando exercícios que envolveram, sobretudo, a inclusão de classes de paralelogramos. Como estratégia de aula, a professora utilizou a correção coletiva dos exercícios aplicados durante a aula anterior, bem como a discussão das dificuldades apresentadas na realização das tarefas. Os cartões com quadriláteros foram utilizados para melhor visualização de determinadas características associadas aos paralelogramos.

Aula 3

Materiais utilizados:

- Quadro branco;
- Régua;
- Livro didático (BIANCHINI, 2011) com figuras com e sem eixos de simetria.

Os objetivos dessa aula foram definir o que era simetria de reflexão, além de fazer os alunos compreenderem os elementos e propriedades que compunham as mesmas. Como estratégias, a professora utilizou a exposição do conceito de simetria de reflexão. Foram apresentadas diversas figuras para identificar se havia ou não simetria de reflexão. Após a identificação das figuras simétricas os alunos deveriam analisar a simetria, observando pontos simétricos e sua distância do eixo de simetria.

Aula 4

Materiais utilizados:

- Livro didático (BIANCHINI, 2011) com figuras simétricas por rotação e por reflexão;
- Quadro branco e caneta;
- Caderno;
- Lápis e borracha.

Os objetivos dessa aula foram encerrar as possíveis dúvidas sobre o conteúdo de simetria de reflexão e apresentar a simetria de rotação, bem como seus elementos e propriedades principais, diferenciando os dois tipos de simetria até então trabalhados.

Para encerrar o conteúdo de simetria de reflexão, a professora discutiu com os alunos sobre o conteúdo da aula anterior, corrigindo exercícios e esclarecendo possíveis dúvidas. Em seguida, a mesma apresentou o conteúdo relativo à simetria de rotação, mostrando também diversos pares de figuras com simetria de reflexão e/ou rotação, para que os alunos reconhecessem as características de cada uma, apontando elementos e propriedades relativas às mesmas.

Aula 5

Materiais utilizados:

- Livro didático (BIANCHINI, 2011) com pares de figuras simétricas e assimétricas para comparação;
- Caderno;
- Lápis e borracha.

Os objetivos dessa aula foram aprofundar os conceitos trabalhados nas aulas 3 e 4, além de apresentar ao aluno o conceito de sentido da rotação em figuras congruentes por essa simetria.

Para essa aula, a professora apresentou uma série de pares de figuras planas, nas quais os alunos deveriam identificar se havia ou não alguma simetria entre elas. Em caso afirmativo, identificaram se a simetria era de reflexão ou rotação. Além disso, deveriam identificar também os eixos de simetria ou o centro, e finalmente, apontando qual simetria fora aplicada.

Para explicar a diferença entre os sentidos de rotação (horário ou anti-horário), a professora usou como exemplo o movimento dos ponteiros de um relógio. Foram realizados alguns exercícios do livro sobre o tema e, durante a correção, foram discutidas as propriedades de cada tipo de simetria aplicadas em cada item.

Aula 6

Materiais utilizados:

- Quadro branco;
- Livro didático (BIANCHINI, 2011);
- Caderno;
- Lápis e borracha.

O objetivo dessa aula foi fazer com que o aluno compreendesse o conceito de ângulo de rotação. Para tal, a professora fez uma revisão sobre medida e operações com ângulos, sobretudo a divisão. Em seguida, destacando os eixos de simetria de rotação de figuras dadas, os alunos foram orientados a calcular em quantas partes o ângulo de 360° ficou dividido. Usando o livro, a professora trabalhou com diferentes atividades para explorar a descoberta do ângulo de rotação, por meio de uma perspectiva argumentativa e exploratória.

Aula 7

Materiais utilizados:

- Quadro branco;
- Caneta.

A aula foi dividida em dois momentos. No primeiro, a professora fez uma breve revisão dos conteúdos trabalhados da Aula 1 até a Aula 6, por meio da discussão coletiva. O objetivo era revisar os conceitos trabalhados nessas aulas, esclarecendo possíveis dúvidas por meio de perguntas direcionadas sobre propriedades de quadriláteros e ambas as simetrias.

2.8 Aplicação dos Pós-Testes

Após todas as atividades realizadas nas duas turmas, a professora aplicou dois pós-testes para cada grupo. O primeiro deles foi o Pós-teste de van Hiele, idêntico ao Pré-teste aplicado antes das atividades (Anexo A). Esse foi aplicado em um tempo de aula, com 50 minutos. Na aula seguinte foi aplicado o pós-teste de conhecimentos em isometrias, composto de cinco questões, sendo as quatro primeiras idênticas às do pré-teste.

2.9 Análise Dos Pós Testes

Para analisar e comparar resultados após a aplicação das atividades, tanto no Grupo Experimental, quanto no Grupo Controle, a autora utilizou para os pós-testes os mesmos critérios aplicados na avaliação dos pré-testes. No pós-teste de van Hiele, para se classificarem em um determinado nível n , os alunos deveriam acertar no mínimo 60% das questões de cada nível k do teste, onde $k=1, \dots, n$.

O Pós-Teste de conhecimentos em Isometrias (Apêndice K) consistiu de cinco questões. As quatro primeiras questões foram iguais as do Pré-Teste correspondente. A quinta questão tratou sobre as propriedades da rotação (centro, ângulo de rotação e eixos de simetria), como se pode observar na figura 2.17. O teste foi avaliado quantitativamente, com uma nota de aproveitamento de 0 a 10 pontos, onde cada questão variava de 0 a 2 pontos, de acordo com os critérios seguintes:

- Questão 1 – Identificar o eixo dado como um eixo de simetria, e desenhar uma figura simétrica à figura dada;
- Questão 2 – Identificar os oito eixos de simetria da figura (0,25 cada);

- Questões 3 e 4 – Marcar a opção correta;
- Questão 5 – Identificar os eixos de simetria de reflexão (0,25 cada), o centro (0,5) e o ângulo de rotação (0,5).



Figura 2.17 – Fonte: Funny Pictures (2013)⁹

Os resultados dos pós-testes podem ser encontrados no Capítulo III dessa pesquisa.

⁹ Disponível em: <<http://funny-pictures.picphotos.net/>>. Acesso em: 02 ago 2013.

CAPÍTULO III – RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo, expõem-se os resultados dos Pré-testes de van Hiele e de Conhecimentos em Isometrias, os quais determinam as escolhas dos Grupos Controle e Experimental. Além disso, também discute o desenvolvimento dos alunos ao longo das atividades sobre quadriláteros e simetrias de reflexão e rotação, para os dois grupos. Após isso, discutem-se os resultados obtidos nos Pós-Testes e realiza-se um comparativo entre os resultados iniciais e finais dessa pesquisa.

3.1 Resultados dos Pré-Testes

3.1.1 Pré-teste de van Hiele

Após a aplicação do Pré-Teste de van Hiele, a autora analisou as respostas, baseada na metodologia de Nasser (1992) para a interpretação dos resultados, conforme exposta na seção 2.4.1 (Capítulo II). Nas tabelas 3.1 e 3.2, podem ser observadas as classificações de cada aluno em cada nível de van Hiele. O algarismo 0 indica que o aluno não alcançou os 60% de acertos necessários para ser categorizado naquele nível, enquanto o algarismo 1 representa que o aluno obteve sucesso.

Tabela 3.1 – Níveis de van Hiele alcançados pelos alunos da Turma A no pré-teste.

Alunos	Níveis		
	1	2	3
A1	0	0	0
A2	1	0	0
A3	1	0	0
A4	1	0	0
A5	0	0	0
A6	0	0	0
A7	0	0	0
A8	1	0	0
A9	0	0	0
A10	0	0	0
A11	0	0	0
A12	0	0	0
A13	0	0	0
A14	1	0	0
A15	0	0	0
A16	1	0	0
A17	0	0	0
A18	0	0	0
A19	0	0	0

Tabela 3.2 – Níveis de van Hiele alcançados pelos alunos da Turma B no pré-teste.

Alunos	Níveis		
	1	2	3
B1	1	0	0
B2	1	0	0
B3	1	0	0
B4	0	0	0
B5	0	0	0
B6	0	0	0
B7	0	0	0
B8	0	0	0
B9	1	0	0
B10	0	0	0
B11	1	1	1
B12	0	0	0
B13	1	0	0
B14	1	0	1
B15	0	0	0
B16	0	0	0

Os resultados percentuais, considerando o grupo de 35 alunos como um todo, são apresentados na Tabela 3.3. Estes resultados nos mostram que mais da metade dos alunos da amostra não estão classificados em nível algum de van Hiele.

Tabela 3.3 – Percentuais gerais dos alunos em cada nível de van Hiele no pré-teste.

	Turma A	Turma B	%
Não Classificado	13	9	62,86%
Nível 1	6	6	34,28%
Nível 2	0	0	0,00%
Nível 3	0	1	2,86%
Total	19	16	100,00%

O Gráfico 3.1 apresenta um comparativo entre os resultados percentuais das Turmas A e B.

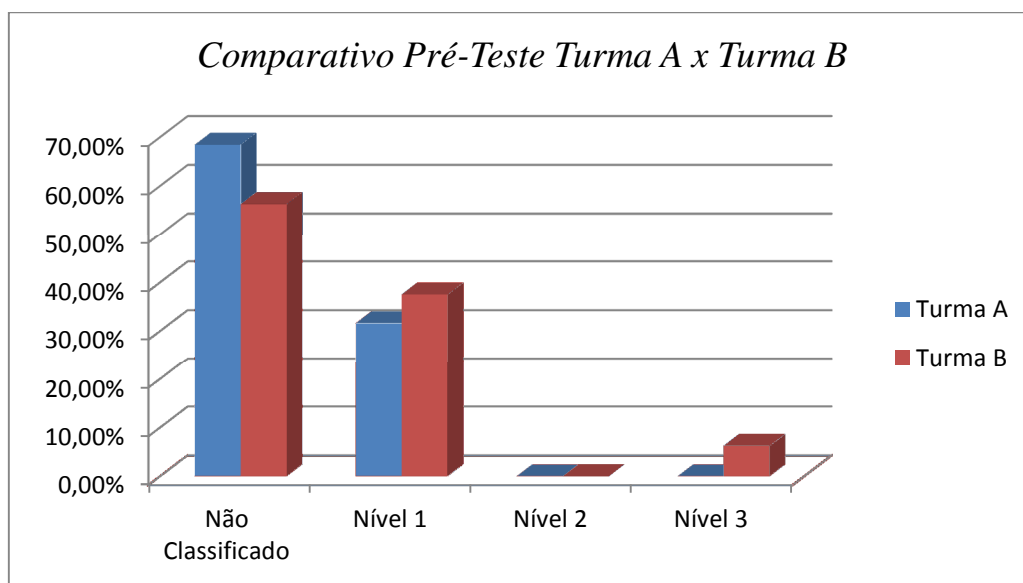


Gráfico 3.1 – Comparativo Turma A x Turma B, Pré-Teste de van Hiele

Ao observar os dados apresentados na Tabela 3.3 no Gráfico 3.1, percebe-se que o número de alunos classificados no Nível 1 foi o mesmo nas duas turmas, embora, em termos relativos, isso represente que a Turma B teve um percentual ligeiramente maior de alunos nesse nível. Além disso, o percentual de alunos não classificados em algum nível de van Hiele é bem maior na Turma A (68,42%) do que na Turma B (56,25%). Além disso, um aluno da Turma B foi classificado no Nível 3, enquanto nenhum aluno da Turma A alcançou os níveis 2 e 3.

Fazendo uma análise mais apurada sobre as questões do nível 1, (Figura 3.1) a autora destaca algumas observações importantes durante o processo de avaliação dos testes. Na Questão 1, 69% dos alunos da Turma B acertaram a questão, contra 63% dos alunos da Turma A, enquanto 11% dos alunos dessa Turma erraram a questão, enquanto todos da Turma B acertaram ou acertaram parcialmente.

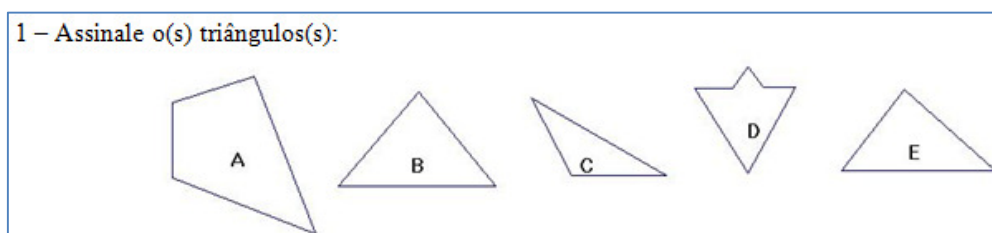


Figura 3.1 – Questão 1, Teste de van Hiele.: Nasser (1992, p.315).

Observando o gráfico 3.2, destaca-se que, com exceção da questão 3, as demais questões foram melhor respondidas pelos alunos da Turma B.

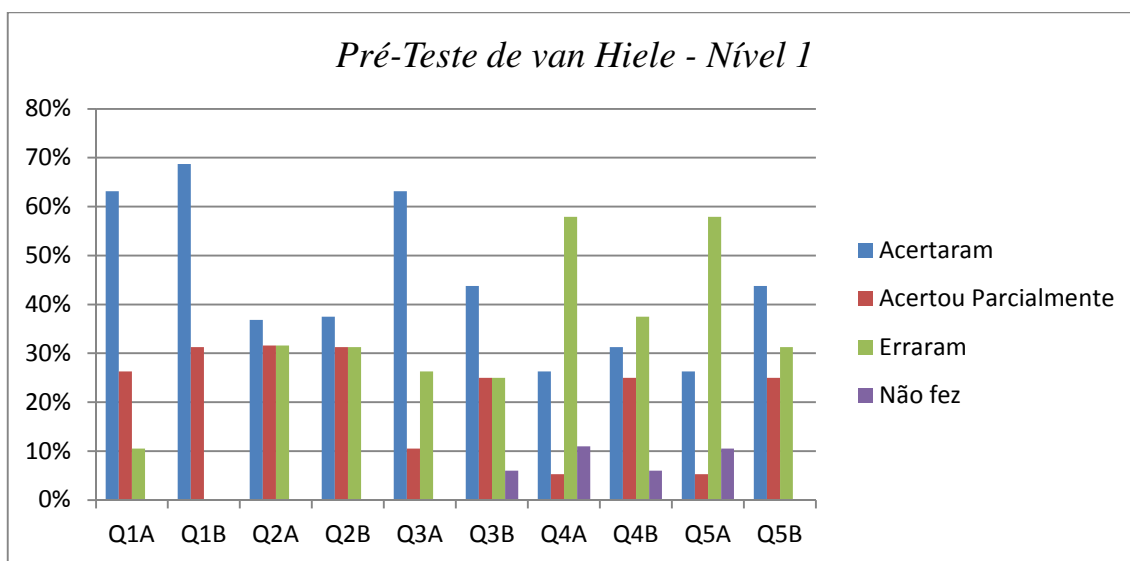


Gráfico 3.2 – Comparativo Turma A x Turma B – Nível 1

Na Questão 1, 66% do total de alunos conseguiu distinguir bem triângulos das demais figuras apresentadas na questão 1, e 40% do total de alunos souberam diferenciar os quadrados do retângulo comum na questão 2 (Figura 3.2), sendo que uma parte dos alunos marcou o retângulo como se fosse também um quadrado, demonstrando que ainda tem dificuldades em identificar esses dois polígonos pelas suas propriedades.

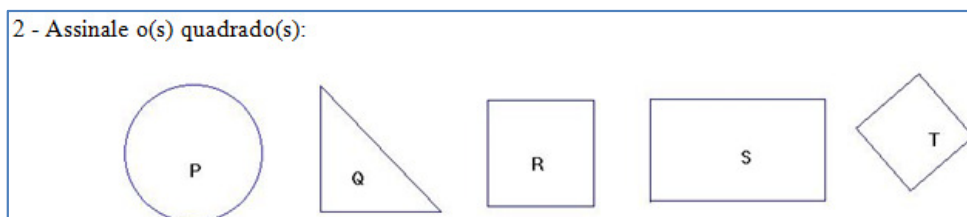


Figura 3.2 – Questão 2, Teste de van Hiele. Fonte: Nasser (1992, p.315).

A dificuldade maior apresentou-se na Questão 3 (Figura 3.3), pois Y era um retângulo numa posição oblíqua, o que não é trabalhado de maneira geral nas escolas. Ainda na mesma questão, alguns marcaram o trapézio (V) como retângulo pois a definição que os mesmos possuíam sobre esse polígono é o de uma figura de quatro lados e ângulos retos, sem outras propriedades a destacar. Ao fazerem apenas uma análise visual os alunos apresentaram essa confusão.

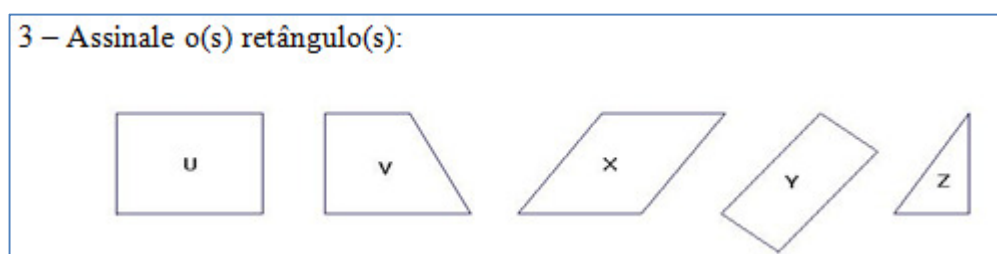


Figura 3.3 – Questão 3, Teste de van Hiele. Fonte: Nasser (1992, p.315).

Na Questão 5, aproximadamente 20% do total de alunos marcaram as opções A, C e D. A lógica estabelecida foi de que retas paralelas não tem pontos comuns. Sendo assim os alunos desconsideraram que o par de retas em D (Figura 3.4), quando prolongadas, mostraram-se concorrentes. Dessa maneira ficou evidente a grande dificuldade na compreensão do conceito de retas paralelas e na própria definição de retas como um conjunto infinito de pontos. Alguns alunos confundiram e marcaram como retas paralelas as opções B, D e E, trocando o conceito de retas paralelas com retas concorrentes.

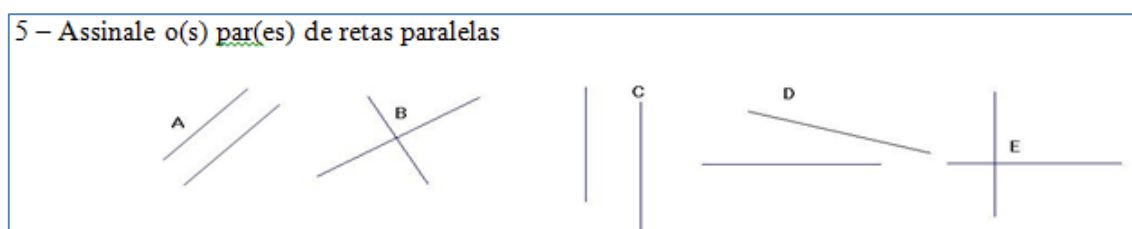


Figura 3.4 – Questão 5, Nível 1, Teste de van Hiele. Fonte: Nasser (1992, p.315).

Nas questões relativas ao Nível 2, os alunos apresentaram muitas dificuldades, sobretudo nas questões discursivas. Na Questão 6 (veja Figura 3.5) os mesmos não

reconheceram todas propriedades relativas ao polígono apresentada. Ainda que orientados sobre a possibilidade de algumas questões terem mais de uma resposta, não avaliaram essa possibilidade ao respondê-las e apenas 17% dos alunos responderam a questão de maneira totalmente correta, reconhecendo todas as propriedades expostas.

6 – Com relação à figura podemos afirmar que:

- a) Têm 4 ângulos retos.
- b) Têm lados opostos paralelos.
- c) Têm diagonais de mesmo comprimento.
- d) Têm os 4 lados iguais.
- e) Todas são verdadeiras.

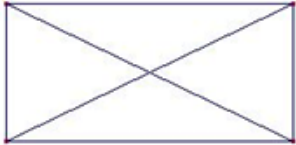


Figura 3.5 – Questão 6, Nível 2, Teste de van Hiele. Fonte: Nasser (1992, p.315).

Na Questão 7 (“Dê três propriedades dos quadrados.”), os alunos apresentaram apenas duas propriedades dos quadrados, quatro lados iguais e quatro ângulos retos, evidenciando aquelas que são em geral mais comentadas nas aulas. Na Questão 8 (Figura 3.6), o índice de erros em ambos os Grupos (63% no Experimental e 58% no Controle) admite algumas suposições; ou os alunos tiveram dificuldades em entender o enunciado da questão, ou não conheciam as propriedades dos triângulos isósceles (conteúdo do 7º ano do Ensino Fundamental).

8 – Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais.
Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:

- (a) Pelo menos um dos ângulos mede 60° .
- (b) Um dos ângulos mede 90° .
- (c) Dois ângulos têm a mesma medida.
- (d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.
- (e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

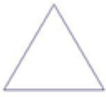


Figura 3.6 – Questão 8, Teste de van Hiele. Fonte: Nasser (1992, p.315)

Na questão 9 (“Dê três propriedades dos paralelogramos.”) a propriedade enunciada pela maioria, a saber, a igualdade entre os lados opostos dos paralelogramos, foi escrita de maneira informal (“*lados da frente são iguais, os do outro lado são diferentes*” – A7). Isso mostra que há alguma noção em relação às propriedades dos paralelogramos.

Na questão 10 (“Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe esse quadrilátero.”) a maioria dos alunos apenas desenhou o quadrilátero pedido sem nomear o polígono desenhado. Um exemplo comum de resposta seria o losango que não é um quadrado, por exemplo. Porém, nenhum aluno apresentou essa

resposta. Na Questão 11 (Figura 3.7), os alunos não consideraram as propriedades dos retângulos, e sim a representação da figura, evidenciando um desconhecimento das propriedades de inclusão que envolve a família de paralelogramos. Muitos alunos (75% da Turma A e 58% da Turma B) marcaram apenas os polígonos representados em 1 e 3.

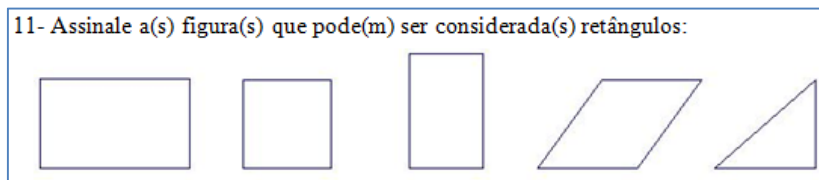


Figura 3.7 – Questão 11, Teste de van Hiele. Fonte: Nasser (1992, p.315).

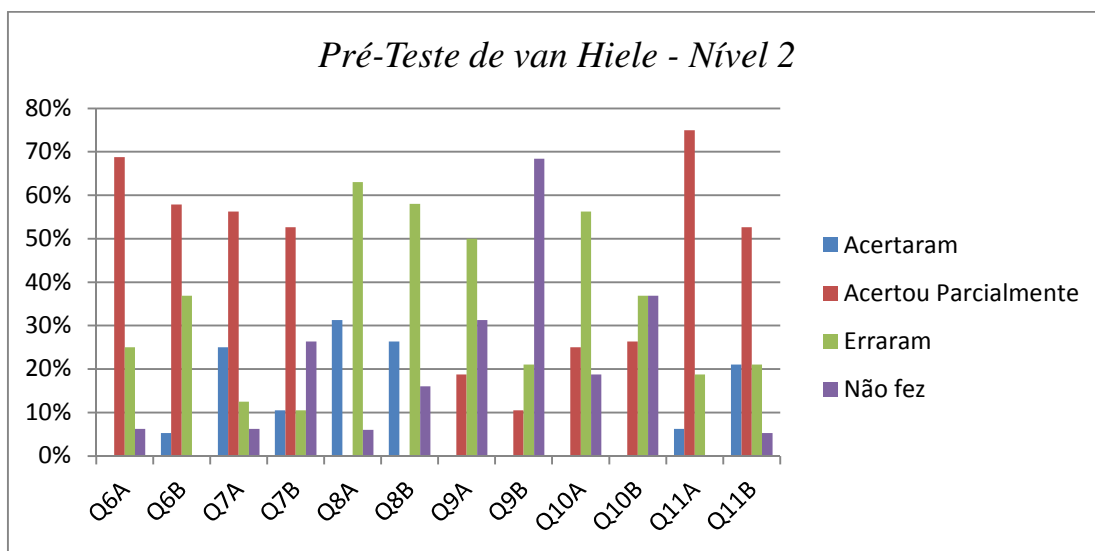


Gráfico 3.3 – Comparativo Experimental x Controle – Nível 2

De acordo com o gráfico 3.3, a Turma A apresentou um índice maior de respostas parcialmente corretas com relação à Turma B; ainda assim muitos não se classificaram nem no Nível 1. Entretanto, a Turma A apresentou um índice maior na quantidade de questões erradas, exceto nas Questões 6 e 11.

Nas questões relativas ao Nível 3, de acordo com o gráfico 3.4, a Turma B mostrou índices bem maiores de acertos com relação à Turma A, bem como a quantidade de questões parcialmente corretas, exceto a questão 15 onde o índice de acertos da Turma A foi maior.

No geral essas foram as questões que os alunos menos responderam, pois envolviam dedução informal e pensamento abstrato. Na questão 12, a maioria dos alunos deu respostas dúbias, tanto com relação ao enunciado quanto em relação as suas próprias respostas. Por exemplo, alguns alunos responderam que era possível a figura ser um quadrado no item A,

mesmo que a questão não deixe isso claro. Entretanto, esses mesmos alunos responderam no item C que a figura poderia ser um retângulo (Figura 3.8).

- 12 – Os quatro ângulos A, B, C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais.
- (a) Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado?
 - (b) Por que?
 - (c) Que tipo de quadrilátero é ABCD?

Figura 3.8 – Questão 12, Nível 3, Pré-Teste de van Hiele. Fonte: Nasser (1992, p.315).

Nas questões 13 (“Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo? Por que?”) e 15 (Figura 3.9), a falta de conhecimento das propriedades dos paralelogramos e da inclusão de classes entre esses fica evidente com os tipos de respostas apresentadas.

- 15 – Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados:
- (a) Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.
 - (b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.
 - (c) Qualquer propriedade dos retângulos é também válida para os quadrados.
 - (d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.
 - (e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

Figura 3.9 – Questão 15, Teste de van Hiele. Fonte: Nasser (1992, p.315).

A questão 14 (Figura 3.10) apresentou-se como uma das questões de maior dificuldade, pois alguns alunos não compreenderam que a figura deveria ser imaginada a partir das hipóteses dadas pelo problema, mais da metade não respondeu corretamente e alguns não responderam a questão.

- 14 – Considere as afirmativas:
- (I) A figura X é um retângulo (II) A figura X é um triângulo.**
- Assinale a afirmativa verdadeira:
- (a) Se I é verdadeira, então II é verdadeira.
 - (b) Se I é falsa, então II é verdadeira.
 - (c) I e II não podem ser ambas verdadeiras.
 - (d) I e II não podem ser ambas falsas.
 - (e) Se II é falsa, então I é verdadeira.

Figura 3.10 – Questão 14, Teste de van Hiele. Fonte: Nasser (1992, p.315).

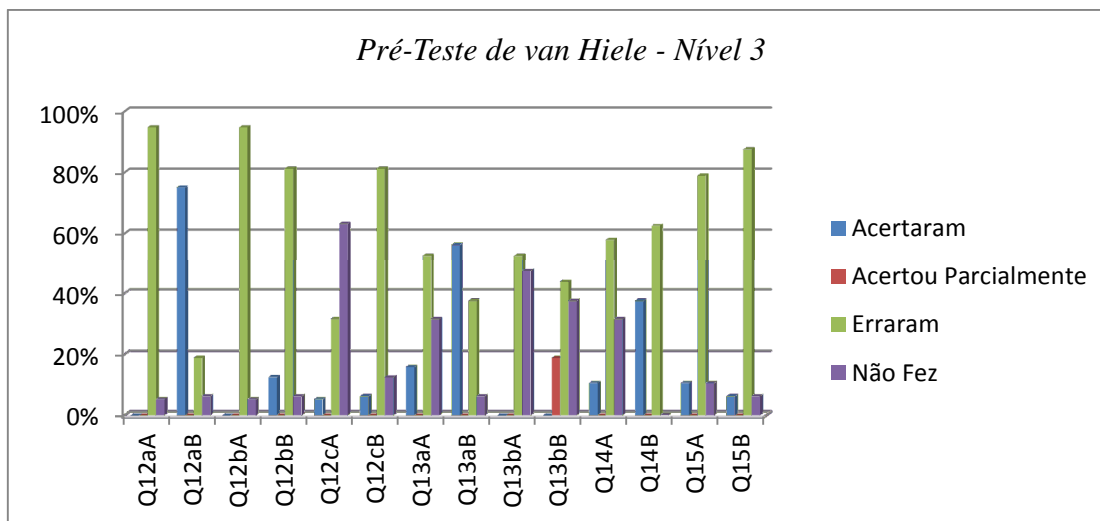


Gráfico 3.4 – Comparativo Turma A x Turma B – Nível 3

3.1.2 Pré-Teste de Conhecimentos em Isometrias

A análise dos Pré-testes foi feita com base na metodologia exposta no Capítulo II (subseção 2.4.2). As tabelas 3.4 e 3.5 apresentam as notas dos Pré-Testes de Conhecimentos em Isometrias obtidas pelos alunos das turmas A e B.

Tabela 3.4 – Notas do Pré-teste de conhecimentos em isometrias – Turma A

Alunos	Notas
A1	0
A2	2,5
A3	5
A4	5
A5	6,25
A6	8,75
A7	2,5
A8	2,5
A9	2,5
A10	2,5
A11	2,5
A12	3,75
A13	3,75
A14	3,125
A15	5
A16	5
A17	5
A18	6
A19	6
Média	4,09

Tabela 3.5 – Notas do Pré-teste de conhecimentos em isometrias – Turma B

Alunos	Notas
B1	5
B2	8,75
B3	8,75
B4	8,75
B5	7,81
B6	8,75
B7	7
B8	7,5
B9	8,75
B10	7,5
B11	8,75
B12	7,5
B13	5,31
B14	5
B15	5
B16	3,25
Média	7,09

De acordo com as tabelas, observa-se que a média das notas na Turma B (7,09) foi maior que a da Turma A (4,09) em aproximadamente 73%. Com os gráficos 3.5 e 3.6 observa-se o percentual de notas de acordo com frequência estabelecida em intervalos de dois pontos.

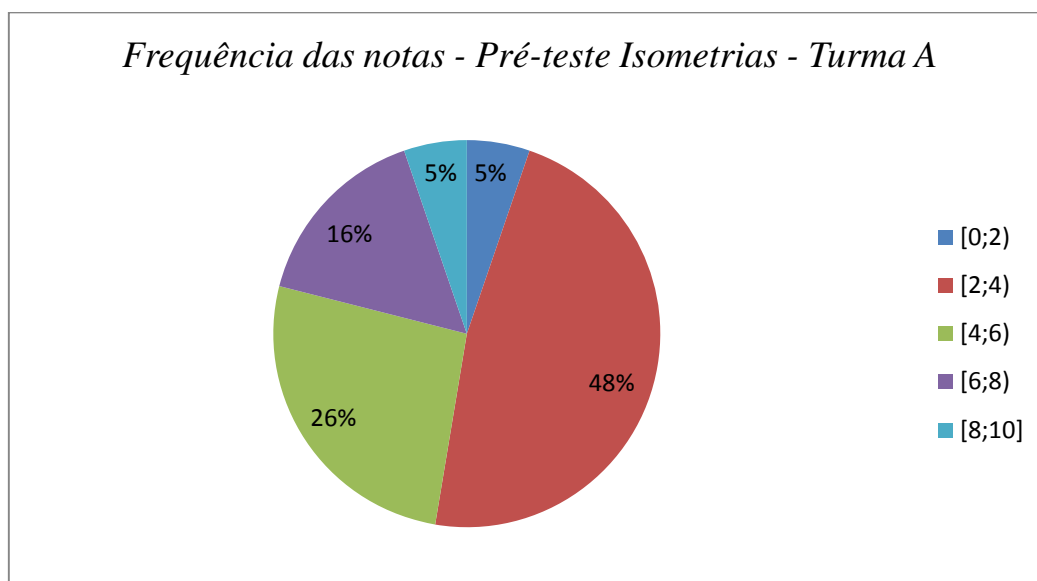


Gráfico 3.5 – Notas do Pré-teste de conhecimentos em isometrias – Turma A

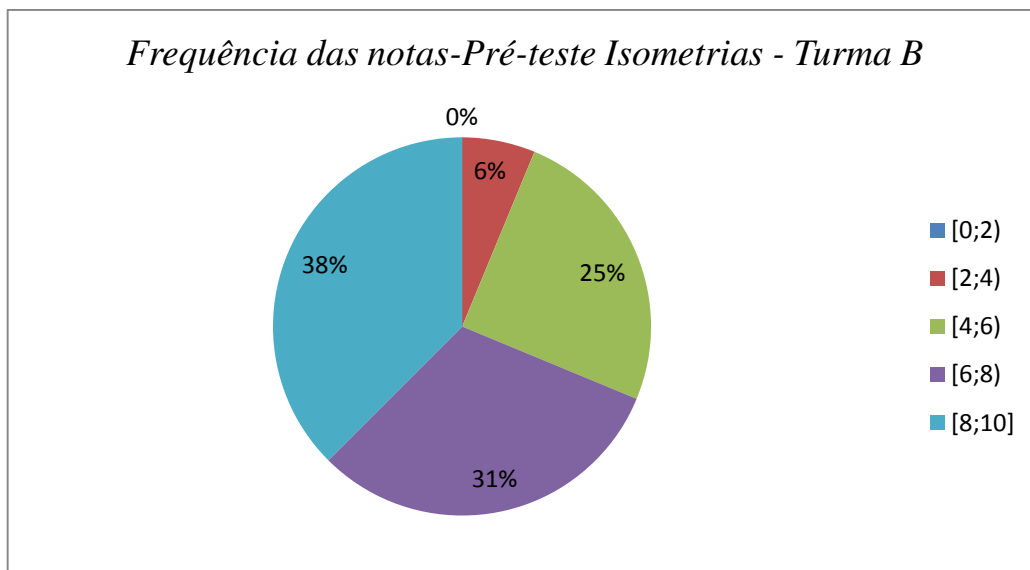


Gráfico 3.6 – Notas do Pré-teste de conhecimentos em isometrias – Turma B

De acordo com o gráfico 3.5 percebe-se que, na Turma A, há uma concentração grande de alunos com notas maiores ou iguais a dois e menores do que quatro (48%). Enquanto na Turma B, de acordo com o gráfico 3.6, a maior concentração de notas ocorreu no intervalo [8, 10] (38%). Além disso, mais da metade dos alunos da Turma B (69%) obteve notas entre 6 e 10, enquanto a maioria dos alunos da Turma A (53%) obteve notas no intervalo [0, 4). Assim os alunos da Turma B, em média, obtiveram notas mais altas no Pré-Teste de conhecimentos em Isometrias do que os alunos da Turma A.

Esses totais, somados ao resultado dos pré-testes para avaliar o nível de van Hiele de conhecimentos em geometria, foram essenciais para a escolha dos Grupos, uma vez que, aquele que apresentasse mais dificuldades nesses conteúdos, seria escolhido para realizar as atividades experimentais. Por isso a Turma A foi escolhida para ser o Grupo Experimental e a Turma B, o Grupo Controle.

3.2 Desenvolvimento das atividades

3.2.1 Grupo Experimental

Quadriláteros - Atividade 1

Nessa atividade, as semelhanças e diferenças apontadas pelos alunos foram essencialmente ligadas ao conceito visual que os mesmos tinham das figuras geométricas planas: a forma, o tamanho, se tinham a mesma quantidade de lados e ângulos, não discutindo nenhuma propriedade decorrente do paralelismo (no caso dos paralelogramos). As diferenças só foram mais bem ressaltadas quando se tratava de figuras absolutamente diferentes, como o hexágono e o trapézio, por exemplo.

Durante a discussão e correção, foram revisados alguns conceitos que os alunos já tinham visto. Um ponto abordado constantemente foi a diferença entre formas planas e espaciais. A professora lembrou com os alunos casos de semelhança entre figuras, discutindo quais são os requisitos necessários para que duas figuras sejam semelhantes, além da pura e simples forma. Em seguida, a autora discutiu o que poderia ser definido como quadrilátero e os alunos não apresentaram dificuldades em compreender a definição dada. Os alunos mostraram dificuldade em englobar os quadriláteros notáveis em categorias não disjuntas.

Durante a discussão, a autora pode observar que a noção de paralelismo, se não foi trabalhada anteriormente, foi completamente esquecida. Uma vez esclarecida a definição de paralelismo entre duas ou mais retas, outras conjecturas foram feitas utilizando o conceito de lados iguais, ângulos congruentes (revendo também o Teorema de Tales) e os casos de congruência.

Quadriláteros - Atividade 2

Nesta atividade, os alunos deveriam separar as figuras em grupos com as mesmas propriedades. Foram dados 20 minutos para que fizessem uma classificação inicial. Enquanto eles o faziam, a professora lembrou os tipos de quadrilátero envolvidos na atividade 1 e listou no quadro todos os quadriláteros citados no exercício anterior, divididos nas categorias: 1) quadriláteros quaisquer, 2) paralelogramo, 3) trapézio, 4) quadrado, 5) retângulo e 6) losango.

Os alunos, no geral, não apresentaram dificuldades em classificar quadrados e retângulos, porém, demonstraram grande confusão ao tentar diferenciar trapézios de quadriláteros com formas similares. A discussão sobre outros quadriláteros continuou com a exposição das propriedades dos quadriláteros notáveis.

Quadriláteros – Atividade 3

Esta atividade foi uma continuação natural da Atividade 2 e, como foram realizadas em duas aulas seguidas, a atividade funcionou como uma revisão do que já havia sido discutido nas duas atividades anteriores. Para cada figura colada no quadro, os alunos apresentaram as propriedades relativas aos mesmos sem dificuldades.

Com relação aos quadrados, as propriedades mais conhecidas (4 lados iguais, 4 ângulos iguais, lados opostos paralelos) foram rapidamente enunciadas e os alunos apresentaram mais dificuldade em enunciar o fato de que as diagonais eram perpendiculares entre si.

Com relação aos retângulos, os alunos foram eficientes em dizer que os quatro ângulos eram iguais, mas confundiram algumas propriedades relativas aos quadrados com as desse polígono. A professora então reforçou o fato de quadrados e retângulos terem algumas propriedades semelhantes, como por exemplo, a congruência das diagonais. Apesar dos alunos terem uma compreensão visual dessa propriedade, ninguém soube explicar porque a igualdade acontecia. Mais uma vez o tópico sobre congruência de triângulos foi explicado para demonstrar que as diagonais tem o mesmo comprimento.

Na categoria **paralelogramo quaisquer** os alunos citaram, de início, lados opostos paralelos, porém, nenhuma outra propriedade além dessa foi citada. A professora citou outras propriedades enunciadas anteriormente e discutiu com os alunos se as mesmas eram aplicáveis aos paralelogramos. No caso das diagonais, a professora usou a mesma demonstração dada no caso do retângulo e os alunos compreenderam que, como os triângulos ACD e BCD (Figura 3.11) são diferentes, as diagonais não podem ter o mesmo tamanho.

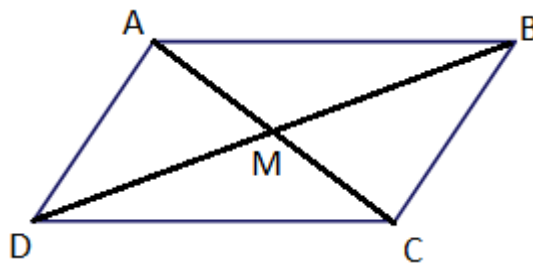


Figura 3.11

Além disso, também foi discutida a igualdade dos ângulos opostos, bem como o fato dos ângulos adjacentes somarem 180° . Outro ponto de muita dificuldade foi o fato de que as diagonais de qualquer paralelogramo se cruzam no ponto médio. Uma vez demonstrada a propriedade, a mesma foi repetida mais duas vezes, para provar que se aplicava tanto no quadrado quanto para o retângulo.

O **losango** apresentou-se como o mais desconhecido dos paralelogramos para os alunos. Estes não conheciam qualquer propriedade do losango que não fosse ligada ao conceito visual que tinham dessa figura, afirmando que a propriedade era “*parecer um balão*”. Foi enunciada a propriedade que o define, “Quadrilátero que possui quatro lados iguais”, o que também gerou certas dúvidas, pois para alguns alunos, a única figura com essa propriedade era o quadrado.

Para contornar a situação, a professora introduziu o conceito de estruturas triangulares rígidas, com exemplos utilizados na construção civil (estruturas em geral, telhados, pontes), e questionou se o mesmo era possível se a estrutura tivesse quatro lados, mostrando no quadro um desenho. Assim, os alunos puderam compreender que, um quadrilátero com quatro lados pode mudar de forma quando alteramos seus ângulos, podendo ser um quadrado, quando o ângulo for reto, ou um losango qualquer em caso contrário.

Com relação ao **trapézio**, os alunos não conheciam nenhuma propriedade. A primeira a ser enunciada, após algumas observações, foi a de que tem apenas um par de lados opostos paralelos. A partir dessa propriedade, a professora estimulou uma discussão sobre o comprimento das diagonais e sobre os ângulos, mostrando diferentes tipos de trapézio (retângulo, isósceles, comum).

Retomando a discussão do paralelismo, os alunos foram questionados sobre o comprimento das diagonais e se as mesmas se cruzavam no ponto médio, tal qual o paralelogramo. Um grupo de alunos colocou que o trapézio não poderia ser um paralelogramo

e que, como os lados não paralelos não eram necessariamente iguais, não era possível estender a demonstração feita anteriormente para quadrados, retângulos e losangos, salvo no caso do trapézio isósceles.

Quadriláteros – Atividade 4

A princípio, os alunos apresentaram certa dificuldade, pois tentavam responder o mais rápido possível, baseado nas impressões visuais do primeiro slide, sem conjecturar sobre as possibilidades que cada um dos slides proporcionava. Incentivados pela professora e por um grupo de alunos, o restante da turma passou a refletir sobre as alternativas para cada slide apresentado.

Quadriláteros – Atividade 5

Uma grande parte dos alunos já estava bastante familiarizada com as propriedades em geral, dado o desenvolvimento da atividade anterior, e conseguiram identificar com muita facilidade os itens 2 e 3 (veja Anexo F). As observações feitas acerca do encadeamento e das implicações de uma propriedade dada já começaram a surgir durante a realização dessa atividade. Contudo, no primeiro exemplo, os alunos ainda tiveram alguma dificuldade em identificar um paralelogramo, até que fossem feitas todas as conjecturas possíveis e algumas fossem corrigidas ou até mesmo refutadas. Os exemplos posteriores transcorreram sem problemas e com bastante participação da turma.

Quadriláteros – Atividade 6

A professora elencou todas as propriedades sobre quadriláteros notáveis discutidas nas atividades anteriores, associando cada propriedade aos respectivos quadriláteros. Mesmo depois de observar quais quadriláteros possuíam propriedades comuns, os alunos ainda mostravam dificuldades, ligadas ao forte apelo visual em detrimento da aprendizagem das propriedades desses polígonos.

Após essa discussão a professora lançou a seguinte pergunta “*todo quadrado é um retângulo?*” e mesmo com todas as propriedades listadas no quadro os alunos ainda apresentavam dúvidas com relação à pergunta, mostrando qual forte era o argumento visual que possuíam desses polígonos. A professora orientou a turma a fazer uma comparação entre as propriedades de ambos os polígonos e verificar as propriedades comuns.

Em seguida a professora lançou outra questão, se “*todo retângulo é um quadrado?*”. A maioria dos alunos respondeu prontamente que sim, mas uma pequena parte respondeu que não e deu a justificativa que “nem todo retângulo tem todos os lados iguais”, e ainda que essa seja uma justificativa fundamentada em um conceito visual para diferenciar tais figuras, é uma justificativa correta.

Depois disso, uma terceira questão foi lançada pela professora: “*todo quadrado é um losango?*”. Mais da metade da turma respondeu que sim, porém não conseguiu justificar de imediato o porquê. Alguns deram justificativas baseadas em argumentos visuais e, novamente, a turma foi chamada para a discussão sobre a influência da posição de uma figura em suas propriedades. Depois os alunos foram orientados a observarem as propriedades comuns desses polígonos para fazer a comparação dos mesmos, verificando que todas as propriedades dos losangos eram também propriedades dos quadrados. Rapidamente, todos os alunos já concordaram que todos os quadrados eram também losangos. Para responder a questão “*todo losango é quadrado?*” os alunos não hesitaram em responder que não e recuperaram alguns tópicos abordados nas aulas anteriores.

Para incluir quadrados, retângulos e losangos na categoria dos paralelogramos, os alunos não apresentaram grandes dificuldades. A propriedade dos lados opostos iguais e paralelos foi citada todas as vezes que a professora perguntou qual era a propriedade comum entre uma das figuras e os paralelogramos. Fechando a atividade, discutiu-se porque os trapézios não eram classificados como paralelogramos, e os alunos, também resgatando discussões de aulas anteriores, citaram duas propriedades que reiteram a não inclusão desse polígono na classe dos paralelogramos, os ângulos opostos não serem iguais e apenas dois lados opostos paralelos.

Simetria de Reflexão – Atividade 1

Os alunos receberam uma folha de papel com dois pentágonos: um regular e um não regular (veja Figura 3.12). O primeiro polígono foi recortado da folha e a professora orientou os alunos para que o “dobrassem ao meio”. Em seguida, a professora questionou os alunos porque a maioria tinha realizado a atividade praticamente da mesma forma, dobrando de maneira a unir os vértices. No geral as respostas foram as mesmas “*porque devemos unir as pontas?*”.

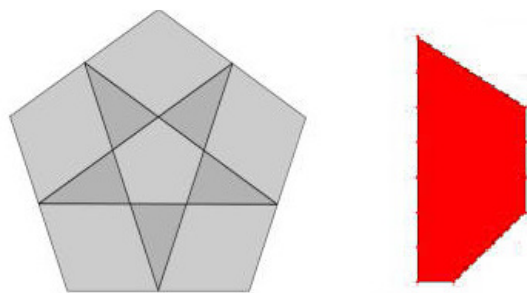


Figura 3.12

A professora introduziu o conceito de simetria, e o que era o eixo de simetria, orientando os alunos a usarem lápis e réguas para marcarem os eixos sobre a dobra feita. Na segunda parte da atividade, a professora associou a marca feita sobre a dobra a um espelho, fazendo com que o aluno percebesse que cada parte do polígono era como um reflexo do outro lado do eixo de simetria. Assim cada aluno escolheu um lado do segundo polígono (Figura 3.12) para funcionar como espelho. As diferentes possibilidades de figuras simétricas foram desenhadas no quadro.

Em seguida, a professora discutiu algumas propriedades relativas à simetria de reflexão, como a preservação de ângulos e comprimentos. Um dos alunos colocou que “*ao se olhar em um espelho, você se vê exatamente como é*”, concluindo que com polígonos simétricos por reflexão não seria diferente.

Simetria de Reflexão – Atividade 2

A atividade 2 também transcorreu sem muitas dificuldades e de maneira mais rápida, pois os alunos identificaram com facilidade quais figuras possuíam eixos de simetria, bem como quantos eram, e quais não possuíam.

Simetria de Reflexão – Atividade 3

A professora utilizou as figuras da atividade anterior para trabalhar o conceito de pontos simétricos com relação a um eixo, além de trabalhar o perpendicularismo entre o segmento que une dois pontos simétricos e o eixo de simetria. Os alunos não apresentaram dificuldade em verificar o perpendicularismo entre esses, de acordo com os mesmos o ângulo era “sempre em formato de L”.

Dos três itens que a atividade continha, os alunos tiveram dificuldades somente na primeira (Figura 3.13 pois o eixo de simetria não pertencia à figura. Alguns alunos, ao invés

de fazer uma reflexão sobre o eixo de simetria dado, fizeram uma translação e desenharam a figura na mesma posição que a seta original. Com os outros itens os alunos não tiveram dificuldades na realização, pois o eixo de simetria estava pertencendo a algum lado da forma geométrica.

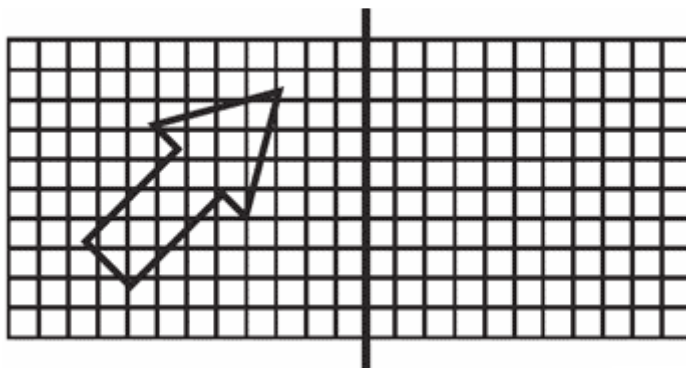


Figura 3.13 – Fonte: Revista Nova Escola, 2013.¹⁰

Simetria de Reflexão – Atividade 4

Os alunos fizeram muitas observações acerca das propriedades de simetria embutidas nessa atividade (Apêndice E). No primeiro item, os mesmos destacaram que, mesmo que os pontos fossem visualmente equidistantes do eixo de simetria, quando ligados por um segmento o mesmo não fazia um ângulo reto com o eixo e por isso não eram simétricos com relação ao eixo dado. No terceiro item, os alunos destacaram que o segmento que unia os pontos era perpendicular ao eixo, mas a distância dos pontos ao eixo não era a mesma, descartando a simetria. No quarto item, os alunos facilmente perceberam que os pontos não eram simétricos, pois o eixo de simetria não estava entre os pontos P e Q.

Simetria de Reflexão – Atividade 5

A atividade proposta chamou bastante atenção dos alunos, dado que a maioria conseguiu identificar as logomarcas mais conhecidas (Apêndice F). Em seguida, os alunos observaram se as figuras apresentadas eram simétricas ou não, destacando as características de uma simetria em caso afirmativo, ou a falta delas caso não fossem simétricas.

¹⁰ Disponível em <<http://revistaescola.abril.com.br/matematica/pratica-pedagogica/geometria-transformacao-reflexao-figuras-planas-621932.shtml>>. Acesso em: 09 ago 2013.

Simetria de Rotação – Atividade 1

A professora iniciou a atividade, verificando o que os alunos entendiam sobre o movimento de rotação. Uma das primeiras associações feitas foi com o movimento de rotação da Terra, “*a Terra gira e para no mesmo lugar depois de um dia*” (observação de um dos alunos). Em seguida, a professora explicou os movimentos com rotação completa (360°), no entanto um dos primeiros exemplos sugerido aos alunos, o pêndulo do relógio, gerou algumas dúvidas por não fazer o movimento de rotação completa.

A professora iniciou uma discussão sobre o movimento de rotação como uma forma de simetria que “gira” a figura. Algumas dúvidas surgiram durante a explicação, tal como se a figura deveria sempre girar 360° ou se era correta girar menos que uma volta, ou “*meia-volta*” como os próprios mencionaram. Esclarecidas as dúvidas, os alunos citaram vários exemplos que consideraram importantes, dando também o centro da rotação e se sabiam de quantos graus era a rotação, o que foi o mais dificultoso para os alunos.

Simetria de Rotação – Atividade 2

Nessa atividade, utilizamos uma rosácea (Figura 3.14) distribuída para cada aluno. A professora fez uma revisão sobre o conceito de ângulos reto, raso, volta completa, além dos ângulos notáveis oriundos da divisão do círculo trigonométrico¹¹, orientando os alunos na realização da tarefa. Questionou qual o ângulo entre duas retas perpendiculares e usando um barbante desenhou uma circunferência e sobre cada reta marcou o ângulo correspondente (90° , 180° , 270° e 360°). A professora ainda desenhou as bissetrizes dos quadrantes e discutiu com os alunos quais eram os ângulos formados por essas bissetrizes e os eixos coordenados.

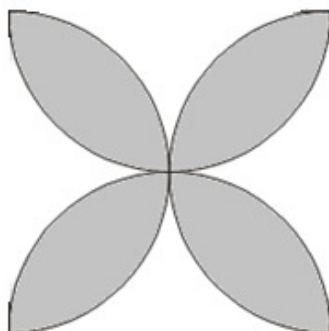


Figura 3.14 – Fonte: Só ensino (CARVALHO e TESTONI, 2013, Adaptada)¹²

¹¹ Tal terminologia não foi utilizada com os alunos.

¹² Disponível em: <<http://www.soensino.com.br/foruns/viewtopic.php?f=5&t=22366>>. Acesso em: 30 jul 2013.

Em seguida, retomando a realização da atividade, a professora orientou os alunos a marcarem um ponto em uma das pétalas, para que soubessem quantos graus era necessário girar a rosácea se encaixasse perfeitamente na figura desenhada, para em seguida determinar o ângulo de rotação. Os alunos chegaram à conclusão que deveriam girar 4 vezes para completar 360° . Desse modo, a professora questionou quantos graus seria necessário para girar apenas uma vez, e os alunos logo perceberam que deveriam apenas dividir a volta completa pela quantidade de vezes que deveriam girar a figura.

Simetria de Rotação – Atividade 3

A fim de dar continuidade ao conteúdo iniciado na atividade anterior, a Atividade 3 se propôs a amarrar o conceito de rotação com a aprendizagem de ângulos, utilizando diferentes figuras dadas, simétricas por reflexão. Os alunos não mostraram dificuldades em verificar a simetria das figuras apresentadas, nem em identificar centro e ângulo de rotação.

Em um dos itens da atividade proposta (Figura 3.15), os alunos apresentaram dificuldades para visualizar os eixos de simetria e o ângulo de rotação, pois a mesma possuía muitas subdivisões. Sendo assim os alunos ficaram confusos sobre qual referencial iriam utilizar para que, ao girar a figura, a mesma ficasse idêntica à original.



Figura 3.15 – Fonte: (Penaguão, Santos, Ferreira, 2000).¹³

Simetria de Rotação – Atividade 4

Para dar início à atividade, a professora explicou o que era sentido de rotação, podendo ser horário ou anti-horário. No exercício 1, itens (a) e (c) e no exercício 2 item (b) da Atividade 4 (veja Figura 3.16), nos quais os centros de rotação não eram pontos da figura, os alunos mostraram mais dificuldades para realizar. A professora os orientou a tomar um ponto mais próximo possível do centro, e construir um segmento de reta. A partir daí realizar a rotação pedida. Feito isso, os alunos realizaram as rotações sem maiores problemas.

¹³ Disponível em <<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm12/rotacoes.htm>>. Acesso em: 07 ago 2013

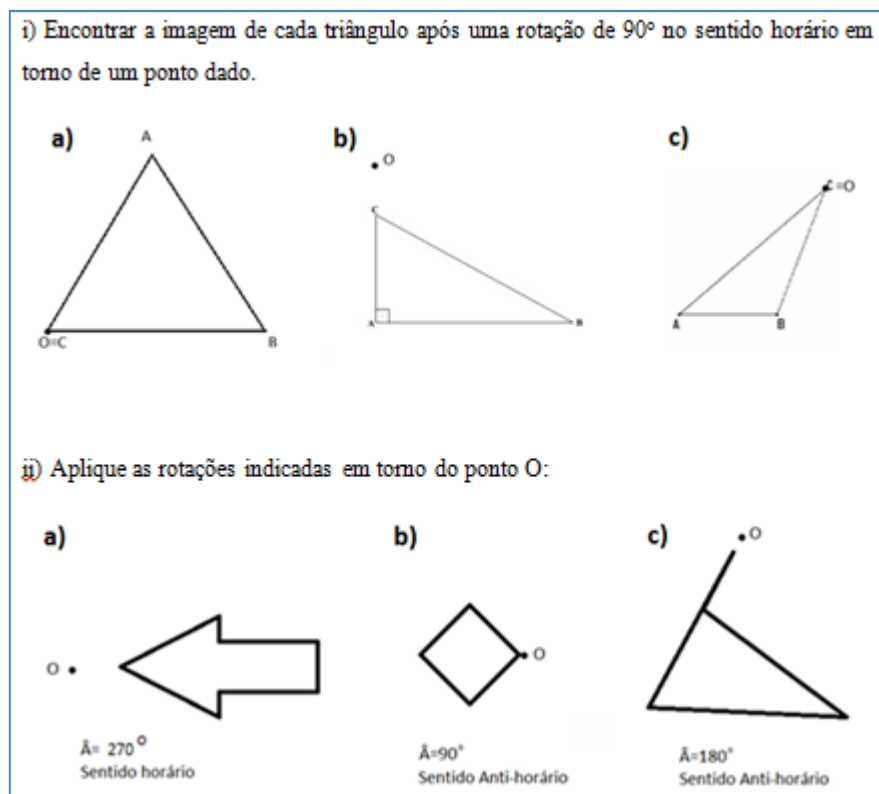


Figura 3.16

No exercício iii, os alunos identificaram com facilidade quais figuras eram simétricas. Porém a segunda e a última figuras (veja Figura 3.17) levaram à mesma discussão do exercício i. Os alunos não conseguiam encontrar um ponto que pudesse ser o centro da rotação, preservando ao mesmo tempo as propriedades dessa simetria. Um dos alunos colocou que a figura não tinha sofrido uma rotação, mas que tinha apenas “rolado”.



Figura 3.17 – (Gonçalves e Dookie, 2008) (Adaptada)¹⁴

Para resolver a questão, a professora desenhou uma figura semelhante no quadro e começou a explorar alguns pontos importantes. Sem considerar as letras, explicou que o centro da rotação estava fora da figura, e que considerando as letras, rotacionando a figura,

¹⁴ Disponível em <http://pudimdebeterraba.blogspot.com.br/2008_06_01_archive.html>. Acesso em: 07 ago 2013.

elas não ficariam na posição apresentada. A professora ainda colocou que esta figura havia sofrido mais de uma isometria e questionou os alunos qual das simetrias estudadas poderia fazer com que as letras ficasse daquela forma, e explicou que seria necessário uma reflexão e um rotação em torno do mesmo centro, e ainda uma translação, mas que esse tópico não seria abordado.

3.2.2 Grupo Controle

As atividades do Grupo Controle realizaram-se ao longo de 7 aulas, com exposição no quadro do conteúdo abordado, além da aplicação e correção de exercícios, utilizando livros didáticos.

Aula 1

A professora iniciou a aula com a definição de quadriláteros como uma figura geométrica que possui quatro lados, determinando quais eram seus elementos e como denominá-los. Em seguida, apresentou os quadriláteros notáveis seguindo a mesma dinâmica do livro didático utilizado: paralelogramos, retângulos, losangos, quadrados e trapézios.

De acordo com a definição dada no livro didático, “paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos paralelos e iguais” (BIANCHINI, 2011, p. 244). Além disso, também foram utilizadas a definição e propriedades de retângulo dadas para concluir que todo retângulo era também um paralelogramo.

A professora expôs as definições e propriedades dos quadrados e losangos, comparando com as propriedades dos paralelogramos e dos retângulos, a fim de concluir que todos esses polígonos pertenciam a categoria dos paralelogramos, além de incluir o quadrado como losango e retângulo. Os alunos apresentaram dificuldades em compreender a inclusão de classes, pois os mesmos ainda tinham a ideia de que os quadriláteros eram figuras geométricas divididas em categorias disjuntas.

Aula 2

A professora iniciou a aula com uma revisão sobre a inclusão de classes trabalhada na aula anterior. Depois disso discutiu novamente com os alunos as propriedades dos

quadriláteros citadas, para que pudessem compreender melhor a divisão em categorias não disjuntas dos paralelogramos. Os alunos ainda apresentavam muitas dificuldades, sobretudo em virtude do argumento visual fortemente trabalhado ao longo de todo o Ensino Fundamental. Novamente a professora comparou propriedades para convencê-los de que, tendo propriedades comuns, pode-se colocar um paralelogramo em mais de uma categoria.

Aula 3

A professora iniciou a aula com a definição informal do que era simetria e utilizando exemplos básicos que incluíam a simetria de reflexão. Em seguida, iniciou-se uma discussão sobre o que era o eixo de simetria de reflexão, trabalhando com as definições e propriedades da simetria. Por meio de alguns exemplos apresentados no livro didático, a professora explicou que a simetria de reflexão preservava comprimentos e, além disso, iniciou uma breve explicação sobre a distância entre ponto e reta.

Em seguida, a professora apresentou a definição de pontos simétricos a um eixo de simetria, mostrando-os nas figuras apresentadas nos livros (veja Figura 3.18) e explicando que o segmento que os unia era também perpendicular ao eixo de simetria da figura. Os alunos compreenderam que o fato dos pontos simétricos serem equidistantes e o segmento que os unia ser perpendicular ao eixo eram propriedades relativas a uma simetria de reflexão.

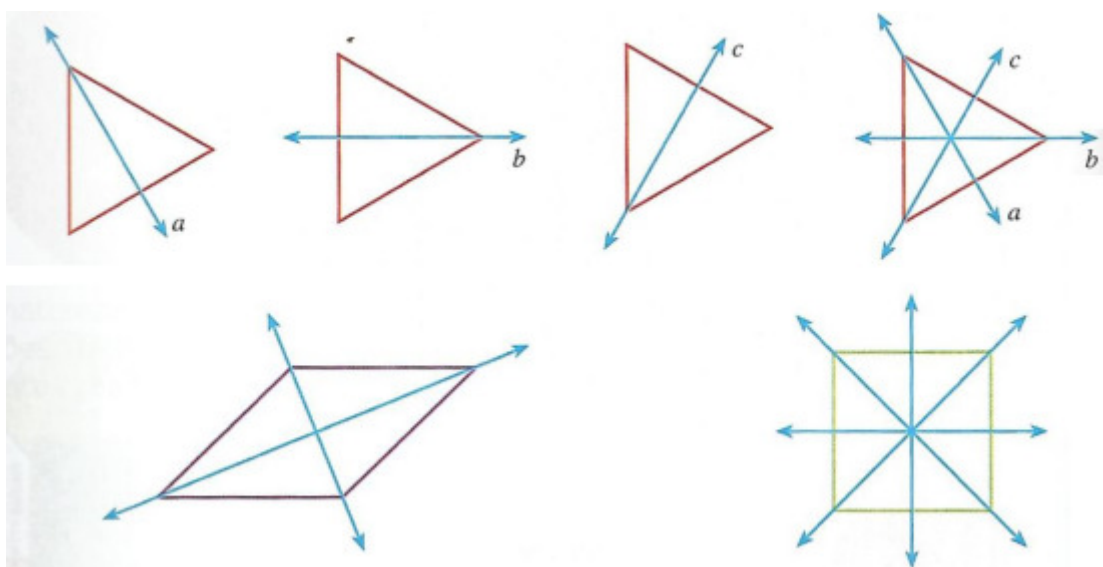


Figura 3.18 – (Bianchini, 2011, p. 166 - adaptada)

Aula 4

A aula foi iniciada com uma revisão para discutir alguns itens abordados na aula anterior sobre simetria de reflexão. Em seguida, a professora introduziu o conceito de rotação

utilizando algumas figuras (Figura 3.19), questionando sobre o que era necessário para que as figuras se deslocassem e coincidissem. Os alunos apresentaram muitas dificuldades em compreender que existia outro tipo de simetria, confundindo reflexão com rotação.

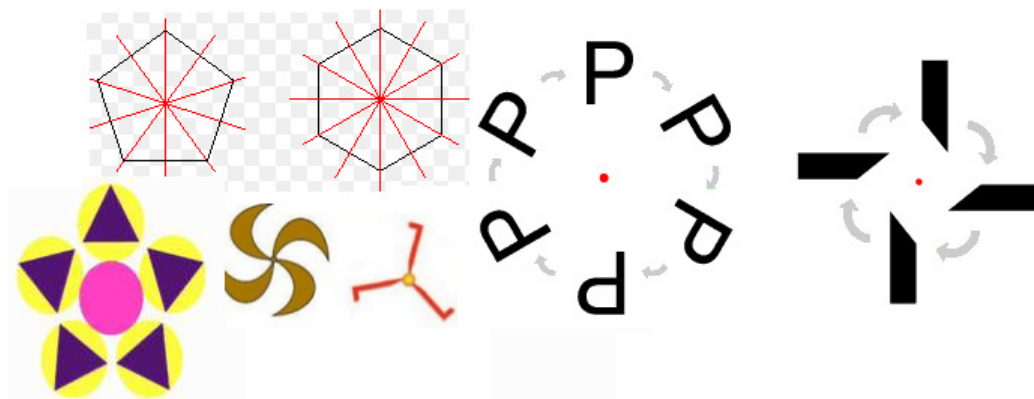


Figura 3.19 – Fonte: [Slideshare, 2013](http://pt.slideshare.net/lisa54/simétrias-11060613) (adaptada)¹⁵

Aula 5

A professora selecionou exercícios dos livros didáticos (Figuras 3.20), pois os alunos ainda tinham muita dificuldade em diferenciar simetria de reflexão de simetria de rotação.

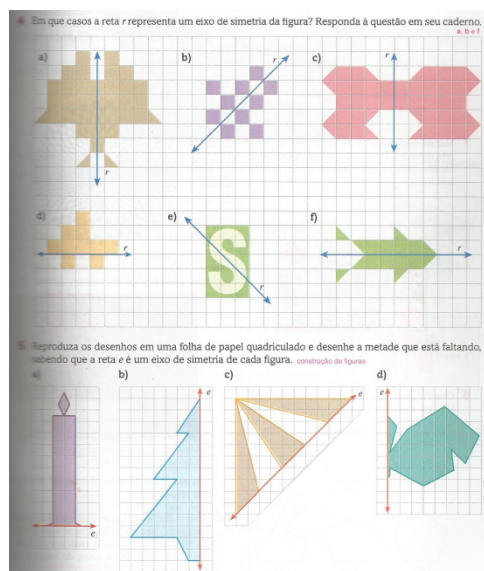


Figura 3.20 – (Bianchini, 2011, p. 167 - adaptada).

¹⁵ Disponível em <<http://pt.slideshare.net/lisa54/simétrias-11060613>>. Acesso em 12 ago 2013.

Os mesmos também apresentaram muitas dúvidas em como encontrar o centro da rotação. Sendo assim, a professora apresentou no quadro alguns exemplos dados (Figura 3.21) com o intuito de auxiliá-los a encontrar esse ponto, seguido de alguns exercícios.

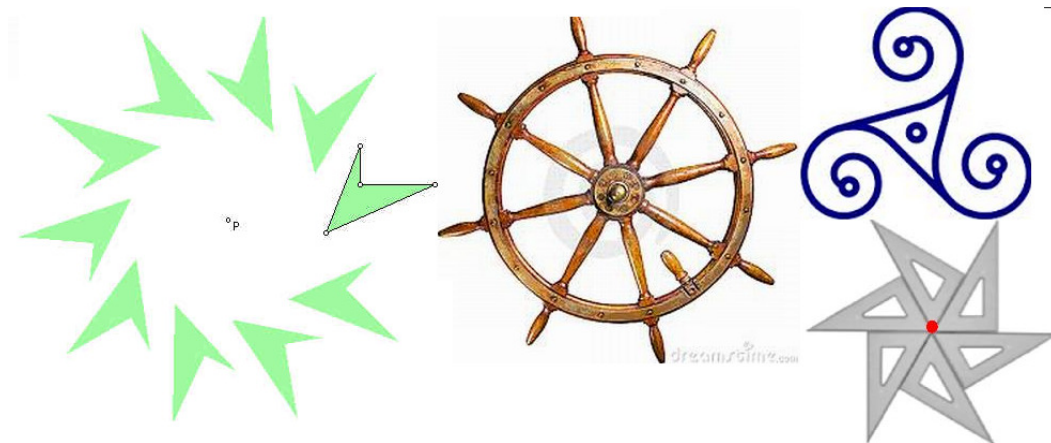


Figura 3.21

Após alguns minutos, a mesma sugeriu que a correção das atividades fosse feita, questionando o que os alunos haviam errado. A maioria associou a simetria de reflexão com apenas uma figura que possui um eixo de simetria, e a simetria de rotação como duas figuras: uma sendo a original e a outra sendo a imagem da primeira rotacionada.

Aula 6

A aula teve início com uma revisão de ângulos, começando com a definição, seguida da apresentação do ângulo de 360° e seus submúltiplos. Todos esses ângulos foram mostrados com as divisões no plano cartesiano, visualizando sempre uma rotação de um ponto sobre um círculo, usando os ângulos de 90° , 180° , 270° e 360° . Em seguida a professora explicou o que eram sentidos horário e anti-horário da rotação dando exemplos como a rotação de 270° no sentido anti-horário, pois para os mesmos essa era uma rotação de 90° no sentido horário, gerando muitas dúvidas.

Logo após a discussão do conteúdo, a professora propôs atividades a fim de desenvolver o que haviam discutido anteriormente e os alunos não tiveram maiores dificuldades em compreender que o ângulo de rotação era dado pelo ângulo que representava a volta completa, dividido pelo número de partes iguais que a figura poderia ser dividida a partir do centro.

Aula 7

Foi feita uma revisão geral com todo o conteúdo discutido nas últimas seis aulas, abordando as propriedades dos quadriláteros e a inclusão de classes, bem como as simetrias de reflexão e rotação. Foram realizados alguns exercícios que discutiam os conceitos trabalhados nas aulas anteriores. Logo depois, foi feita a correção das atividades, na qual os alunos colocaram as dificuldades apresentadas.

3.3 Resultados dos Pós-Testes

3.3.1 Pós-Teste de van Hiele

Após a realização das atividades, tanto para a Turma A quanto para a Turma B, foram aplicados os Pós-testes de van Hiele a fim de analisar se houve ou não desenvolvimento dos conceitos abordados após a primeira avaliação. Foi utilizada a mesma metodologia da análise dos Pré-testes. Nas tabelas 3.6 e 3.7 são apresentados os níveis identificados, por aluno, das Turmas B e A. Na Tabela 3.8, observa-se o percentual de alunos por nível de van Hiele como um todo.

Tabela 3.6 - -- Níveis de van Hiele alcançados pelos alunos da Turma B no pós-teste.

Alunos	Níveis		
	1	2	3
B1	0	0	0
B2	0	0	0
B3	0	0	0
B4	0	0	0
B5	1	0	0
B6	0	0	0
B7	1	0	0
B8	1	0	0
B9	1	1	1
B10	1	0	0
B11	1	1	1
B12	0	0	0
B13	1	0	0
B14	0	0	1
B15	1	1	0
B16	0	0	0

Tabela 3.7 - Níveis de van Hiele alcançados pelos alunos da Turma A no pós-teste.

Alunos	Níveis		
	1	2	3
A1	1	1	0
A2	0	0	0
A3	0	0	0
A4	1	1	0
A5	0	0	0
A6	0	0	0
A7	1	0	0
A8	0	1	0
A9	1	0	0
A10	1	0	0
A11	1	1	0
A12	1	1	0
A13	0	0	0
A14	1	0	0
A15	1	1	0
A16	0	0	0
A17	0	0	0
A18	1	0	0
A19	0	1	0

De acordo com os critérios metodológicos apresentados no Capítulo II, seção 2.9 dessa pesquisa, o aluno B14 não foi classificado no nível 3, bem como o aluno A8 e A19 não foram classificados no nível 2 de van Hiele. Os três alunos mencionados não foram classificados nos níveis de van Hiele, pois sequer atingiram o 1º nível.

Tabela 3.8 – Percentuais gerais dos alunos em cada nível de van Hiele no pós-teste

	Turma A	Controle	%
Não Classificado	9	8	49%
Nível 1	5	5	29%
Nível 2	5	1	17%
Nível 3	0	2	6%
Total	19	16	100%

Pelo Gráfico 3.7, observa-se que o percentual de não classificados em nível algum é menor entre os alunos da Turma A, bem como o percentual de alunos classificados no Nível 1.

Entretanto, o percentual de alunos no Nível 2 é maior também nessa Turma, enquanto que o percentual de alunos no Nível 3 é maior na Turma B.

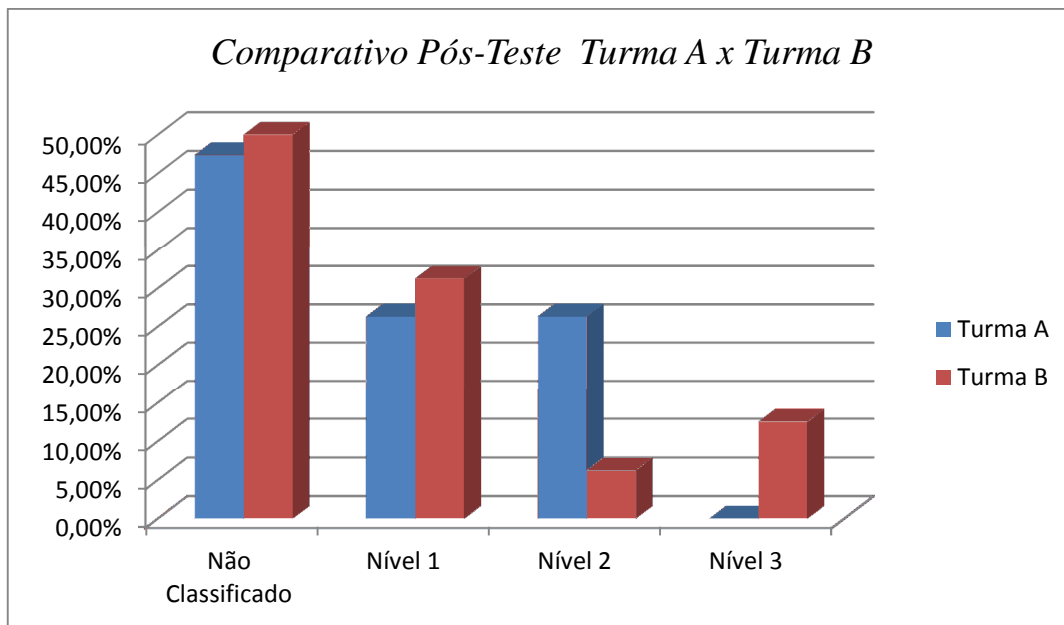


Gráfico 3.7 – Percentual de alunos por nível, Turma A e Turma B.

Nas questões relativas ao Nível 1, o Gráfico 3.8 mostra que o percentual de questões respondidas de maneira correta é maior entre os alunos da Turma A, exceto na questão 5, na qual o índice é melhor entre os alunos da Turma B.

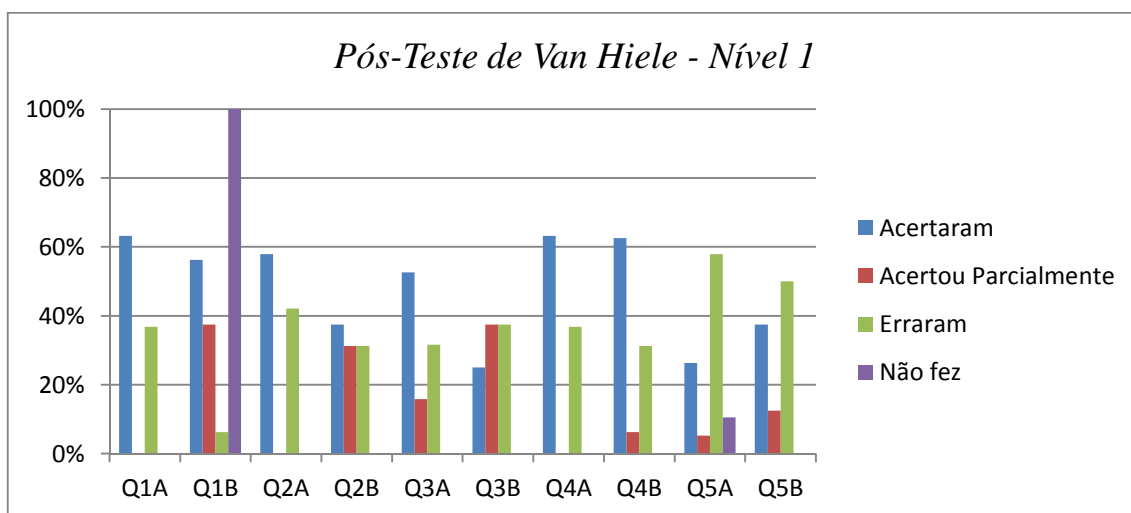


Gráfico 3.8 – Percentual de acertos por questão nas Turmas A e B.

No Gráfico 3.9 os dados mostram que os alunos da Turma A obtiveram melhores resultados nas questões relativas ao Nível 2 de van Hiele. Nas questões 6, 7, 8, 10 e 11 o

percentual de alunos que acertou é maior na Turma A, enquanto na questão 9, ainda que o percentual de acertos da questão tenha sido nulo em ambas as turmas, os alunos da Turma A (Grupo Experimental) conseguiram índices melhores nas respostas parcialmente corretas.

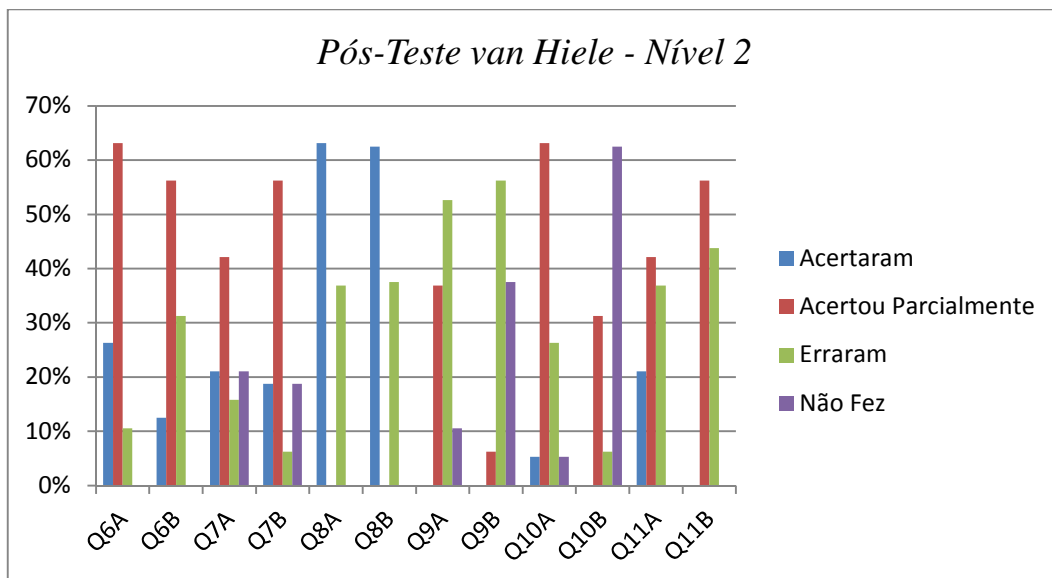


Gráfico 3.9 - Percentual de acertos por questão nas Turmas A e B.

Quanto as questões do nível 3, (Gráfico 3.10) em uma primeira análise, a Turma A não apresenta resultados melhores que a Turma B, os índices de questões erradas e não realizadas é muito alto em ambos os grupos, embora os alunos da Turma B tenham apresentado um pouco mais de sucesso nas questões 12a, 12b, 13a, e 14, evidenciando inicialmente que seriam necessárias mais aulas e mais atividades para que os mesmo pudessem se desenvolver até alcançar esse nível.

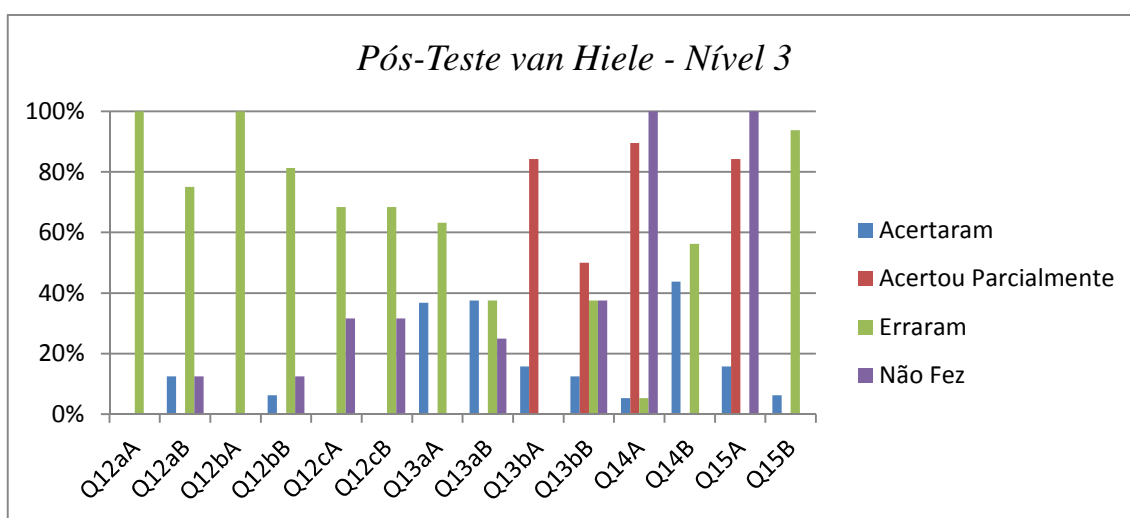


Gráfico 3.10 - Percentual de acertos por questão nas Turmas A e B

3.3.2 Pós-Teste de conhecimentos em isometrias

Comparando os resultados das Turmas A (Grupos Experimental) e B (Grupo Controle) nas tabelas 3.9 e 3.10, observa-se que a média da Turma A é aproximadamente 43% maior que a da Turma B.

Tabela 3.9 – Notas Pós-Teste de conhecimentos em Isometrias, Turma A.

Alunos	Notas
A1	7,5
A2	7,75
A3	9
A4	4,25
A5	5,75
A6	3
A7	8
A8	5,5
A9	8,5
A10	8,5
A11	8,5
A12	2,25
A13	4
A14	5,5
A15	9
A16	6
A17	6
A18	6,5
A19	4,5
Média	6,32

Tabela 3.10 – Notas Pós-Teste de conhecimentos em Isometrias, Turma B

Alunos	Notas
B1	4,5
B2	5
B3	1
B4	3
B5	3,5
B6	5,5
B7	5,5
B8	1
B9	0,5
B10	5,5
B11	8
B12	6
B13	7,5
B14	4,5
B15	3
B16	7
Média	4,44

Além disso, os gráficos 3.11 e 3.12 apresentam a frequência das notas do Pós-Teste de conhecimentos em isometrias das Turmas A e B.

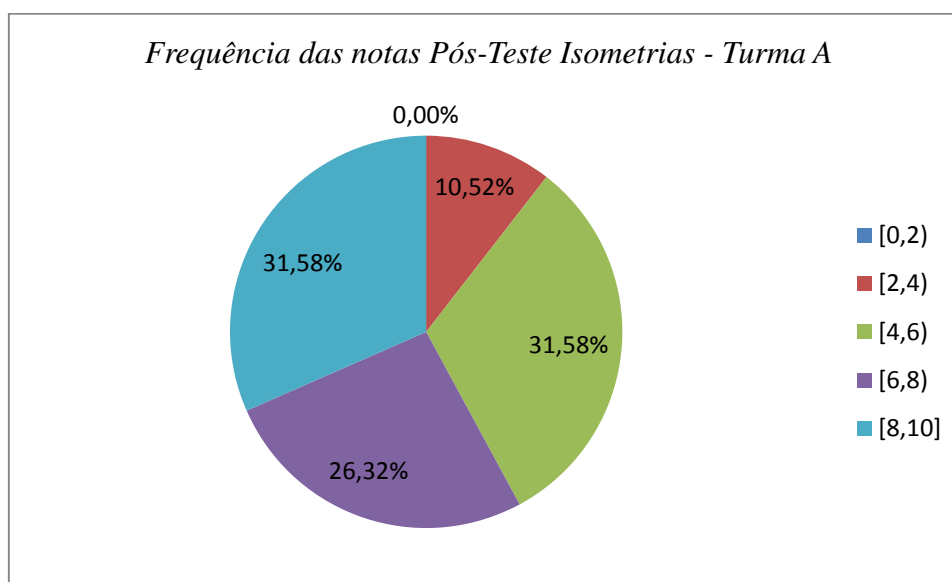


Gráfico 3.11 – Frequência das notas, Pós-Teste, Turma A

De acordo com a tabela 3.9, observa-se que a Turma A não só aumentou a média das notas com relação ao Pré-Teste, como o percentual das notas mais baixas (intervalos de [0, 2) e [2, 4)) diminuiu de maneira evidente, enquanto o percentual de notas mais altas (maiores ou

iguais a 8) aumentou em mais de seis vezes, e igualado ao dos alunos que obtiveram notas maiores ou iguais a quatro e menores do que seis.

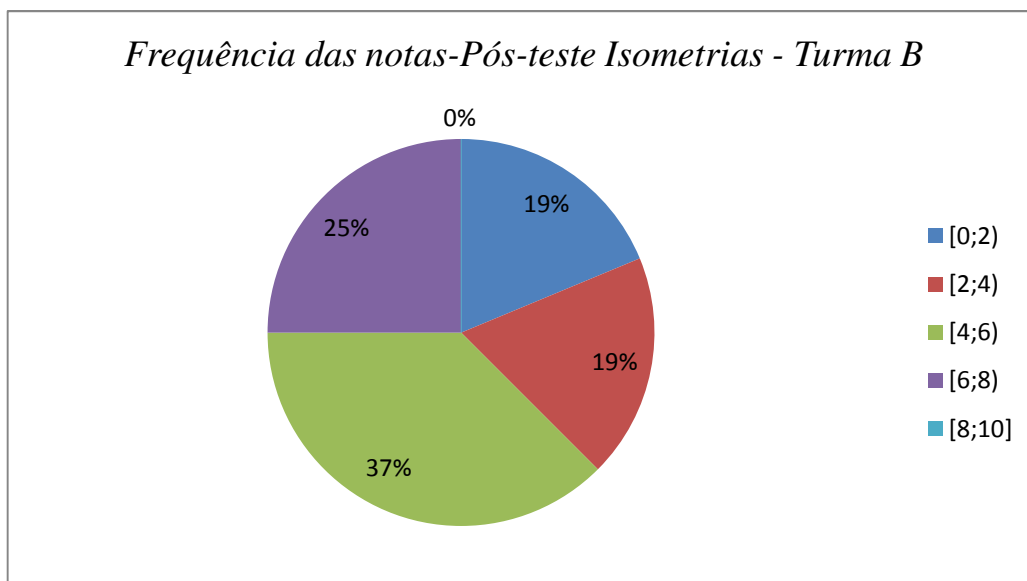


Gráfico 3.12 - Frequência das notas, Pós-Teste, Turma B

Na Turma B o percentual de alunos com notas menores que dois aumentou, bem como o percentual das notas maiores ou iguais a dois e menores do que quatro (aumentou em até três vezes mais com relação aos pré-testes). O maior percentual foi o de notas maiores ou iguais a quatro e menores do que seis, 12 pontos percentuais a mais do que nos pré-testes. Nenhum aluno conseguiu obter notas maiores ou iguais a oito.

3.4 Comparação dos Resultados dos Pré e Pós-Testes

3.4.1 Níveis de van Hiele

Pretende-se aqui, fazer uma comparação entre os dados iniciais e os dados finais, a fim de observar a evolução da aprendizagem de cada aluno que participou dessa pesquisa. A Tabela 3.11 apresenta os percentuais dos alunos classificados em cada um dos níveis, divididos em Turma A e Turma B, antes e depois das atividades.

Tabela 3.11– Percentuais Pré e Pós-testes, Turma A e Turma B.

	Comparativo Pré-teste de Van Hiele		Comparativo Pós-teste de Van Hiele	
	Turma A	Turma B	Turma A	Turma B
Não Classificado	68,42%	56,25%	Não Classificado	47,37% 50,00%
Nível 1	31,58%	37,50%	Nível 1	26,32% 31,25%
Nível 2	0,00%	0,00%	Nível 2	26,32% 6,25%
Nível 3	0,00%	6,25%	Nível 3	0,00% 12,50%

Observa-se que o percentual de alunos não classificados em nenhum nível de van Hiele diminuiu em 30,77% entre os alunos da Turma A (Grupo Experimental) e em 11,11% entre os alunos da Turma B (Grupo Controle). Com relação ao Nível 1, o percentual de alunos classificados diminuiu em aproximadamente 17% em ambos os grupos.

Na Turma A, que não teve alunos classificados nos níveis 2 e 3 na análise dos Pré-testes, passou a ter 26,32% dos alunos no Nível 2, mas nenhum aluno foi classificado no Nível 3. A Turma B que não possuía alunos no nível 2 no início, passou a ter 6,25% de seus alunos nesse nível, enquanto o percentual dos seus alunos no Nível 3 dobrou (12,5%).

Analisando as questões pontualmente, o Gráfico 3.13 mostra um comparativo na realização das questões do pré e do pós teste em cada nível de van Hiele, no Grupo Experimental. Pelos resultados apresentados, houve um aumento no percentual de acertos nas questões 2 e 4, enquanto nas questões 1 e 5, os índices permaneceram iguais e na questão 3, os resultados no Pré-teste foram melhores do que no Pós-teste.

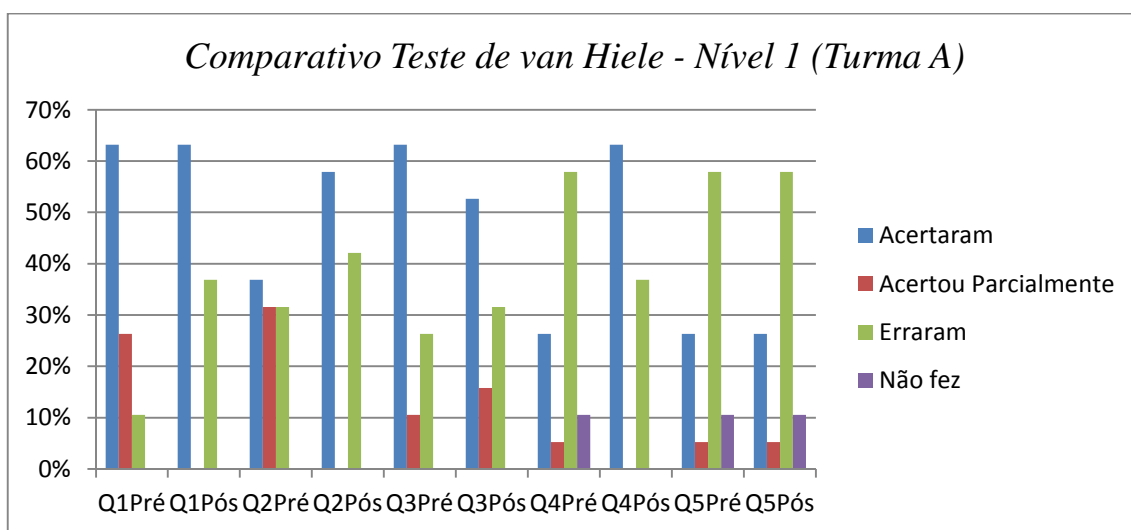


Gráfico 3.13 – Turma A, Pré e Pós testes, Nível 1.

Na Turma B os resultados são apresentados no Gráfico 3.14. Pode-se observar que os resultados do pós-teste são inferiores com relação aqueles do pré-testes. Com exceção da questão 2 em que os índices permanecem os mesmos e na questão 4, na qual o percentual das respostas corretas é maior no Pós teste do que no Pré-teste.

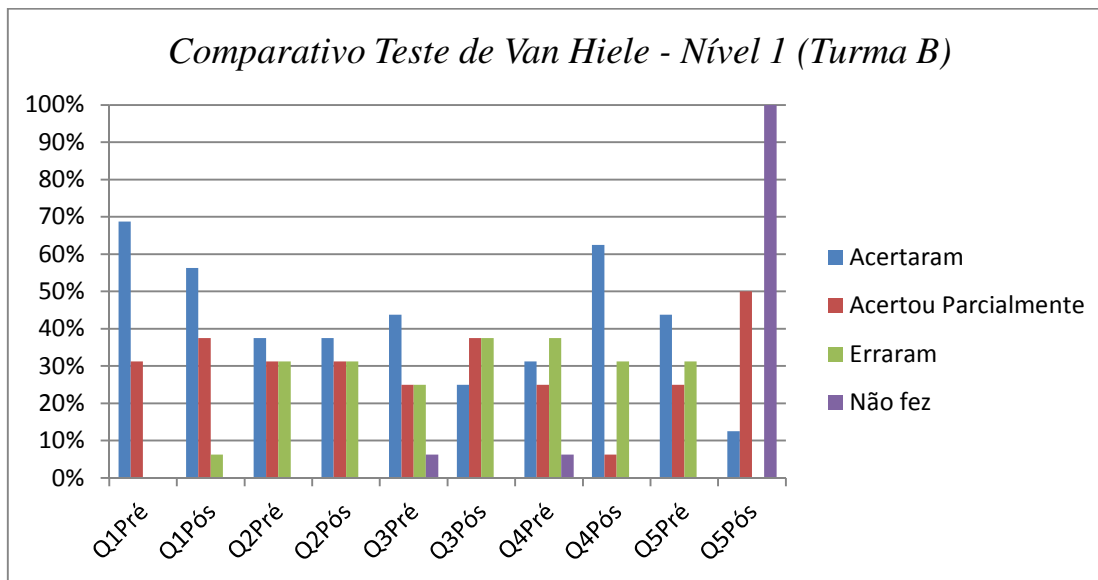


Gráfico 3.14 – Turma B, Pré e Pós testes, Nível 1

O gráfico 3.15 apresenta os percentuais comparativos, relativos à Turma A. Os resultados mostram que, exceto nas questões 9 e 11, o percentual de respostas corretas cresceu em todas as questões. Ainda assim, pode-se observar que na questão 9 o percentual respostas em branco foi menor no Pós-teste do que no Pré-teste e que o percentual de respostas parcialmente corretas foi maior no segundo teste do que no primeiro.

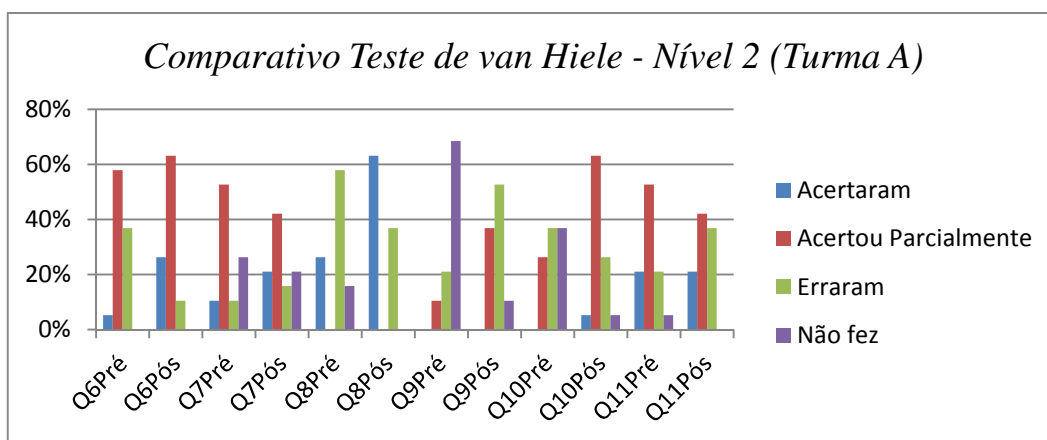


Gráfico 3.15 – Turma A, Pré e Pós testes, Nível 2

Já na Turma B, o Gráfico 3.16 mostra que nas questões 6 e 8 os resultados finais com relação às respostas corretas são melhores, porém nas outras questões, o percentual de respostas erradas ou não realizadas foi maior entre os resultados finais.

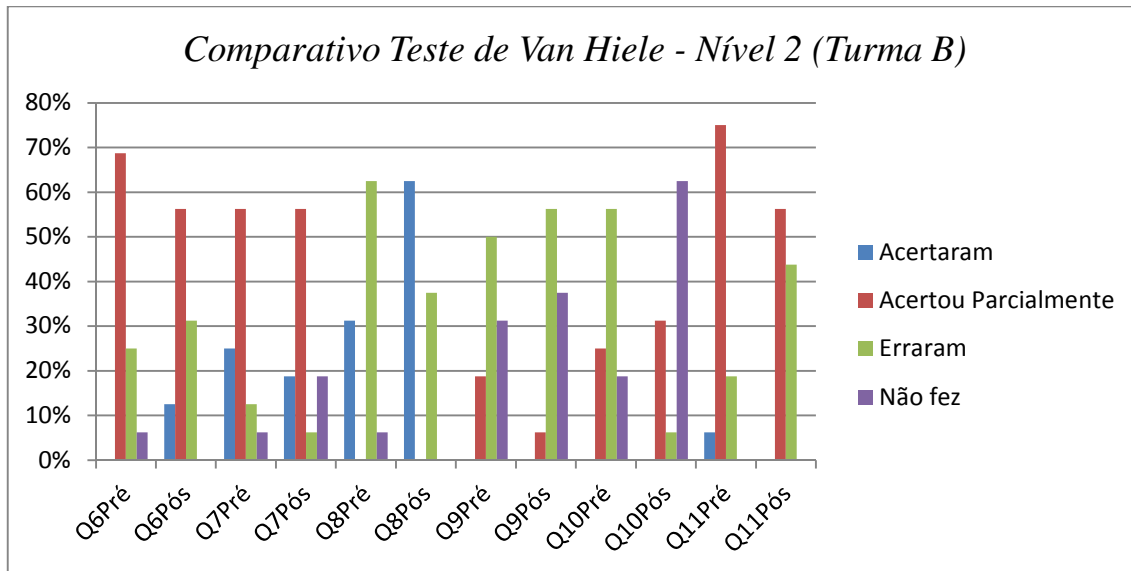


Gráfico 3.16 – Turma B, Pré e Pós testes, Nível 2

Nas questões do Nível 3 (Gráfico 3.17), a Turma A apresentou melhora nos resultados em três dos sete itens, mas o índice de respostas erradas e não feitas são bem altos, tantos nos resultados iniciais quanto nos finais.

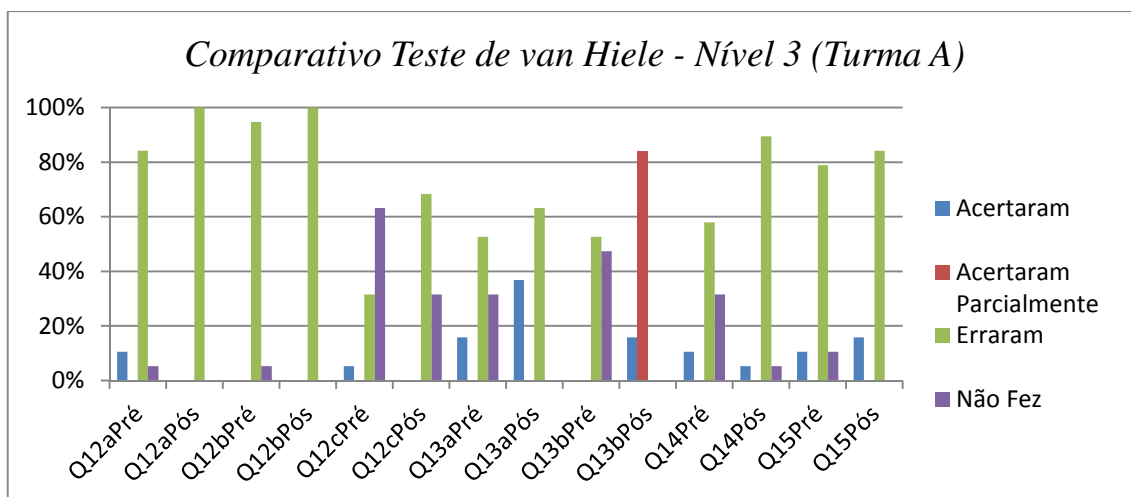


Gráfico 3.17 Turma A, Pré e Pós testes, Nível 3

O gráfico 3.18 apresenta os resultados iniciais e finais da Turma B. Com exceção das questões 13b e 14, todas as outras ou apresentaram resultados finais piores do que os iniciais, ou mantiveram o mesmo percentual.

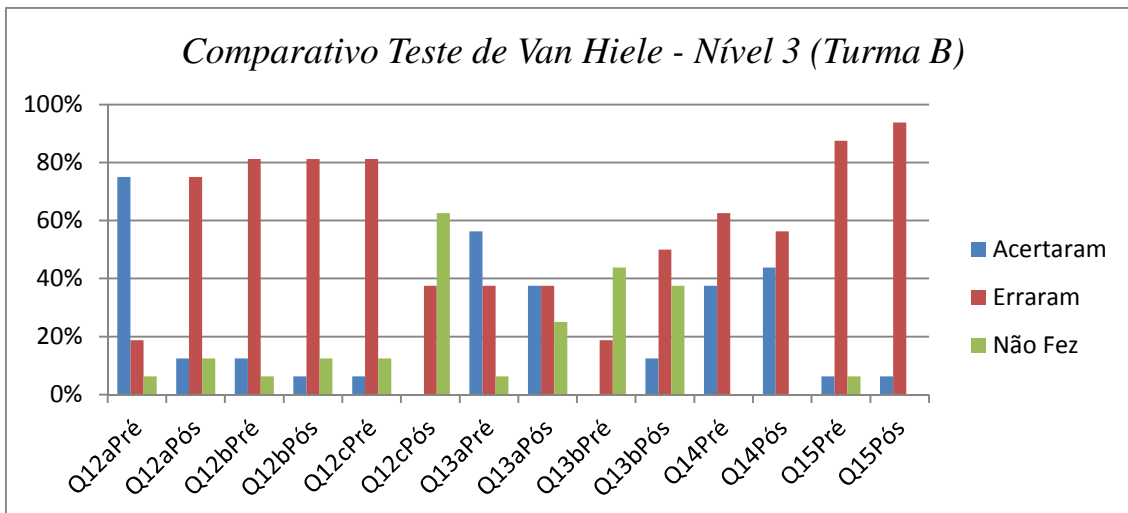


Gráfico 3.18 – Turma B, Pré e Pós testes, Nível 3

A questão a ser respondida é: quantos alunos de fato aproveitaram as atividades, seja na Turma A ou na Turma B, e conseguiram de fato, evoluir entre os níveis propostos por van Hiele?

No Gráfico 3.19, consta a comparação entre os Níveis iniciais (azul) e finais (vermelho) da Turma A. Considere 0 como o aluno não classificado em nível algum de van Hiele. Os resultados mostram que 4 alunos apresentaram resultados finais piores do que os iniciais (21% dos alunos), enquanto 6 (32% dos alunos) permaneceram com o mesmo resultado e 9 aumentaram de Nível (47% dos alunos), 4 de não-classificado para o Nível 1, quatro alunos de não classificado para nível 2, e um aluno passou do Nível 1 para o Nível 2.

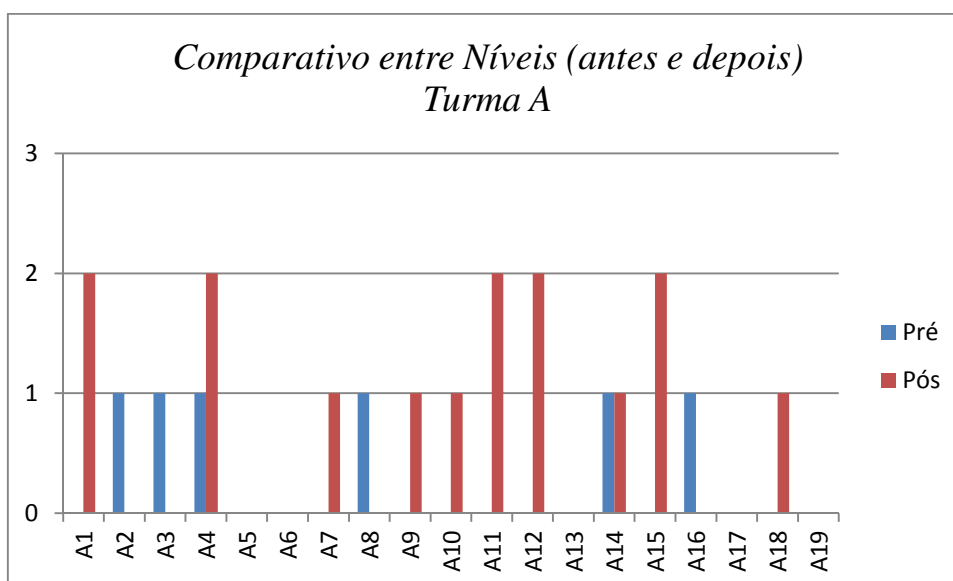


Gráfico 3.19 – Comparativo Turma A, Nível inicial e final.

O gráfico 3.20 mostra os níveis iniciais e finais dos alunos da Turma B (Grupo controle). Quatro alunos (25% dos alunos) apresentaram resultados piores nos testes finais com relação aos testes iniciais. Além disso, seis alunos (37,5% dos alunos) permaneceram no mesmo nível em que se encontravam inicialmente, enquanto que os demais (37,5% dos alunos) aumentaram de nível: quatro alunos passaram de não-classificados para o Nível 1 de van Hiele, enquanto um passou de não classificado para o Nível 2 e apenas um passou no Nível 1 para o Nível 3.

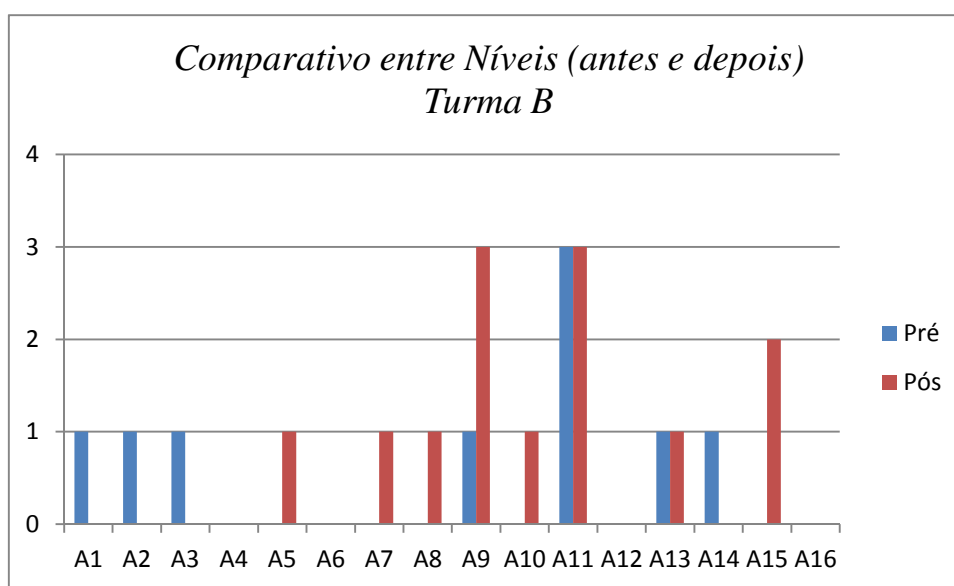


Gráfico 3.20 - Comparativo Turma B, Pré e Pós Teste

Pelos resultados apresentados pode-se afirmar que os resultados foram melhores no Grupo Experimental, no qual houve 47% dos alunos evoluindo com relação ao nível de van Hiele apresentado nos testes iniciais dessa pesquisa, enquanto no Grupo Controle, apenas 37,5% dos alunos alcançaram essa meta.

3.4.2 Conhecimentos em isometrias

As tabelas 3.12 e 3.13 mostram as notas dos Pré e Pós testes, das Turmas A e B respectivamente, a fim de verificar se houve ou não uma melhora nos resultados após a aplicação das atividades que exploraram os conhecimentos em isometrias. Observa-se que na Turma A, a média das notas aumentou em aproximadamente 55% enquanto no Grupo Controle a média diminuiu em aproximadamente 38%.

Tabela 3.12 – Notas iniciais e finais nos testes de conhecimentos em isometrias, Turma A

Alunos	Notas	
	Pré-Teste	Pós-Teste
A1	0	7,5
A2	2,5	7,75
A3	5	9
A4	5	4,25
A5	6,25	5,75
A6	8,75	3
A7	2,5	8
A8	2,5	5,5
A9	2,5	8,5
A10	2,5	8,5
A11	2,5	8,5
A12	3,75	2,25
A13	3,75	4
A14	3,13	5,5
A15	5	9
A16	5	6
A17	5	6
A18	6	6,5
A19	6	4,5
Média	4,08	6,32

Tabela 3.13 – Notas iniciais e finais nos testes de conhecimentos em isometrias, Turma B

Alunos	Notas	
	Pré-Teste	Pós-Teste
B1	5	4,5
B2	8,75	5
B3	8,75	1
B4	8,75	3
B5	7,81	3,5
B6	8,75	5,5
B7	7	5,5
B8	7,5	1
B9	8,75	0,5
B10	7,5	5,5
B11	8,75	8
B12	7,5	6
B13	5,31	7,5
B14	5	4,5
B15	5	3
B16	3,25	7
Média	7,09	4,44

Os Gráficos 3.21 e 3.22 mostram os resultados iniciais e finais obtidos (por aluno), das Turmas A e B, respectivamente. Pelos resultados apresentados pode-se verificar que houve um aumento em aproximadamente 74% das notas do Grupo Experimental, ao passo que no Grupo Controle houve uma queda em 87,5%.

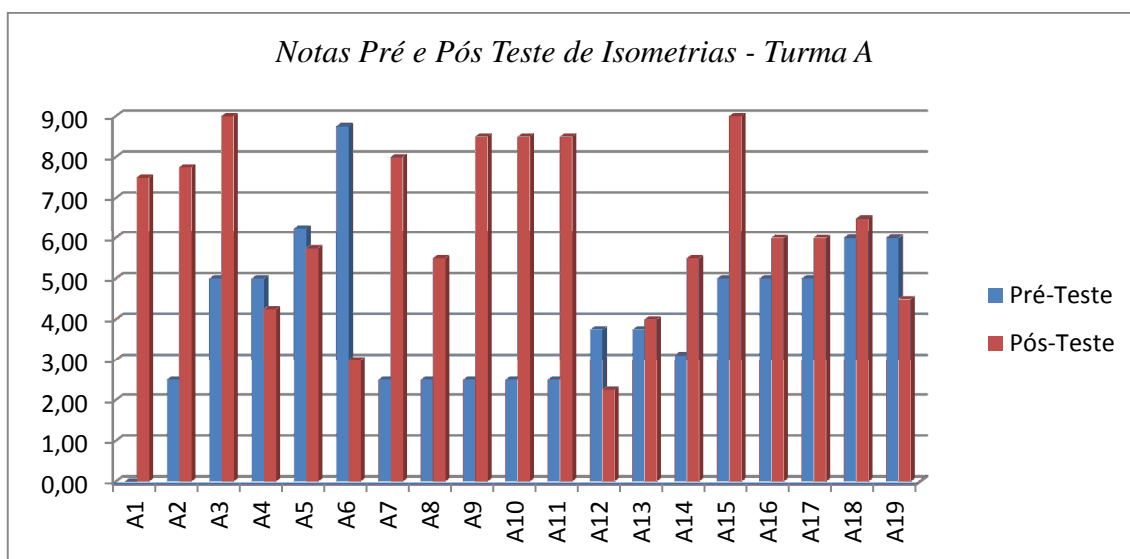


Gráfico 3.21 – Comparativo Pré e Pós testes de conhecimentos em isometrias, Turma A.

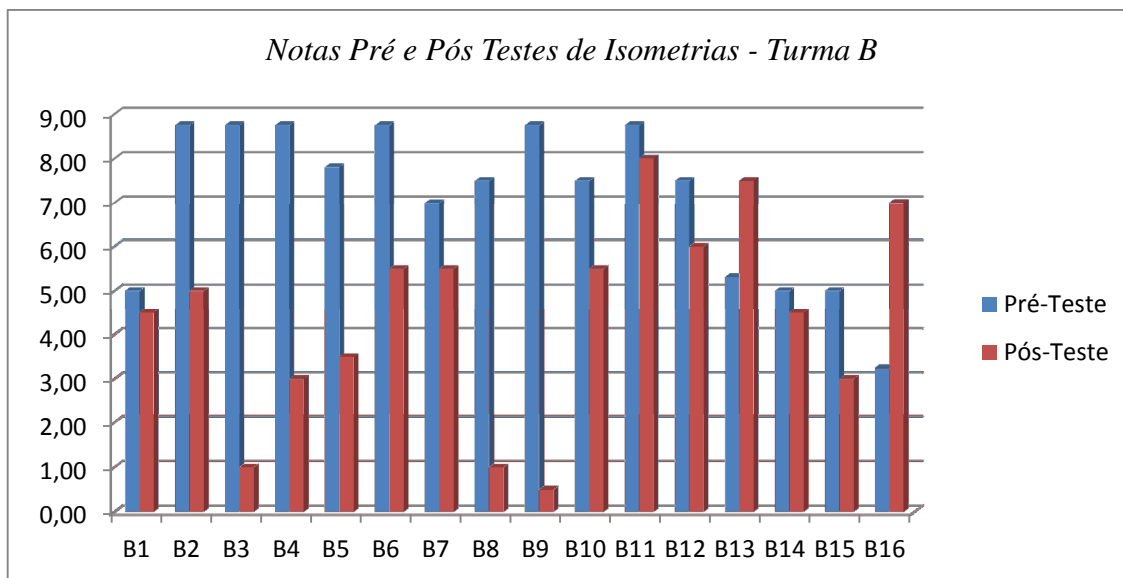


Gráfico 3.22 - Comparativo Pré e Pós testes de conhecimentos em isometrias, Turma B.

De acordo com os dados obtidos é possível afirmar que as atividades desenvolvidas para o Grupo Experimental tiveram resultados mais positivos do que as aulas desenvolvidas para o Grupo Controle.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para compreender se os objetivos iniciais dessa pesquisa foram alcançados ou não, é preciso comparar os resultados obtidos nos Pré e Pós testes van Hiele e nos testes de conhecimentos em isometrias. Com relação à Turma A nos testes de van Hiele, a porcentagem de não classificados em nível algum diminuiu em aproximadamente 30% bem como o percentual de alunos classificados no Nível 1, aproximadamente 17%. Com relação ao nível 2, a Turma A passou de 0% a 26% de alunos classificados nesse nível, porém nenhum aluno foi classificado no nível 3 de van Hiele.

Da mesma maneira, o percentual de alunos da Turma B não classificados em algum nível diminuiu em aproximadamente 11%. Enquanto isso, o percentual de alunos classificados no Nível 1 também diminuiu em 6,25%, e o percentual de alunos classificados no Nível 2 passou de 0% a 6,25%. Com relação ao percentual de alunos classificados no Nível 3, após o pós-teste, o percentual de classificados aumentou de 6,25% para 12,5%.

Comparativamente, ao observar os gráficos apresentados no Capítulo III, pode-se afirmar que os alunos da Turma A obtiveram resultados melhores no pós-teste de van Hiele, ainda que proporcionalmente, que os alunos da Turma B. Um número maior de alunos passou pelo aumento de nível (aproximadamente 48% dos alunos da Turma A contra 38% dos alunos da Turma B).

Com relação aos resultados relacionados ao sucesso nos testes de conhecimentos em isometria, observa-se que, após a aplicação das atividades dirigidas, a Turma A aumentou a média nos pós-teste relativos a esse grupo de conhecimentos, enquanto a média da Turma B foi menor do que no Pré-Teste.

Dessa forma, verificou-se que a aplicação de uma abordagem baseada na Teoria de van Hiele possibilitou uma melhora na compreensão dos conceitos geométricos em relação a uma abordagem padrão. Além disso, houve um aumento das notas dos alunos da Turma A de 74%, enquanto que as notas dos alunos da Turma B diminuíram em 87% dos alunos. Esse fato curioso pode ser um indício de falta de tempo para desenvolver melhor as atividades com o

Grupo Controle, ou ainda, a falta de comprometimento desses alunos em participar efetivamente da pesquisa, mostrando desinteresse por um conteúdo que já havia sido trabalhado anteriormente.

Um outro fato curioso que ocorreu nessa pesquisa foi observar que alguns alunos, em ambas as turmas, apresentaram uma aparente queda em seu nível de van Hiele. A Teoria de van Hiele não prevê involução dos níveis de pensamento geométrico, ou seja, uma vez que o aluno alcança um nível, ele não retorna a um nível anterior. Uma explicação superficial para o fato curioso observado seria que esses alunos podem ter acertado os 60% das questões relativas ao nível por acaso, “chutando” algumas respostas da parte objetiva do pré-teste, justificando o mau desempenho no pós-teste. Há ainda os fatores tempo, compromisso com as atividades propostas, falta de atenção, comuns aos alunos do Ensino Fundamental, nessa faixa etária. Pode-se considerar que o tempo utilizado não foi suficiente para atender as necessidades de cada aluno, pois cada aluno possui seu tempo e sua dinâmica para desenvolver a compreensão dos conteúdos, uns mais rapidamente, outros nem tanto. Supõe-se que, para alguns, o tempo não foi suficiente para atender de maneira concreta o conteúdo proposto. Sugere-se mais tempo, mais atividades e talvez uma avaliação intermediária (qualitativa) que possa determinar de que maneira a aprendizagem está acontecendo.

Ao desenvolver as atividades propostas, para ambas as turmas, percebeu-se uma dificuldade muito grande no encadeamento dos conceitos, o que é de extrema necessidade quando se trata de geometria. As maiores dificuldades se apresentaram nas questões onde eram necessárias a participação dos alunos a fim de discutir as ideias, ou o que os mesmos pensavam a respeito de determinados conceitos. Além disso, as atividades para a Turma B, sendo de cunho padrão, não despertaram tanto assim o interesse dos alunos, nem os estimularam tanto à participação, troca e ideias e esclarecimentos com relação aos pontos que foram abordados.

Os resultados apresentados atenderam aos objetivos dessa pesquisa. No entanto, sendo um grupo de apenas 35 alunos, será que essas conclusões se aplicariam em grupos maiores? Resultados melhores e mais objetivos poderiam ter sido encontrados, com relação à classificação dos níveis de van Hiele, se feitos em larga escala, em um município maior e com mais escolas, com alunos do 6º ano e do 9º a fim de avaliar os alunos que entram no 2º segmento do Ensino Fundamental, bem como aqueles que terminam essa fase escolar. Também seria interessante comparar o desenvolvimento de duas ou mais turmas desde o

início do 2º segmento do Ensino Fundamental até o término do mesmo, aplicando atividades baseadas no modelo de van Hiele, a fim de comparar resultados ao fim desse ciclo escolar.

Uma proposta de trabalho futuro seria construir todo um grupo de atividades baseadas na Teoria de van Hiele, que explorasse todo o corpo de conhecimento geométrico utilizado no 2º Segmento do Ensino Fundamental. Experiências pessoais levam a crer que os alunos chegam no 6º ano sem sequer reconhecer o que são polígonos, quanto mais diferenciá-los, ou identificar os diferentes tipos de figuras. Seria de extrema valia um grupo de atividades adequadas a cada ano e a cada conteúdo a ser explorado, além de tempo suficiente para explorar, de maneira mais eficaz, cada um dos temas da geometria do Ensino Fundamental.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, G. S.; SAMPAIO, F. F., **O Modelo De Desenvolvimento Do Pensamento Geométrico De Van Hiele e Possíveis Contribuições Da Geometria Dinâmica**. Revista de Sistemas de Informação da FSMA n. 5 (2010) p. 69-76. Disponível em: http://www.fsma.edu.br/si/edicao5/FSMA_SI_2010_1_Principal_2.pdf. Acesso em: 17 ago 2014.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**. Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BIANCHINI, E. **Matemática Ensino Fundamental**, 7ª edição, Editora Moderna. São Paulo, 2011. v. 2.

BOGONI, L. P.; PERIN, I.; BRANCHER, J. D. **Adaptação do Modelo de van Hiele Utilizando-se de Recursos da Internet** (2004). Disponível em: <http://www.ufrgs.br/niece/eventos/RIBIE/2004/comunicacao/com29-38.pdf>. Acesso em: 17 ago 2014.

CROWLEY, M. L. O modelo van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, Alberto P. (Org.). **Aprendendo e ensinando a geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. cap. 1, p. 1-20.

DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L.. Transformações Geométricas Planas. In: _____. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2012. cap. 9, p. 1-28. (Coleção PROFMAT). Em PDF.

DE VILLIERS, **Algumas Reflexões sobre a teoria de van Hiele**, Educação Matemática Pesquisa., São Paulo, v.12, n.3, p. 400-431, 2010.

GIL, A.C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GUIMARÃES, R. R. **Um estudo do pensamento geométrico de professores das séries iniciais do ensino fundamental segundo o modelo de van hiele. Professores das séries iniciais do Ensino Fundamental e o modelo van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.** Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

HAMAZAKI, A.C. **O Ensino da Geometria por meio da Metodologia van Hiele: Uma Experiência.** VII Encontro Paulista de Educação Matemática – EPEM. São Paulo, 2004. Disponível em: <http://www.drb-assessoria.com.br/1ENSINODAGEOMETRIAVANHIELE.pdf>.

JAIME, A. **Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: La enseñanza de las isometrias del plano. La Evaluación del nivel de razonamiento.** Valencia, Universidade de València, 1993. 379 p. Tese de Doutorado. Departamento de Didáctica da Matemática, Universidade de Valencia. Valencia, 1993.

KALEFF, A. M. M. R; HENRIQUES, A.; REI, D.; FIGUEIREDO, L. G. **O desenvolvimento do pensamento geométrico: o modelo de van Hiele.** Bolema, n.10, p 21-30, 1994.

KLAUS, T. S.; PAZOS, R. E. P.; BAUMGARTEN, R.L.. **O uso de animações como apoio à aplicação do esquema de van Hiele no ensino de matemática.** Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática, BA, 2010. Disponível em: http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/RE/T12_RE2004.pdf. Acesso em: 17 ago 2014.

MORELATTI, M. R. M.; SOUZA, L. H. G. **Aprendizagem de conceitos geométricos pelo futuro professor das séries iniciais do Ensino Fundamental e as novas tecnologias.** Educar, Curitiba, n. 28, p. 263-275 Editora UFPR, 2006. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/er/n28/a17n28.pdf>. Acesso em: 17 ago 2014.

NASSER, L. **Using the van Hiele Theory to improve secondary school geometry in Brazil.** Londres, Universidade de Londres, 1992. 384p. Tese de Doutorado. Centre of Educational Studies, King College of London. Universidade de Londres. Londres, 1992.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. **Geometria Segundo a Teoria de van Hiele,** Projeto Fundão, IM-UFRJ, RJ, Reprografia do IM/UFRJ, 2. ed. 1998.

SOARES, M.M.; TRINDADE, N. V.. **Caderno Pedagógico de Matemática**, 7º ano, 2º bimestre, Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro, RJ 2012, p.44.

USISKIN, Z. **Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. Final report of the CDASSG Project** Chicago, Universidade de Chicago, 1982.

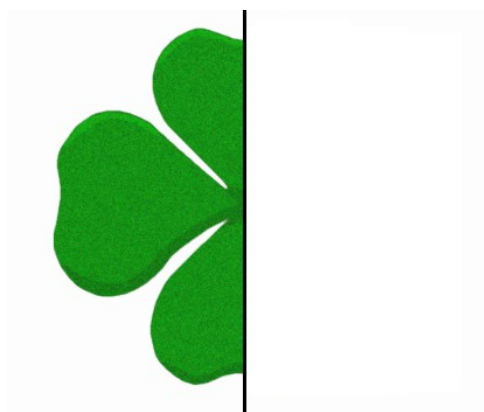
VAN HIELE, P. **Structure and Insight: A Theory of Mathematics**. Education, Orlando, Fl: Academic Press, 1986.

WIRSZUP, I. **Breakthroughs in the Psychology of Learning and Teaching Geometry**. In J.L. Martin (Ed.). *Space and Geometry*. Columbus, Ohio: Eric Centre, 1976.

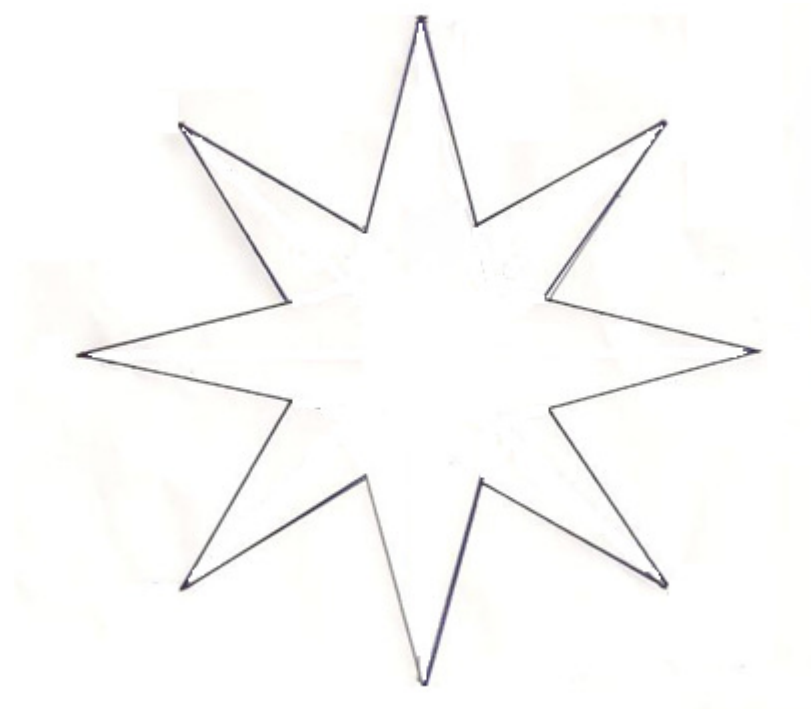
APÊNDICES

Apêndice A - Pré-Teste de conhecimentos em isometrias

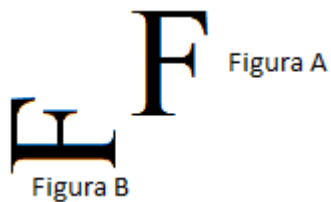
- 1) Considere a reta dada como um eixo de simetria. Desenhe uma figura simétrica à figura dada:



- 2) Trace todos os eixos de simetria da figura dada:



3) Observe as figuras ilustradas a seguir:



Considerando as figuras A e B, podemos dizer que ambas são simétricas com relação à isometria de:

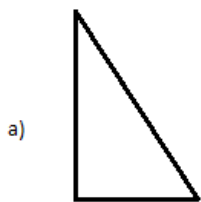
- a) Reflexão
- b) Rotação
- c) Translação

4) A figura A, a seguir, sofrerá uma rotação de 90° no sentido horário.

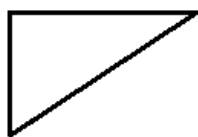


Figura A

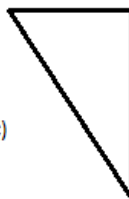
Assinale a(s) figura(s) que corresponde(m) à figura A após sofrer tal movimento.



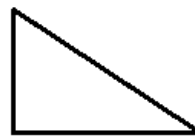
b)



c)



d)



Apêndice B - Simetria de Reflexão - Atividade 1

Dinâmica da atividade:

- i) Apresentar a Figura A em uma folha de papel. Pedir aos alunos que recortem e depois dobrem a Figura A, a fim de coincidir dois pares de vértices, com o objetivo de mostrar o eixo e a simetria entre os pontos.
- ii) Apresentar a Figura B e pedir para que os alunos desenhem uma figura simétrica a ela, escolhendo como eixo de simetria um dos lados da Figura B.

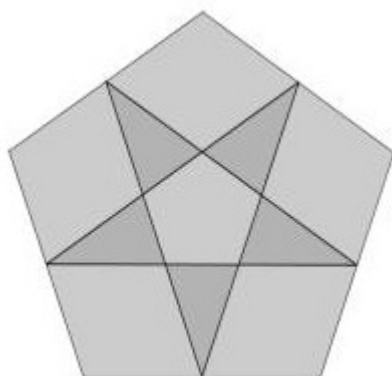


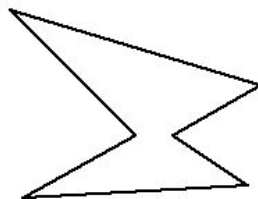
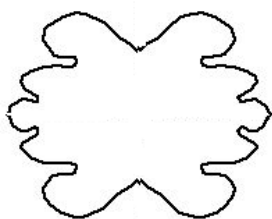
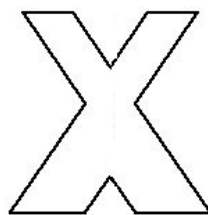
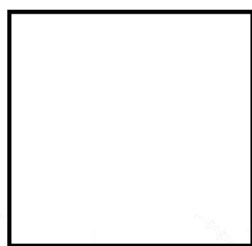
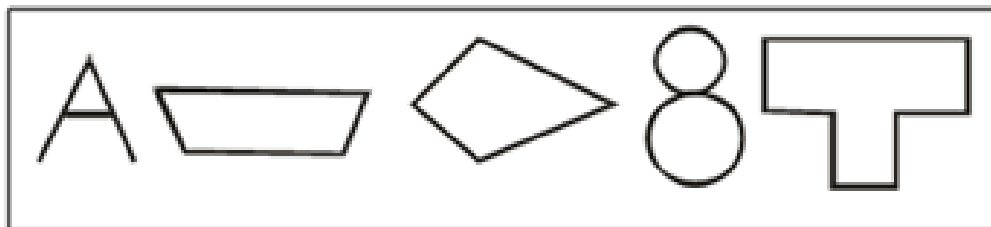
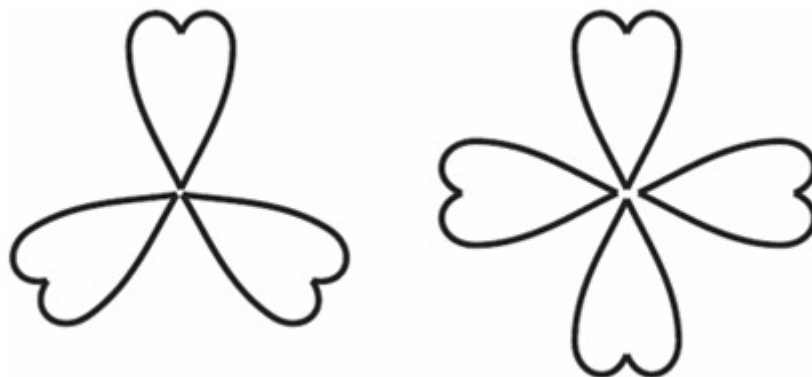
Figura a



Figura b

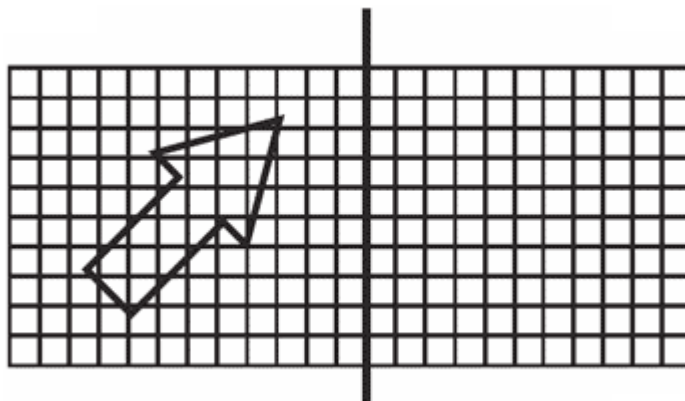
Apêndice C - Simetria de Reflexão - Atividade 2

i) Traçar todos os eixos de simetria possíveis das figuras apresentadas.



Apêndice D - Simetria de Reflexão - Atividade 3

Dadas as figuras abaixo, desenhar outra figura, simétrica a elas com relação ao eixo de simetria dado. Determinar os pontos simétricos (correspondentes) em cada figura.



Apêndice E - Simetria de Reflexão - Atividade 4

Observando os diagramas, complete a tabela com as informações pedidas:

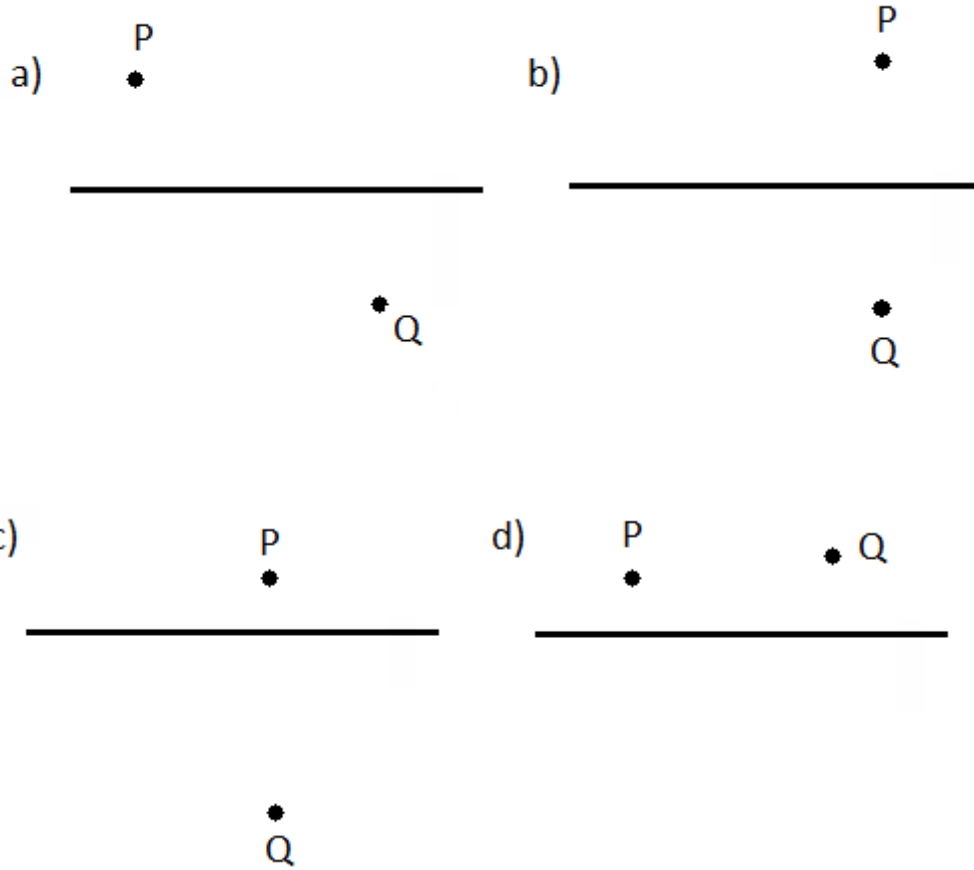


Diagrama	PQ é perpendicular ao eixo de simetria?	P e Q estão a uma mesma distância do eixo de simetria?	Q é reflexão de P?
a			
b			
c			
d			

Apêndice F - Simetria de Reflexão - Atividade 5

Determine, quando possível, todos os eixos de simetria das figuras abaixo:



www.geoweb.blog.br

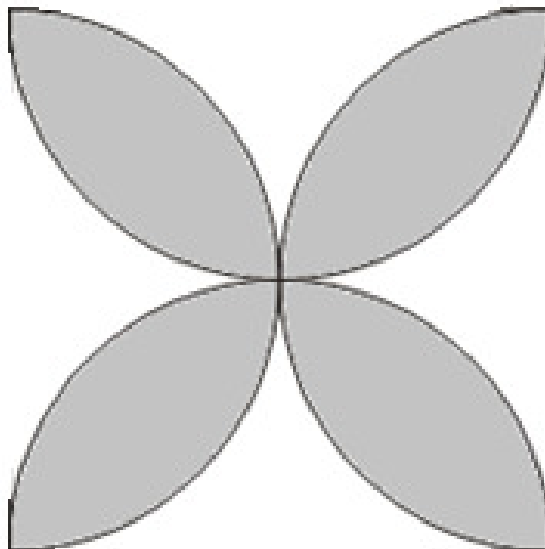


Apêndice G - Simetria de Rotação - Atividade 1

Exemplos conhecidos de rotação:

- Movimento dos ponteiros de um relógio;
- Movimento de pêndulo de relógio;
- Rotação da roda de um veículo ou da roda-gigante de um parque de diversões ;
- Rotação das pás de um ventilador;
- Rotação de um cata-vento em torno de um ponto central;
- Movimento de uma gangorra em torno de um ponto central no seu “braço”,
- Movimento de um balanço de parque
- Pedir para que os alunos deem outros exemplos de movimentos de rotação conhecidos por eles.

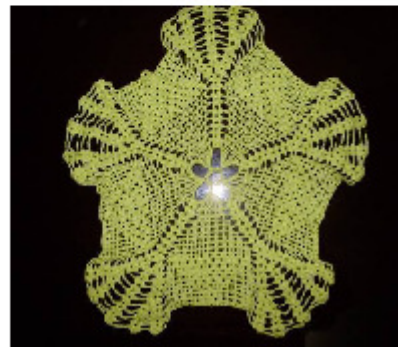
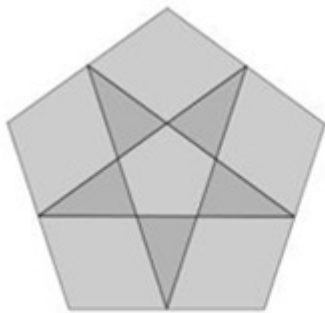
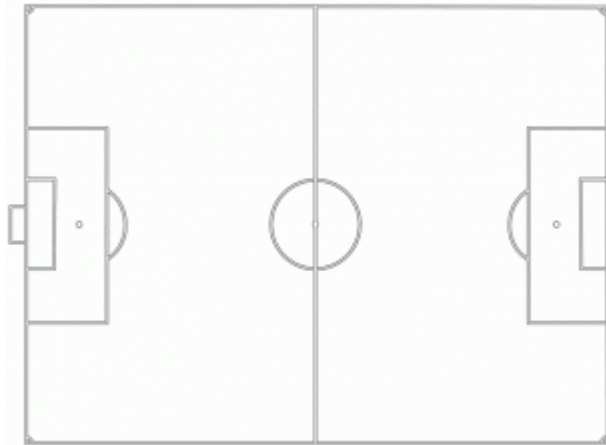
Apêndice H - Simetria de Rotação – Atividade 2



- 1) Copie essa figura em uma folha de papel e depois recorte-a;
- 2) Marque uma das pétalas da figura desenhada com um lápis;
- 3) Sobreponha a figura recortada no desenho com a figura desenhada;
- 4) Fixando o centro da figura recortada e girando a figura recortada, quantas vezes pode-se girar a figura tal que ambas coincidam?
- 5) Quantas vezes devemos girar a figura recortada para que a pétala marcada inicialmente retorne a sua posição original?

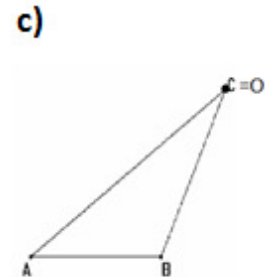
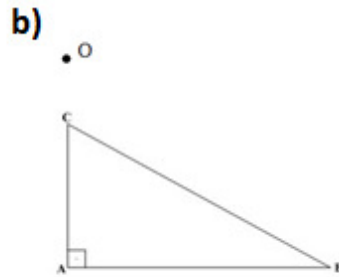
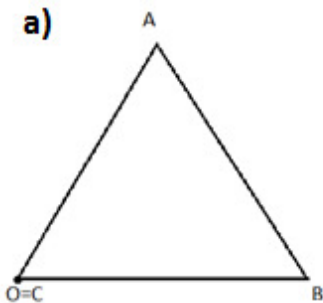
Apêndice I - Simetria de Rotação – Atividade 3

Observando cada imagem a seguir, avalie se as mesmas possuem simetria de rotação. Em caso afirmativo, indique o centro e o ângulo da rotação.

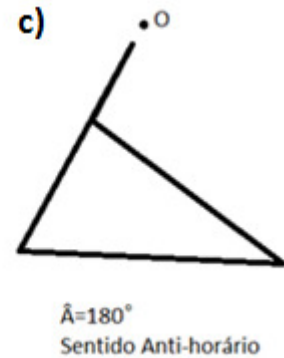
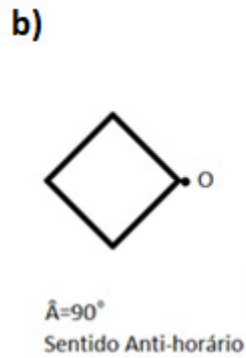
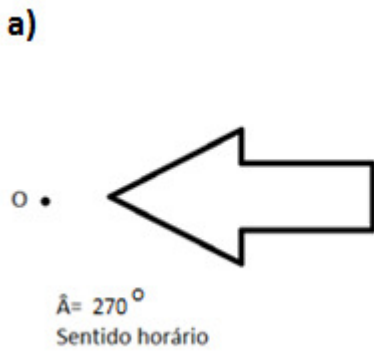


Apêndice J - Atividade 4

i) Encontrar a imagem de cada triângulo após uma rotação de 90° no sentido horário em torno de um ponto dado.



ii) Aplique as rotações indicadas em torno do ponto O:

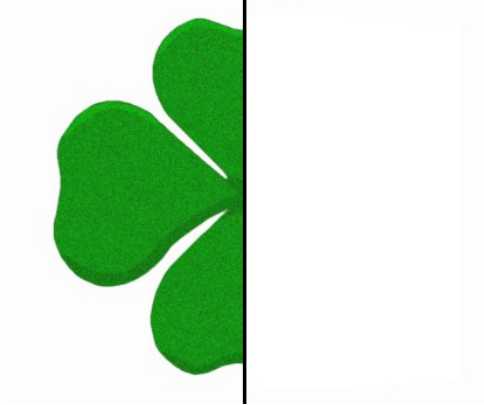


iii) Verifique se B é a imagem de A por meio de uma rotação. Em caso afirmativo indique o centro e o ângulo de rotação.

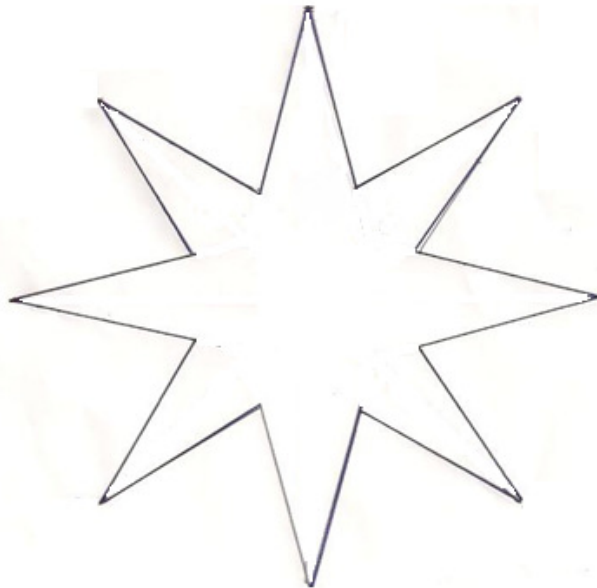


Apêndice K - Pós-Teste de Conhecimentos em Isometrias

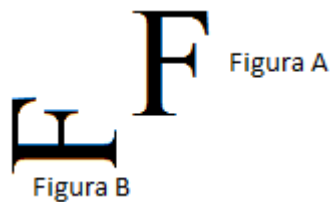
- 1) Considere a reta dada como um eixo de simetria. Desenhe uma figura simétrica à figura dada:



- 2) Trace todos os eixos de simetria da figura dada:



- 3) Observe as figuras ilustradas a seguir:



Considerando as figuras A e B, podemos dizer que ambas são simétricas com relação à isometria de:

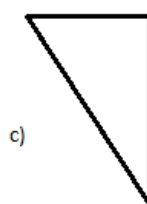
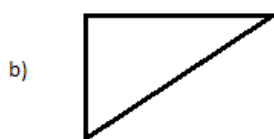
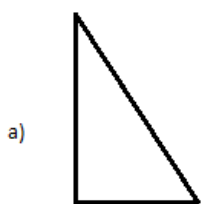
- a) Reflexão
- b) Rotação
- c) Translação

- 4) A figura A, a seguir, sofrerá uma rotação de 90° no sentido horário.



Figura A

Assinale a(s) figura(s) que corresponde(m) à figura A após sofrer tal movimento.



- 5) Observe a figura abaixo.

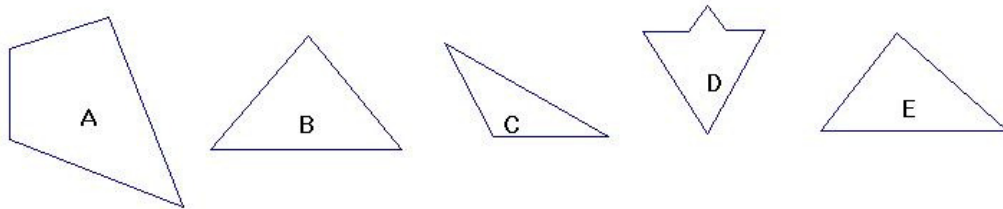


Destaque os eixos de simetria de reflexão, e identifique o centro e o ângulo da simetria de rotação.

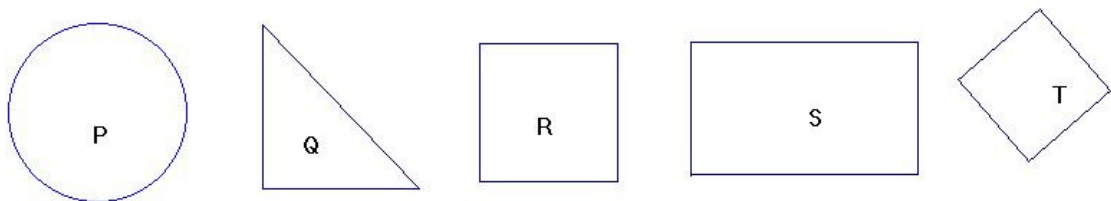
ANEXOS

Anexo A - Teste de van Hiele

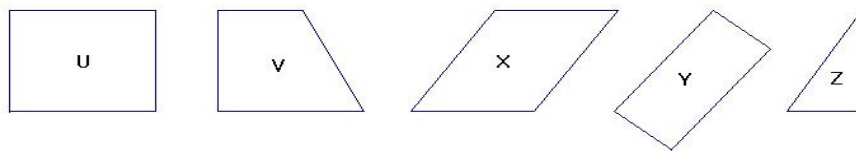
1 – Assinale o(s) triângulo(s):



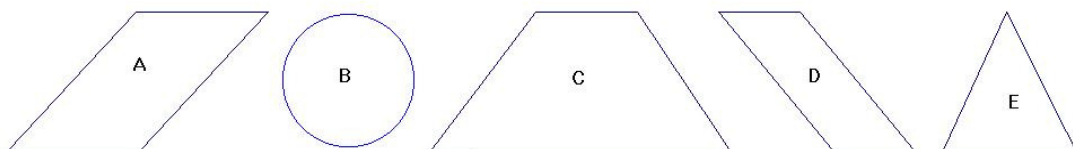
2 - Assinale o(s) quadrado(s):



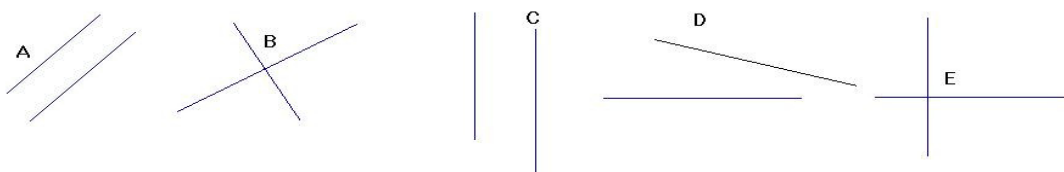
3 – Assinale o(s) retângulo(s):



4 – Assinale o(s) paralelogramo(s)

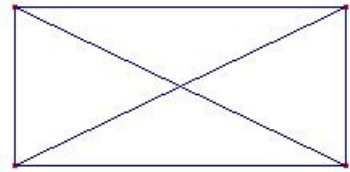


5 – Assinale o(s) par(es) de retas paralelas



6 – Com relação à figura podemos afirmar que:

- a) Têm 4 ângulos retos.
- b) Têm lados opostos paralelos.
- c) Têm diagonais de mesmo comprimento.
- d) Têm os 4 lados iguais.
- e) Todas são verdadeiras.



7 – Dê 3 propriedades dos quadrados:

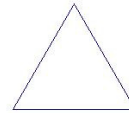
- 1 –
- 2 –
- 3 –



8 – Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais.

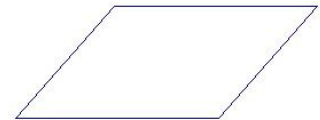
Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:

- (a) Pelo menos um dos ângulos mede 60° .
- (b) Um dos ângulos mede 90° .
- (c) Dois ângulos têm a mesma medida.
- (d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.
- (e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.



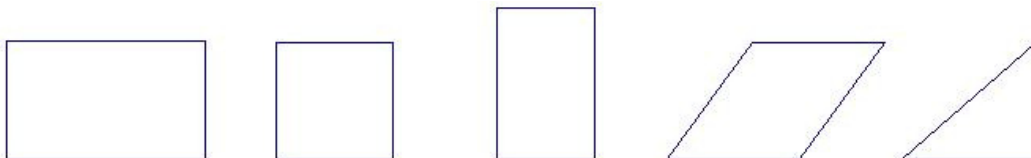
9 – Dê 3 propriedades dos paralelogramos.

- 1 –
- 2 –
- 3 –



10 – Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe esse quadrilátero.

11- Assinale a(s) figura(s) que pode(m) ser considerada(s) retângulos:



12 – Os quatro ângulos A, B, C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais.

- (a) Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado?
- (b) Por que?
- (c) Que tipo de quadrilátero é ABCD?

13 – Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo? Por que?

14 – Considere as afirmativas:

(I) A figura X é um retângulo (II) A figura X é um triângulo.

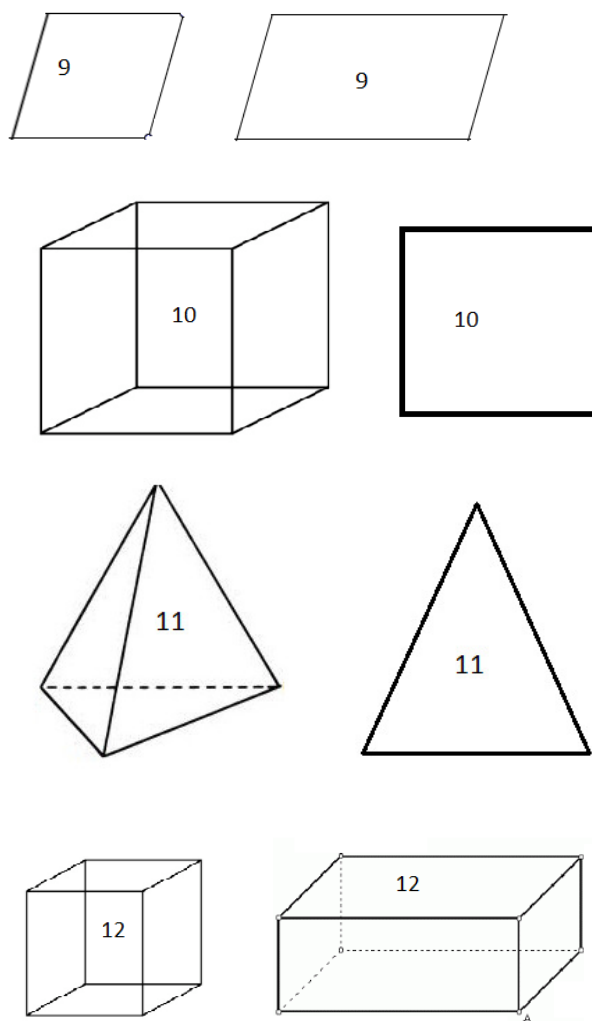
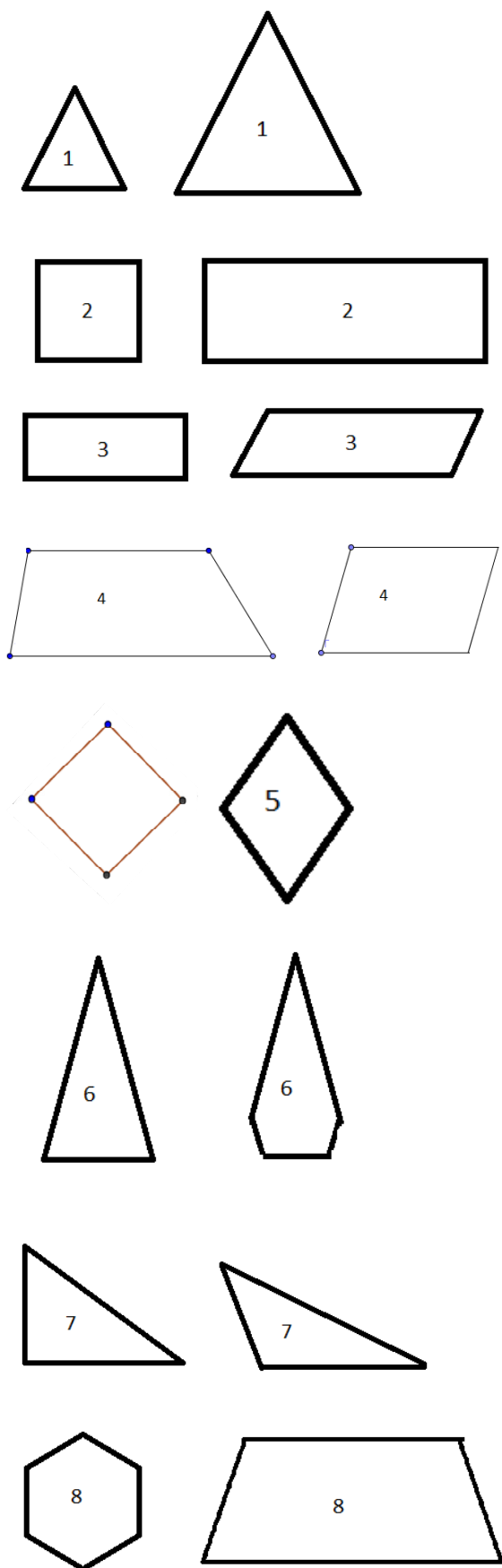
Assinale a afirmativa verdadeira:

- (a) Se I é verdadeira, então II é verdadeira.
- (b) Se I é falsa, então II é verdadeira.
- (c) I e II não podem ser ambas verdadeiras.
- (d) I e II não podem ser ambas falsas.
- (e) Se II é falsa, então I é verdadeira.

15 – Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados:

- (a) Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.
- (b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.
- (c) Qualquer propriedade dos retângulos é também válida para os quadrados.
- (d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.
- (e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

Anexo B - Quadriláteros – Atividade 1

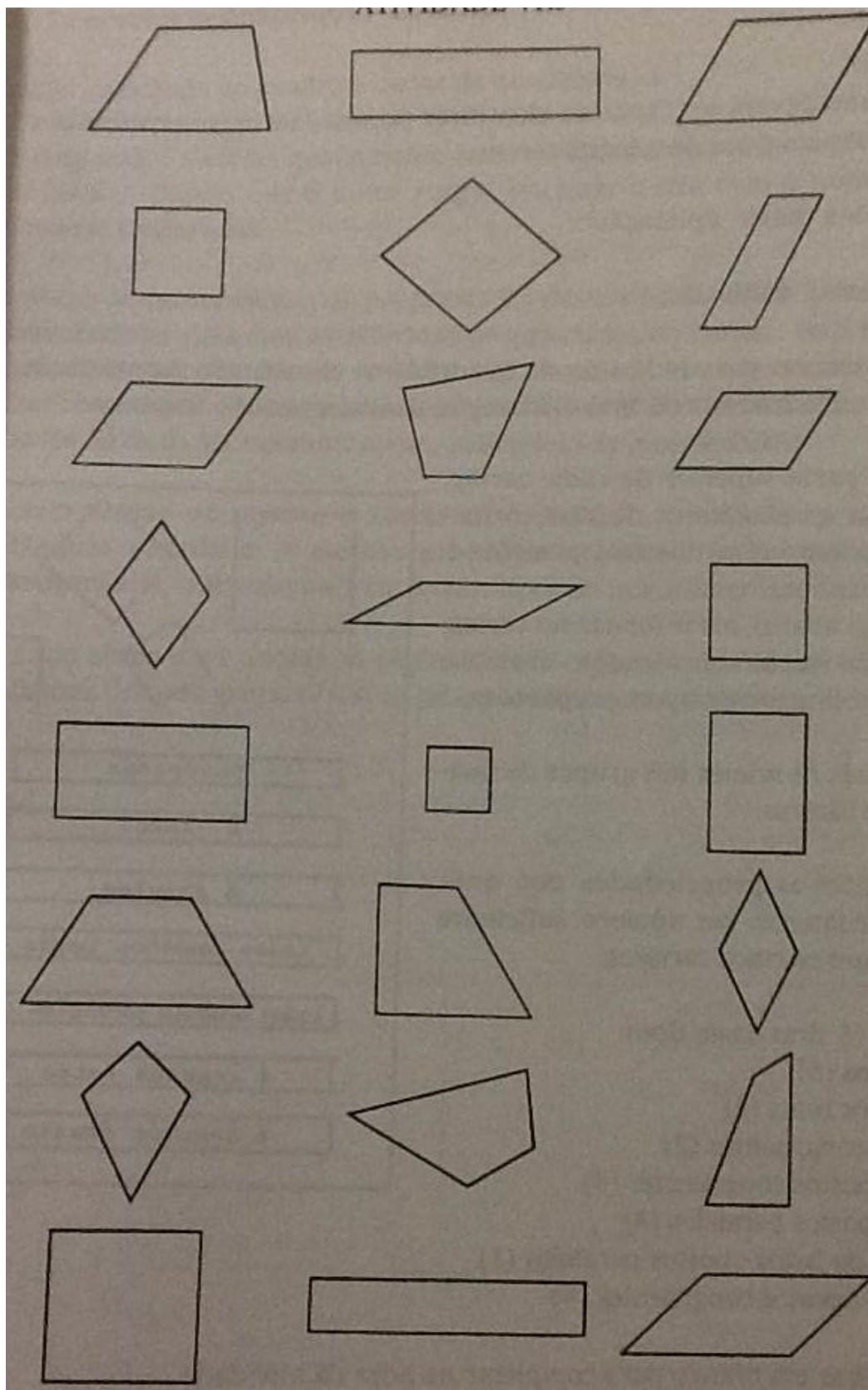


Registro de impressões

Pares de Figuras	Elementos em Comum	Diferenças
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Anexo C - Quadriláteros – Atividade 2

Classificar em grupos os quadriláteros abaixo:



Anexo D – Quadriláteros – Atividade 3

Citar as propriedades de grupos de quadriláteros.

Para cada grupo de quadriláteros do exercício anterior, identificar quais são as propriedades relativas a cada grupo específico.

Os grupos são:

- Quadrados
- Retângulos
- Losangos
- Paralelogramos
- Trapézios

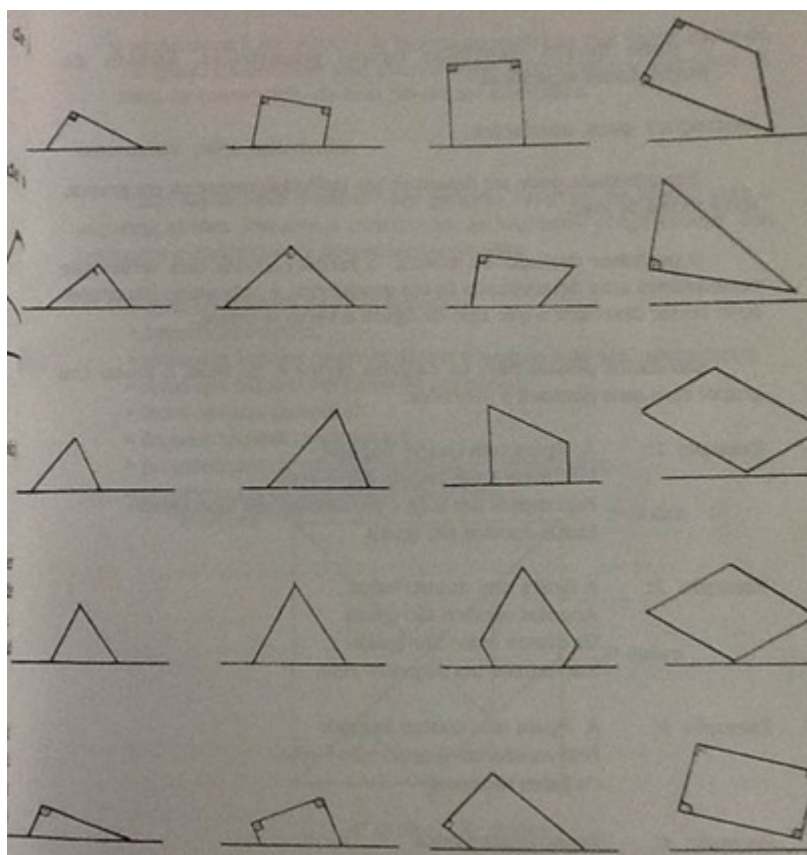
As propriedades que podem ser associadas são

- 4 lados iguais
- 4 ângulos iguais
- Lados opostos paralelos
- Lados opostos iguais
- 4 ângulos iguais
- Diagonais de mesmo comprimento
- Diagonais perpendiculares
- Ângulos opostos iguais

Anexo E – Quadriláteros – Atividade 4

Identificar possíveis figuras com as propriedades apresentadas.

Apresentar a sequência de imagens abaixo e pedir que os alunos analisem quais são as figuras em questão.



Anexo F - Quadriláteros – Atividade 5

Identificar as figuras por meio de suas propriedades

Fornecer um conjunto de propriedades para que os alunos identifique qual o quadrilátero em questão:

i)

- Quatro ângulos
- Pelo menos um ângulo não é reto
- Pelo menos um lado é paralelo ao lado oposto
- Lados opostos são iguais

ii)

- Quatro lados
- Ângulos opostos iguais
- Quatro lados iguais
- Pelo menos um ângulo é reto

iii)

- Quatro ângulos
- Pelo menos um ângulo não é reto
- Os lados são iguais

iv)

- Quatro lados
- Somente um par de lados opostos paralelos
- Dois ângulos retos

Anexo G - Quadriláteros – Atividade 6

Desenvolvimento do conceito de Inclusão de classes de paralelogramos.

- i) Listar todas as propriedades relativas aos quadriláteros;
- ii) Listar os quadriláteros do grupo da atividade 3 e verificar quais tem as propriedades listadas.

Fazer as devidas inclusões, destacando quais são as propriedades comuns aos quadriláteros em geral, aos quadrados, losangos e retângulos. Fomentar as seguintes questões:

- Qual a categoria dos trapézios, ele é um paralelogramo?
- Todo quadrado é retângulo?
- Todo quadrado é um losango? A recíproca é verdadeira?