UFRRJ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

Grafos: Uma Experiência no Ensino Médio

Alessandro de Araujo Gomes

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

GRAFOS: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO MÉDIO

ALESSANDRO DE ARAUJO GOMES

Sob a Orientação do Professor

Dr. Montauban Moreira de Oliveira Júnior

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ

Fevereiro de 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ALESSANDRO DE ARAUJO GOMES

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 15/06/2015

Montauban Moreira de Oliveira Júnior. Dr. UFRRJ
(Orientador)

Aline Maurício Barbosa. Dr.ª UFRRJ

Isaías da Silva Rosa. Dr. FACIC

À minha família, pela compreensão, aos meus amigos de mestrado, pelo companheirismo e aos meus professores de toda minha vida escolar, pela paciência e sabedoria.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Dr. Montauban Moreira de Oliveira Júnior, pela prodigiosa orientação e paciência.

À Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Seropédica, RJ, pelo acolhimento e infra-estrutura fornecidos.

À coordenação, professores e tutores do PROFMAT, pela organização e apoio.

À minha esposa, Rafaela, que suportou minhas ausências neste período de estudos e dedicação.

À minha filha, Manuela, que terei que recompensar de alguma maneira por ter brincado pouco com ela neste tempo de dedicação.

Aos companheiros de estudo, Helen, José Carlos e Victor que muito me ajudaram.

À CAPES, pela bolsa de mestrado, fundamental para que eu pudesse ter mais tempo livre para os estudos.

RESUMO

GOMES, Alessandro de Araujo. **Grafos: Uma Experiência no Ensino Médio.** 2015. 101 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2015.

A Matemática se destaca como base para a maioria das ciências e das tecnologias atuais. Acredita-se que as tecnologias atuais sejam de interesse dos estudantes de Ensino Médio. Partindo do princípio que tópicos básicos em Teoria dos Grafos exigem poucos pré-requisitos para serem ensinados, e que esses tópicos estão diretamente ligados às tecnologias atuais (celulares, redes sociais, GPS, entre outras), uma experiência com os Grafos no Ensino Médio se encaixa perfeitamente no objetivo de uma pesquisa voltada para educação matemática. Este trabalho tem como objetivo principal descrever, através de um estudo de caso, uma experiência de ensino de Tópicos em Grafos em turmas de Ensino Médio de uma escola técnica em Cruzeiro/SP. Foi feita uma revisão de literatura sobre os aspectos históricos, conceitos e resultados básicos da Teoria dos Grafos. Em seguida foram ministradas 6 aulas de 50 minutos cada para duas turmas de ensino médio, onde foram introduzidos conceitos e resultados básicos de Grafos. Dois testes semelhantes foram aplicados, um antes das aulas e outro depois, para que os alunos pudessem experimentar primeiramente técnicas presentes em seus currículos normais e depois técnicas de Grafos. Também, ao final, foi aplicado um questionário para avaliar a motivação e o interesse dos alunos em Grafos após as aulas.

Palavras-chave: Tópicos em Grafos. Contextualização. Interdisciplinaridade. Ensino Médio.

ABSTRACT

GOMES, Alessandro de Araujo. **Graphs: An Experience in High School.** 2015. 101 p. Dissertation (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2015.

Mathematics has been highlighted as the basis for most current science and technology. It is believed that current technologies (mobile, social networking, GPS, among other) are of interest to students of high school. Assuming that basic topics in Graph Theory require few prerequisites to be taught and that these topics are directly linked to current technologies, an experiment with graphs in high school fits perfectly on the goal of a survey focused on mathematics education. This work aims to describe a Graph teaching experience in high school classes of a Technical School in Cruzeiro / SP through an investigation study. The instruments used to collect data were six classes with fifty minutes each one. There were introduced concepts and basic results from Graphs. Two tests were also applied, one before and the other after the classes. The students could preliminarily experiment high school techniques; after the Graph classes, they could use what they learned. In the end of the work, after the classes, a questionnaire was also applied to diagnose the motivation and the interest of the students in Graphs.

Keywords: Topics in Graph. Contextualization. Interdisciplinary. High School.

LISTA DE ABREVIATURAS

TG	Teoria dos Grafos.
G(V,A)	Grafo onde V é o conjunto de vértices do grafo G e A é o conjunto de arestas do grafo G.
d(xi)	Grau do vértice xi.
PISA	(Programme for International Student Assessment) Programa Internacional de Avaliação de Alunos.
OCDE	Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico.
DCN	Diretrizes Curriculares Nacionais.
GPS	Global Positioning System - (Sistema de Posicionamento Global).

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No atual estágio de desenvolvimento científico e tecnológico a Matemática ocupa lugar de destaque, pois a maioria das ciências precisa das bases Matemáticas para suas implementações. Se for observado em especial o desenvolvimento da informática e das telecomunicações, pode-se ver que ele depende fundamentalmente das teorias da Matemática. Por exemplo, o desenvolvimento de algoritmos para roteamento de sinais de telecomunicações, algoritmos para redes sociais, algoritmos de busca em bancos de dados (estes cada vez maiores e mais complexos), Pesquisa Operacional com uso de computador, e muitas aplicações envolvendo todo tipo de dispositivo de comunicação e com poder computacional. Acredita-se que todo este rol de novas tecnologias seja de interesse dos estudantes de Ensino Médio que utilizam seus *gadgets* (equipamentos que têm um propósito específico, são úteis no cotidiano. Por exemplo, chamam-se de *gadgets* dispositivos eletrônicos portáteis como *tablets*, celulares, *smartphones*, GPS, entre outros).

Neste contexto, uma experiência com os Grafos no Ensino Médio se encaixa perfeitamente, pois além de exigir pouquíssimos pré-requisitos dos estudantes das escolas de Ensino Médio, a sua aplicabilidade nas atuais tecnologias é muito adequada. Modelam-se problemas ou situação acima com o uso dos Grafos aproveitando-se do fato de que a maioria dos estudantes já tem familiaridade com as tecnologias de internet e telecomunicações em seus próprios *gadgets.*

O presente trabalho introduz alguns tópicos sobre Grafos para alunos de nível médio, e descreve a experiência obtida através de um estudo de caso.

O ensino de Grafos é importante porque serve de base para modelar de maneira muito simples problemas do cotidiano. Os exercícios exigem abstração e raciocínio lógico; portanto, também atendem a algumas necessidades de desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

Podem ser simuladas através dos Grafos situações-problema que motivem nossos alunos a estudar, a modelar e a raciocinar em problemas do seu dia-a-dia.

Os objetivos desta pesquisa incluem a realização de atividades de laboratório utilizando-se de jogos online, coloração de mapas, problemas de menor percurso, percurso ótimo, lógica e outros nestas oficinas. Tudo isso voltado ao uso, aplicação e ao ensino de Grafos.

Avançando-se um pouco mais, serão introduzidos conceitos para auxílio na resolução de problemas de análise combinatória, auxílio na resolução de problemas geométricos, resolução de problemas de otimização de percursos e rotas, sempre com o intuito de tornar a Matemática mais interessante e aplicável. E isto pode até ajudar a desmistificar a disciplina de Matemática nas escolas, que o senso comum julga difícil e sem aplicações práticas.

É possível que as aulas de Matemática chamem mais a atenção de nossos alunos. Apresentar uma fórmula pronta, em seguida utilizá-la em alguns exemplos e, por fim, passar uma lista de exercícios parecidos com os exemplos para que os alunos resolvam está ultrapassado. Esta sequência tradicional parece equivocada, e tem o efeito consensual de espantar e alienar boa parte dos aprendizes. Este trabalho tem a intenção de introduzir Grafos de uma forma mais dinâmica e interessante, fugindo da forma usual e conservadora de muitas escolas e professores.

Uma pergunta a ser respondida é: como introduzir conceitos de Grafos para estudantes do Ensino Médio? Uma boa resposta seria contando a história de que a Teoria dos Grafos começou com um problema de pontes de uma cidade, e é aplicável às mais variadas áreas do conhecimento; por isso, pode propiciar ao aluno a contextualização na resolução de problemas atuais e de relevância para o seu dia a dia. Estes problemas podem começar com a simples aplicação de conceitos e ir até a compreensão e análise de fenômenos científicos mais elaborados. A resolução de problemas utilizando recursos da Teoria dos Grafos poderá ajudar o aluno a desenvolver suas habilidades Matemáticas e de raciocínio lógico.

A relevância deste trabalho para a sociedade em geral e para os alunos em particular é: ajudar a criar condições para que os alunos do Ensino Médio saibam interpretar e resolver problemas de uma maneira mais contextualizada, num ambiente interdisciplinar. Além disso, os alunos poderão aprender conceitos da Matemática usando a investigação Matemática (modelagem Matemática simples) que os Grafos propiciam.

Pode-se inferir que o uso de experimentos concretos que se utilizam de Grafos, como, por exemplo, a coloração de mapas, algoritmos para descobrir o melhor caminho, etc., podem despertar a curiosidade e o interesse dos alunos na Matemática em geral. Com isso, pode-se mostrar indiretamente para os estudantes do Ensino Médio a importância da Matemática para a construção do conhecimento e para solução de problemas.

A pesquisa também pretende contribuir cientificamente para o desenvolvimento do ensino-aprendizagem da Matemática, mostrando a diversidade de problemas de várias áreas do conhecimento humano que podem ser analisados do ponto de vista dos Grafos por um aluno do Ensino Médio. Outra possível contribuição científica deve advir do estímulo em criar novas aplicações para os Grafos.

O objetivo geral é descrever uma experiência de ensino de Grafos em turmas de Ensino Médio de uma escola técnica em Cruzeiro/SP.

Os objetivos específicos deste experimento são:

Apresentar problemas que levem ao encontro dos Grafos, problemas contextualizados e interdisciplinares.

Apresentar os rudimentos dos Grafos, conceituando o que são Grafos e os tipos mais básicos de Grafos.

Relacionar Grafos com Jogos mostrando alguns jogos *online* disponíveis, fazendo com que os alunos aprendam a jogar e consigam vencer todas as fases dos jogos.

Propor problemas de contagem de Análise Combinatória que possam ser resolvidos tanto por contagem quanto por utilizando-se de Grafos.

Usar experimentos concretos para o ensino-aprendizagem dos Grafos, tais como coloração de mapas, jogos, desenhos, maquetes de moléculas ou de estruturas geométricas.

Interpretar e resolver situações-problema nas mais diversas áreas do conhecimento humano que podem ser resolvidas com o uso dos Grafos, possibilitando a interdisciplinaridade tão buscada nos tempos atuais. Desta forma despertar o interesse dos alunos pela Matemática em geral.

Despertar a vontade de criar novas aplicações para a Teoria dos Grafos, pensando e analisando as tecnologias atuais.

Sugerir um exemplo de abordagem de tópicos de Grafos na educação de nível médio.

O texto está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 há uma revisão de literatura com aspectos históricos, as bases para a introdução da Teoria dos Grafos e a inserção dos Grafos no Ensino Médio. No capítulo 2 há uma revisão de literatura com conceitos e resultados básicos. Em seguida no capítulo 3 são apresentados os materiais e os métodos utilizados para a experiência com Grafos no Ensino Médio. Ainda são apresentadas formas de se contextualizar o assunto procurando sempre a resolução de problemas usando a interdisciplinaridade. No capítulo 4 discutem-se os resultados dos diagnósticos, das aulas e dos questionários. Ao final tem-se as conclusões.

Para a compreensão do presente trabalho é suficiente que o leitor esteja familiarizado com as bases de matemática nos assuntos tratados no Ensino Médio das escolas públicas brasileiras.

REVISÃO DE LITERATURA

Na revisão de literatura foram procuradas as bases para a introdução à Teoria dos Grafos em autores consagrados. Foram investigadas obras antigas e modernas. Buscaram-se trabalhos que pudessem corroborar a pesquisa. Começou-se pela história da Teoria dos Grafos, em seguida partiu-se para as bases da teoria e por fim nesta revisão de literatura estudaram-se trabalhos sobre a inserção da Teoria dos Grafos no Ensino Médio.

1.1 Como surgiu a Teoria Dos Grafos

De acordo com a Enciclopédia Britânica (Disponível em: <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/321794/Konigsberg-bridge-problem>. Acesso em: 07 julho 2014.) a história documentada do início do desenvolvimento dos princípios da Teoria dos Grafos começa na antiga cidade de Königsberg. O problema das sete pontes de Königsberg, cidade da antiga Prússia (atual Kaliningrado) , que foi resolvido por Leonhard Euler, figura 1, foi possivelmente a primeira abstração registrada na forma de um grafo, documentada em 1736.

Figura 1 – Leonhard Euler - Retirada de www.famousscientis.org

Havia uma lenda entre os habitantes daquela cidade sobre a possibilidade de se cruzar as sete pontes, identificadas na figura 2, pelas letras a, b, c, d, e, f, g, passando somente uma vez em cada ponte, passando obrigatoriamente por todas as pontes e ainda conseguir retornar ao local de partida, seja ele qual for.

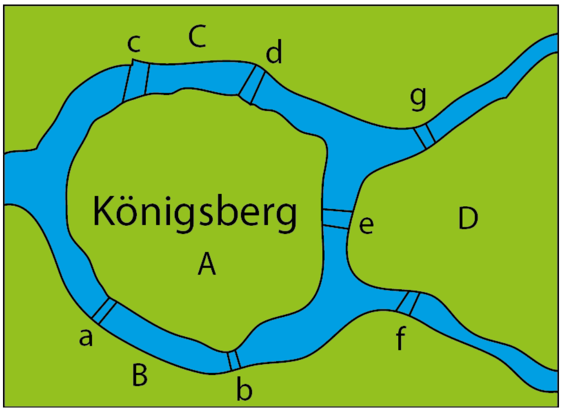


Figura 2– Modelo das pontes de Königsberg.

Euler, em toda a sua genialidade e simplicidade, teve uma capacidade imensa de abstração e representou as pontes como arestas (linhas) e as 4 áreas representadas pelas letras maiúsculas A,B,C,D delimitadas pelas duas ilhas e pelo continente como vértices (pontos), que eram ligados pelas arestas. Assim, ele conseguiu mostrar que era impossível cruzar as sete pontes nas condições do problema, e ainda esboçou o que parece ser o primeiro grafo da história, veja abaixo, representado na figura 3:

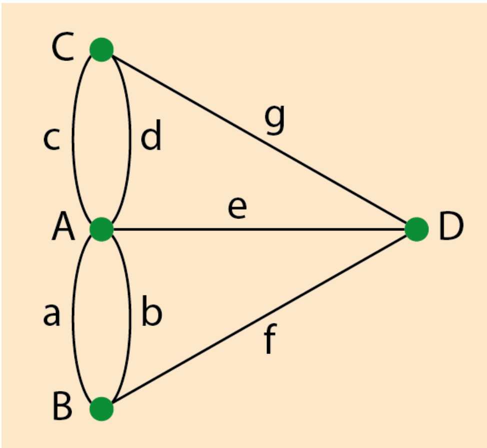


Figura 3 – Primeiro grafo da história.

Outro exemplo interessante segundo Malta (2008):

> Cerca de um século após Euler ter resolvido o famoso problema das Pontes de Königsberg, Sir Willian Hamilton, em 1856, cria um jogo que não teve tanto sucesso quanto a sua representação. O jogo intitulado por Hamilton como Icosain Game era um mundo na forma de um dodecaedro. (p. 22)

No capítulo 3, item 3.2.3, Aula 2, há a explicação do jogo *Icosain Game*.

A Teoria dos Grafos possui um caráter interdisciplinar e multidisciplinar. Por exemplo, na química pode-se imaginar os átomos como os pontos e as ligações entre eles como as arestas, como se define em Teoria dos Grafos. Logo, desta forma, tem-se cada molécula como um grafo, mesmo que a configuração da molécula seja espacial.

Problemas envolvendo percurso (por exemplo, descobrir o menor trajeto ou o trajeto mais econômico entre dois locais dados), podem ser contextualizados junto com a física, a economia, a logística.

Diversas áreas da Matemática também podem e devem ser exploradas, tais como: lógica, contagem, análise combinatória, Matemática computacional (através de algoritmos que percorram e descubram os melhores caminhos), geometria, matrizes, entre outras.

Ainda conforme Malta (2008):

> A história de Grafos surge de uma forma bela e contextualizada. São os problemas que impulsionam o seu surgimento e a sua sistematização. A abordagem escolhida foi a proposta dos problemas históricos que motivaram matemáticos como Euler e Hamilton a criar o que hoje conhecemos como Teoria de Grafos. Os alunos não precisavam de qualquer conhecimento prévio para compreender os problemas que pensamos propor. (MALTA, 2008, p. 5)

É possível utilizar sim, a história, mas pode-se também complementar com as questões atuais. É preciso que se evolua do contexto histórico para um contexto atual, utilizando a tecnologia disponível, que se desenvolva e que se coloquem situações cotidianas atuais para que os estudantes se sintam mais motivados a pesquisarem, modelarem e buscarem soluções alternativas e simples para problemas que podem ser complexos sem o uso dos conceitos de Grafos.

Fica evidente a interdisciplinaridade com a matéria de História no coxtexto do problema das pontes de Königsberg.

1.2 Bases para a introdução dos Tópicos em Grafos

O livro texto que foi considerado mais completo sobre as bases para a Teoria dos Grafos foi o escrito por Bondy e Murty (1976). Livro escrito em inglês sem tradução para o português, mas de leitura obrigatória para o pesquisador interessado na TG. Este livro cobre os assuntos sobre grafos e subgrafos, árvores, conectividade, caminhos eulerianos e ciclos hamiltonianos, correspondências, coloração de mapas, conjuntos independentes, coloração de vértices, grafos planares, grafos direcionados, redes, o espaço cíclico e o espaço vinculado.

A obra mais recente de Bondy e Murty(2008), foi utilizada para as bases da TG, mas trata também de questões mais profundas da referida teoria, que fogem do escopo deste trabalho.

As definições e os conceitos de grafos, são mostrados e muito bem expostas no excelente trabalho de Jurkiewicz (2009, p. 5-12). Considera-se mais didático para os estudiosos começar pela obra de Jurkiewicz.

Jurkiewicz (2009) apresentou em seu trabalho, de forma bem exposta, noções, definições e teoremas importantes sobre Teoria de Grafos, bem como aplicações em questões de olimpíadas de Matemática. Entretanto, ele propõe de forma incipiente uma motivação prévia para a abordagem do tema em sala de aula, como pedir para os alunos encontrarem situações atuais onde possíveis problemas possam ser modelados usando pontos (vértices) e linhas (arestas) que interliguem estes pontos, com arestas orientadas ou não. Por exemplo, Jurkiewicz (2009) propôs que se pensasse em uma pequena cidade com um pequeno orçamento, e que o serviço de recolhimento de lixo seja feito por um pequeno caminhão; quer-se evitar o desperdício, por isso uma boa ideia seria fazer o caminhão passar somente uma vez por cada rua e retornar ao ponto de partida. Outro exemplo é sobre as placas de circuito integrado; como elas são construídas de trilhas metálicas por onde passa eletricidade, elas não podem se cruzar na maioria das vezes, e isso obriga os projetistas a desenvolver as placas de circuitos eletrônicos em múltiplas camadas, o que é equivalente nos grafos na dificuldade de se tornar certas estruturas em desenhos planos sem cruzamentos.

Pode-se complementar os exemplos de Jurkiewicz imaginando alguns exemplos atuais. Por exemplo, as redes sociais podem ser modeladas usando-se conceitos de Grafos, onde uma pessoa pode ser representada como um vértice que se liga através de arestas a até milhares de outras pessoas. Podem ser citados também autores de novelas ou séries, que usam a Teoria dos Grafos para representar as ligações entre personagens, essas ligações podem ser de cores diferentes mostrando qual a relação entre dois personagens. Pode-se falar do GPS (é um elaborado sistema de satélites e outros dispositivos que tem como função básica prestar informações precisas sobre o posicionamento individual no globo terrestre) e do Google MAPS, que muitos estudantes usam nos seus *gadgets*.

Outra ilustração muito interessante sobre a ideia de grafo é:

> Muitas situações do mundo real podem convenientemente serem descritas e entendidas como um diagrama, consistindo de um conjunto de pontos que junto com linhas interligam certos pares destes pontos. Por exemplo, os pontos poderiam representar pessoas, com as linhas ligando pares de amigos; ou os pontos podem ser centros de comunicação, com as linhas representando as ligações entre estes centros. (BONDY; MURTY, 1976, p. 1, tradução nossa).[1]

Não se pode deixar de citar os conceitos de grafos eulerianos, trilhas eulerianas, ciclos hamiltonianos muito bem definidos e explicados em Diestel (2000). Estes conceitos também

[1] Many real-world situations can conveniently be described by means of a diagram consisting of a set of points together with lines joining certain pairs of these points. For example, the points could represent people, with lines joining pairs of friends; or the points might be communications centres, with lines representing communications links. (BONDY; MURTY, 1976, p. 1).

foram pensados e introduzidos por Leonard Euler para a resolução do famoso problema das sete pontes de Königsberg em 1736.

Existe uma vasta lista de exercícios proposta por Feofiloff (2012), sempre tentando a modernização, alterando a redação para situações do dia-a-dia dos adolescentes, para não correr o risco de cair em descrédito de estar apresentando questões antigas e desinteressantes.

Em seu trabalho, Santos e outros (1995, p. 246-248) relacionam Grafos com Análise Combinatória, trabalho com exemplos e exercícios muito interessantes para serem usados em sala de aula.

Outro trabalho que merece ser destacado é o de Netto (1996). Ele aborda uma parte da Teoria dos Jogos onde se usa grafos, a qual pode ser usada para aplicações em aulas de Matemática para alunos do Ensino Médio.

1.3 Inserção dos Grafos no Ensino Médio

Há vários trabalhos que abordam o uso da Teoria dos Grafos nos Ensinos Médio e Fundamental, pode-se citar, por exemplo, Malta (2008), Santos (1995, 2010), Rangel e Pires (2010), Jurkiewicz (2002, 2009) e Feofiloff (2012), alguns mais técnicos e outros que se resumem a uma ou mais aulas com alguma aplicação prática para se chegar aos princípios da teoria em questão.

Interessante o uso de mapas para colorir como foi feito por Rangel e Pires (2010, p. 3). Vale observar também a utilização de computadores com o Google Earth (aplicativo pertencente a Google Inc.), a exemplo da aula de Santos (2010), de forma a desenvolver o raciocínio lógico-matemático e para a resolução de problemas, contextualizando e interdisciplinarizando, pois mapas especificamente são objetos de estudo da geografia.

Não se pode deixar de destacar o trabalho de Malta (2008), que discorre também sobre o ensino de Grafos no Ensino Médio com um enfoque mais metodológico de resolução de problemas, e ensino da Matemática, diferindo da presente obra que procura contextualizar e interdisciplinarizar a Matemática como disciplina e utiliza Grafos para motivar e provocar os alunos para a pesquisa e aprendizado da Matemática, partindo do princípio de que para aprender Grafos precisa-se de pouco conhecimento prévio. Tudo com o objetivo de contribuir para o ensino da Matemática.

Conhecimento prévio e desempenho no PISA[2] parecem andar juntos: na última classificação disponível o Brasil ficou em 58º. lugar em Matemática (dados de 2012) de um total de 65 países. Segundo o site do OCDE (Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico), na área da Matemática, por exemplo, 2 em cada 3 alunos brasileiros de 15 anos não conseguem interpretar situações que exigem apenas deduções diretas da informação dada, não são capazes de entender percentuais, frações ou gráficos. (Disponível em: http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results.htm. Acesso em: 06 jan 2015.). Acredita-se que seja em função do desinteresse dos alunos pela Matemática, pelas aulas de Matemática e pelo conteúdo do currículo atual.

O § 2º , Art. 8º., da Resolução Nº 2, de 30 de janeiro 2012 do Ministério da Educação, que define Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio tem a seguinte redação:

> ...organização por áreas de conhecimento não dilui nem exclui componentes curriculares com especificidades e saberes próprios construídos e sistematizados, mas implica o fortalecimento das relações entre eles e a sua contextualização para apreensão e intervenção na realidade, requerendo planejamento e execução conjugados e cooperativos dos seus professores.

Pode-se inferir que as Diretrizes Curriculares Nacionais, DCN, apontam como responsabilidade de todos os componentes curriculares o trabalho com a solução de problemas contextualizados e interdisciplinarizados.

Nesta proposta de resolução de problemas não se pode deixar de citar o trabalho de Polya (1995), que no início do século XX desenvolveu ferramentas para auxiliar a resolução de problemas. Muitos autores desenvolveram as bases de Polya no livro “A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.”.

Registre-se que este trabalho de introdução de Grafos no Ensino Médio pretende contribuir para o ensino-aprendizagem da Matemática em nosso país.

---

[2] (*Programme for International Student Assessment* (Pisa) - Programa Internacional de Avaliação de Estudantes - é uma iniciativa internacional de avaliação comparada, aplicada a estudantes na faixa dos 15 anos, idade em que se pressupõe o término da escolaridade básica obrigatória na maioria dos países.)

2 REVISÃO DE LITERATURA: CONCEITOS E RESULTADOS

O objetivo deste capítulo é introduzir rudimentos ao leitor pouco familiarizado com os Grafos. Serão resumidos alguns conceitos e teoremas que constam nas obras de Bondy e Murty (1976, 2008), Jurkiewicz (2009), Diestel(2000), Feofiloff(2012).

2.1 Introdução

Os conceitos essenciais são os conceitos de vértices e arestas. Pode-se dizer simplesmente que os vértices são os pontos e as arestas são segmentos de retas que ligam estes pontos, orientados ou não. Supondo os vértices **A** e **B**, ou seja, os pontos **A** e **B**, há duas alternativas: ou **A** e **B** estão ligados por uma ou mais linhas (arestas) ou **A** e **B** não estão ligados. Estas ligações podem ter uma direção ou não. A simplicidade e o poder deste primeiro conceito chegam a viciar os usuários da referida Teoria; fala-se até em *graphs diseases*, seria algo como a mania dos grafos. Esta simplicidade de abstração permite modelar muitos problemas em diversos contextos, principalmente de conjuntos de objetos e conjunto de ligações entre objetos, em outras palavras qualquer tipo de rede ou malha, redes de eletricidade, redes de distribuição, redes de computador, redes sociais, malhas rodoviárias, malhas ferroviárias, malhas hidroviárias, vias aéreas, entre outras. Por exemplo, para efeito de transportes em uma cidade, os cruzamentos das ruas podem ser chamados de vértices e as ruas de arestas, já que a cidade apresenta uma malha de ruas, uma rede de ruas.

2.2 O que são Grafos

Os Grafos são estruturas formadas por conjuntos de vértices e arestas. Seja um grafo **G**, que tenha um conjunto de vértices **V** e um conjunto de pares não ordenados de **V** chamados de arestas **A** que representam ligações entre os vértices; pode-se escrever a estrutura como **G(V,A)**, onde **V** é o conjunto de vértices e **A** é o conjunto de arestas. As arestas podem ou não ter orientação, e podem ser permitidos *laços* (arestas ligando um vértice a ele mesmo) ou não, e vértices e/ou arestas podem ter um peso (um número) associado. Se as arestas têm uma orientação associada (indicada por uma seta) há um *grafo direcionado*, ou *digrafo*. Um grafo com um único vértice e sem arestas é conhecido como o *grafo trivial*. Um *multigrafo* é um grafo que apresenta mais de uma aresta entre um mesmo par de vértices, chamada aresta *múltipla*.

Exemplo 2.2.1. Alguns exemplos básicos:

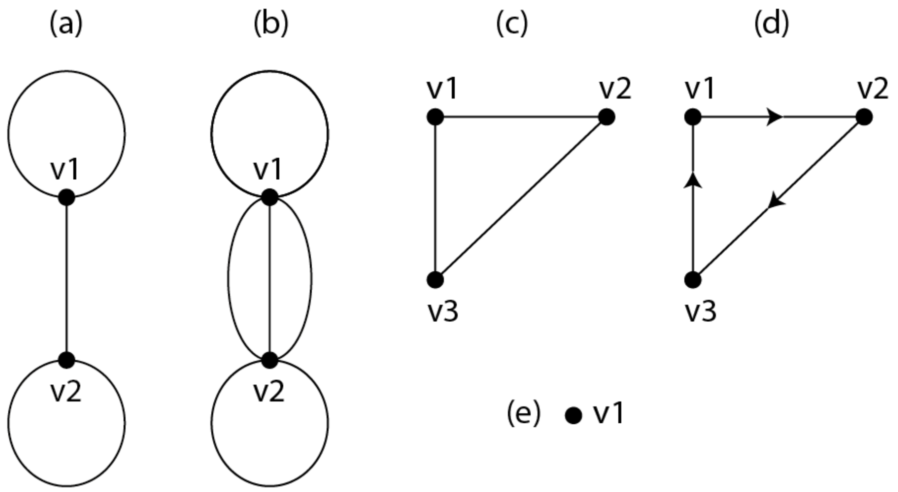


Figura 4 – Alguns exemplos básicos de grafos.

No grafo da figura 4.a há três arestas e dois vértices, v_1 e v_2, uma aresta ligando os vértices v_1 e v_2, e dois laços, um em v_1 e outro em v_2. As arestas não são orientadas. No grafo da figura 4.b há cinco arestas e dois vértices, sendo três arestas ligando os vértices v_1 e v_2 (arestas múltiplas), um laço em v_1 e outro laço em v_2. Este é um caso de multigrafo. Já no grafo da figura 4.c há três vértices v_1,v_2 e v_3 e três arestas, e as arestas não estão orientadas. No grafo da figura 4.d há três vértices v_1, v_2 e v_3 e três arestas; as três arestas estão orientadas, a aresta que faz a ligação entre v_1 e v_2 está no sentido de v_1 para v_2, a aresta que liga v_2 a v_3 está no sentido de v_2 para v_3, e finalmente a aresta que liga v_3 a v_1 está orientada no sentido de v_3 para v_1. Este é um caso de grafo direcionado, ou digrafo. O exemplo da figura 4.e é um grafo trivial. Ele só tem um vértice v_1, e não tem arestas.

Para o próximo exemplo será preciso o conceito de grafos simples.

Definição 2.2.2. Grafos simples *são grafos que não têm laços, só têm uma aresta ligando quaisquer dois vértices e não têm orientação.*

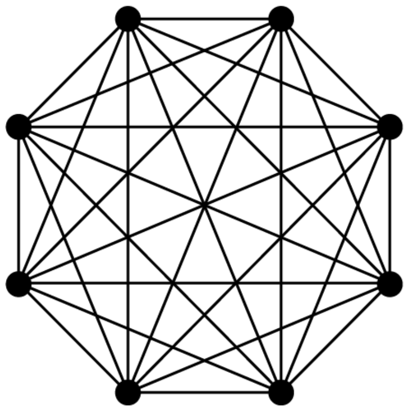


Figura 5 - Grafo do tipo K_8.

Um grafo *completo* K_n é um grafo simples com n vértices em que todos os vértices estão ligados entre si. Na figura 5 acima há um exemplo de grafo simples que também é do tipo K_8. O próximo exemplo deixará mais claro este último conceito.

Exemplo 2.2.3. Desconsiderando os possíveis laços e arestas múltiplas, ou seja, considerando um grafo simples, o número máximo de arestas para n vértices $v_1,v_2,...,v_n$ é uma combinação de n vértices tomados 2 a 2, formando um total de arestas de C(n,2) = n!/(2!(n-2)!). Isto fica claro quando se imagina que para se ter uma aresta é preciso de dois vértices.

Quando um vértice está ligado a outro vértice diz-se que eles são *adjacentes*, e cada aresta que incide num vértice é uma aresta *incidente* a este vértice.

A figura a seguir ilustra o exemplo 2.2.3 para o caso de quatro vértices.

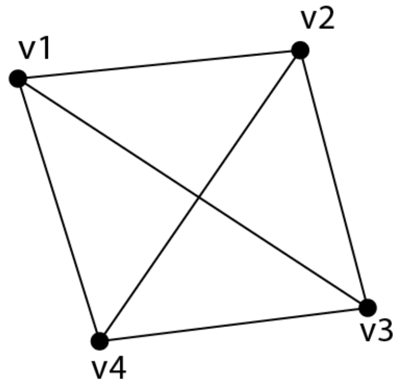


Figura 6 – Grafo do tipo K_4.

A combinação de 4 vértices tomadas 2 a 2 nos dá , C(4,2) = 4!/(2!(4-2)!) = 4x3x2x1/(2x1x2x1) = 6. Portanto, temos 6 arestas.

Se for utilizado o exemplo anterior, pode-se trasladar o vértice v_2 de modo que ele fique dentro do triângulo formado pelos vértices v_1, v_4 e v_3, e ainda assim tem-se as relações entre os vértices preservada; tais grafos são ditos *grafos isomorfos*. Existem várias formas de representar graficamente o mesmo grafo. O exemplo anterior ficaria assim:

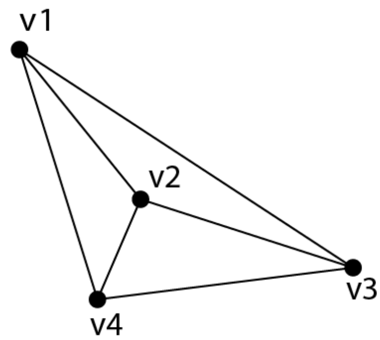


Figura 7 – Isomorfo do grafo da figura 6.

Nesta nova figura pode-se observar um grafo completo com 4 vértices, 6 arestas, conexo e planar. Quanto ao grafo ser *planar*, diz-se que é a capacidade de ter um de seus grafos isomorfos representado graficamente no plano de modo que as arestas não se cruzem. Mais à frente será dedicado um subitem deste trabalho à planaridade.

Um *percurso* é uma sequência $e_1e_2...e_n$ de arestas em que o vértice final de e_i é o vértice inicial de e_{i+1}. Se as arestas não se repetem, o percurso é chamado de *trilha*. Se os vértices não se repetem, o percurso é chamado de *caminho*. Um *percurso fechado*, também chamado de *circuito*, possui o vértice final igual ao inicial. Uma *trilha fechada* e um caminho fechado têm definição análoga. Um *caminho fechado* é chamado de *ciclo*.

Um grafo é *conexo* se para quaisquer que sejam dois vértices distintos sempre existe um caminho que os une. Quando tal fato não acontece o grafo diz-se *desconexo*.

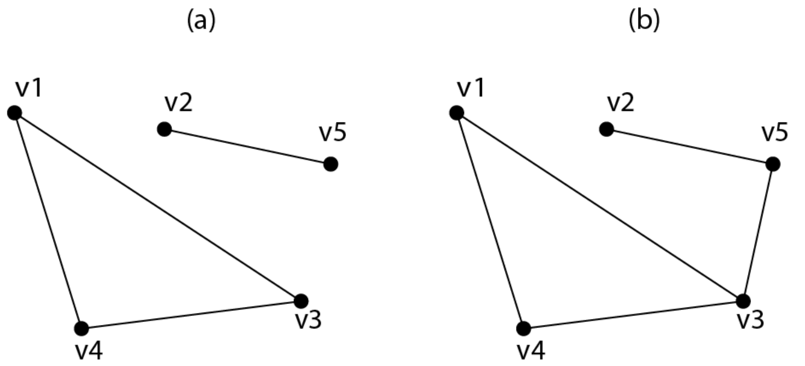


Figura 8 – Grafos conexos e desconexos.

Pode-se olhar a figura 8.a como um único grafo, e então ele é desconexo; porém se a figura 8.a representa dois grafos distintos haverá dois grafos conexos. Para o caso da figura 8.b o grafo é conexo.

2.3 Grau de um vértice

O *grau de um vértice* é igual ao número de arestas que estão ligadas a este vértice. Por exemplo, no grafo P da figura 9 abaixo, o vértice x tem grau 3 e vértice y tem grau 4.

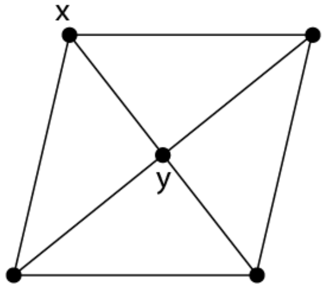


Figura 9 – O vértice x tem grau 3, e o vértice y tem grau 4.

Chamando o grau de um vértice de d(v), onde v é o vértice, há d(x) = 3 e d(y) = 4. Ao se somarem os graus de todos os vértices de um grafo, obtém-se o grau do grafo, para o grafo P acima obtém-se d(P) = 16. O número de arestas de P é igual a 8 e há um teorema interessante acerca dos graus do grafo e o número de arestas.

Teorema 2.3.1. *Para todo grafo G, com vértices v e número de arestas m, obtém-se d(G) = 2m.*

Isto é: A soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas.

Demonstração: Ao se contarem os graus dos vértices, contam-se as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes.

Corolário 2.3.2. *Todo grafo G conexo possui um número par de vértices de grau ímpar.*

Demonstração: Se houvesse um número ímpar de vértices de grau ímpar, a soma dos graus dos vértices seria ímpar, mas a soma de todos os graus dos vértices é o dobro do número de arestas, contradição.

Lema 2.3.3. (Lema do aperto de mãos) *Se os convidados de uma festa apertarem as mãos quando se encontrarem pela primeira vez, o número de convidados que apertam a mão um número ímpar de vezes é par.*

Também em grafos não direcionados a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas.

2.4 Alguns tipos de grafos

Não se pretende com este subcapítulo esgotar todas as classificações e tipos de grafos, serão vistos apenas os mais usuais. Um *subgrafo* de um grafo G é um grafo cujo conjunto dos vértices é um subconjunto do conjunto de vértices G, cujo conjunto de arestas é um subconjunto do conjunto de arestas de G. Por exemplo, veja a figura 10:

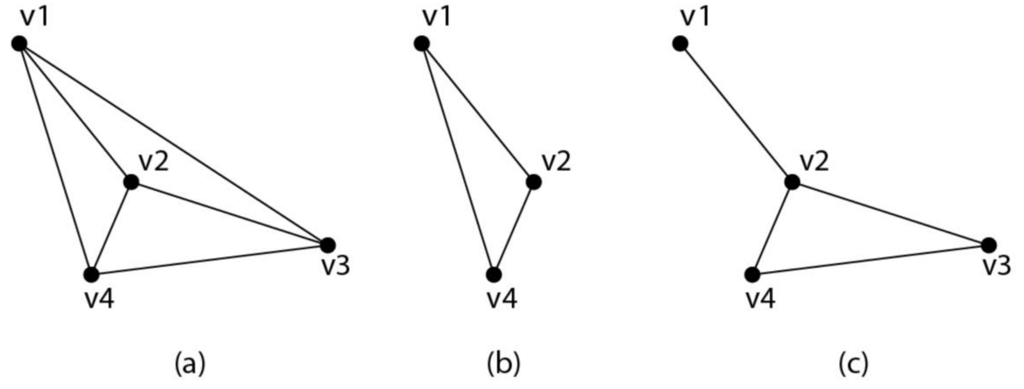


Figura 10 – Exemplos de subgrafos de (a) em (b) e (c).

Partindo do grafo em 10.a, observam-se 10.b e 10.c subgrafos de 10.a. Para construir o grafo 10.b, basta retirar o vértice v_3 de 10.a e retirar as arestas v_1v_3 e v_3v_4. Da mesma maneira para obter o segundo grafo 10.c retira-se as arestas v_1v_4 e v_1v_3.

Observe a figura 11 abaixo. No caminho hachurado representado como subgrafo do grafo a seguir parte-se de v_1, passando por v_2,v_3,v_4,v_5 e chega-se em v_6, pode-se escrever que o caminho é $v_1v_2v_3v_4v_5v_6$. Um exemplo de percurso é $v_1v_4v_3v_4v_5$. Note que a aresta v_3v_4 se repete. Um exemplo de circuito é $v_1v_3v_5v_6v_3v_5v_4v_1$, e a aresta v_3v_5 se repete. Uma trilha pode ser vista em $v_1v_3v_5v_6v_3v_7$, onde o vértice v_3 se repete. Uma trilha fechada em $v_1v_4v_5v_4v_{1,}$ onde se repete o vértice v_4 se repete. Um ciclo pode ser visto em $v_1v_4v_3v_1$.

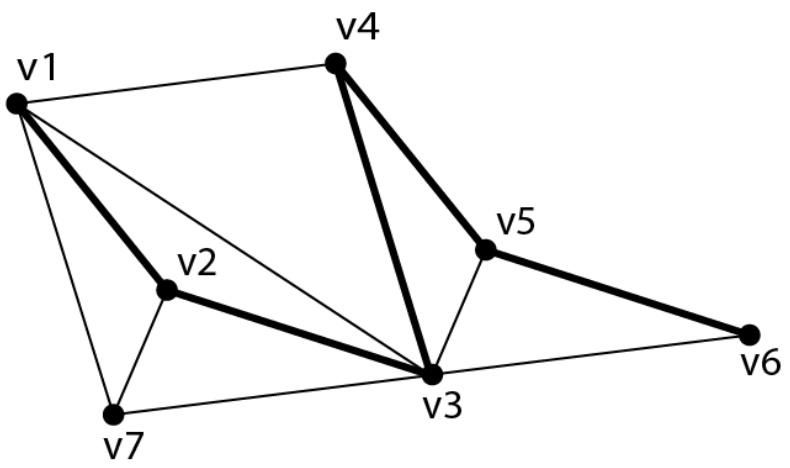


Figura 11 – Caminho em um Grafo.

No caso específico deste grafo que não tem peso numérico nas arestas, o comprimento do caminho é o número de arestas que o caminho usa. O comprimento de caminho $v_1v_2v_3v_4v_5v_6$ é de 5 arestas, mas o menor comprimento possível de v_1 até v_6 é atingido por $v_1v_3v_6$ que tem somente 2 arestas.

Um grafo chama-se *acíclico* se não contém ciclos ou circuitos. Uma *árvore* é um grafo acíclico e conexo, conforme a figura 12 a seguir.

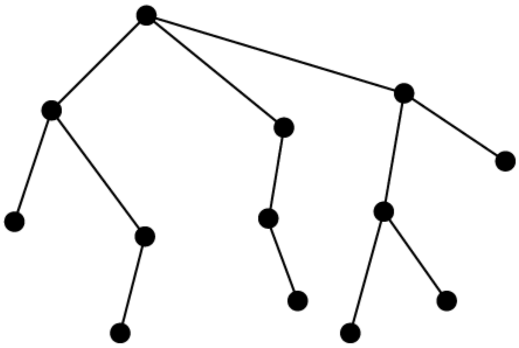


Figura 12 – Uma árvore.

Para o caso de um grafo que tem pesos numéricos nas arestas, o comprimento ser maior ou menor dependerá destes pesos numéricos e não da quantidade de arestas. Veja o exemplo da figura 13 a seguir:

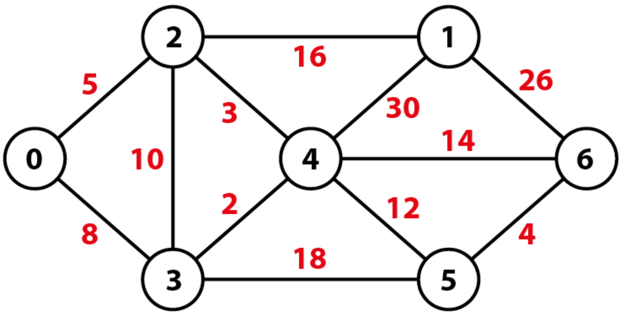


Figura 13 – Grafo com pesos numéricos nas arestas.

Há diversos caminhos para ir do vértice 0 ao vértice 6. Se não houvesse pesos nas arestas haveria vários caminhos de menor comprimento que seriam de três arestas, mas o caminho de menor comprimento contando-se os pesos é o caminho 0246, que tem comprimento 22; qualquer outro caminho tem comprimento maior que 22. Este comprimento pode significar qualquer variável que se quer, tais como, distâncias, custos, força de ligação, entre outros.

Definição 2.4.1. *Um grafo G com m arestas é* semieuleriano *se há uma trilha aberta em G de comprimento m.*

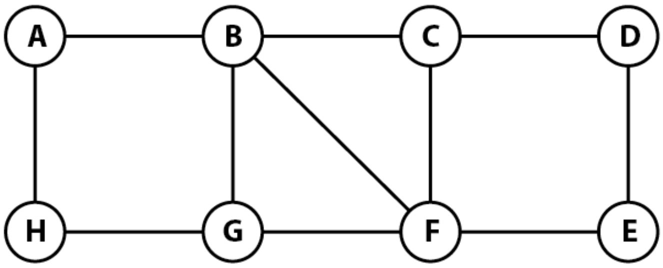


Figura 14 – Grafo semieuleriano.

Na figura 14 acima pode-se percorrer todas as arestas exatamente uma vez começando pelos pontos C ou G. Uma possível trilha é G-H-A-B-C-D-E-F-B-G-F-C. Observe que é preciso passar pelos vértices B, C, F e G duas vezes. Há um teorema para este tipo de grafo:

Teorema 2.4.2. *Um grafo G conexo é um grafo semieuleriano se e somente se ele tem exatamente dois vértices de grau ímpar*. Bondy e Murty (1976).

Observe também que o grafo acima não permite começar e terminar no mesmo vértice percorrendo todas as arestas do grafo exatamente uma única vez. Contudo, se o grafo conexo possui todos os vértices com grau par ele é dito um grafo euleriano:

Definição 2.4.3. *Um grafo com m arestas é dito* euleriano *se possui uma trilha fechada de comprimento m.*

Tomando a figura 14 e acrescentando a aresta que liga os vértices C e G obtém-se um grafo euleriano, porque agora todos os vértices têm grau par e isto permite percorrer uma trilha que passe uma única vez por todas as arestas, comece e termine no mesmo vértice.

Teorema 2.4.4. *Um grafo G conexo é um grafo euleriano se e somente se todos os seus vértices possuem grau par*. Bondy e Murty (1976).

Veja um grafo euleriano na figura 15, com a trilha fechada G-H-A-B-C-D-E-F-B-G-C-F-G:

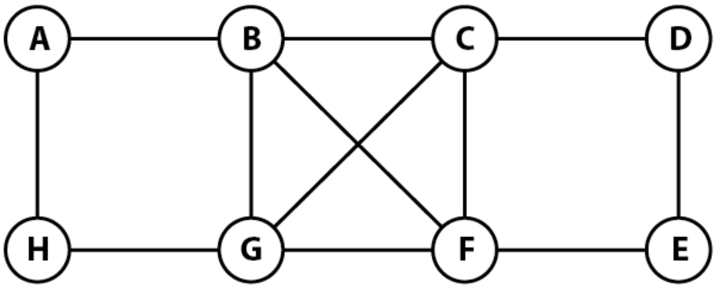


Figura 15 – Grafo euleriano.

Definição 2.4.5. *Um grafo G com n vértices é dito* hamiltoniano *se possui um ciclo com n vértices.*

Por exemplo, o grafo da figura 16 com dez vértices abaixo é hamiltoniano, e está destacado o ciclo com 10 vértices. Repare que não há a necessidade de passar por todas as arestas.

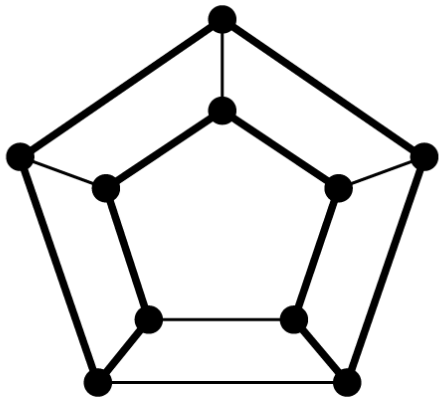


Figura 16 – Grafo hamiltoniano.

Observação importante: enquanto determinar se um dado grafo é euleriano ou semieuleriano é trivial, o mesmo problema para grafos hamiltonianos é extremamente árduo.

Um grafo simples G é dito *bipartido* quando seu conjunto de vértices V(G) pode ser particionado em dois conjuntos A e B de maneira que V(G) = A∪B, onde cada aresta possua um vértice em A e outro em B. Um grafo *bipartido completo* é um grafo bipartido com todas as arestas possíveis. Denota-se um grafo bipartido completo G em que A possui ***a*** elementos e B possui ***b*** elementos por $K_{a,b}$.

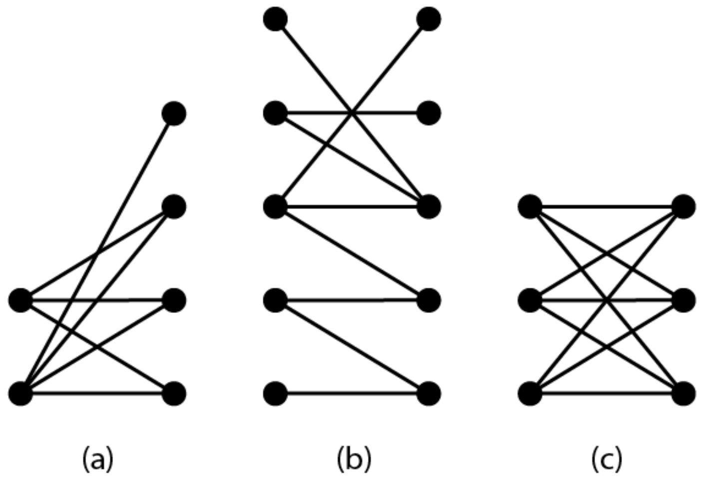


Figura 17 – Grafo bipartidos.

Veja na figura 19 acima que os três casos são grafos bipartidos, sendo A e B os conjuntos de vértices à direita e à esquerda de cada grafo. Em 19.a A possui 2 elementos, e B possui 4 elementos. Em 19.b há A e B com mesmo números de elementos, igual a 5 cada um. Repare que, observando um pouco melhor, em 19.b há uma árvore. Em 19.c há um grafo bipartido completo, o $K_{3,3}$.

2.5 O algoritmo de Dijkstra

Para que se encontre de maneira sistemática o caminho de menor peso pode-se usar o algoritmo de Dijkstra. Para que se explique o algoritmo é útil fazer o seguinte raciocínio:

Pode-se dizer que um subcaminho de um caminho mais curto, também é um caminho mais curto. Para demonstrar, supõe-se que o menor caminho para ir de um vértice A até uma vértice D é o caminho de peso P, onde precisa-se passar primeiro por B e depois por C, como na figura 18 a seguir, onde há os pesos de A até B de B até C e de C até D, representados respectivamente por P_{AB}, P_{BC} e P_{CD}.

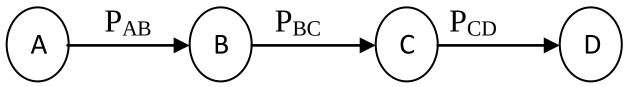


Figura 18 – Grafo com pesos.

Agora supõe-se que existe um caminho de B para C que tem peso menor que o peso P_{BC}, chame este peso de P'_{BC}, como o peso total de A até D é Peso (P) = $P_{AB} + P_{BC} + P_{CD}$ < Peso (P') = $P_{AB} + P'_{BC} + P_{CD}$ segue que $P_{BC} < P'_{BC}$. Absurdo, pois foi suposto que $P'_{BC} < P_{BC}$.

Descrição do Algoritmo de Dijkstra. Partindo do princípio que um subcaminho de um caminho mais curto, também é o caminho mais curto, dá para se construir o caminho todo mais curto partindo-se dos subcaminhos mais curtos. O Algoritmo de Dijkstra (E.W. Dijkstra) é um dos algoritmos que calcula o caminho de peso mínimo entre vértices de um grafo. Escolhido um vértice como raiz da busca, este algoritmo calcula o peso mínimo deste vértice para todos os demais vértices do grafo, considerando então o menor caminho de um vértice para outro. No entanto este algoritmo só funciona se as arestas tiverem peso positivo ou nulo.

Este algoritmo parte de uma estimativa inicial para o peso mínimo e vai sucessivamente ajustando esta estimativa. Um passo a passo na busca do menor caminho do vértice **c** a todos os demais vértices do grafo no exemplo abaixo pode ser utilizado para que se observem os detalhes do algoritmo.

Considere o grafo da figura 19a a seguir.

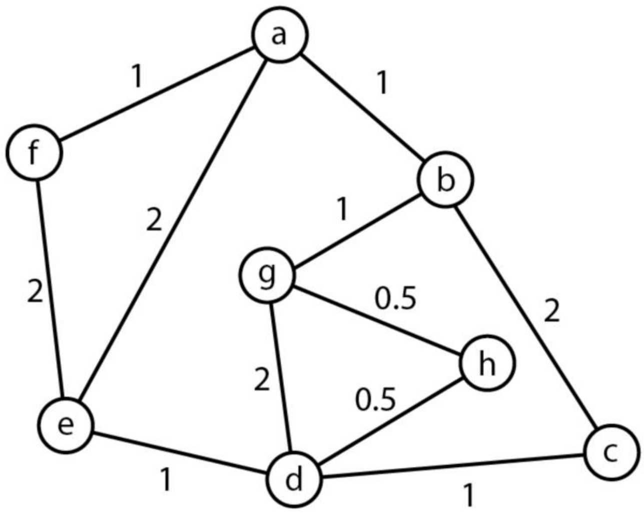


Figura 19a – Grafo exemplo para algoritmo de Dijkstra.

Para encontrar o menor caminho do vértice **c** a cada um dos demais vértices, será feito o seguinte: as arestas incidentes a **c** são **cb** e **cd**. Elas devem ser marcadas em vermelho, e os vértices finais, rotulados em vermelho, com os rótulos respectivamente **(2,c)** e **(1,c)**, representando na primeira coordenada o comprimento do caminho total começando em **c**, e na segunda coordenada, o vértice antecessor no caminho. A próxima figura 19b representa o que foi descrito.

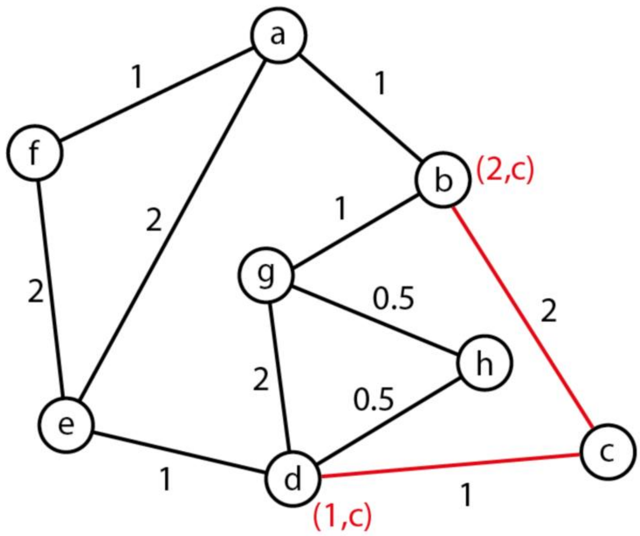


Figura 19b – Grafo exemplo para algoritmo de Dijkstra.

Como o mais próximo de **c** é o vértice **d**, deve-se continuar o processo a partir de **d**. As novas arestas incidentes a **d** são **de**, **dg** e **dh**. Elas devem ser marcadas. Seus vértices finais são **e**, **g** e **h**, e devem ser rotulados por **(2,d)**, **(3,d)** e **(1.5,d)**, onde 2 = 1 + 1 é o comprimento do caminho total de **c** até **e**, 3 = 1 + 2 é o comprimento do caminho total de **c** até **g** e 1.5 = 1 + 0.5 é o comprimento do caminho total de **c** até **h**. A figura 19c abaixo representa o que foi descrito.

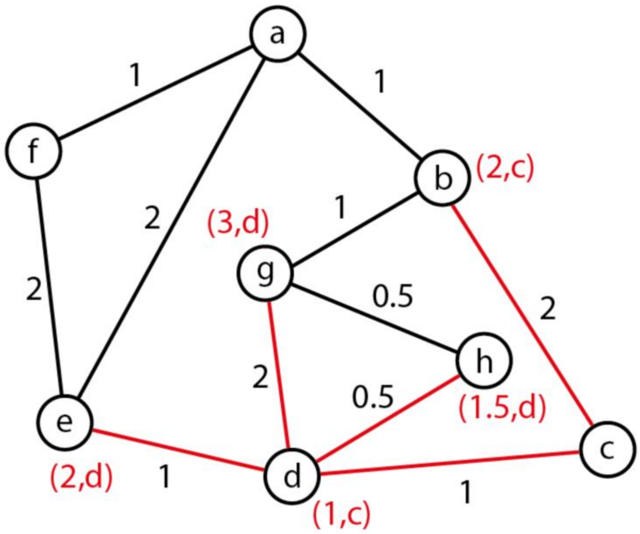


Figura 19c – Grafo exemplo para algoritmo de Dijkstra.

Como agora o vértice final mais próximo de **c** é o vértice **h**, deve-se continuar o processo a partir de **h**. A nova aresta incidente a **h** é **hg**. Já há um caminho de c até g, de comprimento 3. Ao marcarmos a aresta **hg**, o caminho passa a ser 1.5 + 0.5 = 2, o que melhora o caminho que já existia. Então a aresta **dg** deve ser desmarcada, e a aresta **hg** marcada. O vértice **g** deve ser rotulado agora por **(2,h)**. A figura 19d abaixo descreve o que foi escrito.

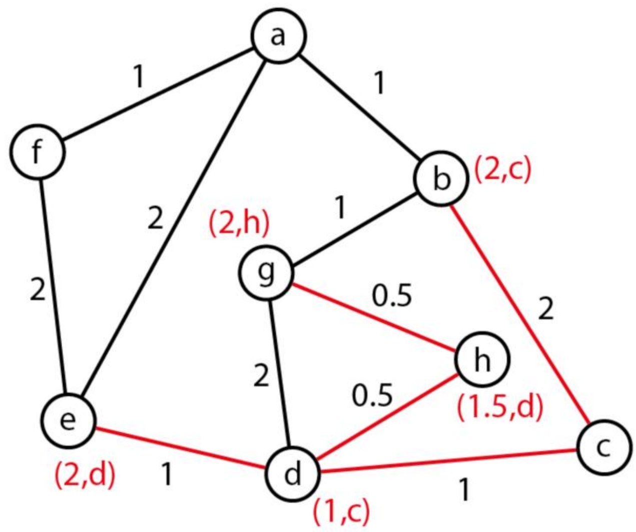


Figura 19d – Grafo exemplo para algoritmo de Dijkstra.

Como todos os vértices finais estão a uma distância 2 de **c**, tanto faz qual se escolhe para o próximo passo; pode-se escolher **b**. As novas arestas incidentes a **b** são **bg** e **ba**. A aresta **bg** criaria um caminho de comprimento 3, o que não melhora o comprimento do caminho de **c** até **g**, que é atualmente 2. Então **bg** não é marcada. A aresta **ba** é marcada, e é adicionado o rótulo **(3,b)** ao vértice **a**. A figura 19e abaixo representa o que foi descrito.

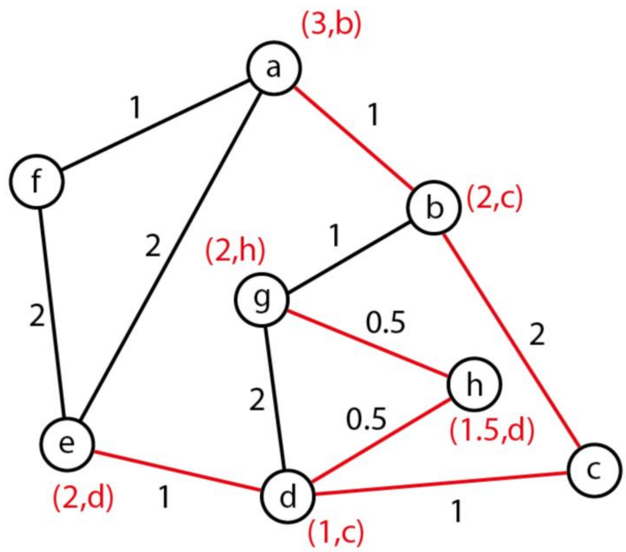


Figura 19e – Grafo exemplo para algoritmo de Dijkstra.

Como o vértice final mais próximo de **c** agora é o vértice **e**, deve-se continuar o processo a partir de **e**. As novas arestas incidentes a **e** são **ea** e **ef**. A aresta **ea** produziria um caminho de **c** até **a** de comprimento 4, e não melhora o caminho que já existe, que é igual a 3. Logo **ea** não é marcada. A aresta **ef** deve ser marcada e o rótulo de **f** deverá ser **(4,e)**. A figura 19f abaixo mostra o que foi escrito.

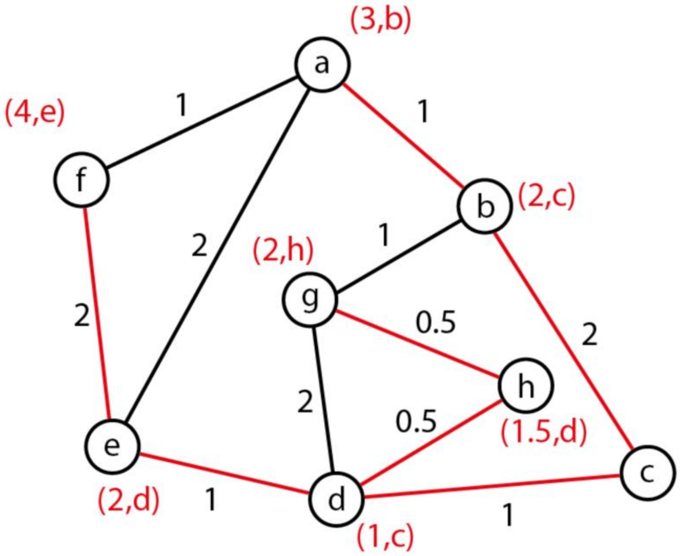


Figura 19f – Grafo exemplo para algoritmo de Dijkstra.

Repare que o vértice final mais próximo agora é o **a**, e a aresta **af** não deve ser marcada, então o procedimento está concluído. O subgrafo em vermelho representa a árvore de menores caminhos partindo de **c**.

2.6 Planaridade

Definição 2.6.1. *Grafo* planar *é aquele que admite uma representação no plano sem qualquer intersecção entre arestas.*

Os sólidos platônicos da figura 20 podem ser representados por grafos planares, como pode ser observado a seguir:

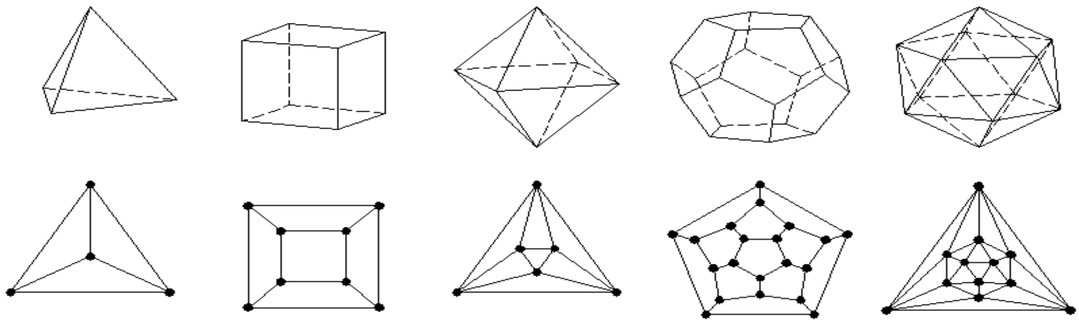


Figura 20 – Sólidos platônicos e seus respectivos grafos associados.

Para grafos isomorfos, podem existir representações em que as arestas se cruzem e outras em que não se cruzem. Por isso, não se pode dizer se um grafo não é planar só porque numa determinada representação as arestas estão cruzadas.

Veja na figura 21 grafos isomorfos a um grafo K_4. Enquanto que, na primeira representação, as arestas se cruzam, na outra tal situação não acontece. Deve-se notar que há outras representações possíveis para K_4.

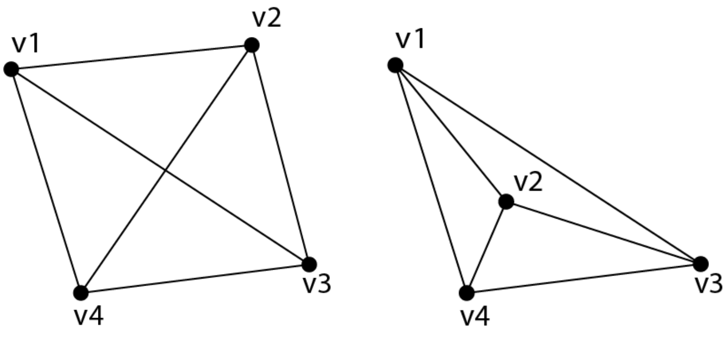


Figura 21 – Grafos isomorfos.

Conclui-se graficamente que K_4 é um grafo planar. Geralmente não é fácil decidir sobre a planaridade de um grafo. Os teoremas sobre grafos planares ajudam a descobrir se um grafo não é planar, mas não nos permitem afirmar se é planar.

Tomando um grafo simples não orientado, as arestas de sua representação determinam divisões do plano em que o grafo está representado. As *faces* do grafo são cada uma dessas regiões do plano do grafo. Existe sempre uma região ilimitada para além do contorno de qualquer aresta. Esta região chama-se de *face infinita* do grafo. Cada face tem um grau, que chama-se *grau da face*, que é o número de arestas que limita uma face. Como cada aresta delimita exatamente duas faces, é imediato concluir que a soma dos graus das faces é igual ao dobro do número de arestas.

Euler descobriu uma fórmula relacionando o número de vértices V, o número de arestas A e o número de faces F de um grafo conexo planar: $V + F - A = 2$. O infortúnio é que a fórmula também pode, eventualmente ser válida para algum grafo não planar, portanto não permite garantir se um grafo é planar. Entretanto, se a fórmula não funcionar então o grafo não é planar.

Teste feito para o caso do grafo K_4, que é um grafo planar. Este grafo tem 4 vértices, 6 arestas e 4 faces. Então: $V + F – A = 2$, fica $4 + 4 – 6 = 8 – 6 = 2$.

Teorema 2.6.2. *Seja G um grafo conexo e planar com V vértices, A arestas e F faces. Então* $V + F - A = 2$. Bondy e Murty (1976, p. 143)

A partir da fórmula de Euler podem ser deduzidas outras relações entre o número de vértices e arestas de um grafo planar, que são bastante úteis para descobrir se um grafo não é planar.

Teorema 2.6.3. *Seja G um grafo conexo e planar com A arestas e F faces. Então* $F \leq \frac{2}{3}A$.

Demonstração: Já se viu que a soma dos graus das faces é 2A. Mas, por outro lado, cada face é limitada pelo menos por 3 arestas. Então a soma dos graus das faces é, no mínimo 3F. Donde $2A \geq 3F$ e, finalmente, $F \leq \frac{2}{3}A$.

Teorema 2.6.4. *Seja G um grafo conexo e planar com V vértices e A arestas. Então* $3V - A \geq 6$.

Demonstração. Tem-se, por um lado a fórmula de Euler V - A + F = 2 e, por outro lado o resultado F $\leq \frac{2}{3}$A .Comparando esse resultado com a fórmula de Euler vem V - A + $\frac{2}{3}$A $\geq$ 2. Ou seja 3V - A $\geq$ 6.

Com este resultado pode-se concluir que K_5 não é planar. Com efeito neste grafo é $V = 5$ e $A = 10$, donde $3V - A = 3 \times 5 - 10 = 5 < 6$.

Veja para que valores de n é que K_n é planar:

$$3V - A = 3n - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{-n^2 + 7n}{2} \geq 6 .$$

Ora esta relação verifica-se como igualdade para $n = 3$ e para $n = 4$ e não se verifica para mais nenhum valor de n inteiro. Portanto todos os grafos completos K_n com $n \geq 5$ não são planares.

Veja mais um resultado interessante sobre planaridade:

Teorema 2.6.5. *Seja G um grafo conexo simples e planar com V vértices e A arestas. Então tem pelo menos um vértice com grau igual ou inferior a 5.* Bondy e Murty (1976, p. 144)

Mesmo com todos estes resultados, não é, muitas vezes, fácil determinar se um grafo é ou não planar. Um dos resultados que mais tem sido utilizado para decidir se um grafo é ou não planar é o teorema de Kuratowski. Para se enunciar o teorema de Kuratowski precisa-se de mais algumas definições.

Definição 2.6.6. *Diz-se que um grafo* sofreu uma modificação por vértices de grau 2 *se retirou ou acrescentou um vértice de grau 2 entre dois outros vértices. Isto é se, sendo c um vértice de grau 2 adjacente a a e a b se retira c unindo a diretamente a b, ou, ao contrário, se insere um vértice c numa aresta entre a e b.*

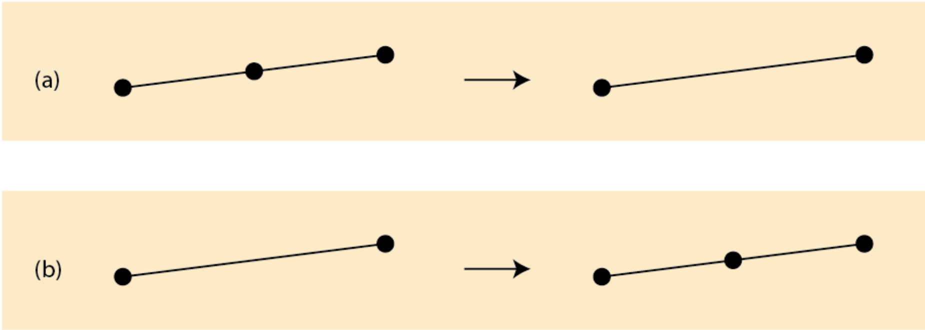


Figura 22 – Modificação por vértices de grau 2.

Na figura 22.a, passa-se de três vértices para dois vértices retirando um vértice de grau 2. Na figura 22.b é feito o contrário, acrescentando uma vértice de grau 2.

Definição 2.6.7. *Dois grafos são* homeomorfos *se um pode ser obtido do outro por modificações de vértices de grau 2.*

Teorema 2.6.8. (Teorema de Kuratowski) *Um grafo não é planar se e só se contém um subgrafo homeomorfo a K_5 ou a $K_{3,3}$.*

Um exemplo interessante de grafo não planar é o grafo de Petersen, que é um grafo não-orientado com 10 vértices e 15 arestas, ele contém um subgrafo que é homeomorfo a um grafo completo $K_{3,3}$, que é obtido na sequência da figura abaixo:

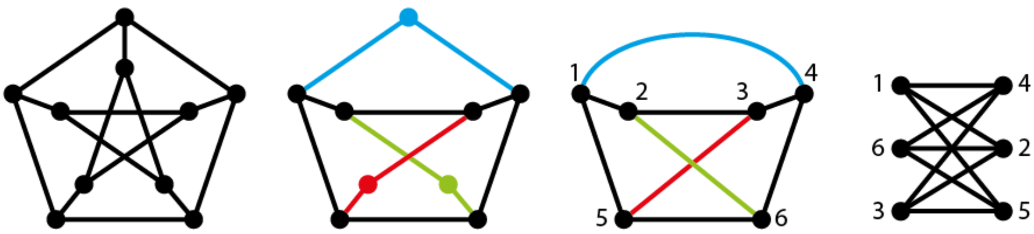


Figura 23 – Mostrando que o Grafo de Petersen não é planar.

Este teorema foi apresentado pelo matemático polaco Kuratowski em 1930. A sua demonstração é bastante longa e complexa e encontra-se em Bondy e Murty (1976, p. 151-156). Tem a virtude de fornecer uma condição necessária e suficiente para a planaridade de um grafo que não é dependente da sua representação gráfica.

Identificar se um grafo contém um subgrafo homeomorfo a um K_5 ou $K_{3,3}$ pode ser complicado, mas identificar um subgrafo isomorfo a um K_5 ou $K_{3,3}$ é bem mais simples, e pode ser utilizado como estratégia para resolução de problemas como, por exemplo, o problema da luz, gás e telefone.

2.7 Coloração de Grafos

Pode-se colorir vértices, arestas e as áreas fechadas compreendidas entre as arestas, as faces. As cores podem significar restrições, pesos, ou outras características, ou ainda podem diferenciar e resolver problemas que envolvam incompatibilidade.

A primeira aplicação consiste numa forma de colorir os vértices de um grafo de tal maneira que não haja dois vértices adjacentes que utilizem a mesma cor; isso é chamado de uma *coloração de vértices*. Veja na figura 24.

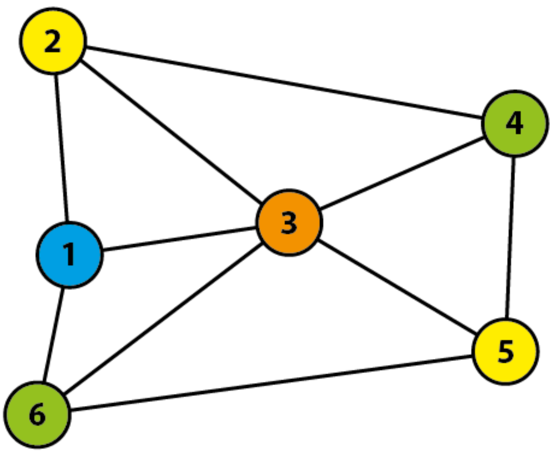


Figura 24 – Coloração de vértices.

É claro que o número máximo de cores necessários para colorir os vértices de um grafo G que possui n vértices é igual a n. Obviamente vértices adjacentes não possuem a mesma cor, pois todas as cores são distintas. Mas a questão real é: qual o menor número de cores que pode ser utilizado para colorir os vértices de um grafo G de maneira que vértices adjacentes não possuam a mesma cor? Este número é o chamado *número cromático*, de G, e é denotado por $\chi(G)$. No grafo acima, $\chi(G) = 4$.

Num grafo planar, as faces (regiões limitadas pelas arestas) podem ser coloridas, e um problema análogo pode ser proposto: qual seria o mínimo de cores necessário para colorir um mapa, de maneira que as faces vizinhas não possuam a mesma cor? (faces que compartilham apenas vértices não são vizinhas. São vizinhas faces que compartilham arestas). A resposta também é 4, e este é um resultado relacionado à coloração de vértices. Por isso o enunciado geralmente é dado da seguinte forma:

Teorema 2.7.1. (Teorema das Quatro Cores) Um grafo planar tem $\chi(G) = 4$.

Com somente quatro cores é possível colorir regiões (faces) de um Grafo sem que faces adjacentes tenham a mesma cor. Veja a coloração das faces na próxima figura (o branco da página também deve ser considerado).

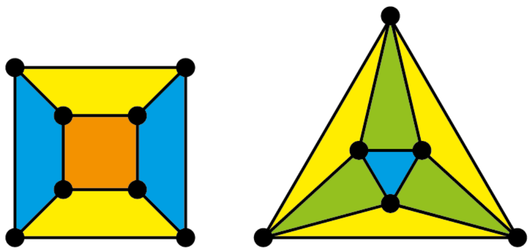


Figura 25 – Exemplos de aplicação do teorema das quatro cores.

3 MATERIAL E MÉTODOS

Uma pergunta a ser respondida é: como ensinar tópicos em Grafos para alunos do Ensino Médio? Para respondê-la, procurou-se fazer um estudo de caso, para verificar a eficácia ou ineficácia da metodologia de aulas a serem propostas, além da viabilidade de abordagem do tema no Ensino Médio.

Com o desenrolar dos trabalhos foi criado um teste diagnóstico preliminar às aulas (disponível no apêndice A), uma sequência de seis aulas de 50 minutos de teoria e prática para a introdução de alguns tópicos que se consideram essenciais dos Grafos (aulas disponíveis neste capítulo), um teste final (disponível no apêndice B), um questionário de avaliação final das aulas práticas e teóricas e os respectivos resultados compilados estatisticamente (apresentados no capítulo seguinte), discutidos sob a luz da TG e do ensino da Matemática nas escolas brasileiras.

3.1 Considerações sobre o Teste Diagnóstico Preliminar

Os testes e as aulas ocorreram em novembro de 2014. Inicialmente, foi aplicado um teste diagnóstico preliminar; este teste está disponível no Apêndice A desta dissertação. Foram escolhidas duas turmas de Ensino Médio de uma Escola Técnica de Cruzeiro – SP, uma de 1º ano e outra de 3º ano, num grupo de aproximadamente 80 estudantes. Escolheu-se uma turma de 1º ano e outra de 3º ano para testar a hipótese da necessidade de pouco conhecimento prévio. O teste diagnóstico preliminar foi composto por questões retiradas da OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas), questões de outras olimpíadas de Matemática e questões presentes nos trabalhos de Jurkwevicz (2009), Feofiloff (2012), Neto (1996) e Diestel (2000). Houve o cuidado de selecionar questões que envolvessem grafos, mas que pudessem ser resolvidas com ou sem o conhecimento da TG, e que ainda fossem adequadas ao nível intelectual (que eles pudessem compreendê-las e fizessem conjecturas sobre elas) dos nossos alunos.

É importante dizer que os alunos de 1º. Ano, objetos do Estudo de Caso, já conheciam ferramentas suficientes para a solução dos problemas propostos, ferramentas estas presentes nos currículos de 5º. ao 9º. ano do Ensino Fundamental, inclusive rudimentos de Análise

Combinatória. Pode-se citar, por exemplo, que os alunos de 1º ano já conheciam o princípio fundamental da contagem.

Cabe ainda ressaltar que cada uma das 6 questões componentes do teste valia exatamente um ponto e que, durante a correção, cada uma delas foi considerada certa ou errada, não sendo pontuada parcialmente.

3.2 Considerações sobre a Metodologia das Aulas

A Metodologia contemplou a colocação de problemas reais trabalhando com objetos concretos, tais como: mapas, jogos e situações-problema, utilização de recursos computacionais como o Google Earth (marca registrada da Google Inc.), jogos que exploram de forma direta ou indireta a TG, ensino da TG, ensino de aspectos da teoria dos jogos ligados à TG, e desenvolvimento de toda a abstração necessária para aprimoramento intelectual compatível para o nível dos alunos, sem esquecer, nível médio.

A metodologia utilizada foi uma sequência composta de seis aulas de cinquenta minutos, totalizando trezentos minutos.

Pretende-se com esta Metodologia disponibilizar informações compiladas como resultado do trabalho de pesquisa científica, disponibilizar modelos de aulas que podem ser usados livremente por professores de escolas do Ensino Médio de todo o país.

Os docentes que porventura fizerem uso destas aulas podem e devem melhorá-las, atualizar as aulas pré-formatadas, resultado deste trabalho de pesquisa. O leitor encontrará o resultado da aplicação desta Metodologia de aulas em uma turma de 1ª ano e outra de 3ª ano de Ensino Médio de uma escola técnica de Cruzeiro, no capítulo seguinte, capítulo 4 – Resultados e Discussões, desta dissertação. Resultados obtidos comparando os testes iniciais, testes finais e questionários em turmas de séries diferentes. Comparando sua experiência pessoal com o resultado deste Estudo de Caso, que não é e nem pretende ser definitivo, o professor experimentador poderá tirar suas próprias conclusões.

As aulas na Escola Técnica, objeto de estudo, têm duração de 50 minutos, tempo que foi suficiente para organizar os alunos no laboratório de informática, passar todas as informações para a solução do problema nos computadores, fazer a chamada dos alunos, além de ter sido suficiente para a conclusão dos alunos e para explanação do professor. É óbvio que cada futuro docente tem plena liberdade e direito de adaptar às condições de sua escola.

3.2.1 Metodologia das Aulas

Procurou-se dividir os assuntos iniciais de TG em 6 aulas de forma que houvesse atividades lúdicas e práticas concomitantes com a introdução de Grafos.

3.2.2 Aula 1

O motivo pela qual se resolveu começar com uma aula de coloração de mapas foi lúdico e remonta às atividades que todos os estudantes faziam na mais tenra infância. Além de ser agradável colorir, é fácil perceber, por tentativa e erro, que o número mínimo de cores para se colorir um mapa qualquer é 4.

A inspiração veio do uso de mapas para colorir como foi feito por Rangel e Pires (2010, p. 3). Vale observar também a utilização de computadores com o Google Earth (aplicativo gratuito pertencente a Google Inc.), a exemplo da aula de Santos (2010), de forma a desenvolver o raciocínio lógico-matemático e para a resolução de problemas, contextualizando e interdisciplinarizando, pois mapas especificamente são objetos de estudo da geografia. O objetivo da aula era fazer com que os alunos tentassem responder à seguinte pergunta: "Qual o número mínimo possível de cores para colorir o Mapa do Brasil, de modo que Estados que façam divisa tenham cores diferentes?"

Podem ser impressos mapas do Brasil em branco para colorir em sala de aula ou pode ser utilizado um laboratório de informática; por exemplo, pode-se usar o programa "Paint Brush" do Sistema Operacional Microsoft Windows, que o contém em todas as suas versões disponíveis até este ano de 2015, a ferramenta "preencher com cor"; o ícone é um balde derramando tinta, conforme figura 26a extraída do programa "Paint Brush" abaixo. Há ainda o mapa do Brasil disponível no site http://www.mapasparacolorir.com.br.

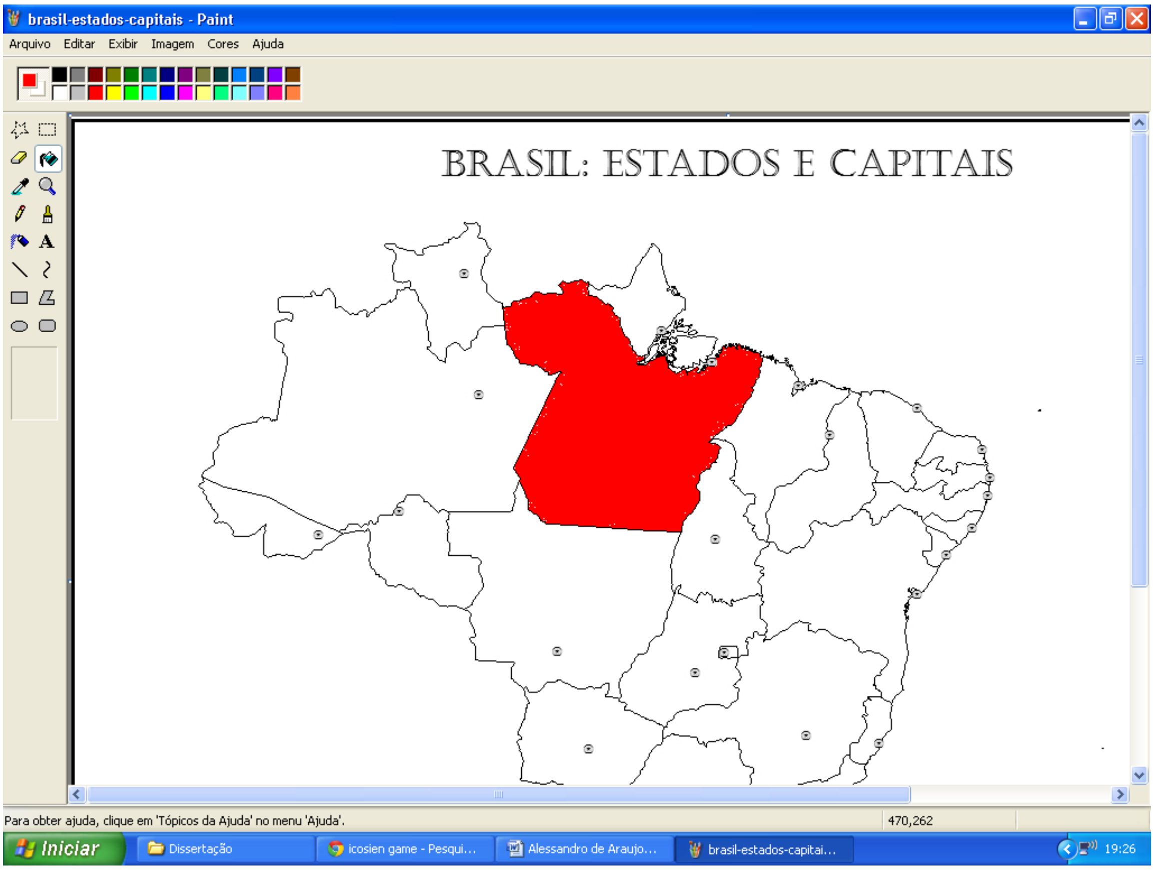


Figura 26a – Mapa do Brasil no programa *Paint Brush*.

Poderia ficar como no exemplo seguinte:

Figura 26b – Mapa do Brasil em branco impresso no programa *Paint Brush*.

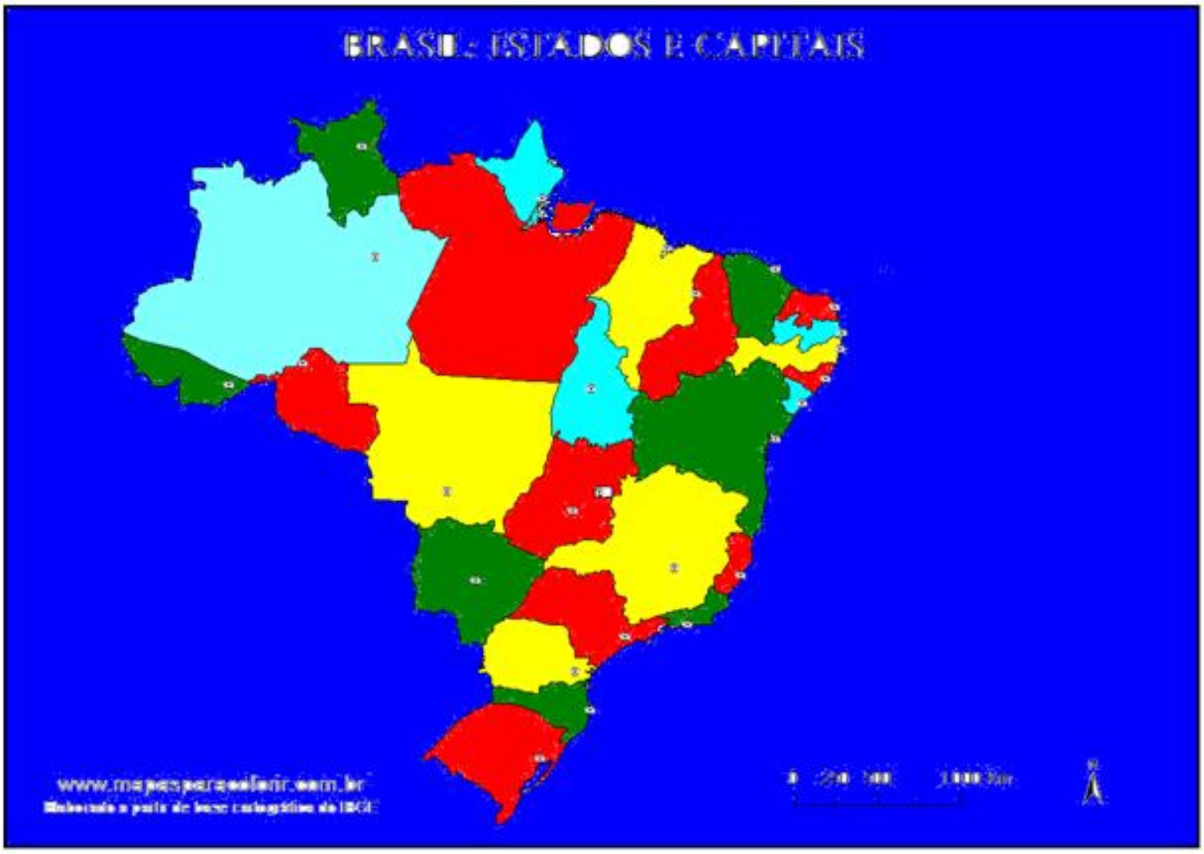


Figura 26c – Mapa do Brasil colorido impresso no programa *Paint Brush*.

Os alunos devem concluir por tentativa e erro que 4 cores seriam suficientes para colorir o mapa sem que estados que façam divisa tenham a mesma cor. Foi comentado que este é um resultado importante da Teoria dos Grafos (o resultado é simples mas a demonstração é difícil) e uma das ligações da Matemática com a Geografia. Foi dito que a Geografia faz extensas aplicações da Matemática: esferas, circunferências, distâncias (latitude e longitude), medidas de todos os tipos (temperatura, umidade do ar, pressão, entre outras, vêm da física, mas a base da física é a Matemática!). Isto tudo configura como oportunidade para conectar conteúdos das disciplinas, construindo a desejada interdisciplinaridade.

Foi explicado o que é um grafo, com a etimologia da palavra que vem do inglês *graph* e significa gráfico, mas, para o português, traduz-se para grafo; Foi dito que eles servem para representar, modelar situações entre conjuntos de objetos e as relações entre estes objetos. Foi dado o exemplo das redes sociais, onde uma pessoa pode ser representada por um ponto que se liga a vários outros pontos, outras pessoas, e foi dito como isto pode gerar uma rede ou um grafo. Foram feitos desenhos com pontos (vértices) e linhas interligando estes pontos (arestas). Foi explicado o conceito de grafo planar de uma forma bem simples, como a de um grafo onde as linhas não se cruzam quando desenhado no plano.

Foram discutidas também as possibilidades ou não de tornar um grafo planar. Introduziu-se neste ponto o conceito de planaridade. Para isto, foram dados os exemplos do globo terrestre planificado no mapa mundi e o de uma molécula de CH4 (gás metano), que tem a forma tridimensional de um tetraedro, mas que pode ser representada com um desenho plano, sem que as ligações se cruzem. No decorrer da aula, foi dada a explicação sobre o que são os vértices, as arestas e os graus dos vértices, foram feitos desenhos de grafos no quadro, foram indicados os vértices e arestas dos mesmos e foi explicado como contar o grau de cada vértice, como contar as arestas. Em seguida foram propostos exercícios para serem feitos no caderno, onde os alunos tinham que contar os graus de cada vértice do grafo dado, somar os graus de todos os vértices e, por fim, contar o número de arestas. Acredita-se nesta base fundamental para a introdução dos rudimentos de Grafos. Ainda foi dito na aula sobre as placas de circuito integrado que dependem de trilhas por onde passa eletricidade e, em grande partes das trilhas, não pode haver cruzamentos. Este é um excelente exemplo citado por Jurkiewicz (2009) para demonstrar a planaridade de grafos; a planaridade foi comentada de maneira informal, nas aulas seguintes ela voltaria a ser trabalhada com os alunos, com o problema das ligações de água, luz e gás.

3.2.3 Aula 2

Objetivo: Retomar os conceitos de vértices e arestas e aprender os grafos eulerianos, semieulerianos e hamiltonianos.

Retomando a aula anterior, foram colocados no quadro novamente desenhos de grafos e foi pedido para os alunos contarem o grau de cada vértice e a soma dos graus dos vértices, e que os alunos contassem também o número de arestas do grafo. Fazendo alguns exemplos, foi perguntado aos alunos qual a relação entre a soma de todos os graus dos vértices e o número de arestas. Depois de induzir os alunos a descobrirem a relação, foi apresentado o teorema: “A soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas”. Finalizou-se esta parte da aula com a pergunta do porquê a soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas. Este momento da aula foi um reforço para o despertar da curiosidade e a provocação para a pesquisa. Entende-se que não se deve demonstrar o teorema neste ponto.

Foram conceituados grafos eulerianos, semieulerianos e hamiltonianos, usando-se desenhos no quadro e propondo percorrer caminhos que passassem por todas as arestas apenas uma única vez; propôs-se aos alunos exercícios para se passar por todos os vértices também uma única vez sem, no entanto, ser obrigado a passar por todas as arestas.

Hamilton inventou o jogo chamado Icosien Game em 1859, segundo Lucas (1979, p. 208 - 234); a versão original tinha como objetivo sair de Londres e percorrer todas as cidades do mundo, passando por cada cidade uma única vez. Existe uma versão *online* deste jogo em computador e celular que é muito mais completa, por isso foi escolhida para utilização em sala de aula.

Foi ensinado aos alunos como jogar o jogo Icosien Game utilizando um *datashow* ligado a um computador com acesso a internet; os alunos foram desafiados e estimulados a terminar de jogar todas as vinte fases até o final como tarefa de casa (também é possível jogar este jogo num celular *smartphone*). Este jogo pode ajudar a desenvolver toda a abstração e raciocínio necessários ao entendimento dos caminhos eulerianos e hamiltonianos, o jogo tem dez níveis de caminhos eulerianos e dez níveis de caminhos hamiltonianos.

Vários sites disponibilizam gratuitamente o jogo para jogar *online*, seguem alguns *links* para este jogo: www.freewebarcade.com/game/icosien/ , play.escapegames24.com/2010/06/icosien.html , games144.com/game/17183-icosien-game.php e math-fail.com/2010/08/icosien-game.html

Abaixo uma imagem do Jogo Icosien, mostrando a fase 7 de 20 fases no total.

Figura 27- Jogo Icosien Disponível em:
<http://www.freewebarcade.com/**game/icosien**/>. Acesso em: 5 maio 2014.

Não existe versão deste jogo em português, portanto foram preparadas a seguir instruções básicas traduzidas, para auxiliar os alunos. O professor deve lembrar que os alunos estudam inglês, e aí há mais uma oportunidade para a interdisciplinaridade. Foi dito aos alunos que a esmagadora maioria dos sites, jogos e informações relevantes estão escritos em língua inglesa, daí a importância de se estudar o inglês, que é a língua universal. A aula foi concluída falando um pouco dos dois tipos de Grafos explorados no jogo, eulerianos e hamiltonianos.

Foi proposta nesta aula como tarefa de casa tentar jogar o jogo Icosien e passar por todos os níveis.

Como já dito, foram usados recursos multimídia, a saber um *datashow*, para projetar alguns dos níveis e explicar as diferenças entre os caminhos eulerianos e hamiltonianos, utilizando a linguagem da TG.

A fase 1 até a fase 10 do jogo o caminho é euleriano, então você tem que passar em cima de todas as linhas passando uma única vez em cada linha e em todos os vértices, que são as tachinhas pregadas no tabuleiro, você pode passar mais de uma vez em um vértice. Da fase 11 em diante há caminhos hamiltonianos, então é necessário passar por todas as tachinhas, todos os vértices uma única vez, mas nestes níveis é necessário passar por cima de todas as linhas. Clique sobre o ponto que deseja começar e mova o mouse pelos pontos restantes. Clique 2 vezes para recomeçar se necessário. Clicando com o botão contrário do *mouse*, você acessa o menu de propriedades, onde é possível começar a fase novamente, iniciar da 1ª fase, voltar à fase anterior ou ir para a próxima fase.

Neste momento da aula um aluno sugeriu que se jogasse o jogo Parking Zone (“zona de estacionamento” em tradução livre), cujo objetivo é estacionar os veículos coloridos nas garagens de suas respectivas cores, fazendo corresponder as cores. A sugestão foi aceita porque as garagens são vistas como vértices e as ligações entre elas como arestas, o jogo provou-se interessante e motivador para os alunos. Ele pode ser encontrado, por exemplo em: mrjogos.uol.com.br/jogo/**parking-zone**.jsp

Para concluir esta 2ª aula, mesclou-se o jogo com a explanação da teoria.

Depois de dar exemplos de como uma empresa usa isto no mundo de hoje (contextualização), foi usado e complementado o exemplo de Jurkiewicz (2009, p.1-2), sobre um caminhão de lixo que precisa percorrer várias ruas e voltar ao ponto de partida, sem evidentemente repetir as ruas (exemplo de circuito euleriano). Este exemplo ensina como fazer a coleta de lixo de forma econômica, já que o caminhão vai passar somente uma vez em cada rua, passando obrigatoriamente por todas as ruas, ele vai coletar o lixo gerado por todas as residências e estabelecimentos comerciais gastando a menor quantia possível de combustível e de tempo. O problema foi discutido de forma contextualizada com os alunos e foi proveitoso, porque foi possível induzir os discentes a chegar a estas conclusões. Foram feitas indagações do tipo: Um caminhão de lixo deve passar por todas as ruas? Se ele passar por uma rua várias vezes não vai gastar mais combustível? Se o caminhão de lixo é obrigado a passar por todas as ruas, qual a melhor maneira de gastar menos dinheiro e voltar ao ponto de partida, no caso o estacionamento? Mostrou-se a economia de combustível, a economia do ponto de vista ambiental, das horas de trabalho e os benefícios para todos. Ainda foram discutidos os melhores horários para evitar o trânsito e atrapalhar menos os outros veículos, sem esquecer-se de dar oportunidade de renda aos catadores e recicladores do lixo seletivo.

3.2.4 Aula 3

Os estudantes foram apresentados ao clássico problema das três casas ligadas a água, luz e gás. O problema foi colocado no quadro e foi feito o esboço do desenho. Foi pedido para que os alunos copiassem nos cadernos, explicou-se que as linhas não podiam se cruzar e que as ligações deveriam ser feitas diretamente das centrais de água, luz e gás para as casas, ou seja, não poderiam ser feitas extensões, e que ainda não poderiam passar por baixo ou por cima, o desenho tinha que ser plano. Foi pedido aos alunos que tentassem resolver antes de dizer que era impossível e explicar as razões; aos alunos foi dado um tempo de 20 minutos para que chegassem às respostas. Depois explicou-se que era impossível, pois configura um grafo não planar do tipo $K_{3,3}$. Foi dado o exemplo de que uma empresa de placas de circuito integrado, precisa muitas vezes fazer as placas com mais de uma camada porque as ligações elétricas e eletrônicas entre os componentes não podem se cruzar.

Durante esta aula foram introduzidos rapidamente alguns conceitos e tipos de grafos, laços, grafos simples, isomorfismo. Foram feitos desenhos de exemplos de Grafos num quadro branco, utilizou-se canetas coloridas e foram pedidas opiniões aos alunos.

Nesta aula, o docente pode propor o desafio no quadro ou levar os alunos em um laboratório de informática e pedir para os alunos tentarem resolver esse problema *online* que está disponível e é gratuito em vários sites. Segue exemplo na figura abaixo:

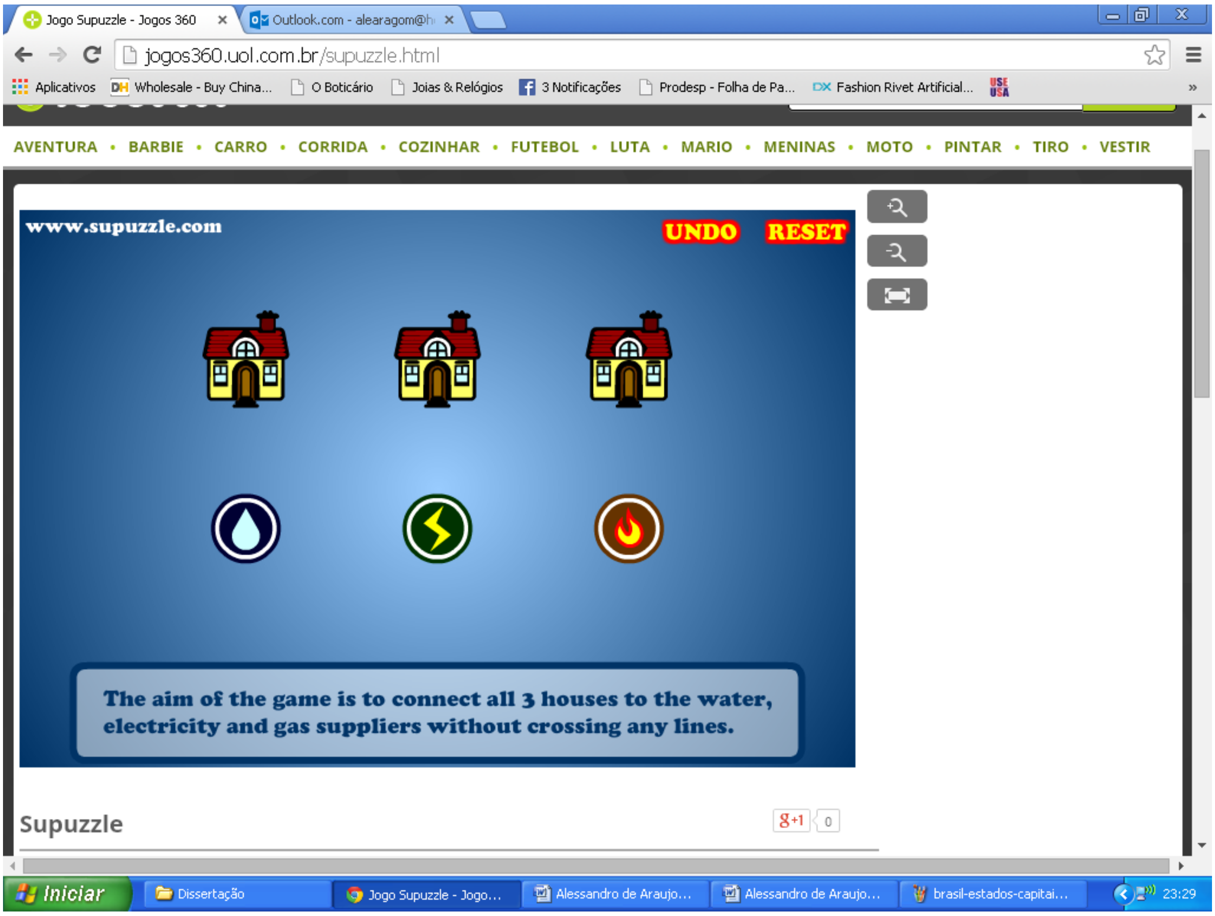


Figura 28 – Problema de ligar as 3 casas à água, à luz e ao gás. Disponível em: <http://jogos360.uol.com.br/supuzzle.html>. Acesso em: 6 maio 2014.

Foi apresentado nesta aula o problema das Pontes de Königsberg, e foi pedido para os alunos tentarem montar o modelo matemático correspondente em grupos de 3 a 5 estudantes, ou seja, quem seriam as arestas e os vértices? Este problema retoma o assunto de grafos eulerianos que foi tratado na aula 2.

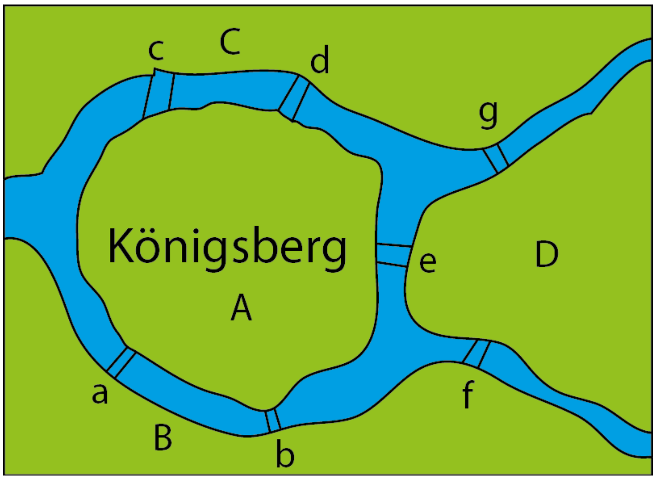


Figura 29 – Modelo das pontes de Königsberg - Retirada de www.inf.ufsc.br

O professor perguntou o porquê da impossibilidade de resolução destes problemas, em seguida referendou a TG, que prova a impossibilidade.

Para motivar e despertar ainda mais a curiosidade foi sugerido como exercício a modelagem deste cruzamento de seis avenidas transformado em passarela elevada para pedestres na Cidade de Shangai, China. A passarela elevada é acessada por meio de cinco escadas rolantes que interligam as cinco áreas onde circulam pedestres. Este é um exemplo de um problema muito atual e inovador.

Figura 30 – Passarela elevada em Shangai – China. Disponível em: < https://encrypted-tbn3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcTeEdFfHBdqM6pcRd8f21jrdHH_oFbkMLllm7YwYNYLqwJr9VWcKw >. Acesso em: 6 junho 2014.

Identificando as cinco áreas por onde circulam pedestres como vértices, as cinco escadas que levam até a passarela elevada seriam as arestas. Como todas as arestas estão interligadas pela passarela elevada circular, uma possível modelagem seria um grafo K_5 da figura 31.

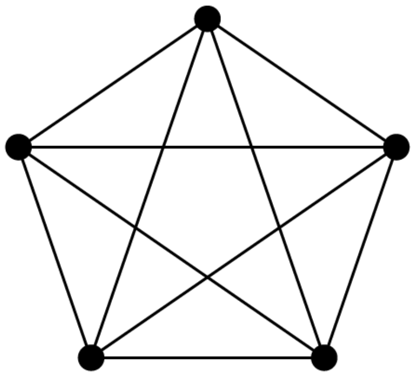


Figura 31 – Grafo K_5.

A tarefa proposta para casa foi listar cinco situações do cotidiano em que os Grafos surgem naturalmente, este exercício foi retirado de Bondy e Murthy (1976, p.4).

Uma solução da tarefa para casa é: 1) redes de energia elétrica. 2) rede de telefonia fixa. 3) rede de telefonia celular. 4) Entrega de correspondência e encomendas pelos correios. 5) Uma rede social.

3.2.5 Aula 4

Objetivo: Compreensão do Algoritmo de Dijkstra, que é o que o Google Maps ou um GPS faz para encontrar o menor caminho. Foi utilizada a ideia de que um subcaminho de um menor caminho, também é um menor caminho.

Nesta aula foi pedido para os alunos mostrarem o caminho de sua casa até a escola, utilizando o Google Maps (aplicativo da Google Inc.), disponível em http://www.google.com.br.

Por exemplo:

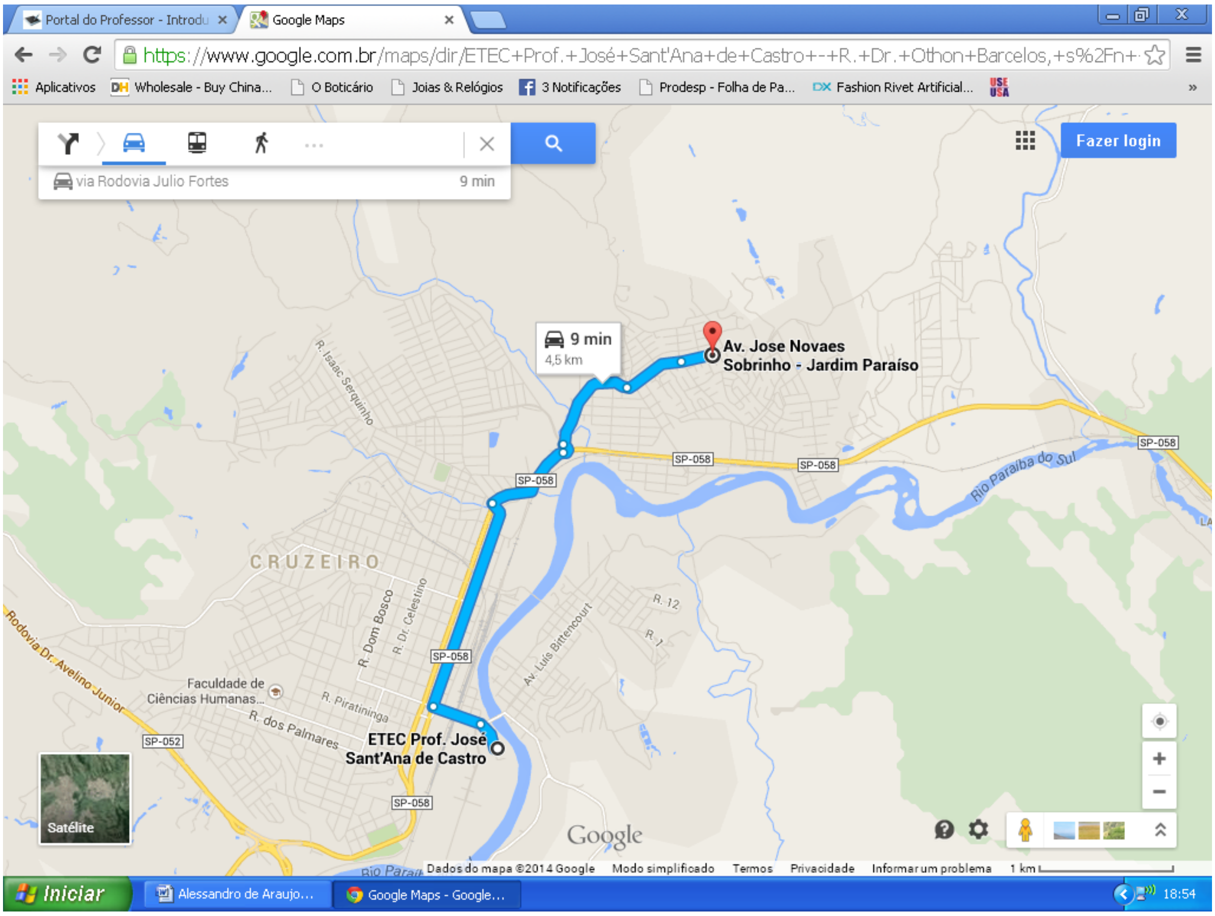


Figura 32 – Exemplo de caminho no Google Maps.

Foram marcados ainda vários pontos públicos do centro da cidade de Cruzeiro – SP com letras diferentes e feita a associação destes pontos com vértices. Então, mostrou-se as ligações entre estes vértices. É possível também associar o problema do carteiro, marcando o prédio dos correios e traçando uma rota onde o carteiro passe somente uma vez em cada ponto marcado anteriormente para entregar as correspondências.

Por exemplo:

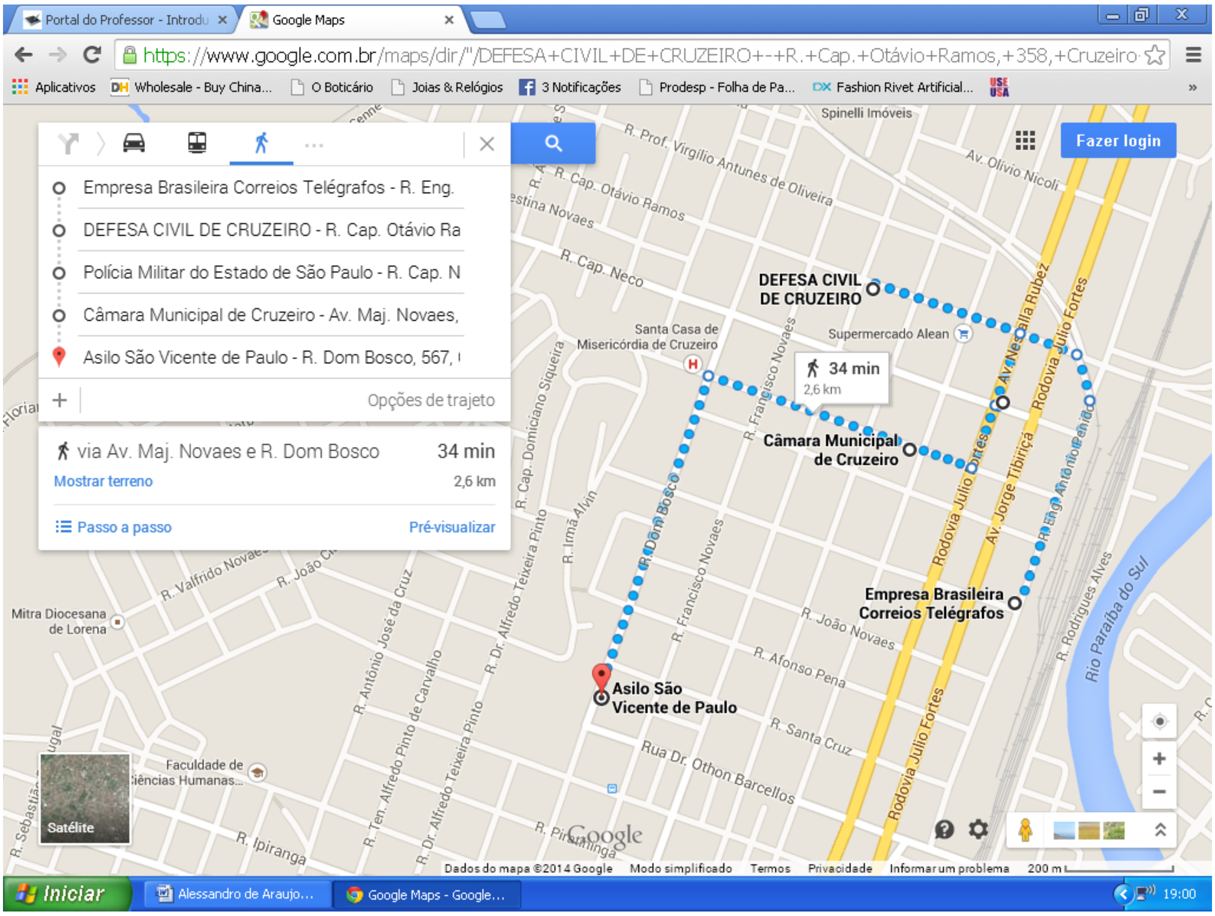


Figura 33 – Outro exemplo de caminho no Google Maps.

Para reforçar os conceitos básicos de vértice, aresta, ligação entre vértices contextualizou-se novamente. Foi apresentada a ligação com a química, mostrando que as moléculas podem ser vistas como Grafos, conforme figura 34, onde os átomos são os vértices e as ligações entre eles as arestas.

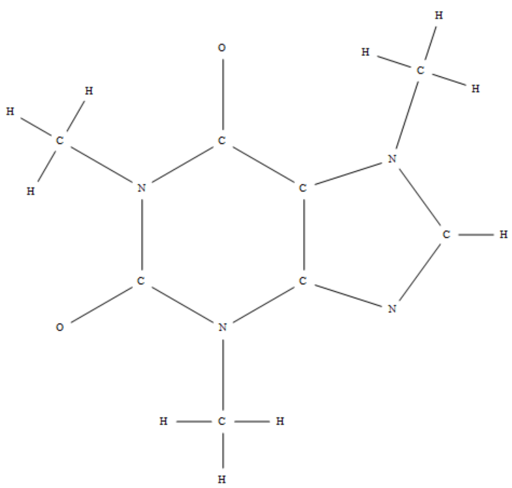


Figura 34 – Molécula desenhada em forma planar.

Apresentou-se o algoritmo de Dijkstra utilizando o material explicado no capítulo 2, seção 2.5.

3.2.6 Aulas 5 e 6

Foram aulas basicamente de resolução de exercícios. Nas últimas duas aulas foi dada mais ênfase na modelagem Matemática e na resolução e solução de problemas. Entre a quinta e sexta aulas deixaram-se os dois últimos problemas como tarefa. Foram resolvidos os seguintes problemas, começando com este da OBMEP:

Problema 1:

77 | Amigos que você pode Contar!

Considere um grupo de 15 pessoas. É possível que cada uma delas conheça exatamente:

(a) 4 pessoas do grupo?

(b) 3 pessoas do grupo?

(Admita que se A conhece B então B conhece A.)

Sugestão: Mostre que a situação do item (a) é possível e a do item (b) não.

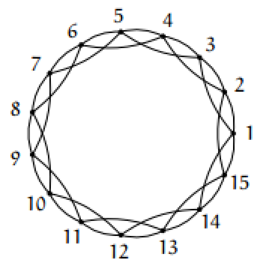


Figura 77.1

Solução:

(a) É possível. Representamos as 15 pessoas por pontos, conforme o diagrama ao lado. Um arco entre dois pontos significa que as duas pessoas representadas se conhecem. Como cada ponto está ligado a dois pontos à esquerda e a dois pontos à direita, saem quatro arcos de cada ponto, o que significa que é possível que cada pessoa conheça exatamente 4 pessoas do grupo.

(b) Não é possível! Vamos representar as pessoas por pontos. Ligamos dois pontos se as pessoas representadas se conhecem. Quantos arcos vamos precisar traçar para representar todas as amizades? Cada ponto é extremidade de 3 arcos, resultando num total de $15 \times 3 = 45$ arcos que saem de todos os pontos. Porém, nesta contagem, cada arco foi contado duas vezes, nas duas extremidades. Portanto, o número de segmentos deve ser $45/2$, o que é um absurdo, pois este número não é inteiro.

Figura 35 – Problema da OBMEP. Imagem disponível em: <http://www.obmep.org.br/banco_questoes.do>. Acesso em: 25 maio 2014.

Problema 2: (BRIA, 1998), Num congresso cogita-se oferecer 7 minicursos a serem confirmados ou não em função das seguintes condições impostas: (i) A cada dia deve haver sessões de todos os minicursos cada um em horário fixo; (ii) O horário de cada minicurso será 8:00/9:30, 9:30/11:00, 11:00/12:30,14:30/16:00 ou 16:00/17:30; (iii) Sendo 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 os minicursos, não podem ter mesmo horário: 1 com 3, 4, 6 e 7; 2 com 3, 5 e 7; 3 com 1, 2, 5, 6 e 7; 4 com 1, 5, 6 e 7; 5 com 2, 3, 4 e 7; 6 com 1, 3 e 4; 7 com 1, 2, 3, 4 e 5. Pode-se dar os 7 minicursos, isto é, há horários para eles sob as condições impostas? Se SIM, dê o número mínimo de horários (exemplifique-os) a se usarem.

Solução: Usar a modelagem com as arestas representando a restrição de não poder ter curso no mesmo horário, aí basta achar o número mínimo de cores que será então o número mínimo de horários, segue a solução por coloração de vértices:

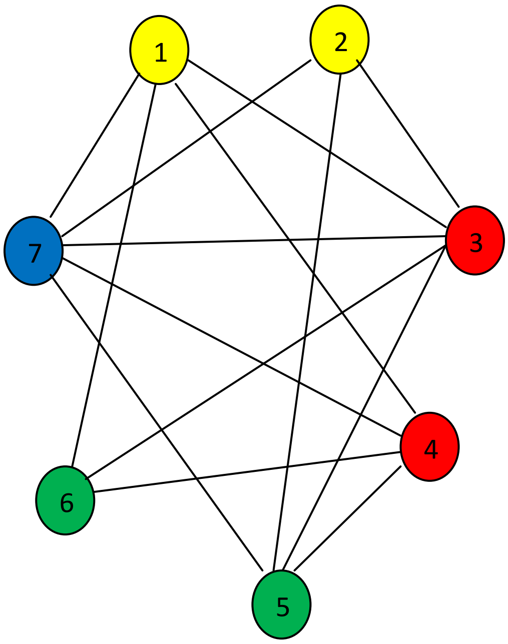


Figura 36 – Solução do problema 2 por coloração de vértices.

Problema 3: - (ALDOUS, WILSON, 2000), Dispondo suas pedras como de costume, pode-se "fechar" (não sobrem pedras) o jogo de dominó de modo que o último número da última pedra "encoste-se" no primeiro número da primeira pedra.

Solução: como cada vértice de um grafo pode ser um número de 0 a 6 tem-se um grafo completo K_7, onde todos os graus são pares inclusive contando os laços de cada vértice, que são as pedras 00, 11, 22, 33, 44, 55, 66, logo existe um circuito euleriano e dá para "fechar" o jogo de dominó de modo que o último número da última pedra "encoste-se" no primeiro número da primeira pedra.

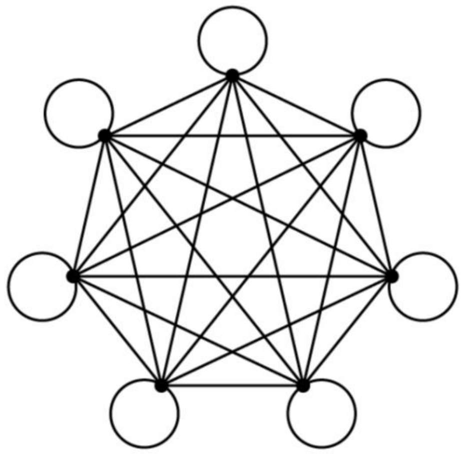


Figura 37 – Solução por Grafo K_7 com laços.

Problema 4: - (BRIA, 2001): Mostra a ligação dos Grafos com a língua portuguesa. Do grande poeta brasileiro Carlos Drummond de Andrade são os versos "João amava Teresa, que amava Raimundo, que amava Maria, que amava Joaquim, que amava Lili, que não amava ninguém". Represente graficamente esta situação, só com bolinhas e linhas, com os nomes de cada pessoa numa bolinha.

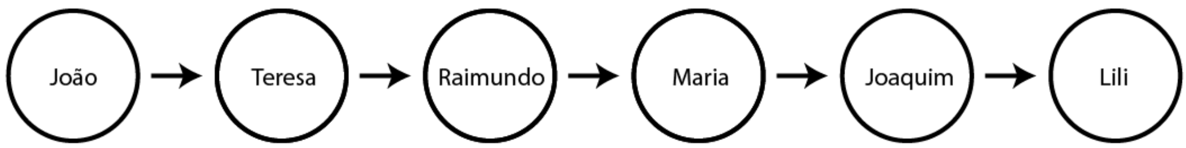


Figura 38 – Solução problema 4.

Este problema 4 relaciona a Matemática com a língua portuguesa. O professor disse para os alunos na correção deste problema que é muito importante conhecer o idioma, pois se você não compreende corretamente a linguagem não conseguirá modelar o problema para solucioná-lo.

3.3 Considerações Sobre o Teste Final

Para o teste final (disponível no apêndice B), procurou-se formular e usar questões que fossem de mesmo nível do teste inicial.

Após a sequência de 6 aulas de 50 minutos, foi aplicado um teste final para averiguar se houve evolução ou não dos estudantes nos Tópicos em Teoria de Grafos. É importante frisar que os 2 testes da presente dissertação procuraram sempre contextualizar e interdisciplinarizar os conteúdos relevantes do Ensino Médio das escolas públicas do estado de São Paulo.

Ressalta-se que cada uma das 6 questões componentes do teste final valia exatamente um ponto, assim como no teste diagnóstico inicial ou preliminar, e que seriam consideradas certas ou erradas, não sendo pontuadas parcialmente.

3.4 Considerações Sobre o Questionário de Pesquisa

Por fim, foi aplicado um questionário sobre a prática das aulas (disponível no apêndice D), sobre ensino da Matemática e sobre a TG. Os resultados foram então compilados no capítulo Resultados e Discussões e muitas observações foram inferidas a respeito da eficácia ou não da Metodologia proposta.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Procurou-se seguir o cronograma do projeto de dissertação, mas nem sempre foi possível, já que a escola tem calendário próprio e situações inesperadas ocorreram; com isso adaptações precisaram ser feitas. Também é importante observar que as aulas foram planejadas de um jeito, mas, na prática, elas evoluíram e tiveram que ser adaptadas no momento de seus desenvolvimentos. Todavia, acredita-se que os objetivos foram plenamente alcançados.

Um problema inicial era: Como ensinar Tópicos de Grafos no Ensino Médio? Ele foi mantido e uma sequência de aulas realmente surgiu como resultado.

Trabalhou-se com as hipóteses:

1) Como Tópicos de Grafos exigem poucos conhecimentos prévios pode estimular alunos com deficiência em linguagem Matemática.

2) Como os problemas que podem ser solucionados utilizando-se Tópicos de Grafos são problemas do cotidiano, que são contextualizáveis, eles podem ser motivadores aos alunos do Ensino Médio.

Por ser fácil construir a interdisciplinaridade com problemas do cotidiano envolvendo a solução através da TG, um resultado adicional esperado é que a TG ajuda no atendimento das Diretrizes Curriculares Nacionais, DCN.

4.1 Compilação dos Resultados

O primeiro resultado foi obtido com a aplicação do teste inicial com tempo disponível de uma aula. Lembrando que esse teste continha 6 questões, obteve-se o seguinte resultado geral: média de 2,11 acertos com tempo médio de resolução de 38,19 minutos para o 1º ano e 2,34 acertos em média, com tempo médio de resolução de 46,51 minutos para o 3º ano. Observando cada prova com seu respectivo tempo de resolução não houve correlação significativa entre o tempo de resolução da prova e o número de acertos por prova (-0,16 para o 1º ano e 0,10 para o 3º ano), isso em ambas as turmas. Neste primeiro teste, observou-se que os alunos do 3º ano usaram mais tempo para tentar resolver as questões. No apêndice E, apresenta-se uma tabela com a compilação dos dados do teste inicial.

Depois de efetivamente concluída a Metodologia de aulas, aplicou-se o teste final, durante uma aula, nas mesmas duas turmas pesquisadas. O objetivo era verificar se tinha havido ou não evolução na aprendizagem sobre o tema abordado. O teste final também contou com 6 questões (procurou-se manter o mesmo nível de dificuldade nos testes) e resultou no seguinte: média de 4,54 acertos, com tempo de resolução médio de 28,79 minutos para o 1º ano e 5,09 acertos, com tempo de resolução médio de 27,43 minutos para o 3º ano. Observando-se individualmente as provas com seus respectivos tempos de resolução não houve correlação significativa entre o tempo de resolução e o número de acertos de cada prova (0,38 para o 1º ano e -0,11 para o 3º ano). No apêndice F há uma tabela com a compilação dos dados do teste final.

Em ambos os testes de seis questões cada, procurou-se, na 1ª questão, abordar o tema da coloração de mapas. Na 2ª questão o objetivo era explorar o conceito de caminho euleriano. Explorou-se em ambos os testes o mesmo conceito na 6ª questão, o algoritmo de Dijkstra. A 3ª questão foi diferente nos testes iniciais e finais, explorou-se a planaridade no teste inicial e caminhos no teste final. As 4ª e 5ª questões foram trocadas nos testes, mas exploraram os mesmos assuntos, na questão 4 do teste inicial temos problema de combinatória que equivale a questão 5 do teste final, e por fim a questão 5 do teste inicial equivale a 4 do teste final, com ambas tratando de representação em forma de gráfico mesmo.

Comparando os dois testes constatou-se uma melhora significativa dos resultados e menor tempo de resolução dos testes em ambas as turmas, confirmando a hipótese de que a Metodologia específica para a introdução à TG teve bons resultados pelos menos nestas duas turmas e nas condições do experimento. Cumpre observar que este resultado não pode ser considerado definitivo, pois existem muitas variáveis que podem interferir neste tipo de experimento, já que aulas, mesmo preparadas e planejadas, são subjetivas e dependem muito do trabalho do professor, da motivação do professor, da motivação dos alunos, do fato dos alunos saberem que era um experimento, entre outras variáveis inerentes a esta condição.

Houve evolução em quase todas as questões, com exceção da questão 5 do teste inicial que corresponde à questão 4 do teste final, houve diminuição percentual de acertos, em ambas as turmas. Provavelmente deve-se ao nível mais elevado de dificuldade da questão 4 do teste final.

A tabela a seguir ilustra estas considerações.

Teste inicial			Teste final		
1º Ano	Acertos	%	1º Ano	Acertos	%
Q 1	10	27,03%	Q 1	28	71,79%
Q 2	16	43,24%	Q 2	20	51,28%
Q 3	10	27,03%	Q 3	37	94,87%
Q 4	0	0,00%	Q 4	27	69,23%
Q 5	37	100,00%	Q 5	32	82,05%
Q 6	5	13,51%	Q 6	39	100,00%
37 testes			39 testes		

Teste inicial			Teste final		
3º Ano	Acertos	%	3º Ano	Acertos	%
Q 1	13	37,14%	Q 1	34	97,14%
Q 2	22	62,86%	Q 2	29	82,86%
Q 3	8	22,86%	Q 3	32	91,43%
Q 4	3	8,57%	Q 4	26	74,29%
Q 5	33	94,29%	Q 5	23	65,71%
Q 6	2	5,71%	Q 6	34	97,14%
35 testes			35 testes		

Tabela 1 – Número de acertos por questões (Q) e por turma nos testes inicial e final.

Aparentemente não houve diferença significativa de desempenho entre o 1º ano e o 3º ano, apesar do 3º ano ter ido ligeiramente melhor nos dois testes em número de acertos, indicando que os dois anos a mais de estudo dos alunos dos 3º ano não melhoraram significativamente as habilidades de resolução de problemas ou habilidades de modelagem Matemática, habilidades estas praticadas durante todo conteúdo programático de Matemática que é explorado no Ensino Médio.

O tempo de resolução do teste por parte dos discentes foi um pouco diferente no teste inicial, conforme já mencionado, e mais próximo no teste final, isto pode significar maior empenho dos alunos do 3º ano no teste inicial (eles demoraram mais tempo), mas no teste final as médias ficaram muito próximas, isto pode indicar também que a diferença de dois anos de estudos não foi uma grande vantagem para os alunos teoricamente mais experientes do 3º ano.

Como as turmas tiveram o mesmo conteúdo era de se esperar uma maior rapidez na resolução do teste diagnóstico final por parte dos alunos mais experientes do 3º ano, mas para surpresa não foi o que aconteceu.

Claramente a hipótese de se exigir poucos conhecimentos prévios foi confirmada, os conhecimentos prévios se restringiam a abstrair objetos como pontos (vértices) e as ligações entre objetos como linhas (arestas), direcionados ou não. Os dois testes, o teste inicial e o final, bem como o questionário mostraram que houve um estímulo muito forte nas duas turmas do experimento. As turmas de 1º ano e 3º ano do Ensino Médio tiveram resultados muito próximos, o que reforça o argumento da necessidade de se ter poucos conhecimentos prévios para estudar alguns tópicos de introdução à TG. Já que era de se esperar que os alunos de 3º ano fossem melhor devido à maior carga de conhecimentos de Matemática de dois anos a mais.

Uma boa surpresa foi constatar a motivação e a nova vontade dos alunos em estudar Matemática com um tema diferente e que fugia dos assuntos comuns dos conteúdos de Matemática do Ensino Médio. Alunos que costumavam desprezar as aulas passaram a se interessar por elas, pelo menos aparentemente.

Os questionários foram aplicados nos dias 20 e 21 de novembro de 2014, logo após o término dos testes diagnósticos finais. Quanto ao questionário de pesquisa, será feita a discussão de cada uma das questões.

1) Você ficou mais interessado em Matemática estudando a Teoria dos Grafos?

( ) sim ( ) não

O objetivo desta pergunta foi sondar o aumento ou não do interesse geral dos alunos pela Matemática. Tradicionalmente a disciplina de Matemática é vista como difícil e pouco estimulante, por isso foi testado se a TG poderia ajudar a desmistificar estas duas ideias do senso comum dos alunos. O resultado foi muito melhor do que o esperado observando os gráficos a seguir.

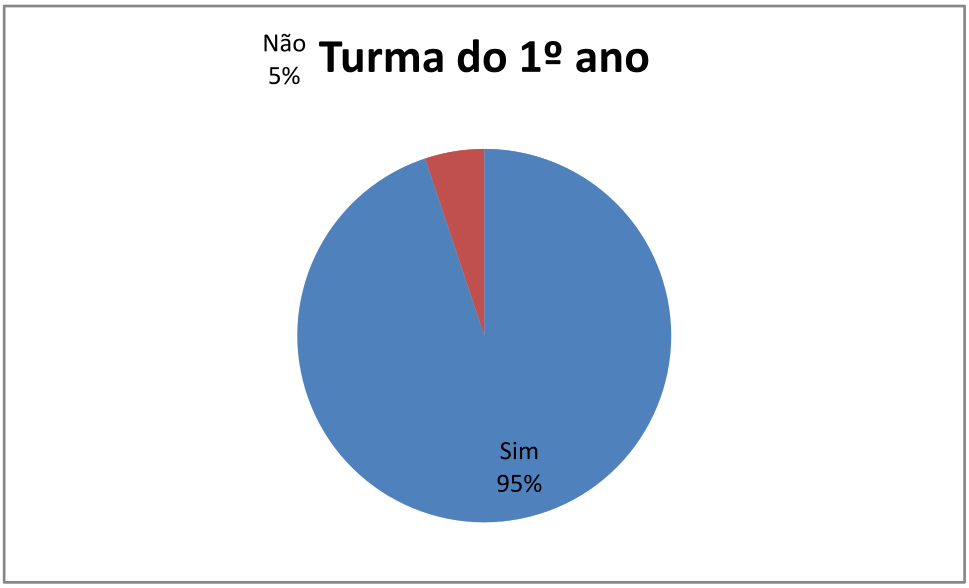


Figura 39 – Gráfico das respostas do 1º ano da questão 1 do questionário de pesquisa.

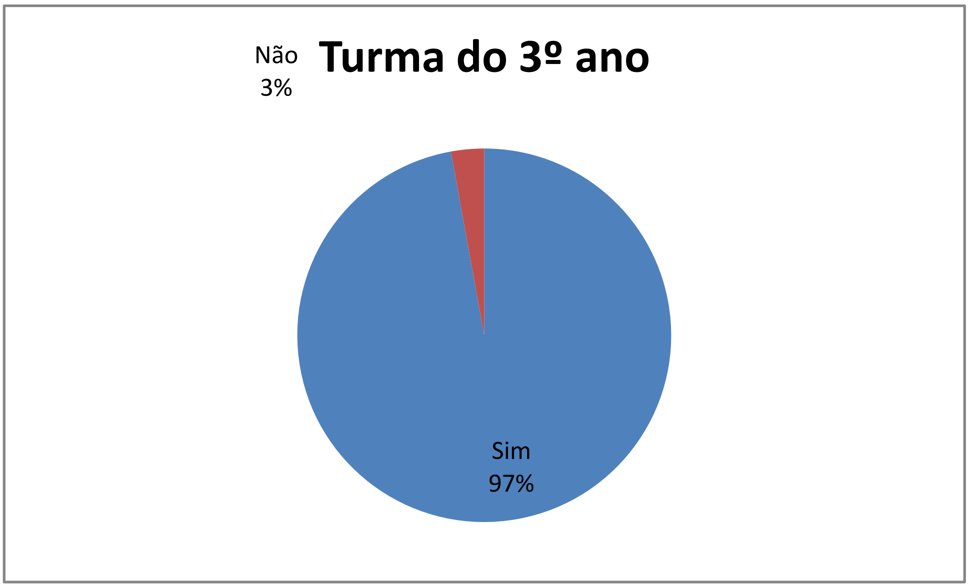


Figura 40 – Gráfico das respostas do 3º ano da questão 1 do questionário de pesquisa.

Pode-se observar que a grande maioria das duas turmas acha que ficou mais interessada em Matemática estudando a TG.

Com relação à questão número dois que foi:

2) Qual a área mais interessante para você em Teoria dos Grafos?

( ) Coloração de Mapas

( ) Caminhos de ligação entre vértices

( ) Descobrir o menor caminho

( ) Aplicação da Teoria dos Grafos em outras áreas do conhecimento

( ) Tipos de Grafos

Foi explicado para os alunos que eles poderiam escolher somente uma das alternativas.

O objetivo era identificar o que atraiu mais a atenção dos alunos para que futuros professores-pesquisadores de Matemática, que porventura se aventurem nesta área, possam focar melhor a introdução à TG, de modo a adequar melhor as aulas nos assuntos mais interessantes, pelo menos para os alunos em questão.

O resultado mais expressivo para as duas turmas que foi "Caminhos de ligações entre vértices" que está intimamente ligado aos caminhos e circuitos eulerianos e os caminhos hamiltonianos. Este assunto foi explorado de forma direta e indireta em quase todas as 6 aulas da sequência e ainda é o cerne do jogo Icosien. É curioso notar que jogos, de forma lúdica, podem introduzir conceitos dos mais simples aos mais sofisticados, e ainda aprofundar o entendimento e compreensão de conceitos.

Já o segundo resultado para ambas as turmas foi "Descobrir o menor caminho", que é um problema que não só envolve o menor caminho, muitas vezes é preciso encontrar o melhor caminho. Como foram dados vários exemplos durante as aulas, isto pode explicar esta segunda preferência. Foi falado sobre o Algoritmo de Dijkstra, mas este assunto não foi aprofundado.

No terceiro item de mais relevância para as turmas houve divergência, a turma de 1º ano preferiu coloração de mapas e a de 3º ano aplicação da TG em outras áreas, esta divergência pode ser resultado da visão de mundo mais abrangente da turma mais avançada em nível escolar, ou até mesmo a ênfase nos assuntos que o professor deu de maneira diferente para as turmas; esta última é uma variável difícil de controlar. Os resultados podem ser conferidos nos gráficos a seguir.

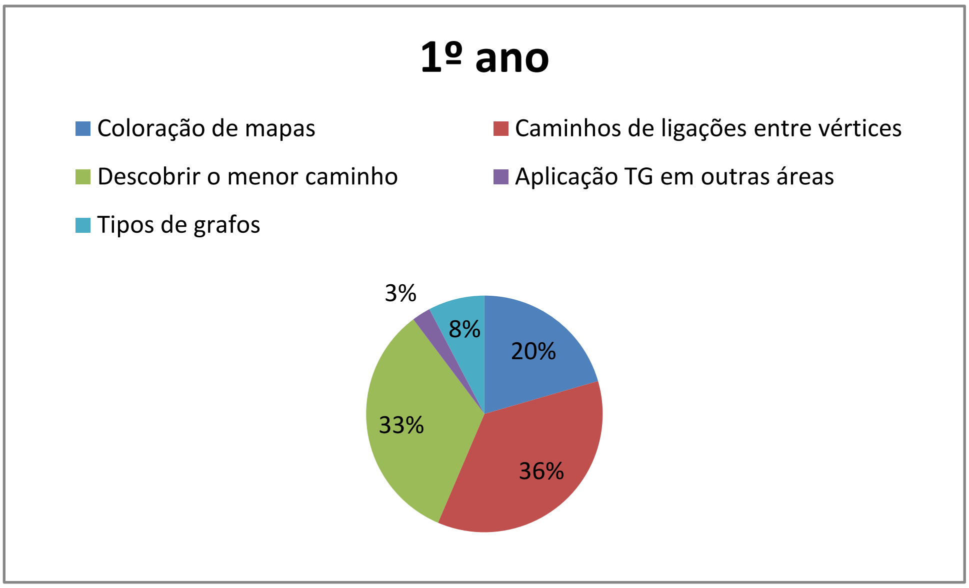


Figura 41 – Gráfico das respostas do 1º ano da questão 2 do questionário de pesquisa.

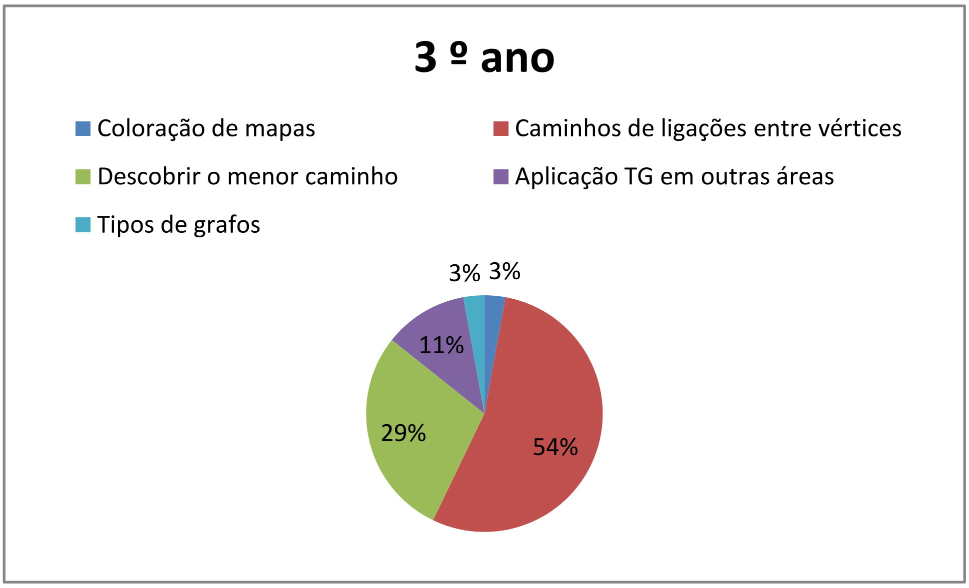


Figura 42 – Gráfico das respostas do 3º ano da questão 2 do questionário de pesquisa.

3) Você acredita que seu raciocínio lógico e abstrato tenha melhorado com o aprendizado da Teoria dos Grafos?

( ) sim ( ) não

Esta questão teve que ser explicada para os alunos da turma de 1º ano. Alguns questionaram o que era raciocínio lógico e abstrato. As duas turmas acreditaram na melhora, quase todos os alunos responderam que sim. Verificar se houve ou não melhora, não foi a intenção, mas o objetivo desta pergunta era pelo menos captar a sensação dos alunos e o interesse, transmitindo a ideia de que estudar e pesquisar melhoraria a capacidade racional e abstrata deles.

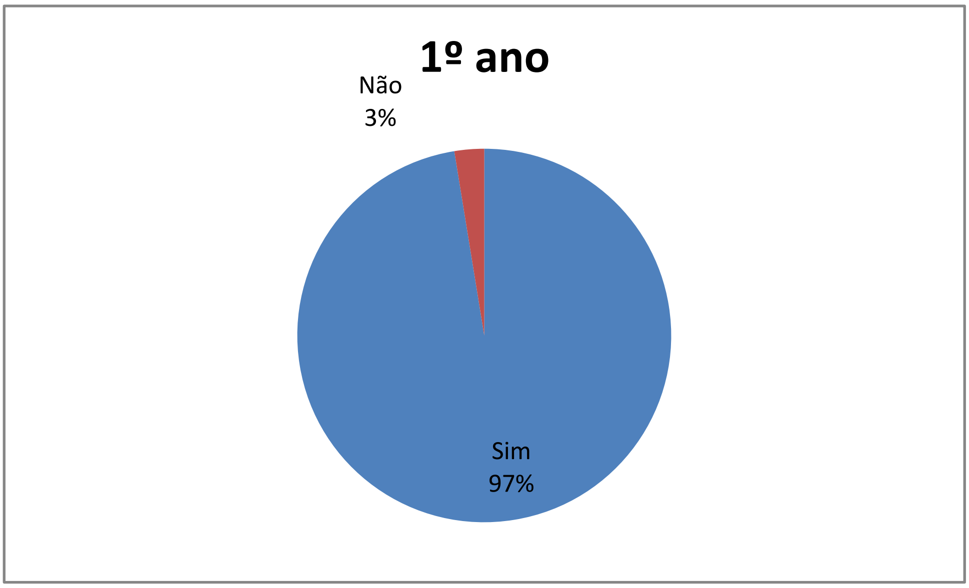


Figura 43 – Gráfico das respostas do 1º ano da questão 3 do questionário de pesquisa.

Figura 44 – Gráfico das respostas do 3º ano da questão 3 do questionário de pesquisa.

Examinando a quarta questão:

4) Os jogos de computador tipo Icosien Game e Parking Zone estimulam você a estudar mais a Matemática?

( ) sim ( ) não

O objetivo desta questão era fazer a ligação entre os jogos e a teoria. O jogo Parking Zone foi proposto por um dos alunos da turma de 1º ano, ele identificou uso da TG neste jogo, para encontrá-lo basta usar um motor de busca na internet, vários sites disponibilizam o jogo. O resultado para esta questão já era esperado, os adolescentes deste começo de século XXI adoram jogos computador e celular, ambos os jogos podem ser jogados pelo celular.

Alguns alunos responderam não.Inferiu-se que foi porque não gostaram do jogo, não conseguiram fazer a ligação ou mesmo não gostaram da TG neste ponto.

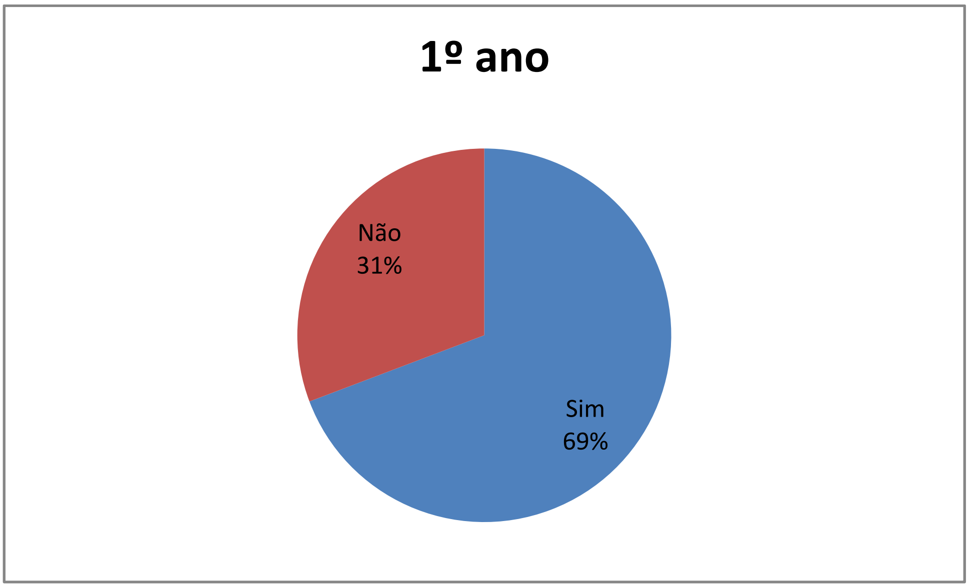


Figura 45 – Gráfico das respostas do 1º ano da questão 4 do questionário de pesquisa.

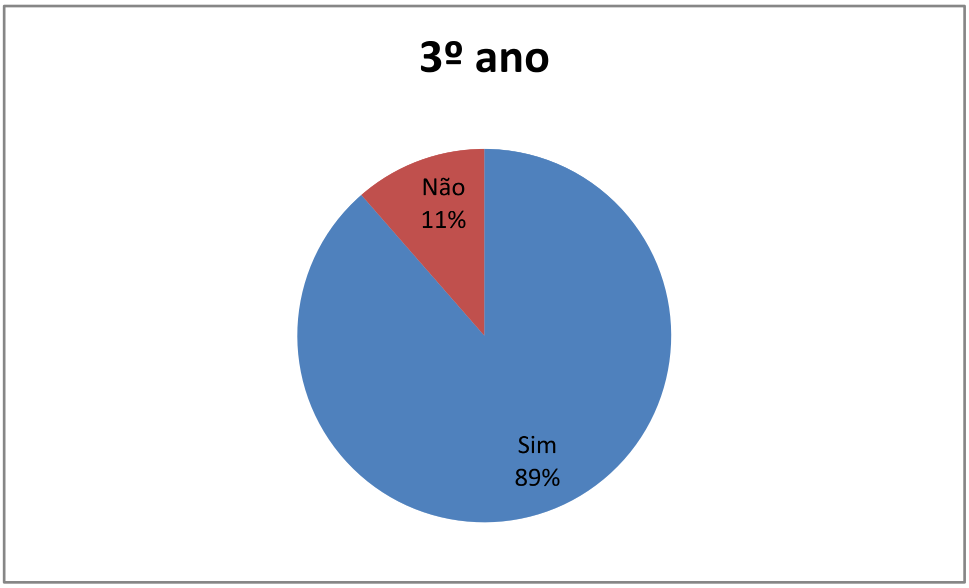


Figura 46 – Gráfico das respostas do 3º ano da questão 4 do questionário de pesquisa.

5) Você acha que outras áreas da Matemática também deveriam ser estudadas com jogos e atividades práticas?

( ) sim ( ) não

O objetivo desta questão era saber se o uso de recursos multimídia, experiências práticas e jogos de computador deveriam ser usados em outras áreas da Matemática, a resposta esperada era que sim.

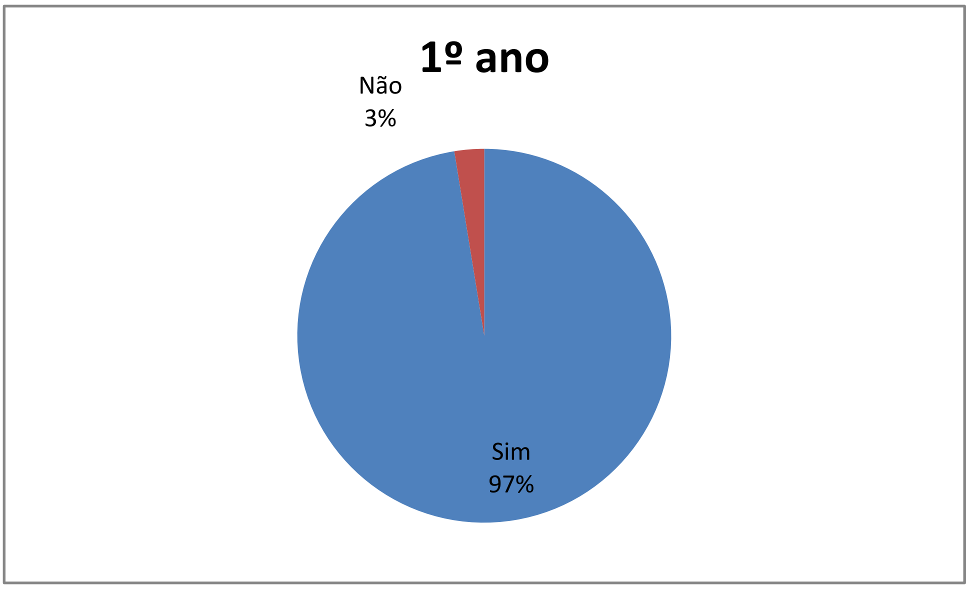


Figura 47 – Gráfico das respostas do 1º ano da questão 5 do questionário de pesquisa.

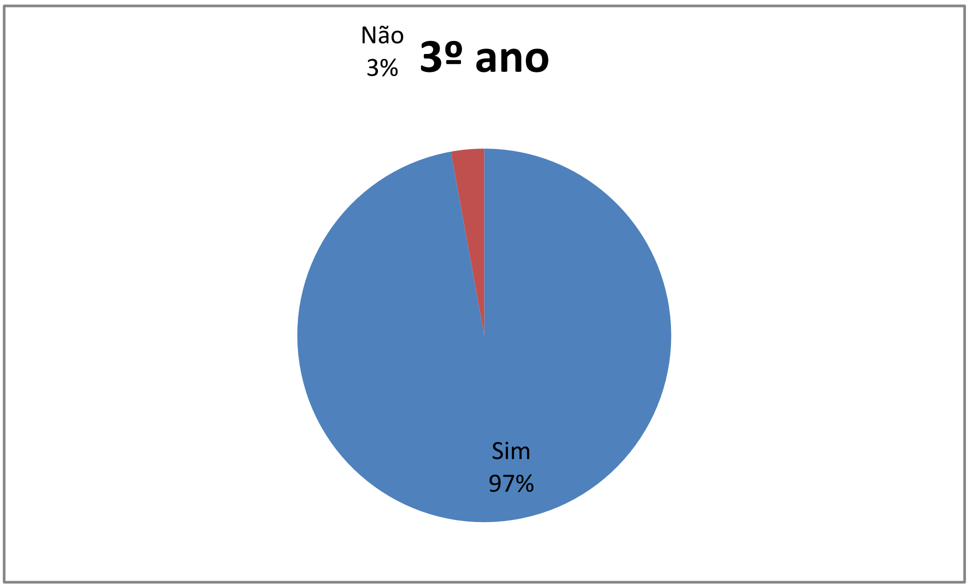


Figura 48 – Gráfico das respostas do 3º ano da questão 5 do questionário de pesquisa.

Somente um aluno de cada turma respondeu que não, pode-se inferir que os alunos preferem atividades práticas ligadas ao cotidiano e contextualizadas, ainda mais se forem utilizados jogos como Icosien e Parking Zone.

No que diz respeito à sexta pergunta do questionário, o objetivo era identificar, nas turmas em questão, aquilo que mais chamava a atenção e que, portanto, poderia ser mais usado em futuras aulas. No momento de preparar as aulas, procurou-se exemplos de aplicações de TG que fossem atuais e que os alunos usassem tais tecnologias. Ainda na preparação das aulas, considerou-se sempre a contextualização e a interdisciplinaridade.

Segue a sexta pergunta.

6) Qual aplicação você achou mais interessante em Teoria dos Grafos?

( ) Redes Sociais

( ) Sistemas de Telefonia Celular

( ) Planificação de moléculas na química

( ) Problema de transportes

( ) Uso pelo GPS e Google Maps

Curioso o fato dos alunos do 1º ano preferirem as aplicações de redes sociais.

Olhando para o resultado da turma de 3º ano a preferência foi pelo uso da TG em aparelhos de GPS e Google Maps, mas as preferências ficaram um tanto divididas.

As duas turmas tiveram resultados expressivos em sistemas de telefonia celular, era esperado, pois as gerações do início do século XXI fazem uso intensivo desta tecnologia.

Deve-se compreender que sistemas de telefonia celular criam Grafos dinâmicos.

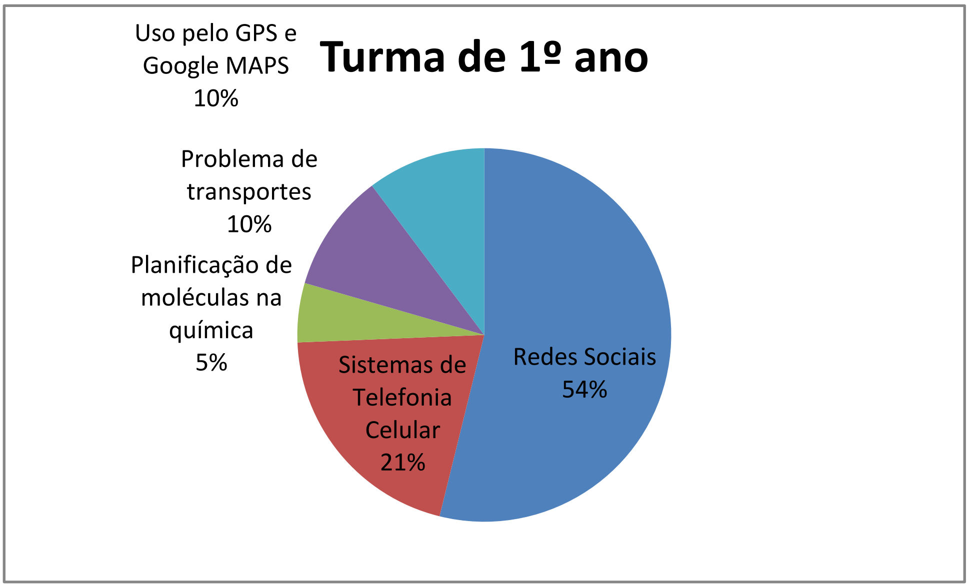


Figura 49 – Gráfico das respostas do 1º ano da questão 6 do questionário de pesquisa.

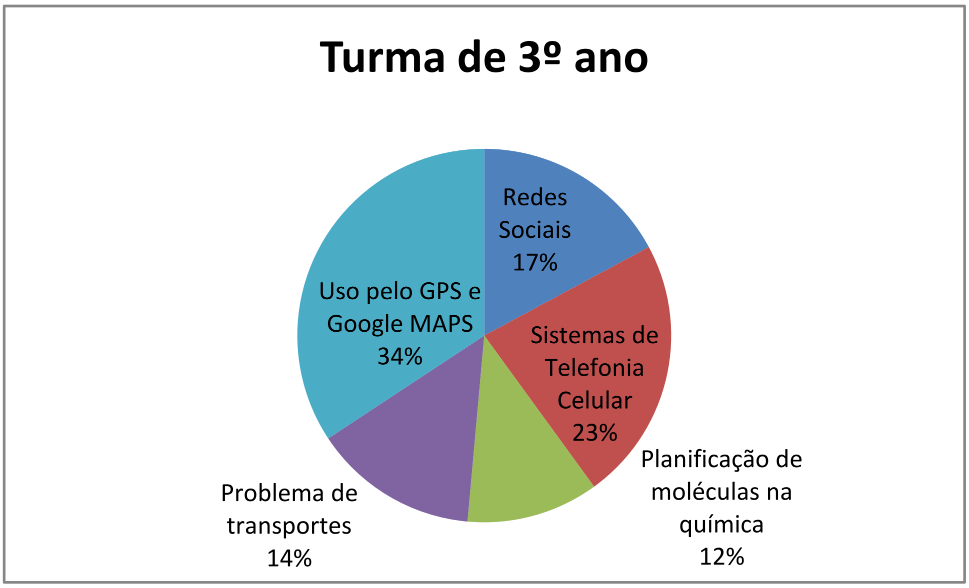


Figura 50 – Gráfico das respostas do 3º ano da questão 6 do questionário de pesquisa.

Com a sétima pergunta do questionário de pesquisa foi pretendido fazer com que os alunos pensassem na TG enquanto respondiam o questionário, era um reforço para a sexta questão e ao mesmo tempo um estímulo para algum interesse futuro. Era esperado que a maioria esmagadora dos alunos respondesse sim a esta pergunta. E a hipótese foi confirmada.

7) Para você as aplicações da Teoria dos Grafos são interessantes?
( ) sim ( ) não

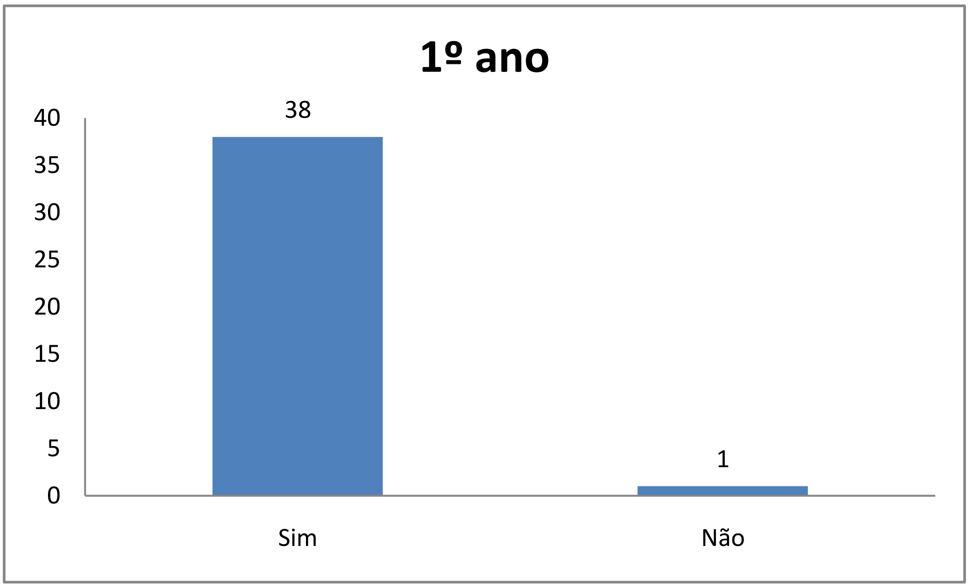


Figura 51 – Gráfico das respostas do 1º ano da questão 7 do questionário de pesquisa.

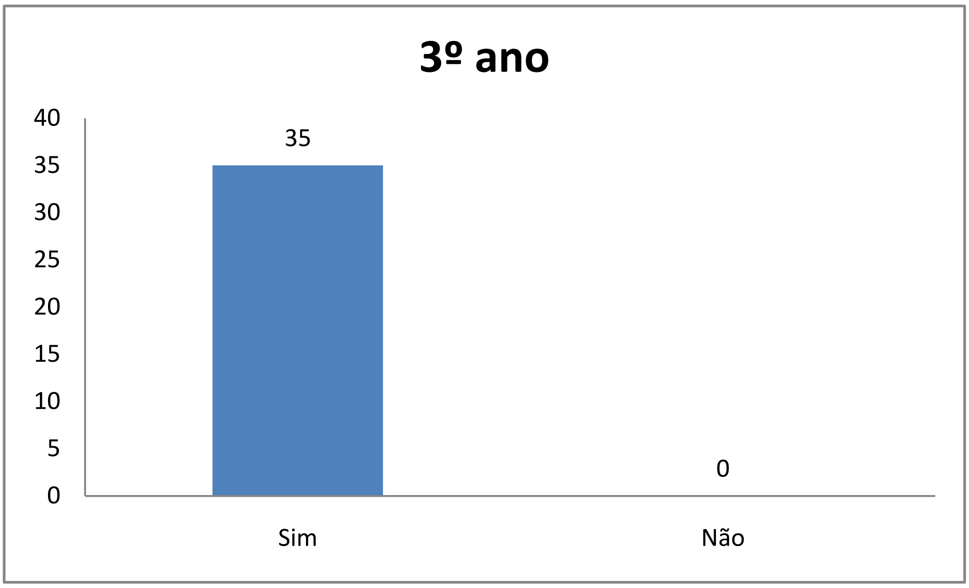


Figura 52 – Gráfico das respostas do 3º ano da questão 7 do questionário de pesquisa.

Para a oitava questão foi investigado o efeito da Metodologia de aulas na possibilidade do aluno pesquisar mais sobre a TG por conta própria. Indiretamente, também era interessante saber se os jogos de computador e de celular bem como as tecnologias atuais despertariam o interesse para a pesquisa. A pergunta era somente sobre a vontade e não necessariamente que a pesquisa tenha ocorrido de fato. Isto mostraria também o efeito das aulas, geralmente quando as aulas são boas espera-se, pelo menos, vontade de se pesquisar mais sobre o assunto.

Nesta questão houve diferença de resultados, acredita-se que a maior vivência dos alunos do 3º ano tenha contribuído para esta diferença.

8) Depois de ter apreendido parte da Teoria dos Grafos você sentiu vontade de pesquisar mais a fundo?

( ) sim ( ) não

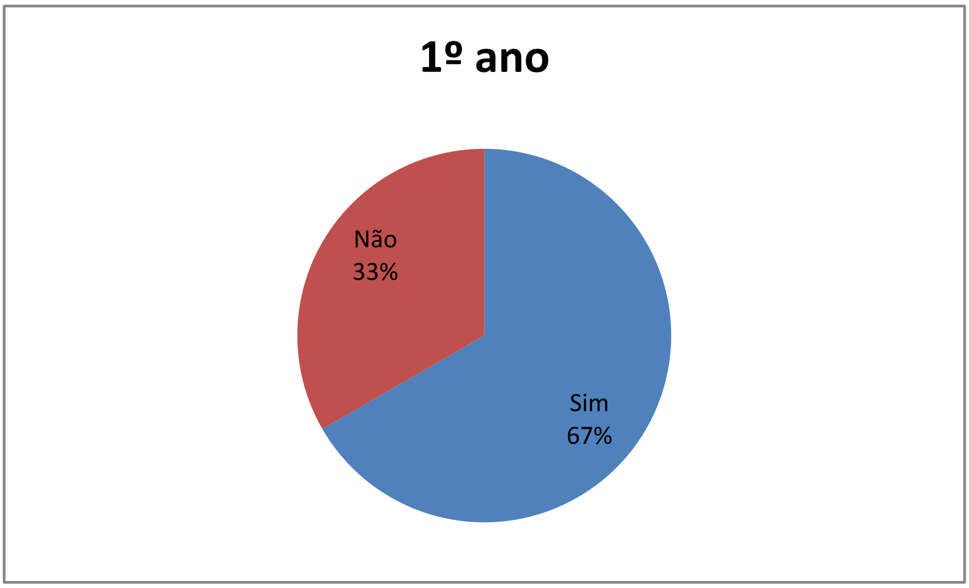


Figura 53 – Gráfico das respostas do 1º ano da questão 8 do questionário de pesquisa.

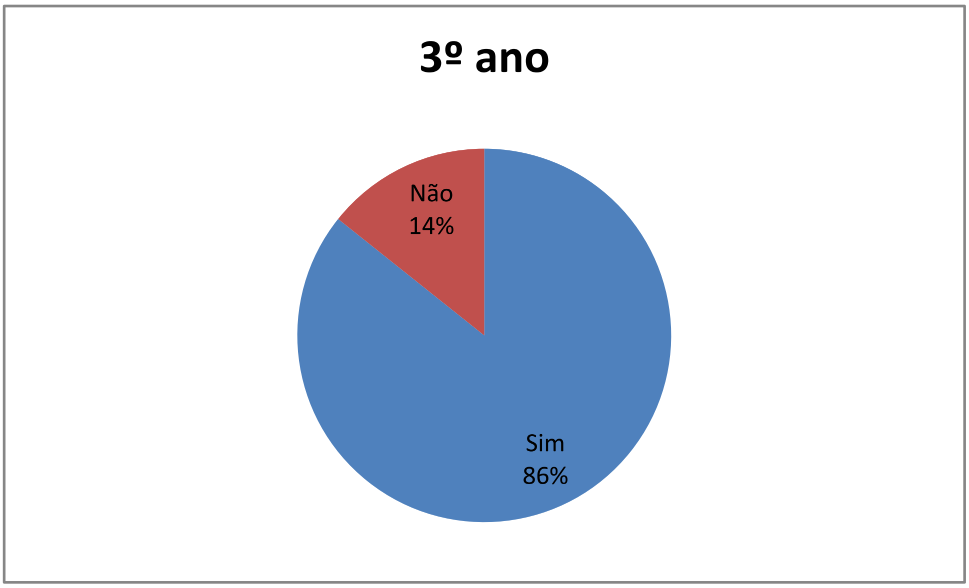


Figura 54 – Gráfico das respostas do 3º ano da questão 8 do questionário de pesquisa.

Na nona pergunta, era interessante saber se efetivamente os alunos pesquisaram alguma coisa sobre TG na internet, acreditou-se que este resultado poderia contribuir em muito para os estudos de disciplinas em geral e em particular para o estudo da TG. Se o efeito da Metodologia tivesse sido bom, a resposta desta pergunta nos daria uma boa pista de como melhorar as aulas de Matemática. O resultado foi divergente, mas acredita-se mais na turma de 1º ano em que a maioria respondeu que não chegou efetivamente a fazer pesquisa na internet, 26 disseram não e somente 13 disseram sim.

9) Você chegou a pesquisar algo na internet sobre Grafos?
( ) sim ( ) não

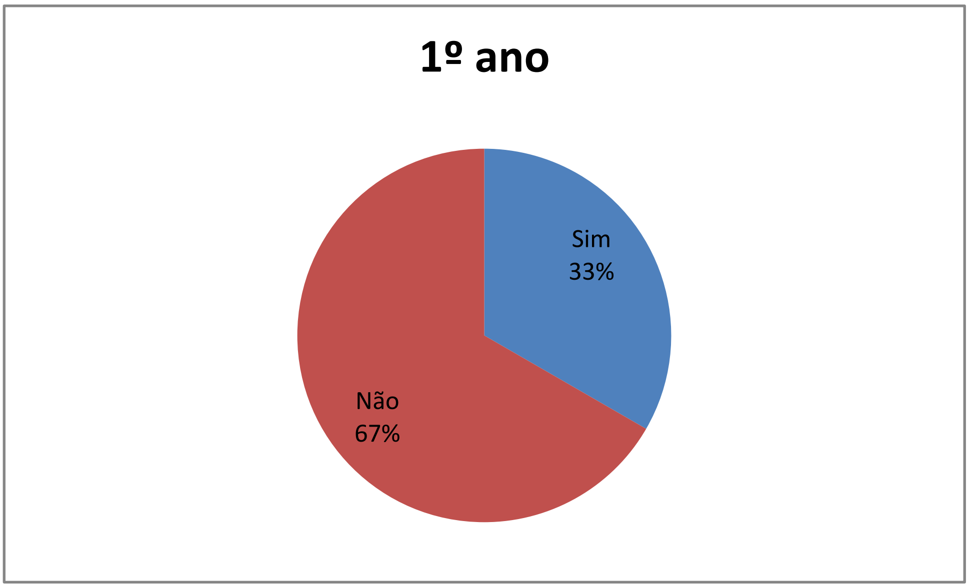


Figura 55 – Gráfico das respostas do 1º ano da questão 9 do questionário de pesquisa.

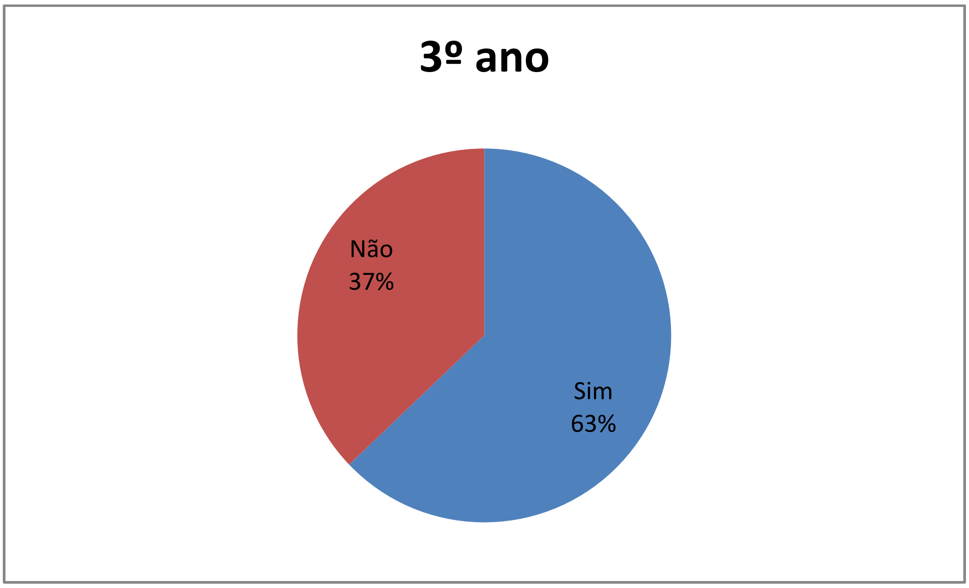


Figura 56 – Gráfico das respostas do 3º ano da questão 9 do questionário de pesquisa.

Quanto à décima pergunta, a preocupação era com a interdisciplinaridade e também com a contextualização. Queria-se saber se as tentativas de resolver problemas antigos pelos nossos antepassados de certa forma ajudavam e até mesmo motivavam nossos alunos de hoje. Fato relevante é que a maioria dos alunos acha importante a relação histórica das teorias da Matemática. No entanto, alguns alunos não acharam importante, isto pode ser devido a pouca ênfase que se dá aos fatos históricos nas aulas de Matemática. Uma pesquisa específica sobre este fato poderia ser feita por algum pesquisador no futuro.

10) Você acha interessante conhecer fatos históricos sobre as teorias da Matemática?
( ) sim ( ) não

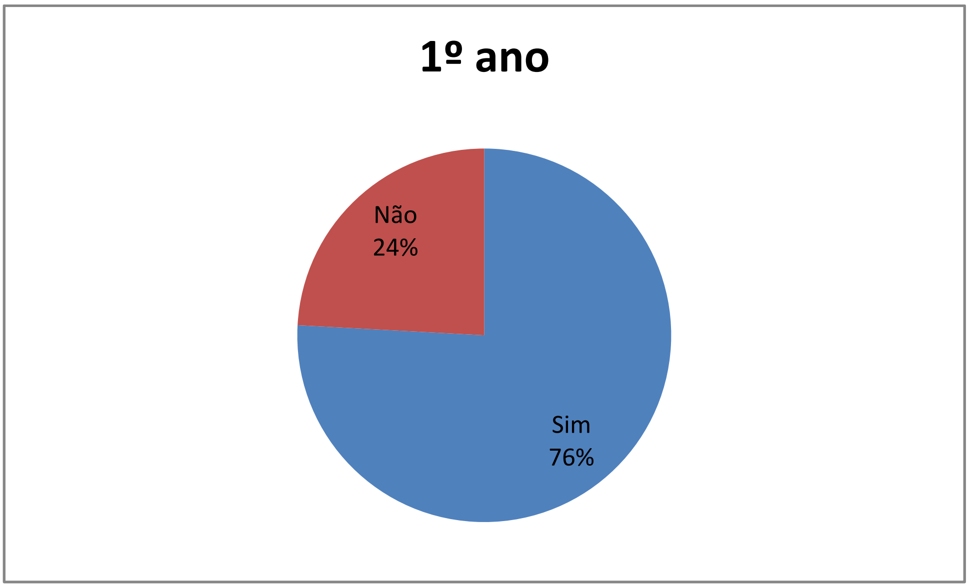


Figura 57 – Gráfico das respostas do 1º ano da questão 10 do questionário de pesquisa.

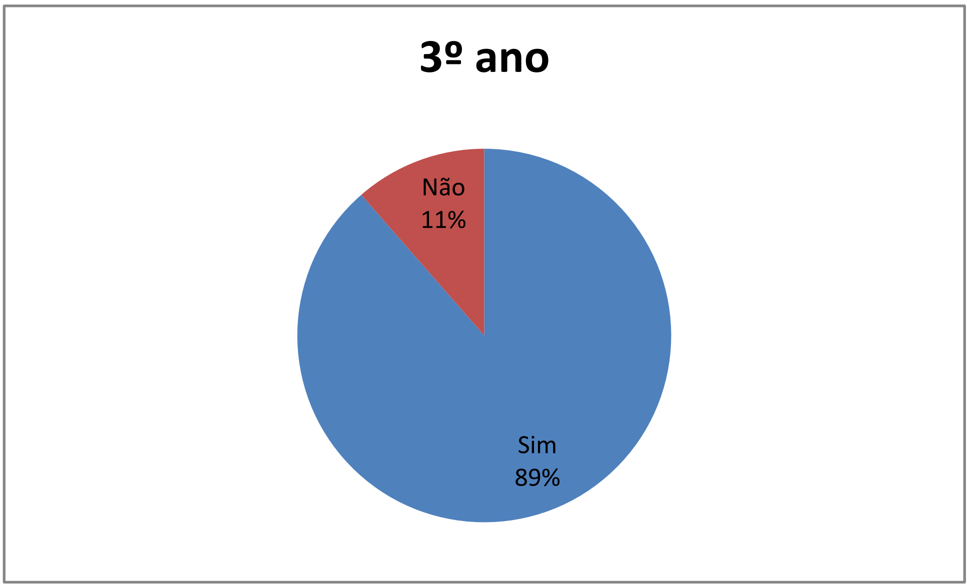


Figura 58 – Gráfico das respostas do 3º ano da questão 10 do questionário de pesquisa.

Na penúltima pergunta, décima primeira, que complementa a anterior, foi investigado se realmente os fatos históricos ajudam no estudo da Matemática em geral. Houve neste caso duas particularidades relevantes na resposta dos alunos tanto do 1º quanto do 3º anos, 24% dos alunos do 1º ano disseram que não acham os fatos históricos interessantes, mas somente 17% deles não acreditam que os fatos históricos ajudam a estudar Matemática. No 3º ano somente 11% não achavam os fatos históricos interessantes, mas 29% não acreditam que os fatos históricos ajudem no estudo da Matemática.

11) Os fatos históricos ajudam você a estudar Matemática?
( ) sim ( ) não

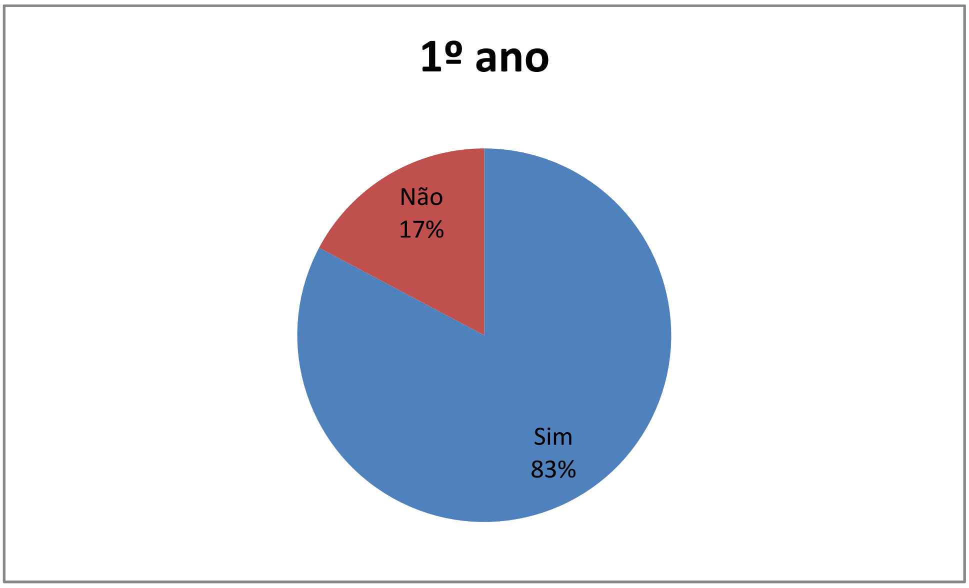


Figura 59 – Gráfico das respostas do 1º ano da questão 11 do questionário de pesquisa.

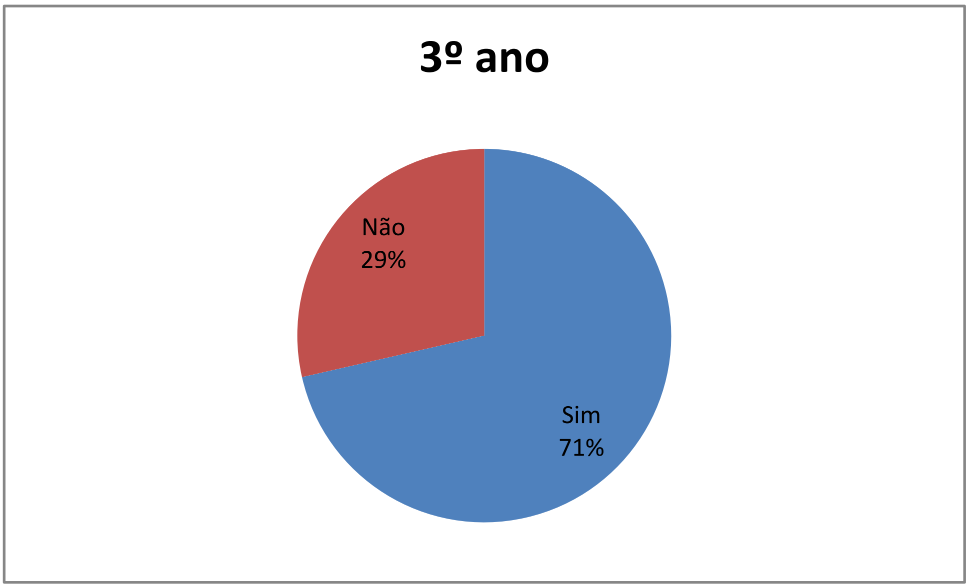


Figura 60 – Gráfico das respostas do 3º ano da questão 11 do questionário de pesquisa.

Na última pergunta do questionário, décima segunda, a preocupação era com a interdisciplinaridade, indiretamente se queria conhecer as respostas para as perguntas: será que os alunos de nível médio conseguem enxergar o conhecimento como um todo? E ainda, será que as 6 aulas contribuíram de alguma forma para a interdisciplinaridade?

Somente dois alunos da turma de 1º ano não acharam a relação da Matemática com as outras disciplinas importante, talvez por falta de maturidade ou por não terem entendido a pergunta.

12) Para você a relação da Matemática com outras disciplinas é importante?

( ) sim ( ) não

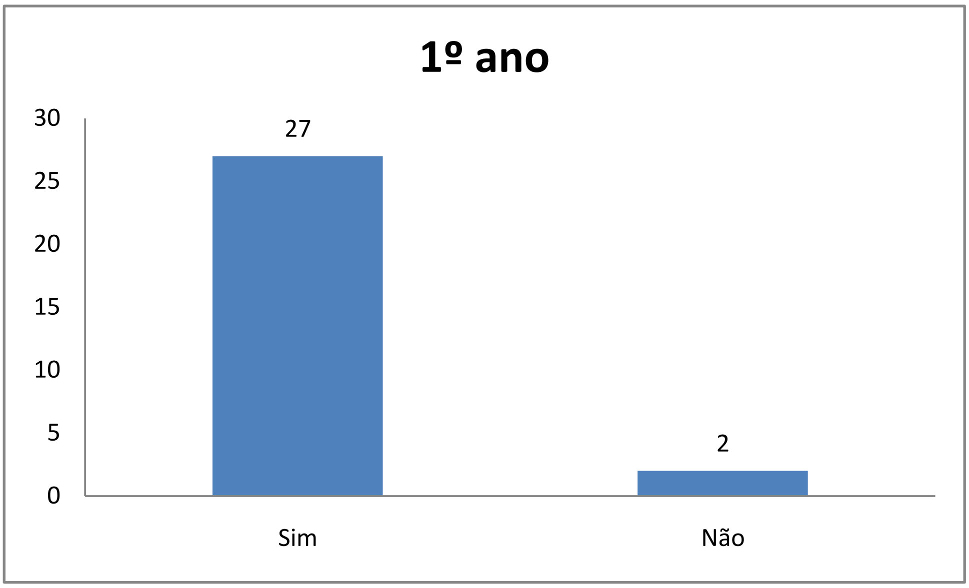


Figura 61 – Gráfico das respostas do 1º ano da questão 12 do questionário de pesquisa.

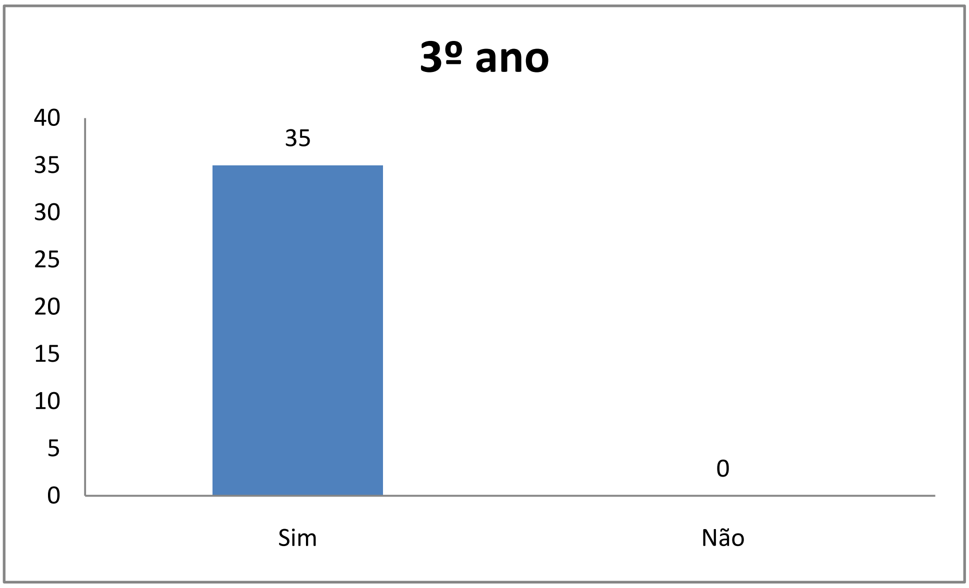


Figura 62 – Gráfico das respostas do 3º ano da questão 12 do questionário de pesquisa.

CONCLUSÕES

A pergunta inicial era: Como introduzir Tópicos de Grafos para estudantes do Ensino Médio?

Conclui-se pelos resultados apurados que uma possibilidade de ensinar Tópicos de Grafos no Ensino Médio pode ser uma sequência de aulas com atividades práticas mescladas com a introdução à TG, utilizando de recursos tecnológicos modernos desta época. Também ficou implícito que uma quantidade maior de aulas poderia trazer resultados melhores, principalmente para alguns estudantes que têm uma espécie de trauma nas aulas de Matemática, claro que não se pode afirmar nada sobre os aspectos psicológicos que causam estes traumas, são apenas impressões que foram captadas e que fogem do escopo do presente estudo.

A proposta de uma Metodologia de aulas que possibilitasse a introdução da Teoria dos Grafos no Ensino Médio logrou êxito pelo menos para as duas turmas pesquisadas, mas evidentemente estes resultados não podem ser considerados definitivos, pois estatisticamente seria preciso uma amostra mais significativa que representasse o padrão das escolas brasileiras, porém, acredita-se que sirva de base para futuras pesquisas neste sentido.

Foi feita pesquisa bibliografica com profundidade compatível com o nível da pesquisa pretendida. Teve-se apoio irrestrito do orientador, que sempre estava disponível para auxiliar nas dúvidas. Ficou-se com a sensação de que o embasamento teórico poderia ser mais explorado, mas há a consciência de que ele sempre será insuficiente. O embasamento teórico possibilitou um melhor entendimento da teoria ao nível que se queria. E, numa segunda etapa, foi realizada a aplicação da Metodologia conseguindo uma experiência com a compilação dos resultados. Desta maneira conseguiu-se uma sugestão de uma metodologia que melhorou o resultado de um teste e pode ser um dos inícios possíveis para o ensino da Teoria dos Grafos para alunos da educação básica, metodologia esta composta pela sequência das seis aulas resultantes desta experiência.

Quanto aos objetivos específicos a maioria deles foi atingida com bom grau de execução.

Apresentar problemas que levassem ao encontro da TG se mostrou efetivo, pois os alunos em geral parecem gostar de serem desafiados e de tentar resolver situações-problema do dia-a-dia, para então serem apresentados à teoria que dá o suporte para soluções mais simples e mais efetivas.

Neste ponto da pesquisa cabe trazer à tona a reflexão do ensino tradicional que costuma expor a teoria e depois apresentar problemas que podem ser resolvidos à luz da teoria previamente desenvolvida. Julga-se que em alguns casos a abordagem contrária pode ser muito eficiente. Pode-se fazer neste caso uma analogia com um adolescente que está aprendendo a andar de bicicleta: ele pode começar a ter aulas sobre como andar de bicicleta, sobre equilíbrio, sobre toda a mecânica de funcionamento da bicicleta, sobre a fisiologia do corpo humano, pode ler diversos livros e estudar todas as ciências relacionadas ao andar de bicicleta, para enfim tentar se equilibrar em cima de uma bicicleta. Mas acredita-se que se ele tentar se equilibrar primeiro e levar alguns tombos aprenderá a andar de bicicleta por si só, se quiser se tornar um ciclista um pouco melhor pode estudar o básico sobre andar de bicicleta, se o objetivo for se tornar um exímio ciclista, aí sim deve aprender todas as ciências relacionadas à arte de andar de bicicleta, pode-se, neste caso, inferir que a prática é fundamental quando acompanhada da teoria e leva a resultados excepcionais.

O objetivo de conceituar Grafos e tipos de Grafos no nível de introdução foi atingido, os conceitos foram apresentados e exemplificados em todas as seis aulas apresentadas na Metodologia.

Provocando e direcionado os problemas a TG foi apresentada de forma lúdica e contextualizada.

Relacionou-se a Teoria dos Grafos com a Teoria dos Jogos quando apresentou-se o jogo Icosien e quando um dos alunos sugeriu o jogo Parking Zone.

Conseguiu-se de forma incipiente introduzir a ligação entre análise combinatória e Teoria dos Grafos. Este assunto poderia ter sido mais bem explorado, mas seria necessário mais aulas. Este era um objetivo específico que não se concretizou plenamente.

Quanto à utilização de experimentos concretos para o ensino-aprendizagem da Teoria dos Grafos, o êxito foi logrado devido à característica prática dos jogos e dos desafios propostos. Percebeu-se neste ponto que os estudantes gostam de ser provocados, instigados a superar obstáculos. Foi dito a eles que a Matemática muita vezes é a ciência dos padrões e das possibilidades, mostrou-se a eles que quem tentar encontrar padrões e esgotar as possibilidades aumenta e muito as chances de resolver os problemas reais do cotidiano.

Foi atingido parcialmente o objetivo de induzir os estudantes a interpretar situações-problema nas mais diversas áreas do conhecimento humano que poderiam ser resolvidas com o uso dos Grafos, possibilitando a interdisciplinaridade tão buscada nos tempos atuais. Desta forma despertou-se na grande maioria o interesse pela Matemática em geral, como mostra o resultado do questionário diagnóstico, questão número um.

O objetivo específico de resolver situações-problema foi parcialmente alcançado, talvez uma maior quantidade de aulas somadas a uma rotina de resolver problemas desse um resultado melhor, além dos alunos não estarem acostumados a pensar exaustivamente acerca de um problema, o ritmo de aulas dificultou esta prática.

Constatou-se que as aulas não foram suficientes para despertar a vontade de criar novas aplicações para a Teoria dos Grafos (isto foi perguntado durante as aulas), pelo menos não foi detectada essa vontade em nenhum discente. Falhou-se neste objetivo específico.

Estabeleceram-se sugestões de uma sequência de aulas para o ensino de Grafos na educação de nível médio, pelo menos um começo, quem sabe um norte.

Espera-se que TG a suas aplicações for explorado de uma maneira investigativa, provocativa, prática, interdisciplinar, contextualizada e que utilize recursos que atraiam a atenção dos alunos tem grande chance de sucesso. A TG facilita este tipo de abordagem e de certa forma inspira os alunos, isto fica claro nas repostas às perguntas do questionário final que foi aplicado como parte desta pesquisa.

Sugere-se que trabalhos futuros possam ser abordados com o tema de metodologia de aulas de Grafos para o Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. **Graphy Theory with Applications.** Elsevier Science Publishing Co., Inc. 1976.

______,______. **Graphy Teory.** Springer, 2008.

DIRETRIZES CURRICULARES NACIONAIS. Disponível em: http://portal.mec.gov.br. Acesso em: 10 maio 2014.

DIESTEL, Reinhard. **Graph Theory.** Springer, 2nd edition, 2000. Disponível em: <http://www.math.uni-hamburg. de /home/diestel/books/graph.theory/index.html.>. Acesso em: 12 maio 2014.

FEOFILOFF, Paulo. **Exercícios de Teoria dos Grafos.** Julho de 2012. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~pf/Grafos-exercicios/ >. Acesso em: 10 maio 2014.

JURKIEWICZ, Samuel. **Grafos – Uma Introdução.** Apostila da OBMEP, 2009.

______. **Matemática Discreta em Sala de Aula in História e Tecnologia no Ensino de Matemática**, volume 1,p. 115-161, Carvalho L. M.; Guimarães, L. C. (org.) 2002, IME-UERJ

KÖNIGSBERG BRIDGE PROBLEM**.** In**: Enciclopédia Britânica** Disponível em: <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/321794/Konigsberg-bridge-problem>. Acesso em: 07 julho 2014.

LUCAS, Édouard. **Récréations Mathématiques**. 1 ed. Librairie Scientifique Et Technique, 1979.

MALTA, Gláucia Helena Sarmento. **Grafos no Ensino Médio: uma inserção possível - Dissertação (mestrado)** – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Porto Alegre, 2008.

NETTO, Paulo Oswaldo Boaventura. O. **Grafos: Teoria, Modelos ,Algoritmos.** 2 ed. Edgard Blücher ,1996.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** 2ª reimpressão.Interciência. Rio de Janeiro, 1995.

RANGEL, D. L. S.;PIRES, Célia. **Apostila - Uma proposta de oficina de coloração de mapas e Grafos para o ensino fundamental e médio**. UNESP - São José do Rio Preto-SP. Dia 13/04/2014, disponível em: <http://www.podesenvolvimento.org.br/inicio/index.php?journal=podesenvolvimento&page=article&op=view&path%5B%5D=67> 2010. Acesso em: 01 maio 2014. p. 3-7

SANTOS, P. et al. **Introdução à Análise Combinatória.** Campinas, Editora da UNICAMP,1995, p. 246-248.

SANTOS, Victor Cesar Paixão. **Aula de Grafos.** Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=25811>. 2010. Acesso em: 19 maio 2014.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

D’AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação – Reflexos sobre Educação e Matemática.** São Paulo/Campinas, Summus/Ed. Da UECampinas,1986.

SMOLE, K. S. (org.) **Ler, escrever e resolver problemas.** Porto Alegre: Artes Médicas (Artmed), 2001.

TOSCANA, David. **As Pontes de Königsberg**. 1 ed. Casa da Palavra, 2012.

APÊNDICES

Apêndice A - Teste diagnóstico preliminar

Escola Técnica ____

Data: ___/___/2014

Nome do aluno: Turma:

Questões de Matemática antes das aulas de Teoria dos Grafos:

Número de acertos: Tempo de Teste:

1) De quantas cores, no mínimo, você precisa para colorir o mapa do Brasil sem que estados que façam divisa tenham a mesma cor?

a ( ) 3 cores

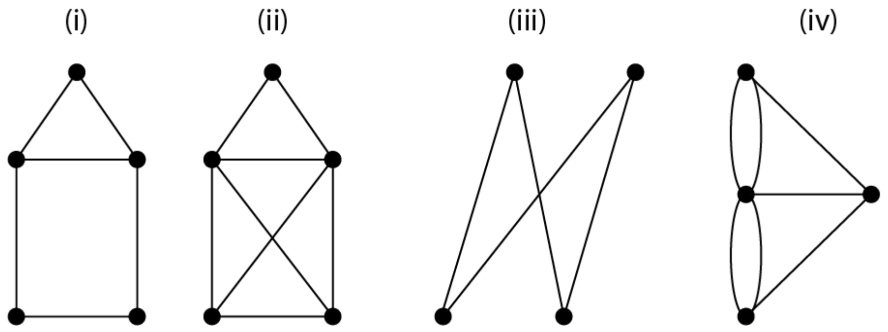
b ( ) 7 cores

c ( ) 26 cores

d ( ) 4 cores

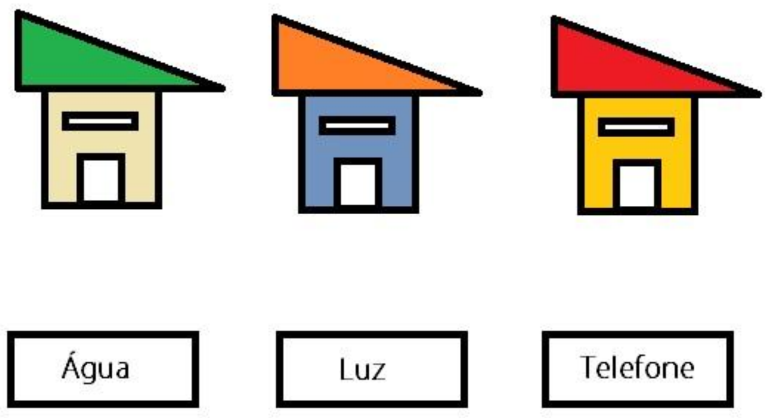
e ( ) 5 cores

2) Em quais dos desenhos abaixo é possível passar o lápis por todos os pontos da figura sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes pelo mesmo caminho, passando por todos os caminhos? (Observação: pode passar mais de uma vez pelo mesmo ponto)



a) ( ) Somente em i
b) ( ) Somente em ii
c) ( ) Em i, ii e iii
d) ( ) Em ii e iii
e) ( ) Em i e iv

3) Tente ligar a eletricidade, a água e o telefone nas três casas sem cruzar as ligações. É possível? ( ) sim ( ) não ( ) talvez



4) (OBMEP) Amigos que você pode contar!

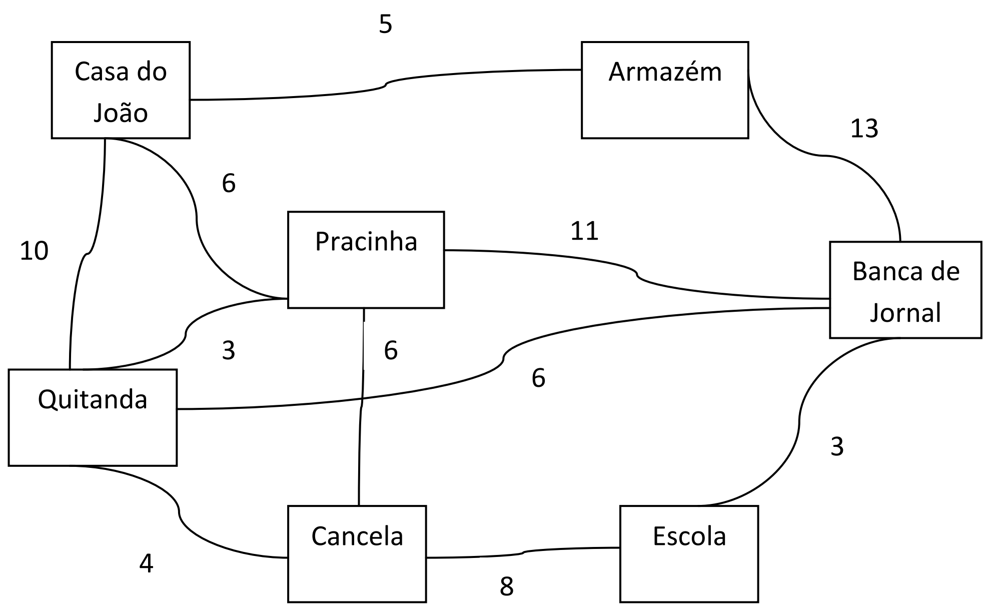
Considere um grupo de 15 pessoas. É possível que cada uma delas conheça exatamente:

a) 4 pessoas no grupo?
b) 3 pessoas no grupo?

(admita que se A conhece B então B conhece A.)

5) (BRIA, 2001) Do grande poeta brasileiro Carlos Drummond de Andrade são os versos "João amava Teresa, que amava Raimundo, que amava Maria, que amava Joaquim, que amava Lili, que não amava ninguém". Represente graficamente esta situação, só com bolinhas e linhas, com a inicial do nome de cada pessoa numa bolinha.

6) Qual o menor caminho até a escola?



Apêndice B - Teste final

Segue o teste final que foi aplicado aos alunos.

Escola Técnica ____

Data: ___/___/2014

Nome do aluno: Turma:

Questões de Matemática depois das aulas de Teoria dos Grafos:

Número de acertos: Tempo de Teste:

1) De quantas cores, no mínimo, você precisa para colorir qualquer mapa de um país sem que estados que façam divisa tenham a mesma cor?

a ( ) 3 cores

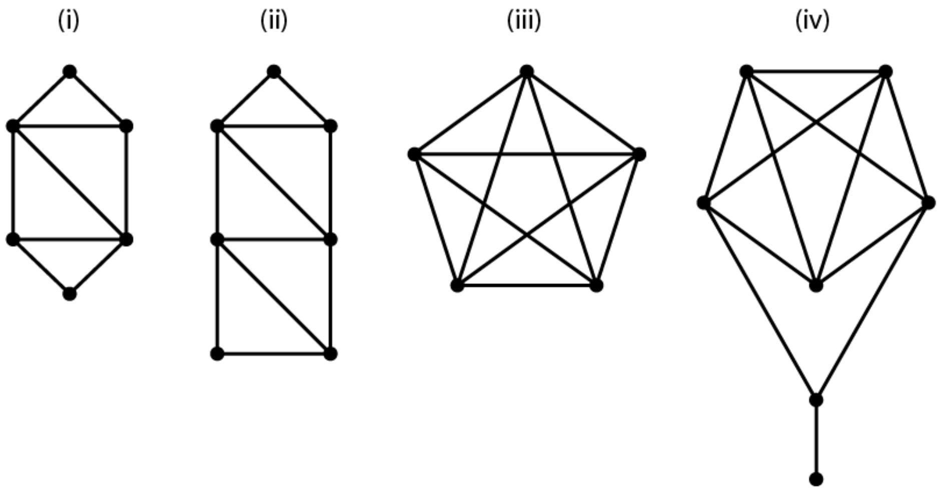
b ( ) 4 cores

c ( ) 5 cores

d ( ) 6 cores

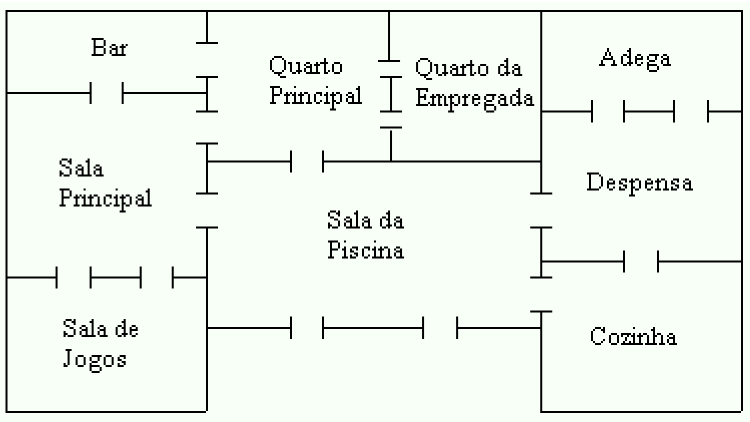
e ( ) 7 cores

2) Em quais dos desenhos abaixo é possível passar o lápis por todos os pontos da figura sem tirar o lápis do papel e sem passar duas vezes pelo mesmo caminho, mas passando por todos os caminhos? (Observação: pode passar mais de uma vez pelo mesmo ponto)



a) ( ) Somente em i
b) ( ) Somente em ii
c) ( ) Em i, ii e iii
d) ( ) Em iii e iv
e) ( ) Em todos

3) O Caso Count Van Diamond

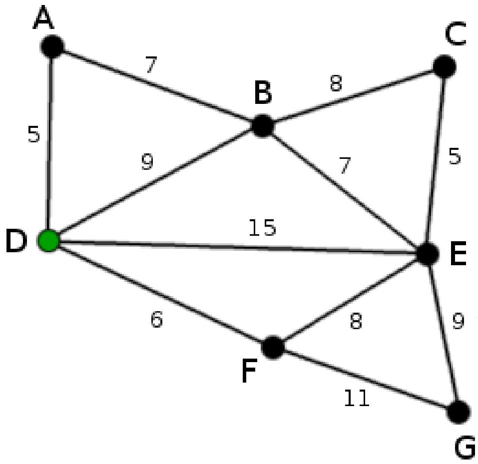


O cenário ao lado é a residência do bilionário Count Van Diamond, que acaba de ser assassinado. Sherlock Gomes (um conhecido detetive que nas horas vagas é um estudioso da Teoria dos Grafos) foi chamado para investigar o caso. O mordomo alega ter visto o jardineiro entrar na sala da piscina (lugar onde ocorreu o assassinato) e logo em seguida sair daquela sala pela mesma porta que havia entrado. O jardineiro, contudo, afirma que ele não poderia ser a pessoa vista pelo mordomo, pois ele havia entrado na casa, passado por todas as portas uma única vez e, em seguida, deixado a casa. Sherlock Gomes avaliou a planta da residência (conforme figura abaixo) e em poucos minutos declarou solucionado o caso. Quem poderia ser o suspeito indicado por Sherlock Gomes? Qual o raciocínio utilizado pelo detetive para apontar o suspeito?

4) Uma molécula de Gás metano, CH4 possui um átomo de carbono e 4 átomos de hidrogênio, represente esta molécula como se os átomos fossem os vértices e as ligações entre os átomo arestas, sabendo que cada átomo de hidrogênio precisa de uma ligação e cada átomo de carbono precisa de quatro ligações.

5) (ALDOUS, WILSON, 2000), Dispondo suas pedras como de costume, pode-se "fechar" (não sobrem pedras) o jogo de dominó de modo que o último número da última pedra "encoste-se" no primeiro número da primeira pedra? (   ) Sim   (   ) Não

6) Qual o menor caminho do vértice D até o vértice E?



Apêndice C – Resolução dos exercícios dos testes inicial e final

Respostas do teste inicial

1) d

2) c

3) não

4) solução na página 37

5) João→ Teresa→ Raimundo→Maria→Joaquim→Lili

6) 18

Resposta do teste final

1) b

2) e

3) o suspeito é o jardineiro, pois ele mentiu não dá para passar por todas as portas.

4)
```
        H
        |
  H----C----H
        |
        H
```

5) sim

6) DFE

Apêndice D - Questionário de pesquisa

Escola Técnica ____

Data: ___/___/2014

Nome do aluno: Turma:

1) Você ficou mais interessado em Matemática estudando a Teoria dos Grafos?

( ) sim ( ) não

2) Qual a área mais interessante para você em Teoria dos Grafos?

( ) Coloração de Mapas

( ) Caminhos de ligação entre vértices

( ) Descobrir o menor caminho

( ) Aplicação da Teoria dos Grafos em outras áreas do conhecimento

( ) Tipos de Grafos

3) Você acredita que seu raciocínio lógico e abstrato tenha melhorado com o aprendizado da Teoria dos Grafos?

( ) sim ( ) não

4) Os jogos de computador tipo Icosien Game e Parking Zone estimulam você a estudar mais a Matemática?

( ) sim ( ) não

5) Você acha que outras áreas da Matemática também deveriam ser estudadas com jogos e atividades práticas?

( ) sim ( ) não

6) Qual aplicação você achou mais interessante em Teoria dos Grafos?

( ) Redes Sociais

( ) Sistemas de Telefonia Celular

( ) Planificação de moléculas na química

( ) Problema de transportes

( ) Uso pelo GPS e Google Maps

7) Para você as aplicações da Teoria dos Grafos são interessantes?

( ) sim ( ) não

8) Depois de ter apreendido parte da Teoria dos Grafos você sentiu vontade de pesquisar mais a fundo?

( ) sim ( ) não

9) Você chegou a pesquisar algo na internet sobre Grafos?

( ) sim ( ) não

10) Você acha interessante conhecer fatos históricos sobre as teorias da Matemática?

( ) sim ( ) não

11) Os fatos históricos ajudam você a estudar Matemática?

( ) sim ( ) não

12) Para você a relação da Matemática com outras disciplinas é importante?

( ) sim ( ) não

Apêndice E - Tabela do Teste Inicial

1º ano B Teste com 6 questões				3º ano B Teste com 6 questões		
nº de testes	Acertos	Tempo		nº de testes	Acertos	Tempo
1	4	27		1	0	47
2	3	34		2	1	49
3	3	40		3	1	45
4	3	41		4	1	44
5	3	29		5	2	50
6	3	31		6	2	50
7	3	31		7	2	50
8	3	33		8	2	48
9	3	38		9	2	47
10	3	40		10	2	47
11	3	41		11	2	47
12	3	42		12	2	47
13	3	50		13	2	47
14	2	34		14	2	47
15	2	35		15	2	47
16	2	40		16	2	47
17	2	28		17	2	47
18	2	31		18	2	47
19	2	32		19	2	46
20	2	50		20	2	44
21	2	38		21	2	40
22	2	34		22	2	36
23	2	50		23	3	50
24	2	45		24	3	49
25	2	45		25	3	49
26	2	45		26	3	48
27	2	44		27	3	47
28	1	32		28	3	47
29	1	40		29	3	47
30	1	40		30	3	41
31	1	39		31	3	40
32	1	33		32	4	50
33	1	31		33	4	50
34	1	30		34	4	47
35	1	48		35	4	44
36	1	47		Médias=	2,34	46,51
37	1	45		Desvio padrão =	0,91	3,19
Médias=	2,11	38,19		Correlação =	0,10	
Desvio padrão =	0,84	6,75				
Correlação =	-0,16					

Obs 1: Desvio padrão de Pearson

Obs 2: Correlação entre o número de acertos e tempo de prova

Apêndice F - Tabela do Teste Final

Teste realizado em 21/11/2014				Teste realizado em 20/11/2014		
1º ano B				**3º ano B**		
Teste com 6 questões				**Teste com 6 questões**		
nº de testes	Acertos	Tempo		nº de testes	Acertos	Tempo
1	2	20		1	5	32
2	5	19		2	3	32
3	4	18		3	4	32
4	5	20		4	5	32
5	4	20		5	6	31
6	4	21		6	5	31
7	2	22		7	6	31
8	6	22		8	5	31
9	3	22		9	5	31
10	5	24		10	6	30
11	4	25		11	4	30
12	4	25		12	5	30
13	5	26		13	5	30
14	4	26		14	6	29
15	4	26		15	6	29
16	3	26		16	4	29
17	5	27		17	3	29
18	3	27		18	6	29
19	5	27		19	6	27
20	5	28		20	6	27
21	4	28		21	6	27
22	6	29		22	5	26
23	6	29		23	4	26
24	5	29		24	5	25
25	5	30		25	6	25
26	5	30		26	5	24
27	6	30		27	5	24
28	2	32		28	6	23
29	4	32		29	6	23
30	5	33		30	5	22
31	6	34		31	4	22
32	5	37		32	5	21
33	3	38		33	5	19
34	6	38		34	5	19
35	4	39		35	5	32
36	6	39		Médias=	5,09	27,43
37	5	41		Desvio padrão =	0,85	3,94
38	6	42		Correlação =	-0,11	
39	6	42				
Médias=	4,54	28,79				
Desvio padrão =	1,19	6,79				
Correlação =	0,38					

Obs 1: Desvio padrão de Pearson

Obs 2: Correlação entre o número de acertos e tempo de prova

ANEXOS

Anexo A - Exercícios de Olimpíadas de Matemática

Exemplos de questões que envolvem Teoria dos Grafos que podem a vir ser utilizadas em sala de aula.

1. (Torneio das Cidades 1982) Em certo país existem mais do que 101 cidades. A capital deste país é conectada por linhas aéreas a outras 100 cidades, e cada cidade, exceto pela capital, é conectada a outras 10 cidades (se A está conectado a B, B está conectado a A). Além disso, todas as linhas aéreas são de uma única direção. Sabe-se que de qualquer cidade é possível chegar a qualquer outra usando essas rotas. Prove que é possível fechar metade das linhas aéreas conectadas à capital, e preservar a capacidade de viajar de uma cidade a qualquer outra.

2. (Rússia 2000) Em um grafo G cada vértice possui grau pelo menos 3. Prove que nesse grafo há um ciclo com o número de arestas não divisível por 3.

3. (IMO 1964) Em um grafo de 17 vértices todas as arestas são traçadas e pintadas de uma de três cores. Prove que existe um triângulo com as três arestas da mesma cor.

4. (Proposto IMO 1977) Em uma sala estão nove homens. Sabe-se que em qualquer grupo de três deles existem dois que se conhecem. Prove que pode-se escolher quatro deles que se conhecem mutuamente.

5. (Rússia 2003) Existem N cidades em um país. Entre quaisquer duas cidades existe uma estrada ou uma linha de trem. Um turista deseja viajar pelo país, visitando cada cidade uma única vez, e retornando à cidade inicial. Prove que ele pode escolher uma cidade, e percurso da viagem de tal forma que ele não irá trocar de meio de transporte não mais do que uma vez.

6. (São Petersburgo 2001) Um país possui 2000 cidades. Mostre que é possível unir pares de cidades usando estradas (duas-mãos) tal que para n = 1, 2, ... , 1000, existem exatamente duas cidades com exatamente n estradas.

7. (Rússia 1974) Em um grupo de n pessoas sabe-se que se duas possuem mesmo número de amigos, então elas não possuem amigos em comum. Prove que existe uma pessoa com exatamente um amigo.