UFRRJ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

CONSTRUÇÃO E AVALIAÇÃO DE COMPETÊNCIAS E HABILIDADES RELATIVAS AOS NÚMEROS REAIS: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO MÉDIO E NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

MÁRIO FERNANDO MONTEIRO DA SILVA

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

CONSTRUÇÃO E AVALIAÇÃO DE COMPETÊNCIAS E HABILIDADES RELATIVAS AOS NÚMEROS REAIS: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO MÉDIO E NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

MÁRIO FERNANDO MONTEIRO DA SILVA

Sob a Orientação do Professor
Douglas Monsôres de Melo Santos

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre,** no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica,
Agosto/2015

510.7
S586c
T

Silva, Mário Fernando Monteiro da, 1966-

Construção e avaliação de competências e habilidades relativas aos números reais: uma experiência no ensino médio e na formação inicial do professor de matemática / Mário Fernando Monteiro da Silva. – 2015.

70 f.: il.

Orientador: Douglas Monsôres de Melo Santos.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2015.

Bibliografia: f. 63-64.

1. Matemática – Estudo e ensino (Ensino médio) – Teses. 2. Números reais – Teses. 3. Jogos no ensino de matemática – Teses. 4. Professores – Formação – Teses. I. Santos, Douglas Monsôres de Melo, 1984- II. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

RESUMO

SILVA, Mário Fernando Monteiro da. **Construção e avaliação de competências e habilidades relativas aos números reais: uma experiência no ensino médio e na formação inicial do professor de matemática.** 2015. 73p Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2015.

Este trabalho teve como motivação, o baixo rendimento que alunos nos primeiros anos do Ensino Médio de um colégio estadual do Município de Vassouras-RJ vêm apresentando, tanto nas avaliações internas da escola, quanto nas avaliações externas (como o Saerj). Uma grande dificuldade desses alunos se encontra nas questões referentes ao conhecimento numérico. Essa situação sugere duas linhas de investigação: a primeira consiste na busca por metodologias não-tradicionais de ensino da matemática que propiciem uma aprendizagem mais concreta e significativa para o aluno da educação básica; por outro lado, é importante avaliar se os cursos de licenciatura em matemática estão propiciando aos futuros professores desta disciplina uma formação sólida e adequada acerca dos conjuntos numéricos e das metodologias de ensino desse tema. O projeto consiste numa proposta de atividades não-tradicionais sobre o tema números reais, assunto este que é apresentado no primeiro bimestre da primeira série do Ensino Médio e que é um pilar para todos os conteúdos de Matemática que serão abordados nos bimestres posteriores, como as funções, os números complexos e a trigonometria. Tal proposta é baseada em realizar com esses alunos algumas atividades que explorem o lúdico, através de jogos matemáticos. Também se buscou explorar alguns temas transversais, contextualizando o conceito de número real através de situações do cotidiano desses alunos. Paralelamente, realizou-se uma pesquisa com alunos do curso de licenciatura em matemática da UFRRJ e que são bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), com objetivo de compreender o que esses licenciandos pensam sobre os números reais, tanto do ponto de vista formal e matemático quanto sobre as estratégias de ensino desse assunto.

Palavras-Chave: Números Reais; Educação Básica; Formação de Professores.

ABSTRACT

SILVA, Mário Fernando Monteiro da. **Construction and evaluation of skills and abilities relating to the real numbers: an experience in high school and the initial training of mathematics teachers.** 2015. 73p Dissertation (Professional Master in Mathematics in National Network - PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2015.

This work was motivated by the low yield problem that students in the first years of high school of a state school of the Vassouras city, RJ, were having before, both internal school ratings, as the external evaluations (such as SAERJ). A major difficulty of these students is on issues related to numeracy. This situation suggests two lines of research: the first is the search for non-traditional methods of teaching mathematics that provide a more concrete and meaningful learning for students of basic education; On the other hand, it is important to assess whether the degree in mathematics courses are providing to prospective teachers of this course a solid training and appropriate concerning the numerical sets and teaching methodologies that theme. The project consists of a proposed non-traditional activities on the subject of real numbers, issue this that is displayed in the first two months of the first year of high school and is a foundation for all the mathematics content that will be addressed in subsequent marking periods, such as functions, complex numbers and trigonometry. This proposal is based on performing with these students some activities that explore the playful, through mathematical games. Also sought to explore some cross-cutting issues, contextualizing the concept of real numbers through everyday situations these students. At the same time, we carried out a survey of students of degree in mathematics from UFRRJ and are fellows of the Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), in order to understand what these licensees think about the real numbers, both Formally and mathematician as on teaching strategies that subject.

Keywords: Real numbers; Basic Education; Teacher Training.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O presente trabalho foi motivado pelo fato de que ao acompanharmos o desempenho de turmas do 1º ano (Ensino Médio) de uma escola pública estadual do Município de Vassouras-RJ com relação às avaliações, tanto interna quanto externa (SAERJINHO e SAERJ), pudemos perceber o fracasso, principalmente quando o assunto eram os conjuntos numéricos (naturais até os reais). Estas observações foram feitas em 2014.

Ao cursar o PROFMAT, abriu-se uma porta para se realizar uma pesquisa acadêmica sobre esse problema, de modo a tentar atenuá-lo. Um dos fatores que podem contribuir para o fracasso dos alunos nessas avaliações são as metodologias de ensino tradicional, que envolvem fórmulas e regras e focam numa aprendizagem mecanizada em detrimento de uma maior ênfase sobre o conceito de número real e de suas aplicações ao cotidiano.

Uma das frentes da pesquisa foi direcionada a duas turmas de 1º ano do ensino médio, de tal maneira que uma turma (turma B) continuaria assistindo aulas através de uma metodologia de ensino tradicional enquanto que para a outra (turma A) seriam oferecidas atividades que pudessem construir competências e habilidades relativas os número reais. Para esta turma A, reproduzimos vídeos sobre a história da matemática, desenvolvemos atividades lúdicas com jogos e aplicativos e confrontamos os alunos com situações-problema criadas a partir de reportagens de jornais, sempre criando atividades relacionadas aos conjuntos numéricos. Vale ressaltar que essas reportagens propiciaram uma discussão sobre temas transversais à matemática, o que é incentivado nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Realizamos também uma pesquisa junto a alguns alunos (de vários períodos) do curso de Licenciatura em Matemática da UFRRJ. É importante avaliar constantemente se os futuros professores de matemática estão sendo bem preparados para serem inseridos na realidade da educação básica brasileira. Com efeito, os alunos ingressam no Ensino Superior com uma série de deficiências conceituais em matemática e a não correção dessas deficiências pode acarretar numa reprodução delas quando este licenciando se formar e como professor retornar à sala de aula da educação básica. Além disso, os cursos de licenciatura devem oferecer ferramentas para estimular a pesquisa por novas metodologias de ensino e aprendizagem da matemática.

O objetivo geral deste trabalho foi de investigar as competências e habilidades inerentes ao conjunto dos números reais, assim como metodologias de ensino que motivem os alunos do Ensino Médio na aprendizagem desse conceito.

Os objetivos específicos do trabalho foram: investigar o desenvolvimento do conceito de número real ao longo da história; buscar nos documentos oficiais quais são as competências e habilidades sobre números reais que são relevantes de serem adquiridas pelos alunos da educação básica; estruturar e aplicar atividades envolvendo o lúdico e a resolução de problemas que facilitem a construção de habilidades necessárias sobre o conteúdo de números reais por parte dos alunos do Ensino Médio; investigar se a formação acadêmica tem proporcionado aos futuros professores de matemática uma aprendizagem robusta sobre o conceito de número real e se tem incentivado a pesquisa por novas metodologias para o ensino desse tema.

O trabalho foi organizado em quatro capítulos. No primeiro capítulo temos um histórico da Matemática com relação aos números reais. No segundo capítulo, faremos uma breve discussão sobre o referencial teórico que comporá os alicerces da pesquisa. No terceiro capítulo apresentamos detalhadamente a metodologia utilizada em nossa pesquisa e no quarto capítulo apresentamos os seus resultados.

CAPÍTULO 1 - DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO DO CONCEITO DE NÚMERO E DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Neste capítulo buscamos apresentar um breve histórico sobre o surgimento do conceito de número e também como ele se desenvolveu até a formalização do conjunto dos números reais. Também apresentaremos alguns importantes pesquisadores que contribuíram para a construção desses conceitos.

1.1. As primeiras formas de representação dos números

Segundo Dantzig (1970) o homem, mesmo nos rudimentos de seu desenvolvimento, possui o que chamamos senso numérico. Essa faculdade permite reconhecer, se numa pequeníssima coleção, algo foi retirado ou colocado. Esse senso, não é um privilégio humano, pois estudos mostram que alguns animais também o possuem (<http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/senso.html> Acesso em: 15 de março de 2015). Porém, isso não deve ser confundido com contagem.

Acredita-se que tudo começou quando nossos ancestrais tiveram a necessidade de contar e inventaram o processo de contagem. Segundo Eves (2004), "em algum momento, para seus registros, os homens começaram a utilizar riscos em ossos". Essa capacidade de registro, nos deu vantagens em relações aos outros animais. A Figura 1 mostra o osso ishango, com mais de 8000 anos de idade.

Figura 1. Fonte:<http://ossodeishango-cta.blogspot.com.br> Acesso em: 15 de março de 2015.

Os sumérios, povo que já vivia em sociedade e em casas, criaram uma simbologia para o número "um", atribuindo-lhe a forma de um cone (BOYER, 1974). Com isso, já era possível verificar, por exemplo, se faltava algum animal em seus rebanhos, fato que não era viável apenas com os riscos nos ossos. À medida que os sumérios iam avançando socialmente, perceberam que podiam registrar quantidades não mais utilizando os cones, mas sim tábuas de argila, nos chamados registros cuneiformes, ilustrados na Figura 2.

Figura 2. Fonte: <http://www.infoescola.com/civilizacoes-antigas/escrita-cuneiforme> e <https://lanaveva.wordpress.com/2011/06> Acesso em: 15 de março de 2015.

Segundo Eves(2004), o processo de contagem teve que ser sistematizado, quando da necessidade de contagens mais extensas. Foi quando surgiu a noção de base, ou seja, as quantidades eram agrupadas de acordo com determinado valor. Por exemplo, na base 10, as quantidades eram agrupadas de 10 em 10, fato este que parece estar relacionado com os dez dedos das mãos. Aliás, a história mostra que o uso das mãos tinha um importante papel tanto no processo de contagem como no de representação de números.Na Suma de Pacioli, livro publicado na época do Renascimento Italiano, os números eram representados por meio dos dedos, dispostos de forma estendida ou dobrada (veja Figura 3). Eles eram chamados de "números digitais".

Vários povos faziam uso de outras bases diferentes da base 10, tais como, a base 60, a base 5, a base 20 e a base 12 (BOYER, 1974). Existe também a possibilidade de algumas tribos na África terem representado os números naturais através das bases 2, 3 e 4 (DANTZIG, 1970).

Com isto, surgiram os sistemas de numeração, processo pelo qual nos permitiu escrever e ler qualquer número em uma determinada base.

De acordo com Boyer (1974), os egípcios utilizavam a base 10 e avançaram um pouco mais, pois já utilizavam símbolos para representar quantidades como um milhão, valor que os sumérios desconheciam. A Figura 4 mostra alguns símbolos egípcios usados para representar os números.

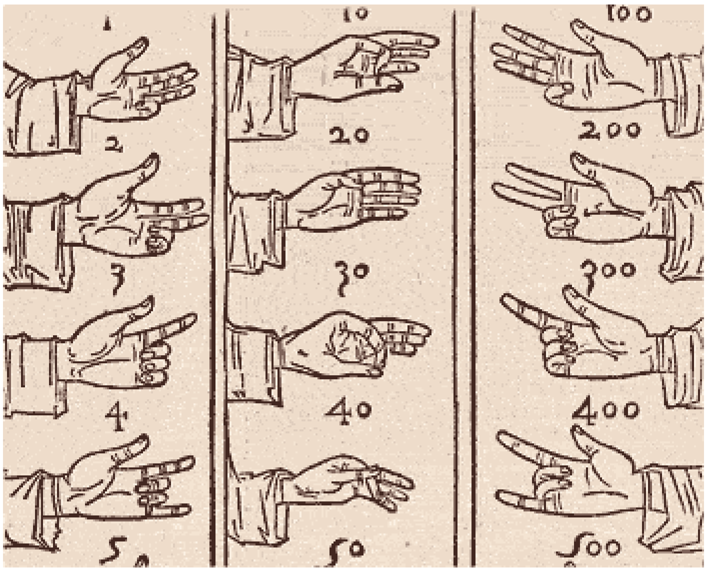


Figura 3. Fonte: <http://www.tipografos.net/glossario/algarismos.html> Acesso em: 15 de março de 2015.

Os egípcios também gostavam de grandes construções e da beleza destas, só que para atingirem tais objetivos tiveram que inventar uma unidade de medida. E com isso, o número "um" passou a ser representado como o comprimento do cotovelo até as pontas dos dedos de um homem. Essa unidade era chamada de *cúbito*. Também utilizavam essa unidade para demarcar terras.

Símbolo egípcio	descrição	nosso número
	bastão	1
	calcanhar	10
	rolo de corda	100
	flor de lótus	1000
	dedo apontando	10000
	peixe	100000
	homem	1000000

Figura 4. Fonte: <http://www.mundoeducacao.com/matematica/sistema-numeracao-egipcios.htm> Acesso em: 15 de março de 2015.

Os egípcios chegaram a utilizar frações especiais (chamadas de *frações unitárias*), onde o numerador era sempre o número “um” e já apresentavam símbolos para elas.

Para Dantzig (1970) a adoração dos números encontrou sua expressão máxima na filosofia pitagórica. Na Grécia existia uma sociedade secreta chamada escola pitagórica, cujo fundador foi o famoso matemático Pitágoras. O lema da escola era que tudo era número e que tudo poderia ser representado por meio de números inteiros. Números eram associados a algum atributo humano. Por exemplo, os números pares eram femininos e os números ímpares eram masculinos. O número “cinco” era associado ao casamento, pois era a união (soma) do primeiro número feminino com o primeiro número masculino depois do “um”. O número “um” era tido como “a razão”.

Os membros da escola pitagórica utilizaram polígonos para representar números naturais. Os chamados *números figurados* eram certas quantidades de pontos dispostos num formato geométrico. As Figuras 5, 6 e 7 ilustram, alguns exemplos desses números.

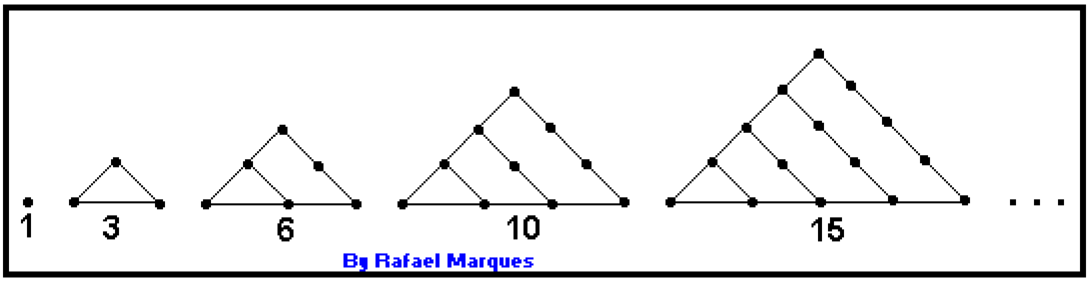


Figura 5. Números Triangulares. Fonte: <http://www.paulomarques.com.br/arq2-9.htm> Acesso em: 15 de março de 2015.

Porém, a escola pitagórica viria a entrar em crise, em virtude do próprio Teorema de Pitágoras. De fato, isso ocorreu quando um de seus discípulos tentou encontrar a medida da diagonal de um quadrado de lado um, o que o fez perceber que esse valor não poderia ser representado pelo quociente de números inteiros. Esse foi o primeiro indício do reconhecimento da existência dos números irracionais, conceito que só seria completamente compreendido milênios depois do tempo de Pitágoras.

Figura 6. Números Quadrados. Fonte: <http://www.matematica.br/historia/nfigurados.html>
Acesso em: 15 de março de 2015.

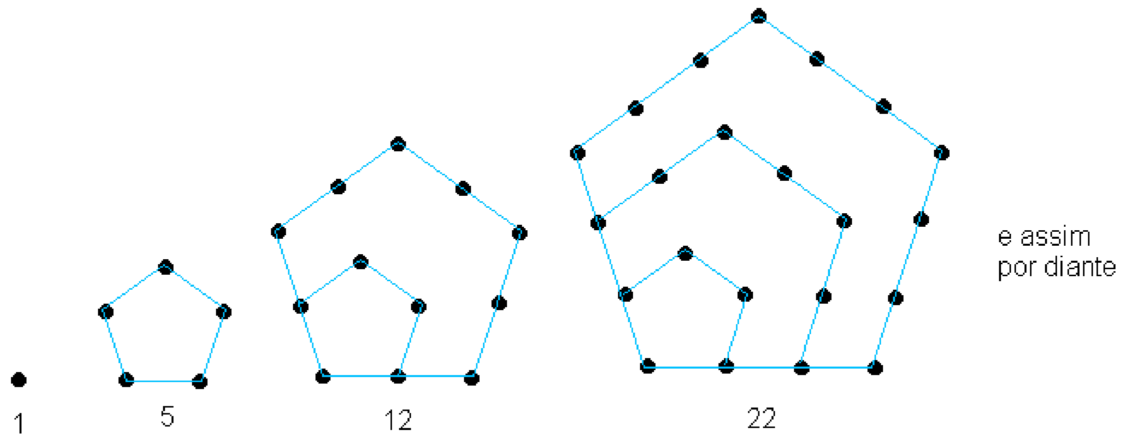


Figura 7. Números Pentagonais. Fonte: <http://www.matematica.br/historia/nfigurados.html>
Acesso em: 15 de março de 2015.

1.2. Aspectos Históricos dos Números e da Aritmética no Oriente

Para Eves (2004), um relatório da história da matemática da China antiga começa no período Shang, com algumas inscrições em ossos. Nesse período os chineses utilizavam um sistema de numeração, próximo ao sistema de numeração decimal e já utilizavam símbolos para representar o zero.

O mais importante texto de matemática da China antiga chama-se *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, que trata de problemas sobre engenharia, agrimensura, negócios, resolução de equações, etc.

Com o advento da Idade Média, a Europa Ocidental passou por um longo período de estagnação da ciência e da sua cultura. De acordo com Eves (2004, p.246), nesta época, a matemática da China se desenvolveu fortemente, produzindo resultados que só seriam redescobertos pela Europa após o Renascimento, como por exemplo, reconhecer os números negativos, desenvolver a regra de três e encontrar boas aproximações para o número π. Os chineses, nessa época, já conseguiram resolver sistemas de congruências, através do Teorema Chinês dos Restos, um conhecido resultado da aritmética dos inteiros.

A história da matemática indiana é pouco reveladora, devido à falta de registros originais. Segundo Boyer (1974), assim como no Egito,na Índia existiam os estiradores de corda. A construção de altares levou os hindus a um corpo de conhecimentos conhecido como *sulvasutras* ou regras de corda. "Sulva" significa cordas para medidas e "sutra" significa regras relativas a um ritual.No sulvasutras, encontramos regras, por exemplo, para a construção de ângulos retos, porém há indícios de que houve influência babilônica.

Com o fim do período dos sulvasutras, surgiu a idade dos siddhantas (sistemas de astronomia). Foi nesse período que os hindus adquiriram conhecimento sobre a trigonometria. A introdução da função seno representa a contribuição mais importante dos siddhantas à história da matemática (BOYER, 1974).

Após a composição dos siddhantas, durante o período do sexto século d.C., apareceram obras que indicaram para o sistema posicional, pelo qual um dos autores foi Aryabhata. Nesta época, apareceram nove símbolos para representar valores posicionais, símbolos que evoluíram para o que usamos hoje.

> "O zero aparece aproximadamente 200 anos após a invenção dos nove símbolos citados. O desenvolvimento de nosso sistema de numeração foi uma das duas contribuições da Índia de maior influência na história da matemática" (Boyer, 1974, p.155).

Da Índia se originaram muitos matemáticos, dentre eles citamos, Brahmagupta, Bháskara (que escreveu uma obra chamada Lilavati, cujo tema matemático é o método de inversão para resolver problemas aritméticos) e Ramanujam.

Brahmagupta foi um dos grandes matemáticos indianos. No ano de 628 d.C., ele escreveu um livro de astronomia com 21 capítulos, sendo dois deles destinados à matemática. A sistemática das operações entre números negativos e o zero surgiram pela primeira vez nessa obra.

> "Brahmagupta dá em sua obra regras aritméticas de adição e multiplicação e também introduz os números negativos em termos de fortunas (números positivos) e débitos (números negativos). Ele, em sua obra fornece as

> seguintes regras operatórias com os números negativos: positivo dividido por positivo, ou negativo dividido por negativo, é afirmativo. (...) Positivo dividido por negativo é negativo. Negativo dividido por positivo é negativo. (SÁ & ANJOS, 2011, p.4)

De acordo com Eves (2004, p.256), os hindus já aceitavam números irracionais e já sabiam que uma equação polinomial do 2º grau tem duas raízes.

"Durante o reinado do califa Al-Mansur, levaram-se para Bagdá os trabalhos de Brahmagupta que, com patrocínio real, foram traduzidos para o árabe" (EVES, 2004, p.261). O sistema de numeração indo-arábico tem esse nome devido aos hindus, que o criaram, e aos árabes, que o difundiram em toda a Europa Ocidental. Um dos pivôs dessa difusão foi o matemático persa Al-Khowârizmî, que publicou um livro em 825 d.C. que descrevia completamente o sistema de numeração hindu. Esse livro viria a ser traduzido para o latim no século XII. A palavra "algarismo" é atribuída ao nome desse matemático (EVES, 2004, p.40).

1.3. O Despertar da Análise Infinitesimal e a Formalização do Conceito de Número Real

A partir do século XIII, com a decadência da Idade Média a Europa Ocidental começa a receber a influência das obras desenvolvidas pelos matemáticos persas. Neste mesmo século, aparece a figura de Fibonacci o matemático mais talentoso desse período. Seu pai era ligado ao mundo dos mercados e com isso, pode viajar para vários lugares e absorver conhecimentos que o levaram a escrever sua obra Liber Abaci. Segundo Boyer (1974), o trabalho trata de aritmética e álgebra elementares, além de problemas pelos quais um deles deu origem a importante sequência de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...).

Nicole Oresme foi o matemático mais importante do séc. XIV. Oresme já utilizava expoente fracionário e localizava pontos por meios de coordenadas. Num manuscrito não publicado, obteve o valor do limite da soma 1/2 + 2/4 + 3/8 +4/16 + ..., sendo o precursor da análise infinitesimal.

O matemático francês mais importante do séc. XV foi Nicolas Chuquet, que escreveu uma obra chamada Triparty em La Science dês nombres que trata de números racionais, números irracionais e equações. Nessa obra já se admitiam números positivos e números negativos como expoentes.

Segundo Eves (2004), os símbolos + e – foram utilizados pela primeira vez, numa obra aritmética de Johann Widman (nascido em 1460 na Boêmia).

Com uma vida muito conturbada, porém, desde cedo já mostrava dotes para os estudos, temos Girolamo Cardano, um personagem extraordinário, que nasceu em Pavia, 1501. Foi médico, astrólogo e professor de matemática. Escreveu uma obra chamada *Ars Magna* que é muito importante na história da álgebra. Esta obra continha a solução da equação de grau três. Cardano também foi um grande jogador de jogos de azar e é possível que tenha, muito tempo antes de Fermat e Pascal, introduzido ideias sobre probabilidades. Sendo contemporâneo de Cardano, temos Tartaglia, que nasceu em Brescia em 1499. Sua vida, na juventude não foi fácil, pois quase foi morto, quando os franceses invadiram sua cidade, por motivo de vingança, e mataram muitas pessoas. Tartaglia e seu pai refugiaram-se em uma igreja que também foi invadida, e nesse episódio seu pai morreu e ele ficou ferido no rosto. Ele foi salvo graças a sua mãe que o encontrou e cuidou para sua recuperação, porém ficou com um defeito na fala. Tartaglia foi autodidata em matemática. Teve papel importante no estudo das equações cúbicas e foi o primeiro a utilizar matemática nas ciências dos tiros de artilharia. Deixou um legado que é considerado o maior em aritmética do século XVI.

O maior matemático francês do século XVI foi Francois Viète. Seu trabalho mais famoso em matemática foi In Artem no qual utiliza letras para representar números. Viète foi um excelente algebrista. “Ele deu sua parcela de contribuição aos três problemas famosos da antiguidade ao mostrar que tanto o problema da trissecção como da duplicação dependiam da resolução de uma cúbica”. (Eves, 2004, p.311).

A partir do século XVIII, para entender o que aconteceu com a matemática será necessário ir além do cálculo. A ideia de continuidade estava sendo investigada, após a criação do cálculo, só que tudo estava muito no campo da intuição. No século XVIII d’Alembert alertou sobre a teoria dos limites.

Segundo Eves (2004) foi no século XIX que surge a difícil tarefa de estabelecer um rigor para a análise, onde alguns matemáticos começaram a trabalhar o conceito de limite, para então definir continuidade, só que com isso surge também a necessidade de um rigor sobre a construção de números que fossem capazes de responder a qualquer medida de comprimento, e esses números são chamados de números reais.

Foi então que o matemático Weierstrass propôs, uma teoria rigorosa sobre os números reais, que ficou conhecida como aritmetização da análise.

Foi no fim do século XIX com as pesquisas de Georg Cantor (1845-1918), Richard Dedekind (1831-1916) e Giuseppe Peano (1858-1932) que o rigor sobre os reais consolidou-se. A partir daí, estabeleceu-se uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta e os números reais.

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor, nasceu na cidade de St. Petersburg a 3 de março de 1845 e faleceu aos 72 anos em Halle, na Alemanha. Quando menino foi com a família para a Alemanha. Sua formação foi na Alemanha e na Suiça. Foi aluno de grandes matemáticos como Kummer, Weierstrass e kronecker. Conclui seu doutorado aos 22 anos, porém teve uma vida conturbada entre momentos de lucidez e momentos de loucura.

Desenvolveu a notável teoria dos conjuntos, que foi combatida por alguns matemáticos de seu tempo e defendida por outros. Portanto a aplicação de tal teoria foi tamanha que com o tempo foi finalmente aceita e valorizada, apesar de apresentar alguns paradoxos.

Cantor se interessou a princípio em fundamentar o continuum dos números reais. Encontrou uma maneira de mostrar que o conjunto dos reais é não-enumerável e que existiam conjuntos infinitos que apresentavam a mesma cardinalidade de suas partes, por exemplo, que a cardinalidade dos racionais é a mesma dos naturais, o que derrubou a ideia de que o todo é maior que as partes. Cantor apresentava várias crises depressivas e com isso foi internado muitas vezes em hospitais psiquiátricos. Morreu em um desses hospitais.

Richard Dedekind nasceu em 6 de outubro de 1831, em Braunschweig, Alemanha e morreu em 12 de fevereiro 1916. Foi matemático e amigo de Cantor. Dedicou uma especial atenção sobre os números irracionais, sobre o infinito e sobre os reais, produzindo um legado que contínua a influenciar a matemática moderna. Mostrou que os racionais e os irracionais formariam um continuum, ou seja, que a cada ponto da reta teria um representante numérico e a união desses dois conjuntos, formaria o conjunto dos números reais. Para isso criou um conhecido método chamado de Cortes de Dedekind.

CAPÍTULO 2 - FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O trabalho será direcionado a tentar desenvolver as habilidades necessárias para que o aluno possa adquirir as competências para resolver problemas relacionados aos números reais. Para isto utilizaremos filmes, jogos, aplicativos e artigos de jornais.

Os filmes motivam, pois vivemos, numa sociedade onde é necessário que façamos leituras de imagens. Com isso, enquanto professores de ensino médio, devemos mediar, gerando reflexões, principalmente sobre a importância de estudar números reais, uma vez que os filmes são escolhidos para tal objetivo.

Os jogos e os aplicativos são recursos já utilizados com frequência pelos alunos. Eles gostam muito, pois geram desafios e são lúdicos. É claro que devemos ter todo o cuidado na escolha de tais recursos, precisamos ter firmeza e clareza no propósito a ser alcançado. "O jogo e a brincadeira permitem ao aluno criar, imaginar, fazer de conta, funciona como laboratório de aprendizagem, permitem ao aluno experimentar, medir, utilizar, equivocar-se e fundamentalmente aprender"(VIGOTSKY E LEONTIEV, 1988, p.23). Os jogos e os aplicativos provocam também uma interação social, existe uma troca de ideias, erros e acertos surgem, enfim, uma comunicação é estabelecida, algo necessário para o desenvolvimento do cidadão.

Destacamos a importância da resolução de problemas matemáticos. Temos nos jornais, nas revistas, etc um manancial a ser explorado, basta ter um olhar cuidadoso para os objetivos a serem atingidos.

> "A compreensão profunda da metodologia de resolução de problemas nas aulas de Matemática, de modo que a aprendizagem seja mediada pela própria atividade de resolver problemas, apresenta-se como um ponto a ser ressaltado no processo de formação de professores que ensinam Matemática, já que essa perspectiva, de modo geral, é contrária ao "modelo" de formação a que foram submetidos a maioria dos professores quando eram alunos de Matemática". (RIBEIRO, 2009, p.21).

O PCN recomenda trabalhar com o ensino da Matemática através de resolução de problemas e propõe que a formação do aluno tenha como meta "o desenvolvimento de capacidades de pesquisar, buscar informações, analisá-las e selecioná-las; a capacidade de aprender, criar, formular, ao invés do simples exercício de memorização" (PCN, 1999, p.16). O PCN garante a todas as crianças e jovens o direito a ter acesso a um currículo comum independente do lugar em que residem.

> A medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a Educação se

> volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente. (BRASIL, 1999, p.251).

A Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias do ENEM, propõe competências e habilidades a serem adquiridas no ensino da Matemática. A competência de área 1 está relacionada a construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais e propõe as seguintes habilidades:

> H1 – reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais. H2 – identificar padrões numéricos ou princípios de contagem. H3 – resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos. H4 – avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas. H5 – avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos. (BRASIL, 2009).

Qualquer transação comercial, como por exemplo, uma simples compra num supermercado, exige certo conhecimento sobre os reais. Se vamos construir uma casa, necessitamos dos números reais, ao olharmos para as horas necessitamos dos números reais. Ao lermos um jornal, uma revista ou um site, quase sempre nos deparamos com eles, os números reais. Como o conjunto dos números reais está inserido em nosso cotidiano, ele só terá sentido para o aluno se puder aplicá-lo a situações cotidianas. Na vida, vivemos a resolver problemas, então imitando a vida, a proposta de resolução de problemas envolvendo números reais, é muito interessante, pois estes envolvem boa leitura, interpretação, organização, suposição, testagem, criatividade, etc. Porém, ao lidar com os irracionais isto se torna mais difícil, mas nada impede de que os problemas sejam de tal natureza a desafiar o aluno. Para Polya:

> O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe for possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer. O professor deve auxiliar, nem demais nem de menos, mas de tal modo que ao estudante caiba uma parcela razoável do trabalho. (POLYA, 2006, p.1).

É necessário que o aluno seja apresentado sistematicamente a problemas envolvendo situações diversas, pois a experiência o levará a resolver tarefas em um espaço de tempo curto.

Precisamos, enquanto professores, procurar fazer com que nossos alunos, atinjam as competências e habilidades necessárias, e para isso, Perrenoud propõe:

> considerar os conhecimentos como recursos a serem mobilizados;

> trabalhar regularmente por problemas; criar e utilizar outros meios de ensino; negociar e conduzir projetos com seus alunos; adotar um planejamento flexível e indicativo e improvisar; implementar e explicitar um novo contrato didático; praticar uma avaliação formadora em situação de trabalho; dirigir-se para uma menor compartimentação disciplinar. (PERRENOUD, 1999, p.53-67)

Segundo Perronoud (1999, p.22) “construir uma competência significa aprender a identificar e a encontrar os conhecimentos pertinentes”.

> No estágio de sua gênese, uma competência passa por raciocínios explícitos, decisões conscientes, inferências e hesitações, ensaios e erros. Esse funcionamento pode automatizar-se gradativamente e constituir-se, por sua vez, em um esquema complexo, em um novo componente estável desse “inconsciente prático” do qual fala Jean Piaget (PERRENOUD, 1999, p.24).

Não daremos uma definição para competência, simplesmente, adotaremos como um conjunto de habilidades mobilizadas para ter-se sucesso numa tarefa. Para Perronoud (1999, p.19) “não existe uma definição clara e partilhada das competências. A palavra tem muitos significados, e ninguém pode pretender dar a definição”.

É claro que o mundo globalizado exige do cidadão certo conhecimento sobre matemática e sempre que possível, devemos utilizar temas transversais, como é proposto no PCN.

Se trabalhado com cuidado e atenção por parte do professor, a resolução de problemas poderá levar o aluno a adquirir habilidades e competências, no campo dos números reais, para prosseguir com seus estudos e também, para auxiliá-lo no seu cotidiano. Para Onuchic e Allevato:

> Fundamentar a Resolução de Problemas nessas concepções, e implementar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, exige do professor e dos alunos novas posturas e atitudes com relação ao trabalho em sala de aula. O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. Precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos, por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Esse ato exige de ambos, portanto, mudanças de atitude e postura, o que, nem sempre, é fácil conseguir. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 82).

CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA

A metodologia de pesquisa utilizada nesse trabalho pode ser dividida em duas partes: uma pesquisa bibliográfica sobre a história da construção do conhecimento numérico, dos conjuntos numéricos e sobre o referencial teórico. Em seguida, realizamos uma pesquisa de *estudo de caso* em dois ambientes: em uma instituição de educação básica e em uma instituição de ensino superior, ambas da rede pública. Segundo Yin (2014, p.4), a metodologia do estudo de caso surge da necessidade de se compreender fenômenos sociais complexos, e sugere que se foque numa investigação empírica de uma situação específica, de modo a obter uma perspectiva global desses fenômenos.

A instituição de educação básica analisada foi um colégio estadual do município de Vassouras-RJ, onde os sujeitos da pesquisa foram os alunos de duas turmas de 1º ano do ensino médio, que chamaremos de turma A e turma B. A turma A tem 22 alunos enquanto que a turma B tem 29.

A Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ) foi a instituição de ensino superior pesquisada, e o público alvo foi um grupo de licenciandos em matemática do campus Seropédica que são bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID).

3.1 Métodos e Etapas da Pesquisa com os Discentes da Educação Básica.

É importante ressaltar algumas características do público pesquisado: com relação às turmas do 1º ano, a turma A, é basicamente formada por alunos que migraram do projeto de aceleração da aprendizagem, ou seja, alunos que anteriormente estavam fora da idade série (idade incompatível com a série) por ficarem retidos por 2 ou mais anos numa mesma série. Por exemplo, um aluno que ficou retido no 6º ano por dois anos ou mais, ao ingressar no projeto de aceleração, terá a oportunidade de cursar apenas 2 anos e ingressar diretamente no 1º ano do ensino médio. Já a turma B é formada por alunos que vieram do segundo segmento do ensino fundamental numa trajetória regular, sem retenções em séries deste ciclo.

Inicialmente foi aplicado um questionário de sondagem (Questionário 1) com 10 questões para verificar competências e habilidades que deveriam ter sido adquiridas nas séries anteriores sobre os naturais, inteiros e racionais. Após esta sondagem, a turma B teve aulas sobre os números reais através de uma metodologia tradicional de ensino, ou seja, usando o livro didático e lousa, com outro professor, enquanto que na turma A, procuramos abordar o mesmo tema através de uma série de atividades envolvendo o lúdico, softwares educacionais, situações do cotidiano e alguns temas transversais (instituídos no PCN). Escolhemos utilizar essa metodologia sobre a turma A, pois estes alunos já vinham, anteriormente, apresentando baixo rendimento em avaliações internas e externas. Finalmente aplicamos outro questionário (Questionário 2) para avaliar a aprendizagem após as atividades pedagógicas.Os Questionários 1 e 2 podem ser vistos na íntegra, nos Anexos I e II desse trabalho.

Antes de descrever as atividades realizadas com a turma A, é importante ressaltar algumas informações sobre a dinâmica da escola e sobre a sua infraestrutura. Os dias de aula com a turma são compostos de 3 tempos de 50 minutos cada. A escola possui uma sala de audiovisual e um laboratório de informática, com 9 computadores.

Algumas atividades exploraram temas transversais ao conteúdo de números reais. Tais temas foram indicados para serem pesquisados em casa, e posteriormente fossem discutidos em sala de aula.

Atividades envolvendo vídeos foram desenvolvidas na sala de audiovisual e aquelas envolvendo jogos eletrônicos, no laboratório de informática.

Atividade 1: A História do Número 1 (Vídeo).

O vídeo (A História do Número 1 - Como Tudo Começou) tem duração de 59:16 minutos. O objetivo desta atividade foi o de despertar o interesse pelo estudo dos números. O vídeo pode ser visto no seguinte sítio:

<https://www.youtube.com/watch?v=ZWZKJb06CTU> Acesso em: 20 de março de 2015.

Alguns alunos gostaram da atividade, já outros, que estavam dispersos durante o vídeo não definiram uma opinião sobre ele.

Atividade 2: Jogo do Castelo (aplicativo)

O objetivo desta atividade foi de chamar a atenção para a formação da sequência dos números naturais. Neste jogo, os participantes deverão substituir as bandeiras por números, de tal maneira a perceber a ideia de sucessor no conjunto dos números naturais.

Figura 8. **Fonte:** <http://revistaescola.abril.com.br/matematica/pratica-pedagogica/jogo-castelo-428059.shtml> Acesso em: 21 de março de 2015.

Este jogo durou 40 minutos. A turma gostou do jogo, porém achou muito simples. Tínhamos cerca de 2 alunos por computador.

Atividade 3: Reta Numérica na Lagoa (aplicativo)

O objetivo desta atividade foi de reconhecer o sucessor e o antecessor de um número natural. Este jogou durou 40 minutos. Tínhamos cerca de dois alunos por computador. A turma gostou do aplicativo, pois relembrou a disposição dos naturais na reta numérica

Figura 9. Fonte: <http://www.escoladigital.org.br/odas/54b94d4969702d490a462000> Acesso em: 21 de março de 2015.

Após às atividades 2 e 3, que foram realizadas no mesmo dia, retornamos a sala de aula e fomos discutir a sequência dos números naturais na reta numérica e os Axiomas de Peano.

Atividade 4: um problema sobre um artigo de jornal

O objetivo deste item foi de retomar a fatoração de um número natural.

Baía deve virar área de proteção em Mangaratiba (Fonte: Jornal Extra, 2015)

A Câmara de Vereadores de Mangaratiba aprovou, na última quinta-feira, a criação da Área de Proteção Ambiental (APA) da Baía de Sepetiba. O projeto, que foi uma iniciativa do Executivo, só precisa da sanção do prefeito do município, Evandro Capixaba. A medida aumenta o poder de fiscalização contra a pesca ilegal.

- Estou muito otimista, porque ela foi criada com um conselho deliberativo. Ou seja, as associações de pesca vão participar das decisões e vão entender a importância de se preservar a APA. Acabando a pesca ilegal, vão ter o recurso mais abundante para pescar- explicou Leonardo Flach.

A Área de Proteção Ambiental é municipal. Então, só a parte de Mangaratiba – cerca da metade dos 305 km² da Baía de Sepetiba – será coberta pela medida.

- Em virtude da falta de criação da área de proteção e do desenvolvimento da região costeira a qualquer custo, o golfinho entrou na lista de extinção – afirma o biólogo.

1- Qual o menor valor em km², que deveria ser acrescentado à Baía de Sepetiba para que sua área fosse um quadrado perfeito?
   O objetivo deste item foi de reconhecer um quadrado perfeito.
   A atividade só foi concluída com a interferência do professor, pois, a maioria dos alunos apresentaram dúvidas sobre quadrado perfeito.

2- Dado um retângulo de 305 km² de área. Indique um possível par de números naturais para seus lados.
   Atividade só concluída com a interferência do professor. Os alunos não perceberam que a fatoração seria um bom caminho.
   Observação: alguns alunos apresentaram dúvidas na fatoração.

Atividade 5: Preservação Ambiental (tema transversal)

Foi pedido aos alunos que fizessem uma pesquisa sobre preservação ambiental e dessem sua opinião sobre a importância do assunto. O objetivo foi despertar o interesse sobre a preservação do meio ambiente.

A pesquisa foi realizada pela maioria dos alunos, porém a argumentação individual foi fraca. Posteriormente, o tema foi compartilhado com os professores de Geografia e de Biologia desses alunos para que oportunamente pudessem retomar o tema.

Atividade 6: Corrida de Matemática (aplicativo)

O objetivo desta atividade foi o de relembrar as principais operações com números inteiros.

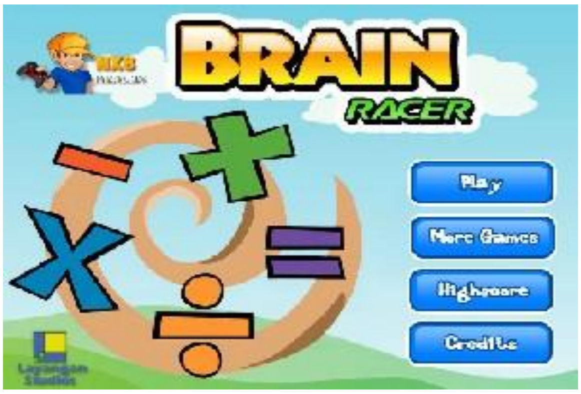


Figura 10. Fonte: <http://www.atividadesdematematica.com/jogar-jogos-de-matematica/jogo-corrida-de-matematica-inteiros> Acesso em: 21 de março de 2015.

Para jogar, o usuário deve se utilizar do teclado para escrever o resultado da conta e depois pressionar a tecla *enter*.

Este jogo durou 50 minutos. Observou-se que os alunos estavam motivados, porém muitos deles encontraram dificuldades em operar com os inteiros.

Atividade 7: operações com números inteiros (aplicativo)

Figura 11. Fonte: <http://www.noas.com.br/ensino-fundamental-2/matematica/operacoes-com-numeros-inteiros/> Acesso em: 21 de março de 2015.

O objetivo desta atividade foi relembrar as principais operações com números inteiros. Neste jogo, os alunos preenchem os campos de acordo com a representação do gráfico para realizar o cálculo corretamente. As regras do jogo encontram-se no endereço eletrônico citado.

Este jogo durou 50 minutos. Observou-se que os alunos estavam motivados e foi pedido para que anotassem alguns resultados para discussão posterior em sala de aula.

Atividade 8: gráfico de saldo bancário

O objetivo desta atividade foi de reconhecer num gráfico o saldo positivo e o saldo negativo e despertar nos alunos a importância do estudo dos números inteiros.

A turma gostou da atividade e não apresentou dificuldades na resolução.

Considere o gráfico a seguir:

1) *Analise o saldo bancário de cada pessoa desse gráfico.*
2) *O conjunto dos números naturais é suficiente para responder sobre saldo bancário?*

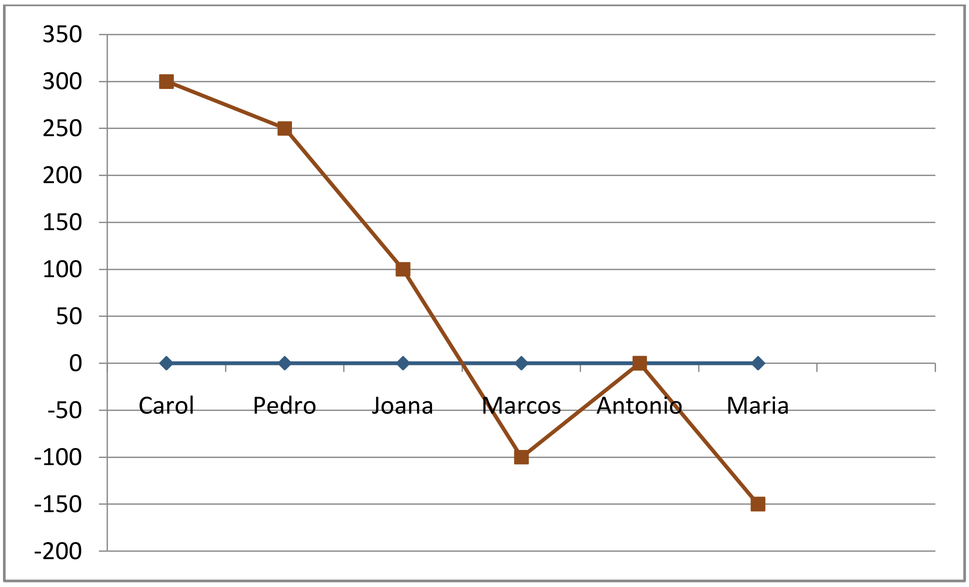


Figura 12

Atividade 9: Consumo (Tema Transversal)

Verifique se você é um "exagerado" consumista. Discorra sobre a afirmação: "É preciso ter um controle sobre o consumo desenfreado".

O objetivo desta atividade foi fazer uma reflexão sobre o consumo exagerado.

Alguns alunos colocaram que não pensavam em consumo e não tinham opinião sobre o consumo desenfreado. Outros já apresentaram uma lucidez sobre o tema. Após isto, foi discutido em sala, a importância de economizar dinheiro e ter controle de seus gastos. Este tema também foi compartilhado com o professor de Geografia, para que oportunamente pudesse abordá-lo.

Atividade 10: Um problema sobre o Saara

O Saara é o maior deserto do mundo. Localiza-se na região norte da África. Seu território estende-se pelos seguintes países: Egito, Marrocos, Argélia, Líbia, Tunísia, Mauritânia, Mali, Sudão e Chade. Faz fronteira ao norte com o Mar Mediterrâneo, ao sul com o rio Níger, a leste com o mar Vermelho e oeste com o Oceano Atlântico. As chuvas são extremamente raras e as temperaturas podem chegar a 50º C durante o dia e –5º C à noite. Com estas condições climáticas e geográficas é praticamente impossível viver no Saara. Poucos povos, entre eles os tuaregues e os beduínos, habitam esta região. Os beduínos costumam atravessar constantemente o Saara, acompanhados de seus camelos, para praticarem o comércio ambulante.

Fonte:<http://www.suapesquisa.com/geografia/deserto_saara.htm> Acesso em: 21 de março de 2015.

Faça uma reta e represente 50 ºC e -5 ºC. A seguir, calcule a diferença entre essas temperaturas e discuta com um colega sobre essa variação de temperatura com relação às condições de vida.

O objetivo desta atividade foi relacionar números inteiros com temperatura. A turma gostou da questão, pois foi discutida em dupla. De uma forma geral, não apresentaram dificuldades.

Atividade 11: Frio Abaixo de Zero no Sudeste do Brasil

> *O ar polar ainda atuou forte sobre o Sudeste do Brasil na madrugada desta sexta-feira. A noite com poucas nuvens ajudou a esfriar ainda mais o ar. No Parque Nacional de Itatiaia, a temperatura chegou aos 2°C abaixo de zero.*

Figura 13. Fonte: <http://www.climatempo.com.br/destaques/tag/abaixo-de-zero/> Acesso em: 25 de março de 2015.

Se a temperatura diminuir 4°C, qual será a nova leitura? O conjunto dos números naturais é suficiente para responder sobre medida de temperatura?

O objetivo desta atividade foi reforçar a importância de estudar os números inteiros relativos. A turma não apresentou dificuldades.

Atividade 12: Altitude

A altitude a nível do mar é zero, acima do mar é positiva e abaixo é negativa. Então qual será a distância entre um helicóptero na altitude de 500 m e um submarino na altitude de -150 m, se ambos estão na mesma vertical em relação ao mar?

Os objetivos desta atividade foram de reconhecer os inteiros na reta numérica, reconhecer valor absoluto e realização de operações com os inteiros. Esta atividade só foi concluída com intervenção. O curioso é que nenhum aluno teve a ideia de fazer um desenho para facilitar o entendimento do problema.

Atividade 13: Saldo de Gols

O campeonato brasileiro de futebol é disputado entre vinte times em turno e returno no sistema de pontos corridos, isto é, ao final do campeonato, o time com maior pontuação é o campeão. A tabela a seguir (Figura 12) é referente ao campeonato brasileiro de 2008. Saldo de gols é a diferença entre gols marcados e gols sofridos.

Calcule o saldo de gols do campeonato segundo a tabela.

TIME		PG	J	V	E	D	GP	GC	SG
1	São Paulo	75	38	21	12	5	66	36	30
2	Grêmio	72	38	21	9	8	59	35	24
3	Cruzeiro	67	38	21	4	13	59	44	15
4	Palmeiras	65	38	19	8	11	55	45	10
5	Flamengo	64	38	18	10	10	67	48	19
6	Internacional	54	38	15	9	14	48	47	1
7	Botafogo	53	38	15	8	15	51	44	7
8	Goiás	53	38	14	11	13	57	47	10
9	Coritiba	53	38	14	11	13	55	48	7
10	Vitória	52	38	15	7	16	48	44	4
11	Sport	52	38	14	10	14	48	45	3
12	Atlético-MG	48	38	12	12	14	50	61	-11
13	Atlético-PR	45	38	12	9	17	45	54	-9
14	Fluminense	45	38	11	12	15	49	48	1
15	Santos	45	38	11	12	15	44	53	-9
16	Náutico	44	38	11	11	16	44	54	-10
17	Figueirense	44	38	11	11	16	49	73	-24
18	Vasco	40	38	11	7	20	56	72	-16
19	Portuguesa	38	38	9	11	18	48	70	-22
20	Ipatinga-MG	35	38	9	8	21	37	67	-30

PG - pontos ganhos; **J** - jogos; **V** - vitórias; **E** - empates; **D** - derrotas; **GP** - gols pró; **GC** - gols contra; **SG** - saldo de gols

Figura 14. Fonte: <http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/calculos-matematicos-presentes-no-esporte.htm> Acesso em: 25 de março de 2015.

O objetivo desta atividade foi de operar com números inteiros. A atividade motivou bastante os meninos. A maioria conseguiu resolver, poucos foram os que necessitaram de intervenção.

Atividade 14: Dominós de Racionais

Foi proposto o jogo de dominós de racionais em dois modelos (veja Figuras 13 e 14).O objetivo desta atividade foi reconhecer um número racional na sua forma fracionária, na sua forma decimal e relacioná-lo com sua representação geométrica.

Essa atividade teve a duração de 3 tempos de aula de 50 minutos. Um tempo foi utilizado para trabalhar o primeiro dominó, um tempo para o segundo dominó e o último tempo para uma discussão sobre a atividade.

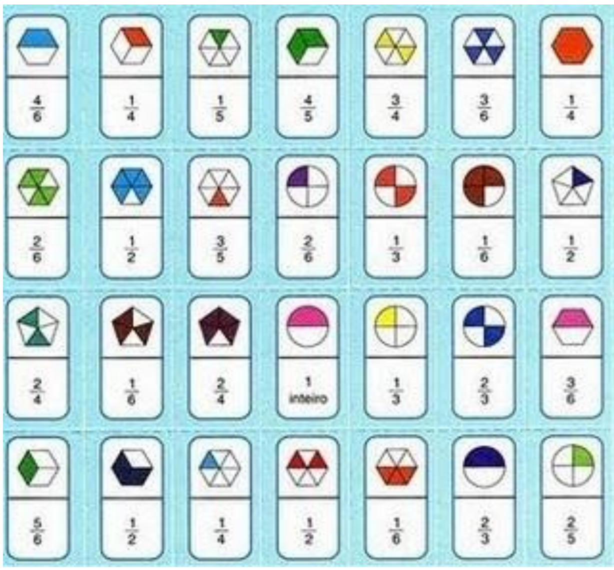


Figura 15. **Fonte**: <http://fundacionchile.solint.cl/Portal.Base/Web/VerContenido.aspx?ID=203840>
Acesso em: 25 de março de 2015.

Permitimos o uso de calculadora no trato com os dois dominós. Os alunos ficaram entusiasmados, porém a mediação foi inevitável, com relação ao segundo dominó, pois eles acharam o primeiro fácil. Depois fomos discutindo com relevância os erros cometidos e outras atividades com representação geométrica foram lançadas e novamente discutidas.

Figura 16. Fonte: <https://sites.google.com/site/sabermatematico13/historia/domino-de-racionais>
Acesso em: 25 de março de 2015.

Atividade 15: A Inflação e a poupança

A inflação num determinado país, num certo mês foi de 1,8%. Enquanto isto, a poupança neste mesmo mês, rendeu 1,5%.

Responda, segundo o texto.

1- Se um produto no começo do mês custava R$ 200,00, se seguir a inflação, no final do mês, estará valendo quanto?

2- Qual será o montante, no final deste mês, se uma pessoa aplicou no começo do mesmo R$ 2000,00 na poupança?

O objetivo desta atividade foi operar com números racionais na forma percentual. Essa atividade foi realizada com mediação, pois alguns alunos apresentaram dificuldades no cálculo com porcentagem. A resolução foi realizada através de regra de três. Alguns alunos, também, apresentaram dúvidas nas operações com decimais.

Em seguida, foi pedido para que os alunos realizassem uma pesquisa sobre inflação, a fim de promover uma reflexão sobre o tema.

Atividade 16: Gráfico de Vendas

O gráfico mostra a venda de veículos de uma indústria fictícia, em determinado período de tempo.

Figura 17. Venda de veículos (em mil unidades)

<www.csasp.g12.br/.../%7B944EFF31-F795-4F28-ABA2-29DE9646E06...> Acesso em: 26 de março de 2015.

a) Em qual mês desse período a venda de veículos foi maior?

b) Em março de 2007 foram vendidos mais veículos do que em agosto de 2007. Quantos veículos a mais?

c) Qual o total de veículos vendidos nos cinco últimos meses de 2006?

d) Calcule o total de veículos vendidos por essa indústria nos cinco primeiros meses de 2007.

O objetivo desta atividade foi de operar com números racionais e interpretar gráficos. A turma não encontrou dificuldades nessa atividade.

Atividade 17: Valor de uma Prestação

Uma loja de eletrodomésticos está fazendo a seguinte promoção: ganhe 25% de desconto e pague em 4 prestações iguais. Pretendo comprar nessa loja o forno e a TV que estão indicados ao lado. Quanto vou pagar de prestação?

Figura 18.

Fonte: <www.csasp.g12.br/.../%7B944EFF31-F795-4F28-ABA2-29DE9646E06>
Acesso em: 26 de março de 2015.

O objetivo desta atividade foi operar com números racionais e realizar o cálculo de porcentagem. Os alunos apresentaram alto grau de dificuldade nessa atividade. A maioria não conseguiu entender que era necessário primeiro dar o desconto de 25% para depois encontrar o valor de cada prestação. Atividade foi totalmente mediada e, discutida em sala de aula. Os alunos com dificuldades levaram algumas atividades para casa para ser entregue posteriormente e quem ainda continuou com dúvidas teve uma atenção individualizada. Ao que pareceu, a dificuldade estava na interpretação do problema.

Atividade 18: Consumo de Energia Elétrica

Segundo especialistas, em média, 25% do consumo de energia elétrica de uma residência deve-se ao chuveiro elétrico. A última conta de energia elétrica da casa de Bia deu R$ 120,25. Bia resolveu instalar equipamentos de capitação de energia solar para alimentar o chuveiro. Com isso, não teria ônus com o consumo de energia, apesar do custo inicial da instalação. Qual a economia financeira que Bia vai ter na sua conta de energia elétrica?

Figura 19.

Fonte: <www.csasp.g12.br/download/upLoadArquivo/> Acesso em: 26 de março de 2015.

O objetivo desta atividade foi operar com racionais na forma decimal e na forma de porcentagem. Alguns alunos apresentaram dificuldades, mas de uma forma geral a turma foi bem. Alguns alunos necessitaram de mediação.

Atividade 19: Economia de energia elétrica (Tema Transversal)

Pesquisar sobre o consumo de energia elétrica. O que você pode fazer para economizar energia elétrica? Elabore um roteiro para esta economia.

O objetivo desta atividade foi fazer com que os alunos refletissem sobre um cenário de racionamento de energia elétrica. Como o tema está muito ligado ao cotidiano do aluno, a tarefa foi bem aceita e também foi bem apresentada.

Atividade 20: 1 = 0,999...

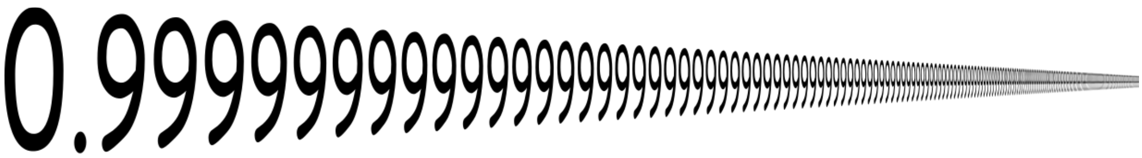


Figura 20

Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/0,999...#/media/File:999_Perspective.svg> Acesso em: 26 de março de 2015.

Uma visão algébrica para mostrar que 1 = 0,999...

$$0{,}999... = 9/9 = 1.$$

$$0{,}999... = x \Rightarrow 9{,}999... = 10x \Rightarrow 9 + 0{,}999... = 10x \Rightarrow 9 + x = 10x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 = 9x \Rightarrow x = 9/9 = 1.$$

Atividade 21: Vídeo sobre A História da Matemática 1 – A linguagem do Universo

O vídeo A História da Matemática 1 - A Linguagem do Universo encontra-se disponível no sítio<https://www.youtube.com/watch?v=BWtrVYNS3BI>(Acesso em: 28 de março de 2015), com duração de 58 minutos.

O objetivo desta atividade foi de estimular os alunos sobre a importância de se estudar Matemática. A turma gostou do vídeo.

Atividade 22: A nossa quadra de esportes

A quadra da nossa escola tem 20 m por 10 m. Aplique Pitágoras e encontre o valor de sua diagonal.

Essa atividade foi o ponto de partida para o estudo dos reais. Questionamos os alunos se eles achavam que cada ponto da reta teria um representante racional.O objetivo desta atividade foi de reconhecer que existem outros números além dos racionais.Os alunos perceberam que só os racionais não poderiam responder a todas às medidas.

A seguir foi colocada a seguinte pergunta: Será que existe algum número racional que elevado ao quadrado resulta 2?

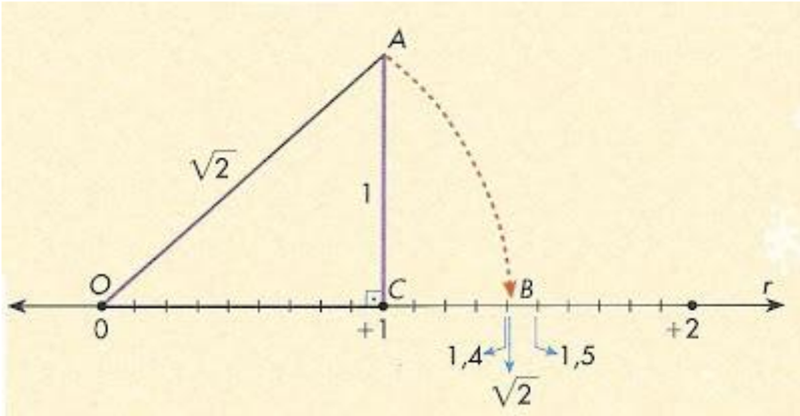


Figura 21. Fonte: <http://topicosmatematicos.blogspot.com.br/> Acesso em: 29 de março de 2015.

A resposta é não. Mas então, devemos mostrar que $\sqrt{2}$ não é racional. Para isto vamos usar um recurso chamado redução ao absurdo, ou seja, vamos supor que uma ideia vale e ao argumentarmos iremos cair numa contradição. Vamos supor que $\sqrt{2}$ = m/n, com m e n inteiros e primos entre si (o único divisor comum entre m e n é o um).

$$(\sqrt{2})^2 = (m/n)^2 \Rightarrow 2 = m^2/n^2 \Rightarrow m^2 = 2n^2, \text{ logo, m é par.}$$

Como m é par podemos escrever $m = 2p$. Então $(2p)^2 = 2n^2$ e daí $4p^2 = 2n^2$. Segue que $n^2 = 2p^2$, logo, n também é par. Mas isso, é uma contradição, pois supomos m e n primos entre si. Essa contradição é dada pelo fato de termos assumido que $\sqrt{2}$ é um racional. Logo, $\sqrt{2}$ não é um número racional. Logo, o conjunto dos racionais não contempla todas as medições possíveis. Surge então a necessidade de se definir um novo conjunto, o qual chamamos de conjunto dos números irracionais.

A turma não gostou muito dessa apresentação. Foi percebido que alguns estavam dispersos e relataram que preferiam aceitar o fato de que $\sqrt{2}$ não ser racional e pronto. Isto já era esperado, devido à complexidade do conceito de número irracional.

Atividade 23: A Reta Real

Com a turma dividida em grupos, foi desenhada uma reta real no quadro. Dentro de uma caixa havia números reais que foram sendo sorteados por elementos dos grupos. Após o sorteio, outros alunos, indicados pelo grupo, foram até o quadro e localizaram seu respectivo número na reta.

O objetivo desta atividade foi de conhecer a reta real. A turma gostou muito dessa atividade. Para alguns alunos inseguros foi permitido o uso da calculadora, porém, o tempo todo eles foram estimulados a não fazer uso de tal instrumento.

Atividade 24: Jogo da Memória

Esta atividade foi extraída do seguinte sítio:

<http://www.ehow.com.br/atividades-tematicas-numeros-reais-info_3892/> Acesso em: 29 de março de 2015.

Escreva raízes quadradas, pi, raízes cúbicas, frações ou números decimais em pequenos cartões, sempre em números pares. Cada cartão deverá ter sempre um cartão correspondente, como no jogo da memória. Em um dos cartões, escreva o número em uma forma e no seu correspondente, escreva esse mesmo número em outro formato. Por exemplo, se em um cartão estiver escrito o número π, o cartão correspondente trará esse mesmo número na sua forma decimal (3,1415...). Os alunos podem formar grupos de dois a quatro jogadores. Coloque todos os cartões virados para baixo, de forma aleatória. Os times devem ir virando os cartões para cima até acharem todos os pares do jogo. Ganha o time que achar mais pares.

O objetivo desta atividade foi reconhecer números reais na forma racional e de aproximações na forma irracional. A atividade foi muito trabalhosa, porém os alunos gostaram muito. Anteriormente, foi pedido para que estudassem antes de vir para o jogo, pois afinal de contas era uma competição. Foi percebido que alguns alunos ainda apresentavam dúvidas sobre os reais. As dúvidas foram retiradas individualmente.

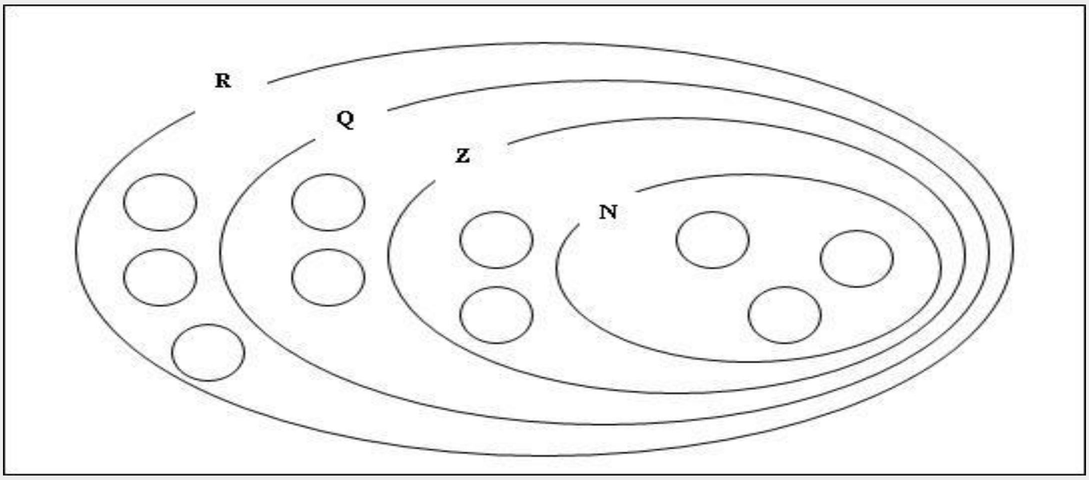
Atividade 25: Bingo dos Conjuntos Numéricos

Esta atividade foi extraída do seguinte sítio:

<http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1914> Acesso em: 29 de março de 2015.

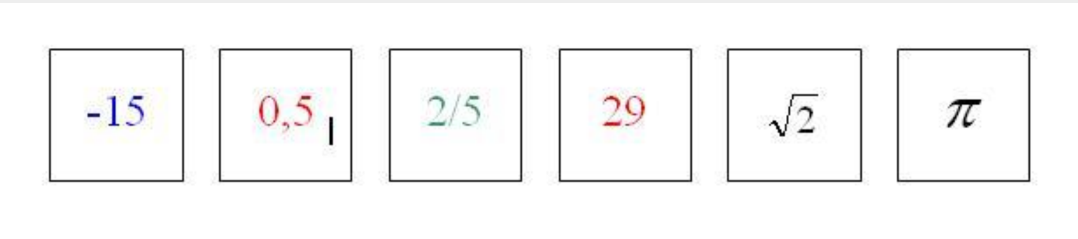
Materiais

- Fichas para marcação conforme modelo abaixo (uma para cada aluno);



Obs: A posição das bolas a serem preenchidas deverá ser diferente em cada tabela.

- Fichas para sorteio com números diversos;



Planilhas de Marcação:

Desenvolvimento

O professor deverá distribuir uma cartela para cada aluno e dar as instruções, dentro de um saco deverá conter fichas contendo 40 números (10 para cada parte do diagrama – naturais, negativos, não-inteiros e irracionais), a cada número sorteado os alunos deverão preencher suas cartelas no lugar correspondente, até que um ou mais alunos preencham todas as lacunas, e assim recomece a atividade com os vencedores até sobrar apenas um que será o grande vencedor.

DICA: A planilha de marcação servirá para conferir se os números marcados foram sorteados, deve-se observar se todos estão certos, sendo que essa análise pode ser feita junto com os alunos.

O objetivo desta atividade foi reconhecer os conjuntos numéricos. A turma gostou muito dessa atividade, houve muita participação e também alguma mediação.

Atividade 26: Revisitando a Reta Real

(SAERJ) O professor Carlos pediu a seus alunos que posicionassem corretamente na reta numérica os números: -0,7; -0,3 e 0,3. A reta onde esses valores estão devidamente posicionados é:

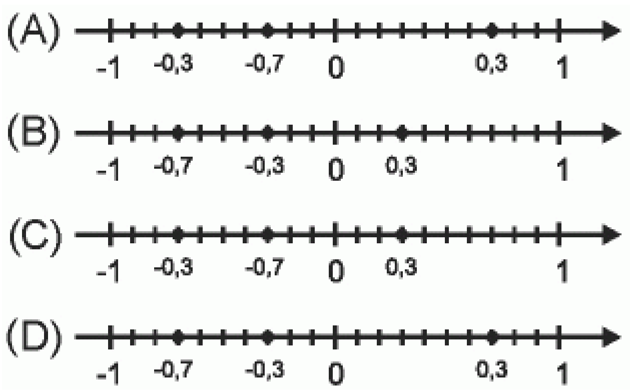


Figura 22.

O objetivo desta atividade foi de reconhecer a posição de números reais na reta real. A turma não encontrou dificuldades na realização da atividade.

Atividade 27: Jogo: Números reais na Reta

Figura 23. Fonte:< http://www.noas.com.br/ensino-fundamental-2/matematica/numeros-na-reta/> Acesso em: 30 de março de 2015.

O objetivo desta atividade foi de resolver exercícios relacionados à reta numérica. Neste jogo, são apresentados números reais e o participante, deverá localizá-los na reta.

A aplicação do jogo durou 50 minutos. Foi permitido o uso de calculadora para aqueles que ainda apresentavam dúvidas. Os alunos gostaram e não encontraram muitas dificuldades.

Atividade 28: Folhetos de Supermercado

Pegue encartes de jornais ou folhetos de promoções em supermercados e com apenas a quantia de R$156,00 faça uma lista de compras com produtos que sejam realmente necessários para o seu cotidiano. Faça sua lista, coloque o preço de cada produto, faça as contas e verifique se vai sobrar troco. Se sobrar troco, deixe esse valor indicado.

O objetivo desta atividade foi de operar com números reais. A turma gostou da atividade e não houve dificuldades.

Atividade 29: O Número π

Em casa, pegue um recipiente cilíndrico e com um barbante ache o comprimento de sua circunferência. A seguir, encontre aproximadamente o seu diâmetro e, finalmente divida o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro. Faça *as anotações, e em sala de aula, vamos fazer uma tabela no quadro com todos os resultados encontrados pela turma.*

O objetivo desta atividade foi de reconhecer através de uma investigação uma aproximação para o π. Nesta atividade poucos alunos levaram os dados, mesmo assim, esses dados foram computados numa tabela desenhada no quadro e em seguida foi discutido a relação entre comprimento da circunferência e seu diâmetro.

Atividade 30: A Anistia

ANISTIA FAZ ATO PELOS JOVENS

"Queremos ver os jovens vivos". Este é o nome do manifesto que a Anistia Internacional vai apresentar hoje à tarde, no Complexo da Maré. O documento, que chama a atenção para o alto número de assassinatos de jovens negros no país, faz parte da campanha "Jovem Negro Vivo", que o movimento promove, a partir das 13 h, no Centro de Artes da Maré. A programação vai até o fim da tarde, com performances de dança e rodas de conversa, entre outras atividades. A entrada é franca.

- O Brasil é o país com um dos maiores índices de homicídios, são 56 mil por ano. Mais da metade dos assassinatos são de jovens, de 15 a 29 anos, e 77% das vítimas são negros.

Trazer a campanha para o Complexo da Maré é ampliar a mobilização em torno de um tema que faz parte da realidade diária de quem vive nos territórios de favela: o assassinato de seus jovens- afirma Atila Roque, diretor executivo da Anistia Internacional do Brasil.

Fonte: Jornal Extra – 2015.

Suponha que 30 000 jovens são assassinatos por ano, segundo o texto, quantos são negros?

O objetivo desta atividade foi de operar com números reais. A turma achou interessante a questão e, poucos encontraram dificuldades em realizá-la.

Atividade 31: Violência (Tema Transversal)

Faça uma reflexão sobre a violência em nosso país e, principalmente a violência contra o jovem.

O objetivo desta atividade foi de fazer uma reflexão sobre a violência em nosso país. A turma gostou bastante do tema e o argumento que surgiu com maior frequência foi sobre a pouca oportunidade dada aos jovens.

3.2 Descrição da pesquisa com os licenciandos da UFRRJ

O grupo de licenciandos que foi alvo da pesquisa é composto por alunos bolsistas do PIBID – matemática da UFRRJ.

O PIBID é um programa voltado para a formação do futuro professor da educação básica. Bolsas são concedidas pela Capes para discentes que participam de projetos desenvolvidos nas Instituições de Educação Superior em parceria com as escolas públicas. Os projetos devem promover a inserção dos estudantes no contexto destas escolas.

O PIBID - Matemática da UFRRJ, presente no campus Seropédica conta com um total de 41bolsistas, alunos do 3º período em diante do curso de licenciatura em matemática. O projeto atualmente é coordenado por três professores do Departamento de Matemática.

É importante ressaltar que, pela natureza do projeto, esses licenciandos têm contato direto com a prática docente pois, vivenciam a realidade dos colégios da rede pública estadual e municipal de Seropédica durante 4 horas semanais.Eles também são constantemente estimulados pelos coordenadores do projeto a pensar e a pesquisar sobre novas metodologias de ensino da matemática.

Segundo dados do sistema acadêmico da UFRRJ, a média do coeficiente de rendimento (C.R.) de todos os alunos do curso de licenciatura em matemática é 4,10 o que é inferior à média de aprovação nas disciplinas da graduação desta instituição, que é 5,0. A média do C.R. dos bolsistas do PIBID-matemática é 6,02, o que ilustra que na média, esses alunos têm um rendimento mais regular ao longo da matriz curricular do curso de licenciatura em matemática.

No total, 32 alunos do projeto PIBID-Matemática responderam ao Questionário 3, o que corresponde a aproximadamente 14% dos alunos do curso de licenciatura em matemática da UFRRJ. Este questionário apresentou dois objetivos: avaliar o conhecimento desses licenciandos acerca dos números reais e investigar quais seriam as propostas didático-pedagógicas que esses futuros professores adotariam mediante as dificuldades de aprendizagem enfrentadas pelos alunos da educação básica. A análise de algumas respostas será feita no Capítulo 4 desta dissertação. O questionário encontra-se no anexo 3.

CAPÍTULO 4 – Análise dos Resultados da Pesquisa

4.1 Pesquisa com os discentes da educação básica

As ações da pesquisa foram baseadas em atividades lúdicas (jogos e aplicativos) e na resolução de problemas que pudessem motivar o estudo dos números reais.

O objetivo do Questionário 1 foi avaliar o conhecimento dos alunos sobre os conjuntos numéricos, conteúdos que já foram (ou deveriam ser) estudados anteriormente no Ensino Fundamental.

O objetivo do Questionário 2 (pós-atividades) foi de verificar, após aplicadas as atividades, se houve algum progresso dos alunos com relação aos números reais. Lembramos que a "turma experimental" foi a turma A, que era composta por alunos que tiveram uma trajetória irregular no Ensino Fundamental.

4.1.1 Resultados do Questionário 1 (sondagem)

Serão apresentados por meio de gráficos, os percentuais de acertos das turmas A e B nas perguntas do Questionário 1.

1- Qual é a fração que representa 0,75?

( ) 1/4

( ) 7/5

( ) 3/4

( ) 1/8

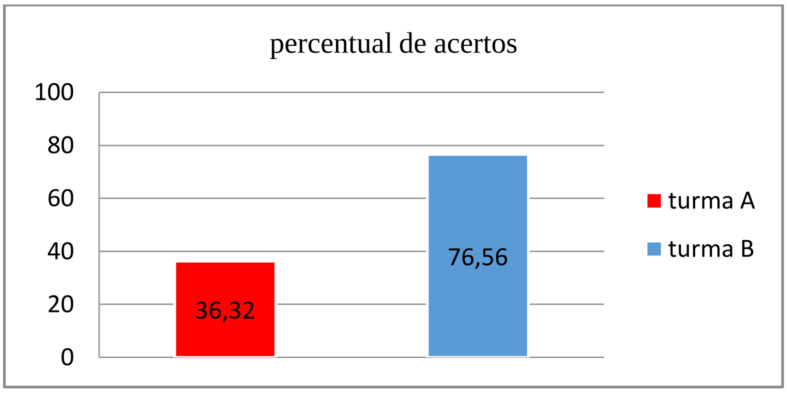


Gráfico 1.

Percebemos que a maioria dos alunos da turma A não apresentaram sólido conhecimento de como transformar um número decimal em uma fração.

2- O resultado de 1/3 + 3/4 é:

(   ) 9/4

(   ) 5/3

(   ) 13/12

(   ) 4/7

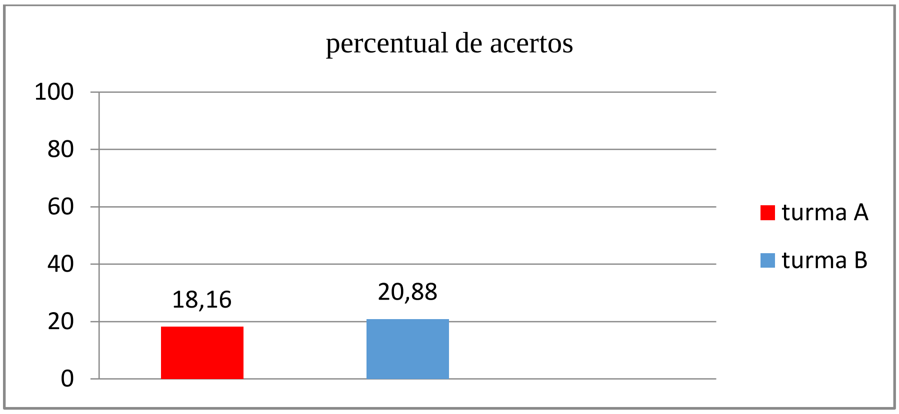


Gráfico 2

Notamos que tanto a turma A quanto a turma B apresentaram dificuldades na soma de frações.

3- Um produto que custa R$ 80,00 sofre um aumento de 10%. Após esse aumento, sofre um desconto de 5%. Qual será o valor desse produto após esse desconto?

(   ) R$ 85,00

(   ) R$ 86,80

(   ) R$ 82,80

(   ) R$ 83,60

Podemos perceber no Gráfico 3 que tanto a turma A quanto a turma B apresentaram dificuldades no trato da porcentagem.

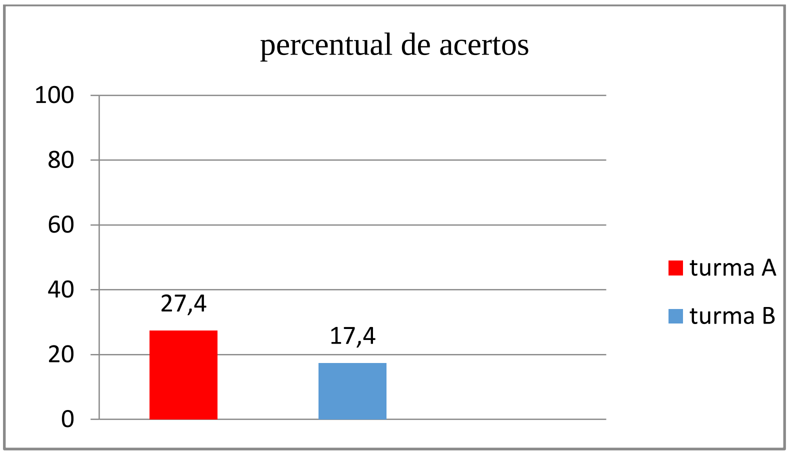


Gráfico 3

4- Um possível racional que está entre 1/4 e 1/2 é:

( ) 3/8

( ) 3/4

( ) 5/2

( ) 1/8

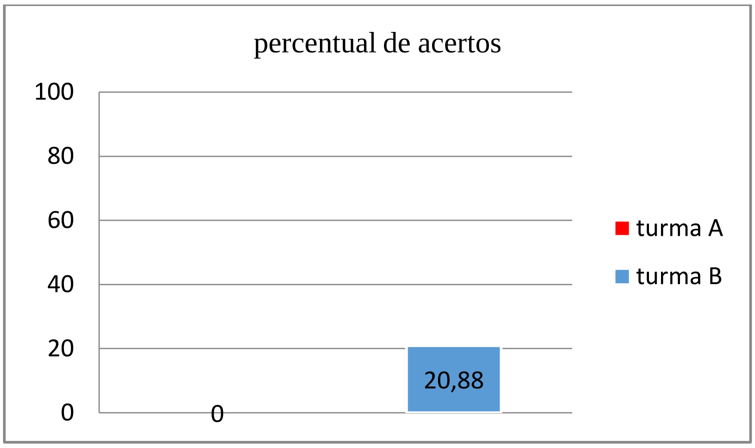


Gráfico 4

Percebemos que os alunos da turma A não apresentaram conhecimento algum sobre a localização de racionais entre racionais, já os alunos da turma B poucos parecem ter esse conhecimento.

5- Qual é o valor aproximado, com uma casa decimal, para a $\sqrt{7}$?

( ) 3,5

( ) 7,1

( ) 1,7

( ) 2,6

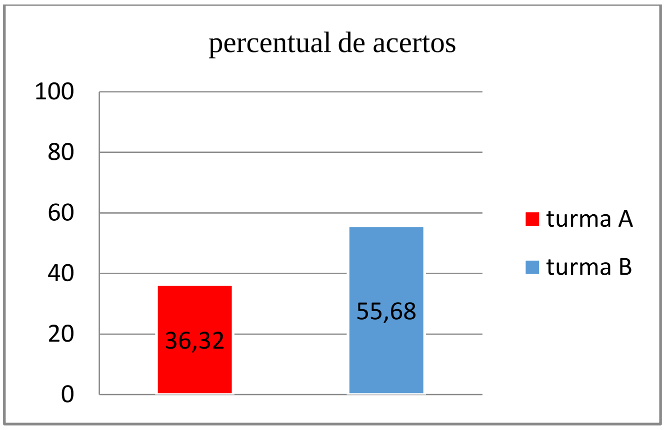


Gráfico 5.

Percebemos que a turma A não apresentou conhecimento sólido sobre a aproximação de radicais não exatos.

6- Sobre a soma de dois números irracionais, é verdade que:

( ) é sempre irracional.

( ) é sempre racional.

( ) poderá ser racional.

( ) não poderá ser efetuada.

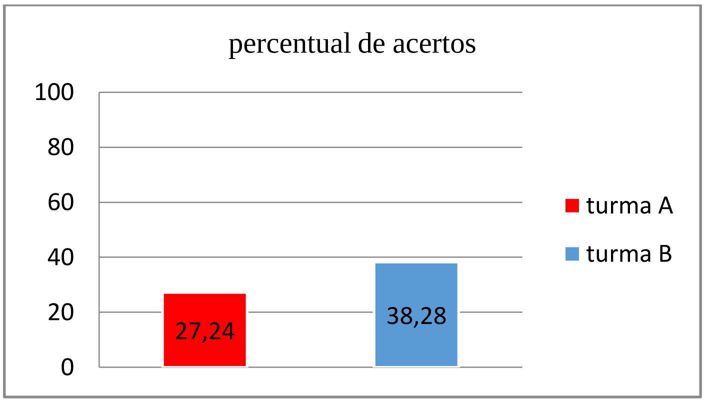


Gráfico 6.

Percebe-se que tanto na turma A quanto na B os alunos apresentaram dificuldades no trato dos irracionais.

7- Qual é a geratriz de 0,353535...?

( ) 7/99

( ) 35/99

( ) 5/99

( ) 35/100

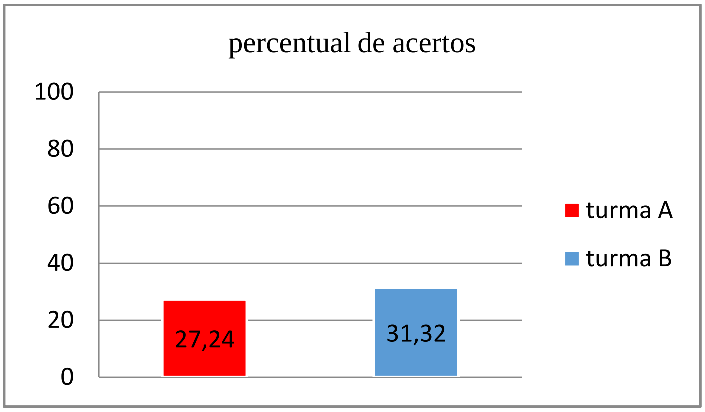


Gráfico 7

Percebe-se que tanto na turma A quanto na B os alunos apresentaram dificuldades no trato das dízimas periódicas.

8- O número π está localizado na reta real entre os números:

( ) 1 e 2

( ) 2 e 3

( ) 3 e 4

( ) 4 e 5

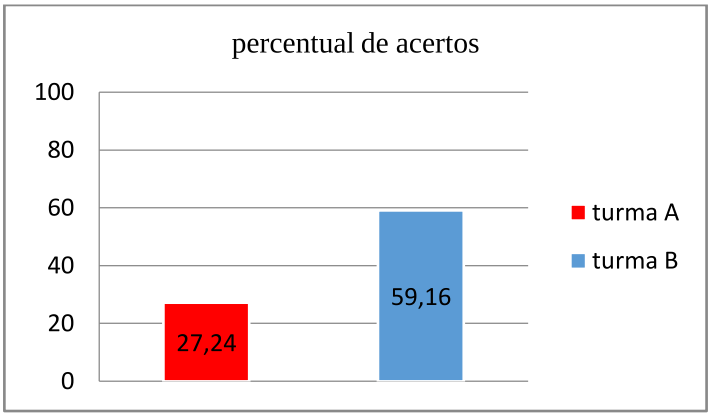


Gráfico 8.

Este resultado indica que a maioria os alunos da turma A podem não ter tido nenhum contato com o número π.

9- Qual conjunto abaixo apresenta somente números naturais?

( ) {-2, -1, 0, 1, 2}

( ) {0, 1/2, 1}

( ) {10, 20, 30}

( ) {3, 1/3, 0,8}

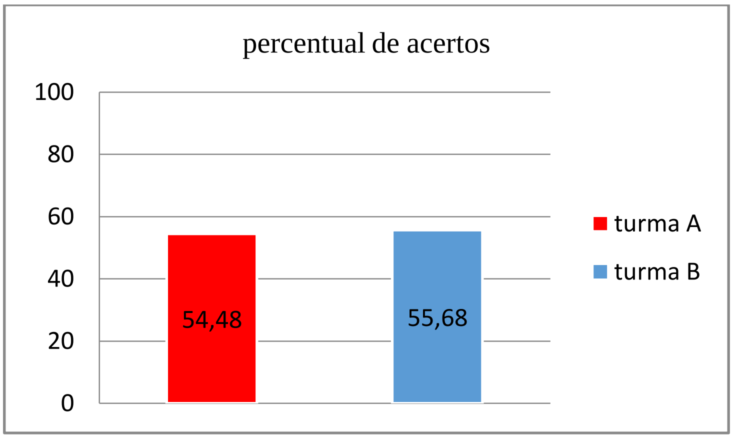


Gráfico 9.

Percebemos que tanto os alunos da turma A quanto os alunos da turma B apresentaram um conhecimento razoável sobre reconhecimento de números naturais.

10- Qual igualdade é verdadeira?

( ) 1/2 = 2/8

( ) 1/3 = 0,333...

( ) 2/5 = 0,444...

( ) 6/8 = 1/4

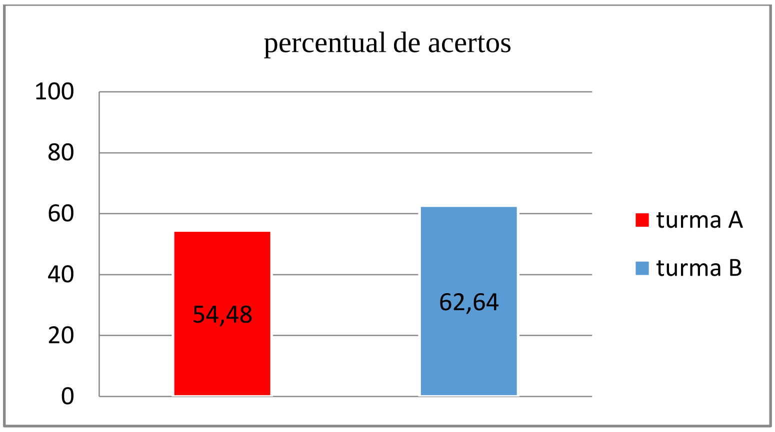


Gráfico 10.

Percebemos que mais da metade dos alunos, nas duas turmas, não encontraram dificuldades no trato de igualdade de racionais.

De uma maneira geral, o desempenho da turma B foi superior que o da A. Em virtude do histórico das duas turmas, esse resultado já era previsível.

4.1.2 Resultado do Questionário 2 (pós-atividades)

1- Qual é a fração que representa 0,33?

( ) 3/10

( ) 33/10

( ) 33/100

( ) 10/3

Pelo Gráfico 11, vemos que tanto os alunos da turma A quanto os alunos da turma B apresentaram um bom rendimento no trato de números decimais em sua forma fracionária.

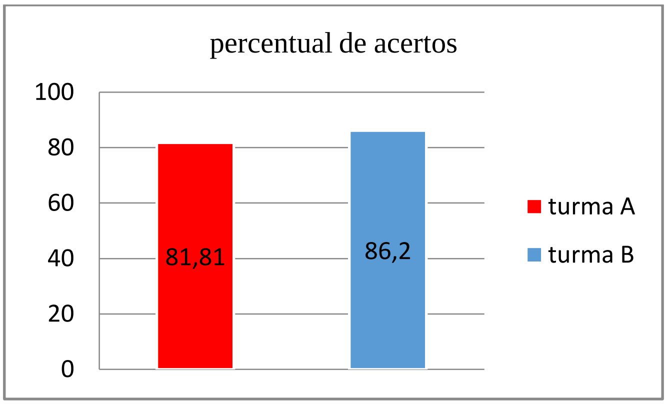


Gráfico 11.

2- O resultado de 1/5 – 1/4 é:

( ) 1/20

( ) -1/20

( ) 1/10

( ) -1/10

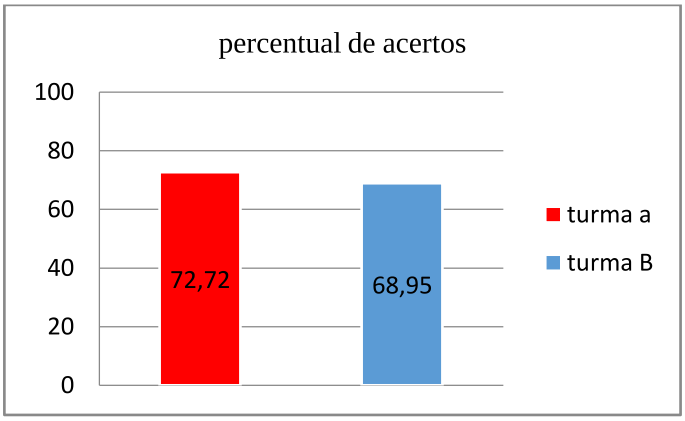


Gráfico 12.

Notamos que tanto os alunos da turma A quanto os alunos da turma B apresentaram uma melhora significativa, com relação ao Questionário 1, com relação à adição de frações.

3- Um produto que custa R$ 120,00 sofre um aumento de 15%. Após esse aumento, sofre um desconto de 10%. Qual será o valor desse produto após esse desconto?

( ) R$ 130,00

( ) R$ 120,80

( ) R$ 124,20

( ) R$ 110,40

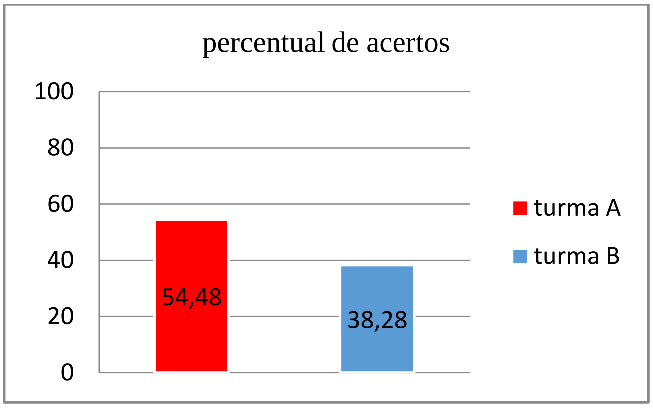


Gráfico 13.

Percebemos que mais da metade dos alunos da turma A souberam trabalhar corretamente com problemas envolvendo porcentagem. A turma B por sua vez teve um rendimento inferior.

4- Um possível racional que está entre 2/3 e 1 é:

( ) 0,25

( ) 0,444...

( ) 0,5

( ) 0,858585...

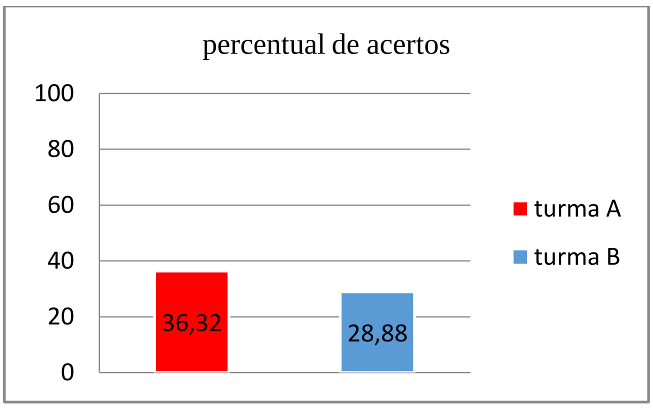


Gráfico 14.

Mesmo após aplicadas as ações metodológicas, percebemos que o conhecimento de localizar os números reais na reta não foi assimilado de forma maciça por nenhuma das turmas. Faz-se necessário então, realizar uma revisão e aprimoramento das atividades relativas à localização de números na reta real.

Apesar disso, a turma A melhorou muito com relação à mesma questão 4 do Questionário 1, onde nenhum aluno foi capaz de responder corretamente ao que foi perguntado.

5- Qual é o valor aproximado, com uma casa decimal, para a $\sqrt{20}$?

( ) 20,2

( ) 4,4

( ) 2,3

( ) 9,8

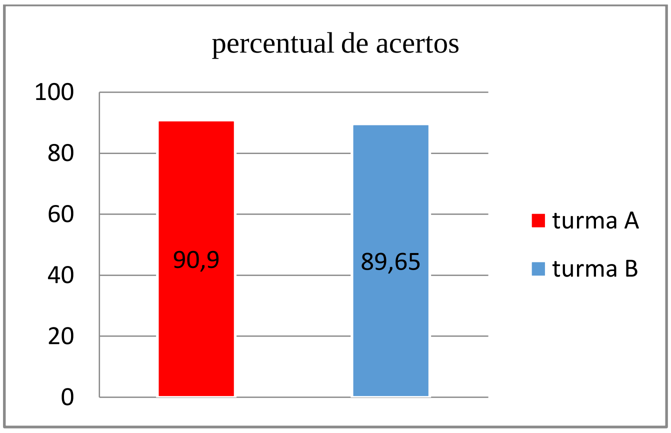


Gráfico 15.

Ambas as turmas apresentaram bons resultado com relação a aproximação de raízes não exatas.

6- Sobre a soma de dois números racionais, é verdade que:

( ) é sempre um número inteiro.

( ) é sempre zero.

( ) é sempre um racional.

( ) poderá ser um irracional.

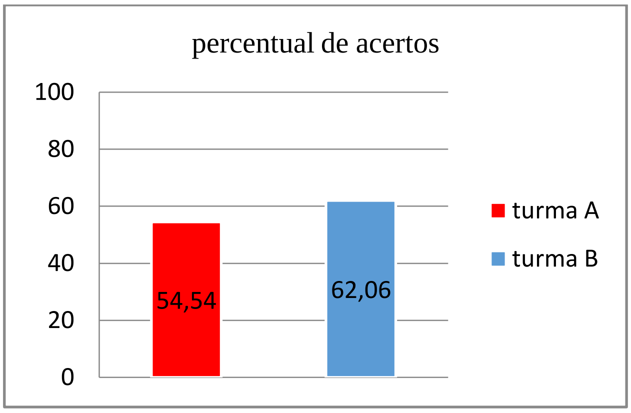


Gráfico 16.

Percebemos que ambas as turmas apresentaram um rendimento razoável em relação a soma de racionais.

7- Qual é a geratriz de 0,555...?

( ) 5/99

( ) 5/10

( ) 5/2

( ) 5/9

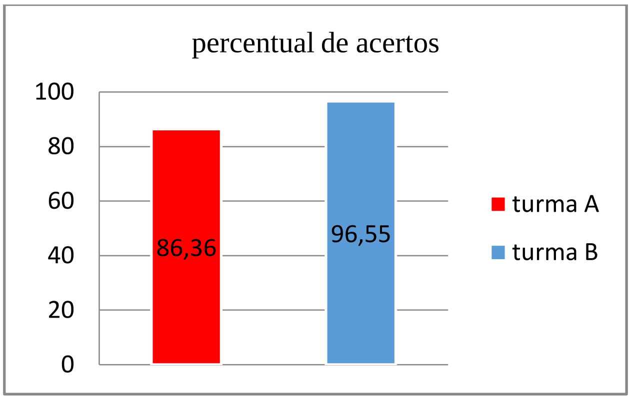


Gráfico 17.

Os alunos das duas turmas apresentaram bom rendimento em relação a dízimas periódicas.

8- Em qual intervalo encontra-se o número -2/3?

( ) [-2, -1]

( ) [-1,0]

( ) [0,1]

( ) [1,2]

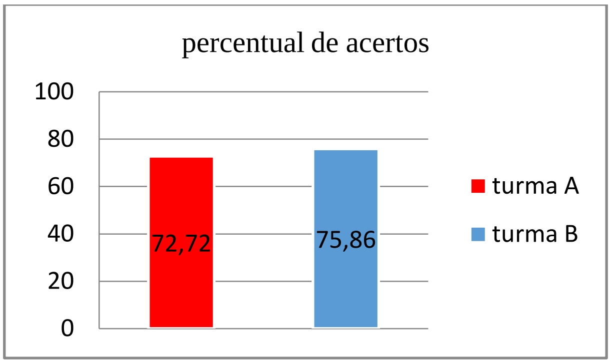


Gráfico 18.

Percebemos que as duas turmas apresentaram bom rendimento na localização de racionais em intervalos reais. Esse resultado contrastou com o da questão 4. Aparentemente, os alunos mostraram ter mais facilidade de determinar um intervalo que contenha um dado número racional quando as extremidades desse intervalo sejam números inteiros.

9- Qual conjunto abaixo apresenta somente números inteiros?

( ) {1/2, 3/4, 0, 1}

( ) {$\sqrt{5}$, 0, -5}

( ) {5,2; 6,8; 1/2}

( ) {-3, 0, 3}

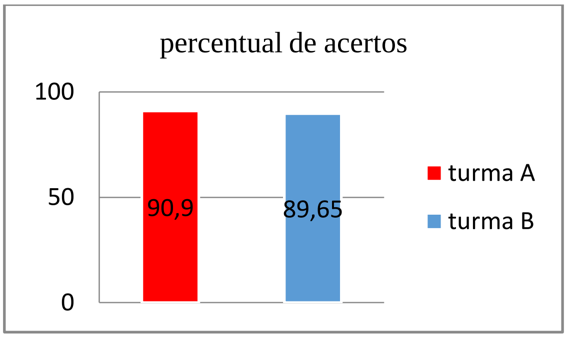


Gráfico 19.

Ambas as turmas apresentaram ótimo rendimento com relação ao reconhecimento de números inteiros.

10- Qual igualdade é verdadeira?

( ) 3/6 = 1/2

( ) 2/3 = 0,333

( ) 5/2 = 2/5

( ) 0,222... = 1/5

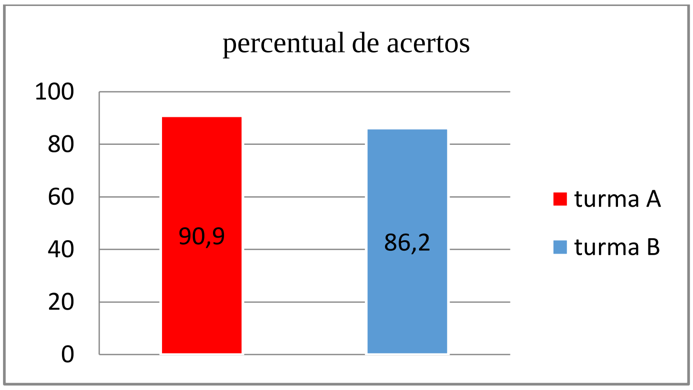


Gráfico 20.

Ambas as turmas apresentaram ótimo rendimento com relação a igualdade de racionais.

Os Gráficos 21 e 22 contêm informações sobre a média do percentual de acertos das turmas nos dois questionários.

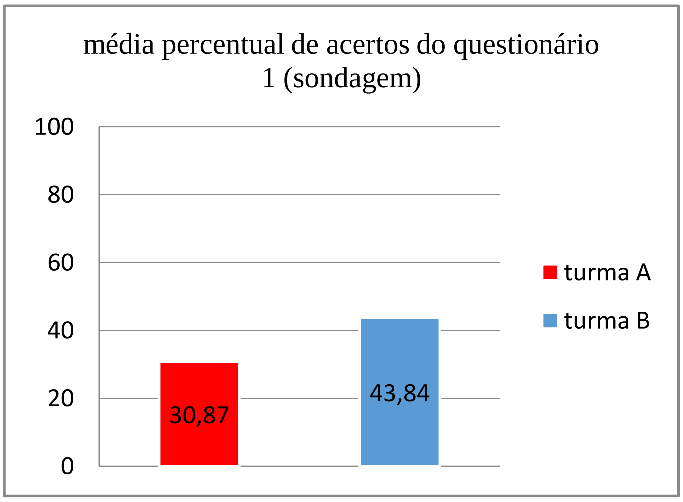


Gráfico 21

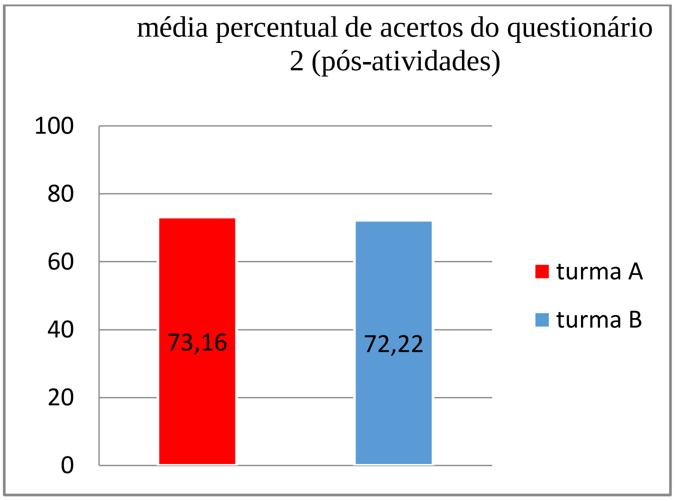


Gráfico 22.

Como já foi informado, a turma A tem um histórico problemático, pois ela é composta por alunos que migraram da correção de fluxo (desvio idade série), enquanto que os alunos da turma B vieram diretamente do ensino fundamental II regular. Os Gráficos 21 e 22 mostram que o crescimento da média de acertos do Questionário 1 para o 2 foi bem maior na turma A. O Gráfico 22 mostra que, após as atividades, a turma A praticamente atingiu mesmo nível de acertos que a B. Isso nos leva a acreditar que as atividades desenvolvidas com os alunos da turma A, tais como jogos, aplicativos e resolução de problemas podem ter sido decisivas para esse resultado.

4.2 Questionário 3 (licenciandos)

O gráfico 23 mostra a distribuição dos licenciandos por períodos do curso de matemática.

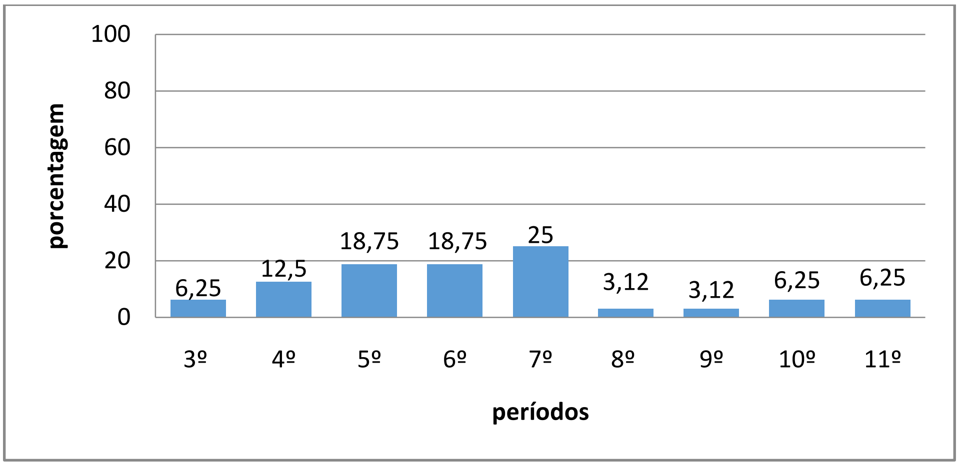


Gráfico 23.

Notamos que mais de 80% dos bolsistas de iniciação à docência avaliados já cursaram pelo menos 4 períodos da graduação em matemática. Exatamente no 5º período da matriz curricular da licenciatura, o aluno tem contato com as disciplinas “Análise Real I” e “Laboratório de Matemática para o Ensino de Educação Básica I”, onde na primeira são abordados os aspectos formais da teoria dos números reais, enquanto na segunda, são abordados de forma prática de algumas metodologias de ensino dos conceitos mais importantes do Ensino Fundamental. Evidentemente, não podemos garantir que esses alunos estão cursando essas disciplinas só porque estão no 5º período em diante, pois pode ter havido alguma retenção em disciplinas de períodos anteriores que atrasaram o andamento deles na matriz curricular.

1- Se você fosse professor de um aluno que têm dificuldades em realizar somas e produtos de números inteiros, o que faria para tentar reduzir essas dificuldades?

A seguir descrevemos algumas respostas:

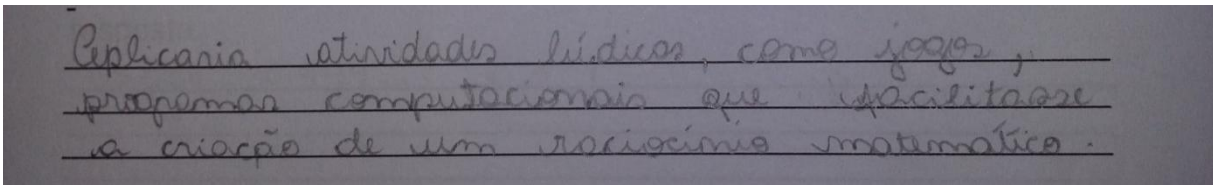

Aplicaria atividades lúdicas, como jogos, programas computacionais que facilitasse a criação de um raciocínio matemático.

Figura 24.

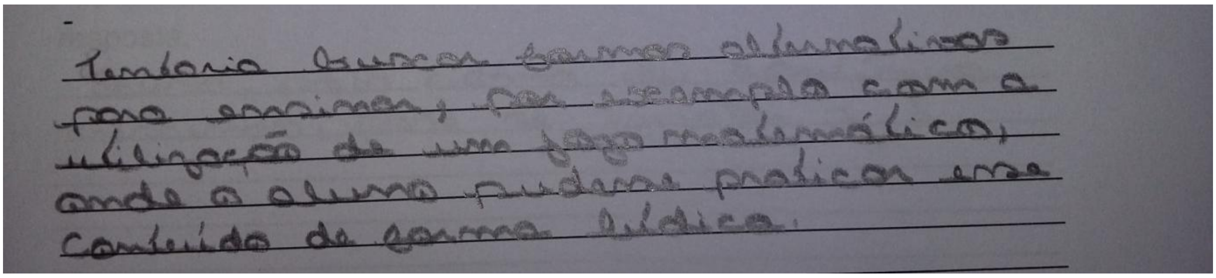

Tentaria buscar formas alternativas para ensinar, por exemplo com a utilização de um jogo matemático, onde o aluno pudesse praticar esse conteúdo de forma lúdica.

Figura 25.

Praticamente todos responderam que seria necessário aplicar atividades lúdicas tais como jogos, aplicativos, etc. Isto pode ser atribuído à natureza do projeto PIBID, que incentiva os licenciandos a pesquisar por outras metodologias de ensino da matemática. O que é muito bom, pois esse tipo de metodologia pode fazer a diferença para o auxílio de alunos que têm muitas dificuldades de aprendizagem em matemática, como foi visto na pesquisa que realizamos com os discentes da educação básica. Porém é importante ressaltar que apenas isso não é suficiente para garantir um aprendizado mais concreto dos conteúdos abordados em sala de aula, é necessário que o professor também possua domínio do conteúdo lecionado.

2- Como você definiria num primeiro momento o conceito de número racional para um aluno da educação básica?

Nas Figuras 26, 27, 28 e 29, vemos algumas das respostas dadas pelos licenciandos.

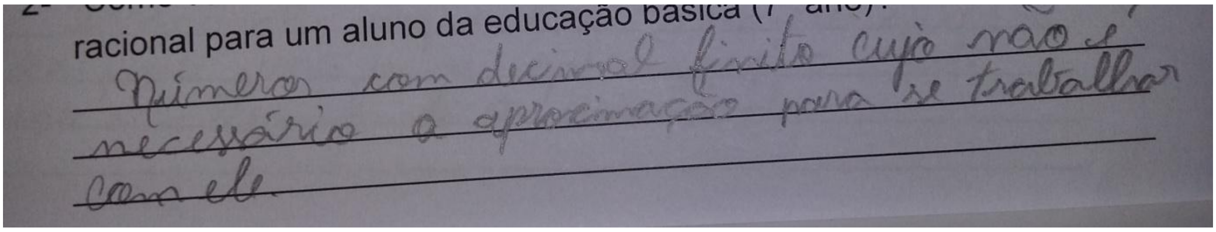

racional para um aluno da educação básica (7º ano)?
Números com decimal finito cujo não é necessário a aproximação para se trabalhar com ele.

Figura 26.

A resposta dada na Figura 26 mostra que o licenciando não tem domínio do conceito de número racional, pois excluiu o caso das dízimas periódicas. De acordo com Silva e Penteado (2009, p.335), há uma confusão com relação à representação decimal dos números irracionais. É comum encontrar alunos que entendem que números irracionais são aqueles que tem infinitas casas decimais depois da vírgula. Estes dois autores citam em seu trabalho várias pesquisas realizadas com alunos de outras universidades federais e também de universidades fora do Brasil, onde esse tipo de confusão é recorrente.

Apesar das Figuras 27, 28 e 29 estarem conceitualmente corretas, mesmo que escritas de maneira informal, para um primeiro contato dos alunos da educação básica com o conceito de número racional, as respostas parecem formais demais.

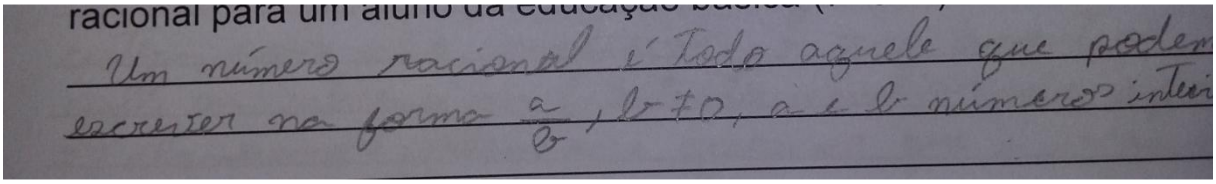

racional para um aluno da educação básica
Um número racional é Todo aquele que podem escrever na forma $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, a e b números intei

Figura 27.

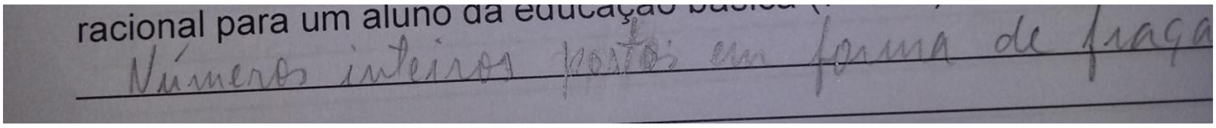

racional para um aluno da educação básica
Números inteiros postos em forma de fraç

Figura 28.

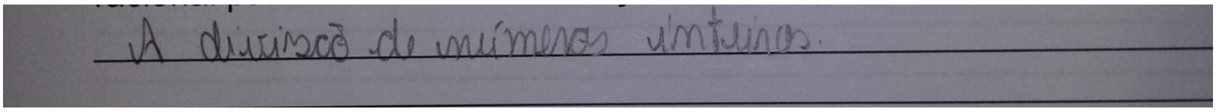

A divisão de números inteiros.

Figura 29.

3- Você é capaz de apresentar duas situações do seu cotidiano onde os números racionais são utilizados?

A maioria conseguiu apresentar dois exemplos. Apenas um não conseguiu apresentar exemplos e dois apresentaram apenas um. Algumas respostas estão ilustradas nas Figuras 30, 31 e 32.

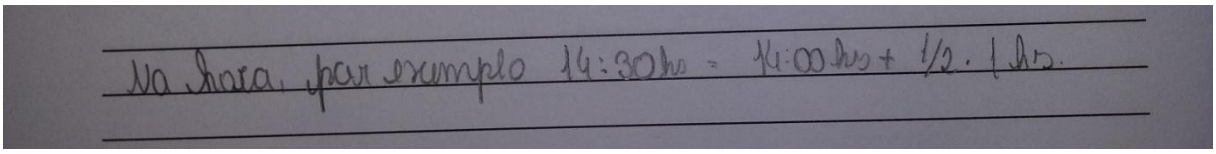


Figura 30.

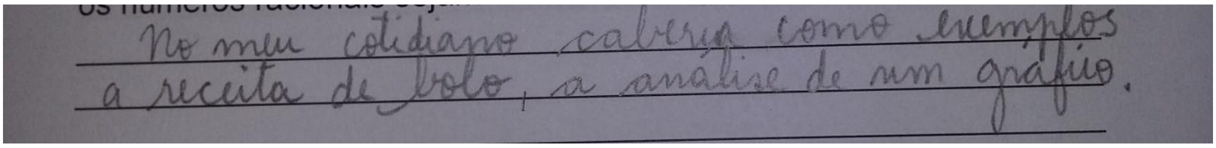


Figura 31.

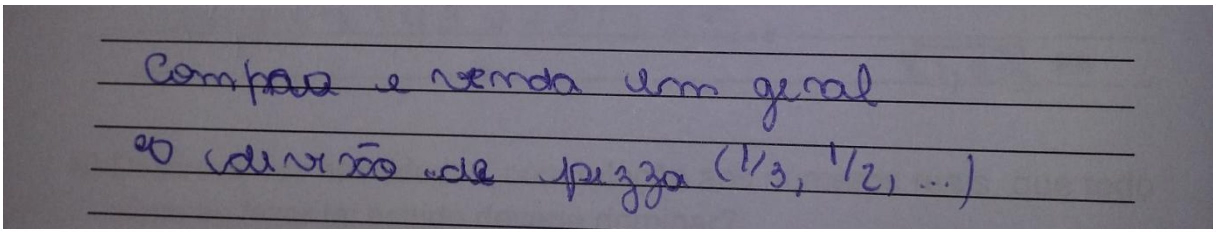


Figura 32.

4- Quando um número real é irracional?

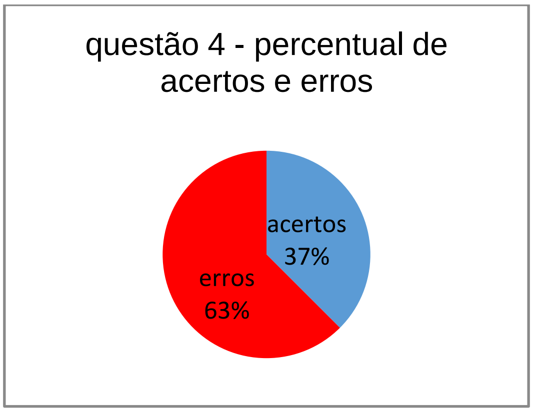


Gráfico 24.

O Gráfico 24 ilustra exatamente a dificuldade de compreensão do conceito de número irracional que discutimos na análise das respostas da questão 2. Algumas respostas não tiveram sequer sentido, como a da Figura 33.

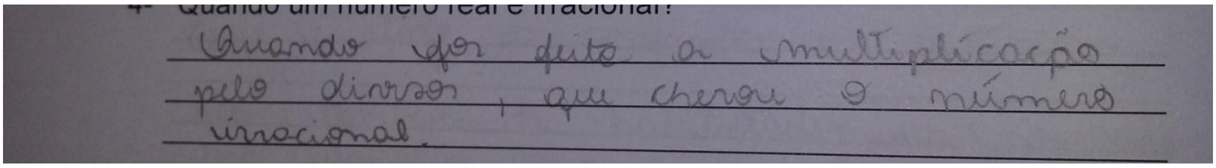


Figura 33.

A resposta dada na Figura 34 também não está correta, pois acaba abarcando as dízimas periódicas como sendo números irracionais. A Figura 35 mostra que o aluno respondeu corretamente à pergunta. Este último aluno também exibiu alguns exemplos de números racionais, como radicais inexatos e os número “*pi*” e “*e”* .

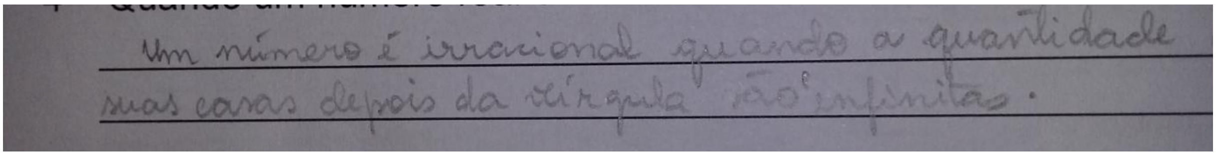


Figura 34.

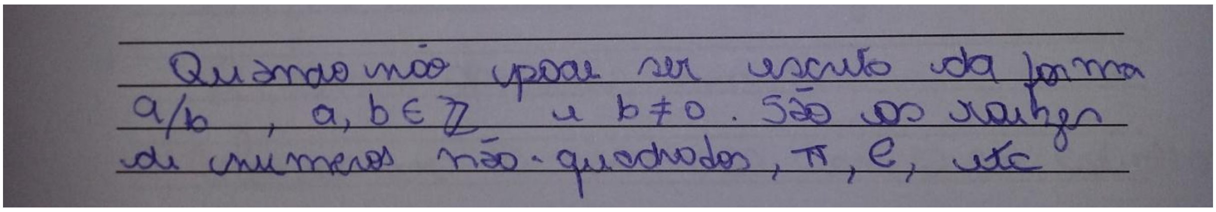


Figura 35.

A resposta dada na Figura 36 mostra também um desconhecimento do conceito de número irracional. Na verdade, todo número real “*a”* pode ser representado como uma fração: basta escrever $a = a / 1$.

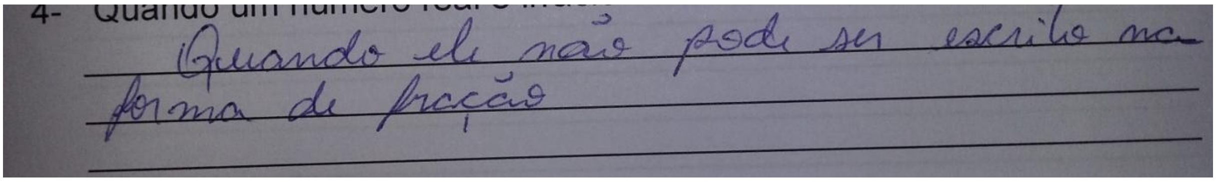


Figura 36.

5- Você é capaz de apresentar alguma situação do cotidiano que envolva os números irracionais?

Esperávamos que houvesse dificuldades com essa pergunta, pois o conceito de irracional é mais abstrato. Tivemos, porém, algumas respostas interessantes, como as apresentadas nas Figuras 37, 38 e 39, a maioria delas envolvendo o número pi.

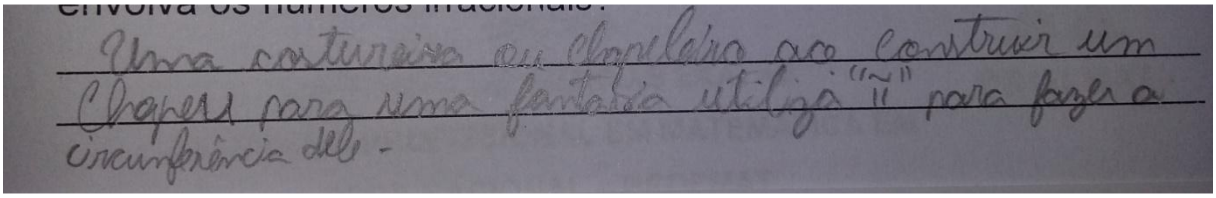


Figura 37.

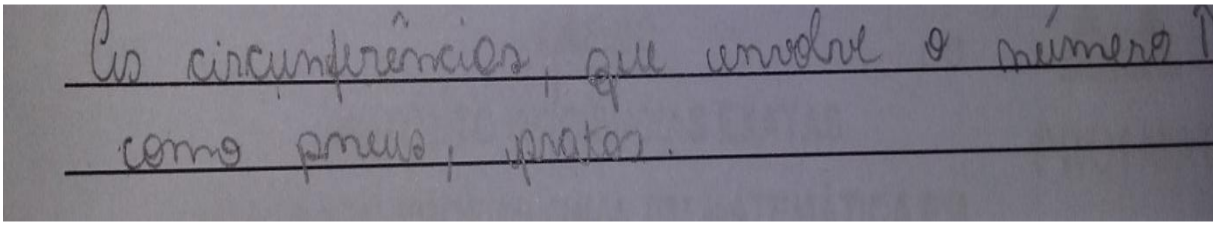


Figura 38.

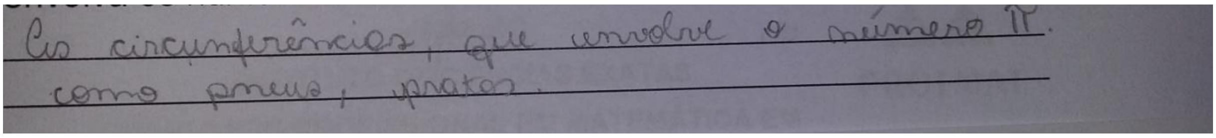


Figura 39.

As respostas apresentadas nas Figuras 40, 41 e 42 mostram que esses alunos ainda não compreenderam o conceito de número irracional e desconhecem a propriedade do fechamento da operação de divisão no conjunto dos racionais não nulos.

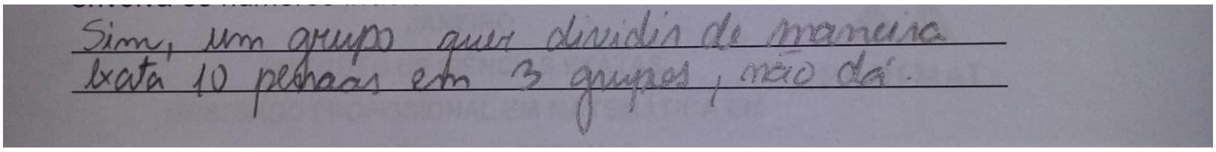


Figura 40.

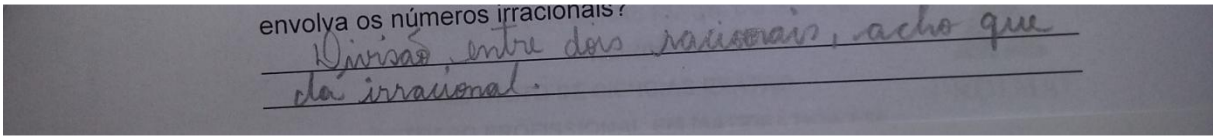


Figura 41.

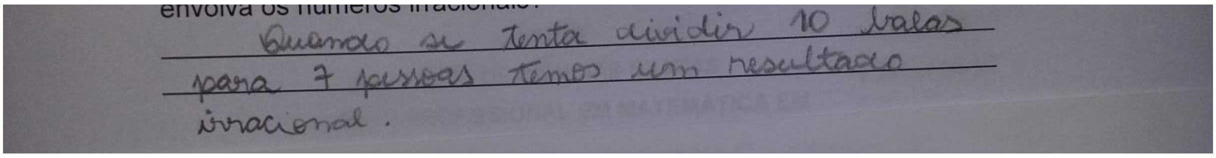


Figura 42.

6- Considere uma circunferência de comprimento C e diâmetro d. Sabe-se que o número π= C/d. Por que isso não faz de π um número racional, se ele pode ser escrito como um quociente de C por d?

Nas Figuras 43 a 45 podemos contemplar algumas das respostas. Tivemos várias respostas incompreensíveis, como a da Figura 44. A resposta apresentada na Figura 43, não está completamente correta, pois um número racional pode ser escrito como quociente de dois números que não são inteiros: por exemplo, $2 = 2\pi/\pi$. Ocorre que, para ser racional, um número deve admitir uma representação de fração, onde o numerador e o denominador sejam inteiros.

Como a definição de número racional envolve um quociente, pode-se pensar que todo quociente é racional. O aluno, cuja resposta é apresentada na Figura 45, compreendeu que isso não é verdade.

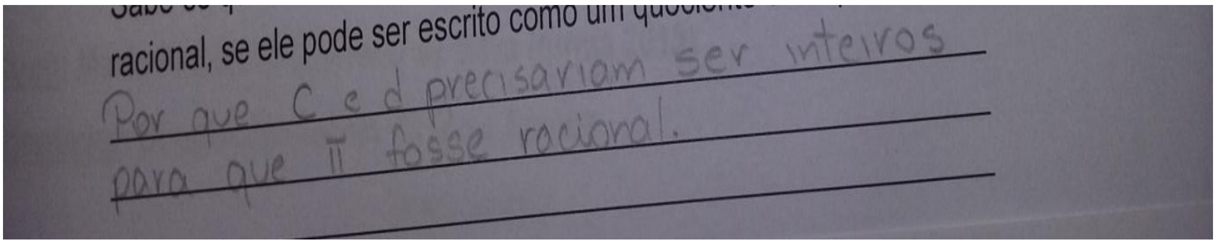


Figura 43.

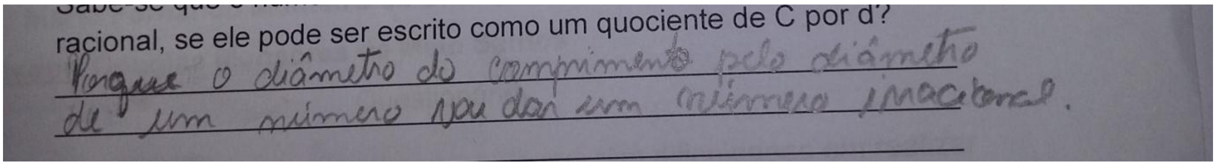


Figura 44.

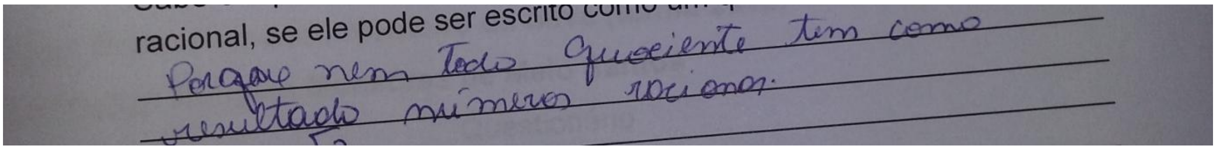


Figura 45.

7- Verdadeiro ou Falso: 0,999... é menor que 1? Justifique sua resposta.

Essa é uma pergunta que sempre causa muita "polêmica". Várias discussões acaloradas sobre ela podem ser encontradas em fóruns de discussão de matemática na internet. Ela inclusive já fez parte da seção "Conceitos e Controvérsias" de um dos exemplares da famosa Revista do Professor de Matemática (LIMA, 2000, p.158).

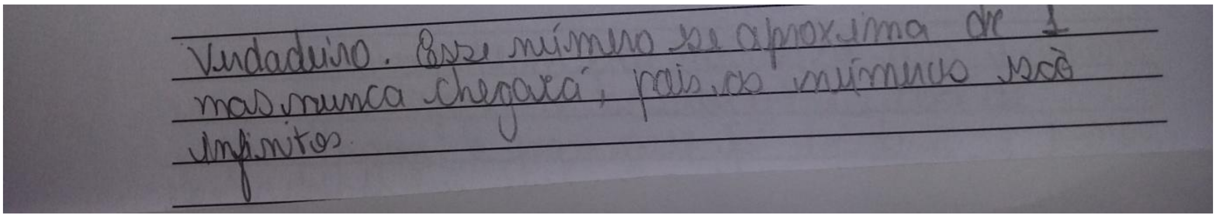


Figura 46.

As respostas apresentadas nas Figuras 46, 47 e 48 demonstram uma falta de conhecimento sobre o conceito de limite de uma sequência (poderia, por exemplo, ser mostrado que é falso, através do limite da soma dos termos de uma PG).

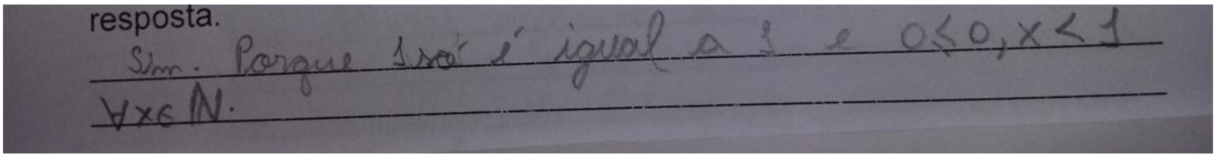


Figura 47

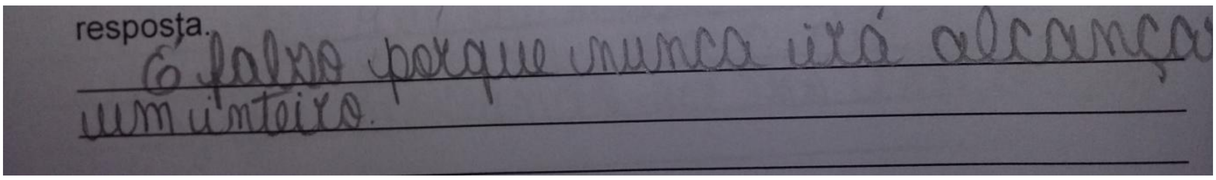


Figura 48.

O aluno da Figura 49 deve estar se referindo à famosa fórmula que diz que a fração geratriz de uma dízima periódica é igual n/d, "onde n é a parte não periódica seguida do período, menos a parte não-periódica e d são tantos noves quantos forem os algarismos do período seguidos de tantos zeros quantos forem os algarismos da parte não-periódica”. Apesar da resposta estar correta, do ponto de vista conceitual ela não é adequada.

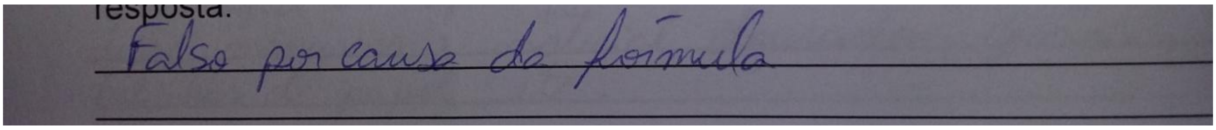


Figura 49.

8- O número 0,2121121112... é racional ou irracional? Por quê?

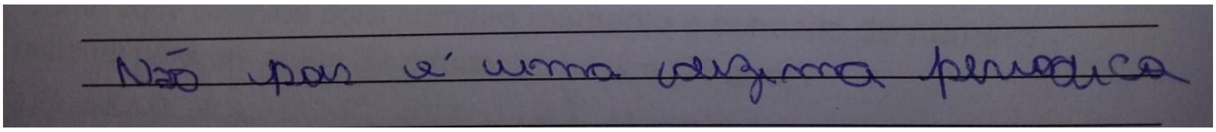


Figura 50.

Percebe-se pela Figura 50 que falta conhecimento do conceito de dízima periódica. E o “não” parece deslocado da pergunta.

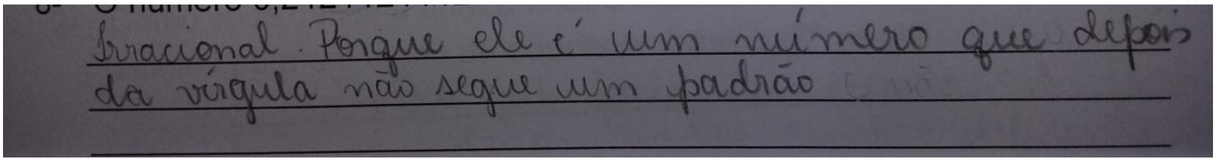


Figura 51.

A resposta dada na Figura 51 poderia ter sido mais detalhada, afinal, é notório que há um padrão nos dígitos que aparecem após a vírgula. Porém esse padrão não é dado pela repetição de um mesmo número, isto é, o decimal não é uma dízima periódica.

Já na Figura 52 o aluno percebeu que o decimal não se trata de uma dízima periódica e que o número questionado é irracional.

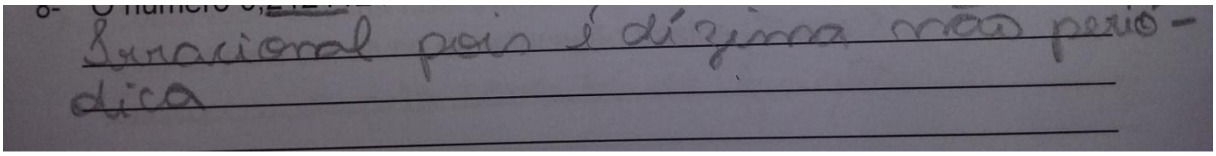
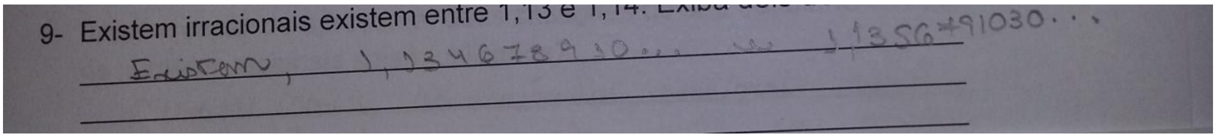


Figura 52.

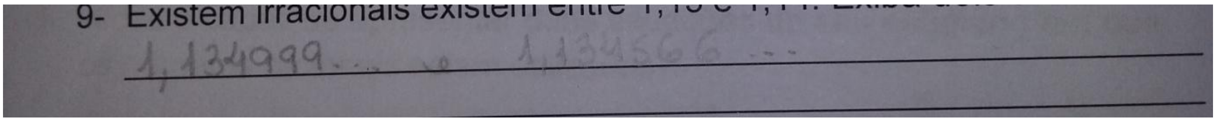
9- Existem irracionais entre 1,13 e 1,14. Exiba dois deles.

Em algumas respostas podemos ver que há o equívoco de identificar número irracional com número com infinitas casas decimais (Figuras 54 e 55). Na Figura 53, o aluno respondeu corretamente, descrevendo um padrão não-periódico para as casas decimais.



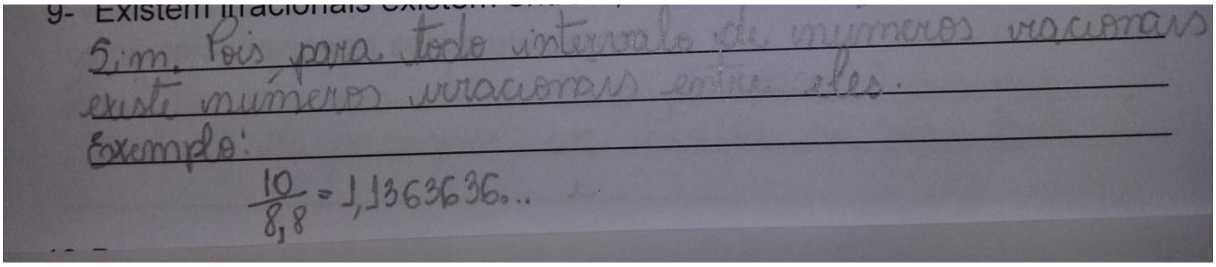
Existem, 1,1346789 10... e 1,1356791030...

Figura 53.



1,134999... e 1,134566...

Figura 54.

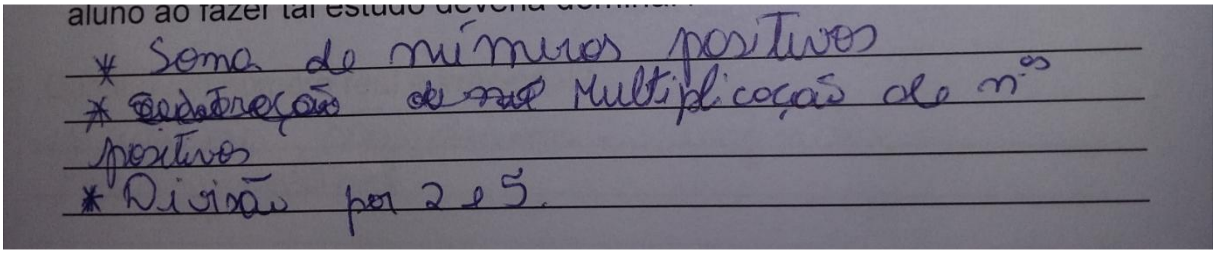


Sim. Pois para todo intervalo de números racionais existe números irracionais entre eles.
Exemplo:
$\frac{10}{8,8} = 1,1363636...$

Figura 55.

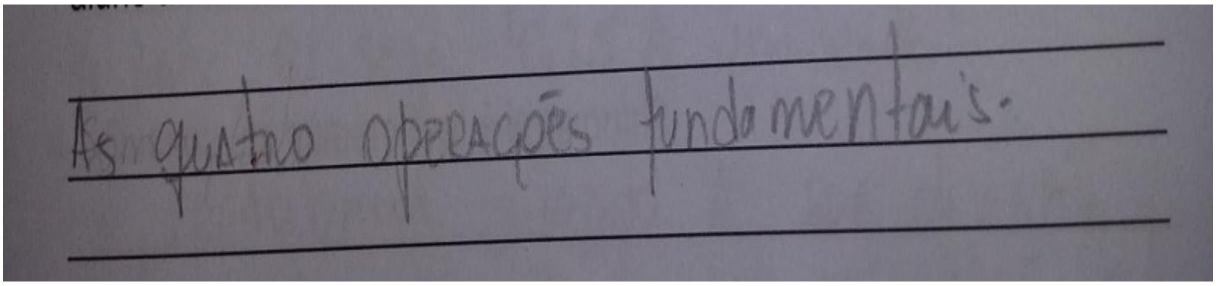
10-Descreva três habilidades, com relação aos números reais, que todo aluno ao fazer tal estudo deveria dominar?

Percebemos que, saber efetuar corretamente as 4 operações é praticamente uma unanimidade. Algumas respostas, como a apresentada na Figura 59, podem ser reduzidas a esta única habilidade. Isto mostra uma falta de conhecimento das habilidades exigidas pelos documentos oficiais.



aluno ao fazer tal estudo deveria dominar?
* Soma de números positivos
* ~~Subtração de~~ Multiplicação de nºs positivos
* Divisão por 2 e 5.

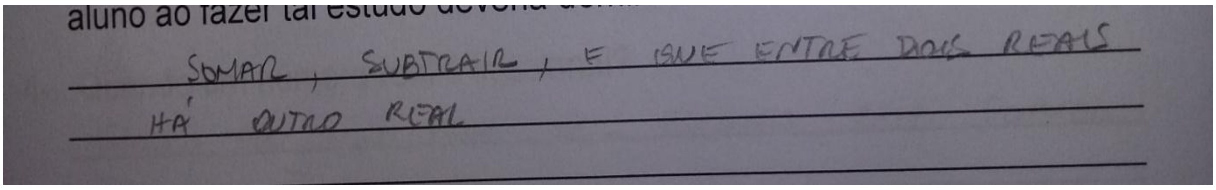
Figura 56.



As quatro operações fundamentais.

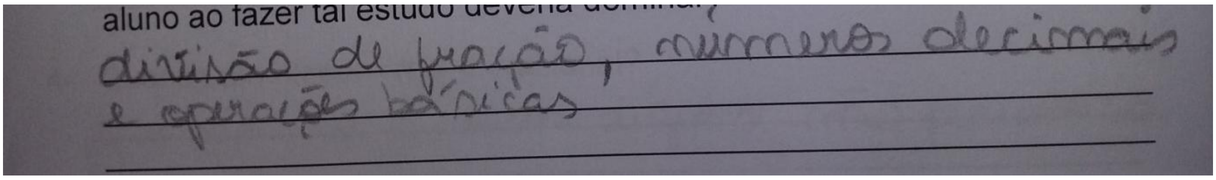
Figura 57.

As respostas apresentadas nas Figuras de número 58 a 61 já contemplam habilidades envolvendo a densidade dos números reais (Figura 58), números decimais (Figura 59), reta real (Figura 60) e reconhecimento dos conjuntos numéricos (Figura 61).


aluno ao fazer tal estudo deveria...

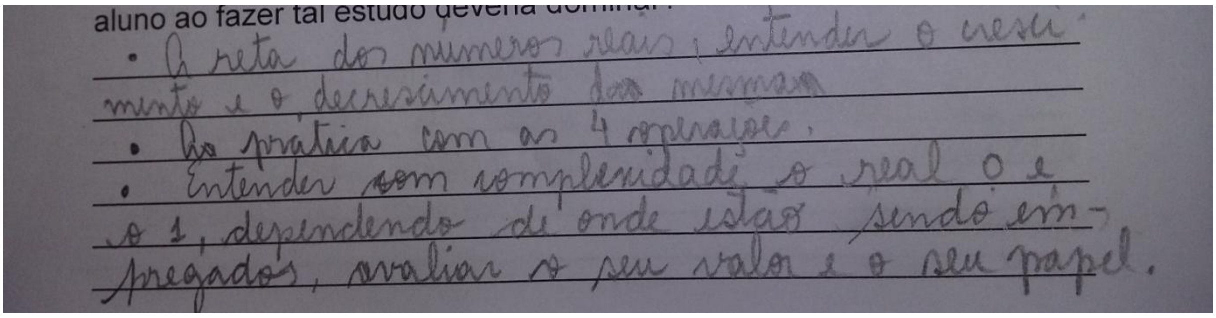
SOMAR, SUBTRAIR, E QUE ENTRE DOIS REAIS HÁ OUTRO REAL

Figura 58.


aluno ao fazer tal estudo deveria dominar?

divisão de fração, números decimais e operações básicas

Figura 59.


aluno ao fazer tal estudo deveria dominar?

• A reta dos números reais, entender o crescimento e o decrescimento dos mesmos
• Ter prática com as 4 operações.
• Entender com complexidade o real 0 e o 1, dependendo de onde estão sendo empregados, avaliar o seu valor e o seu papel.

Figura 60.

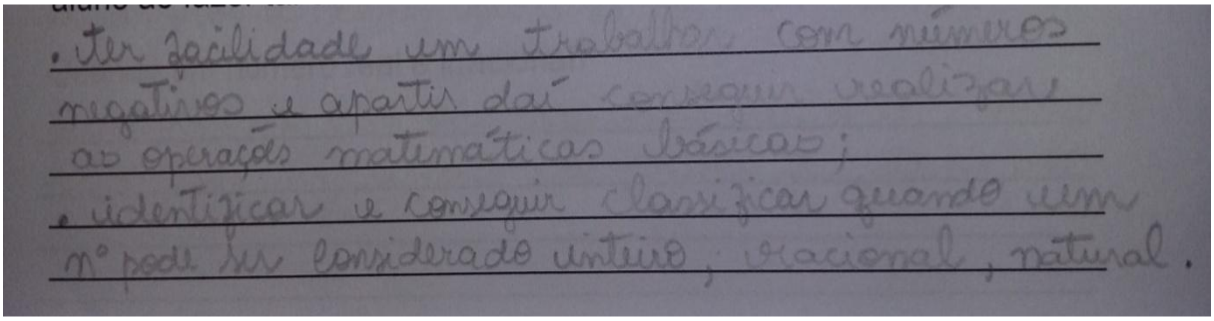

• ter facilidade em trabalhar com números negativos e apartir daí conseguir realizar as operações matemáticas básicas;
• identificar e conseguir classificar quando um nº pode ser considerado inteiro, irracional, natural.

Figura 61.

Percebemos que alguns licenciandos em Matemática (alunos do PIBID da UFRRJ) apresentaram algumas falhas conceituais no que concerne ao ensino dos números reais. Isso é preocupante, pois estes, serão os futuros professores e há um risco deles levarem essas falhas para a sala de aula do ensino básico. Porém, no que concerne às práticas pedagógicas podemos verificar boas ideias, possivelmente devido à contribuição do PIBID.

Achamos que os Cursos de Licenciaturas em Matemática devem avaliar com mais cuidado os conceitos relativos aos números reais, precisamente, com relação aos números irracionais, pois vários conteúdos subsequentes e outras disciplinas dependem de boa compreensão de tal conceito.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O curso do PROFMAT, foi o responsável por oferecer uma reflexão sobre nosso conhecimento em Matemática e também sobre como "ensinamos" Matemática aos nossos alunos do ensino básico, em nossas escolas públicas. Este fato nos deu muita coragem e, a partir daí surgiu a ideia de desenvolver, em uma turma de 1º ano (turma A - ensino médio), o conteúdo de conjuntos numéricos sobre uma perspectiva de atividades diferenciadas (vídeos, jogos, aplicativos, artigos de jornais) e depois comparar os resultados com outra turma de 1º ano (turma B - ensino médio), que teve somente atividades tradicionais (mecanizadas). Essas turmas estão alocadas em uma escola pública do Município de Vassouras-RJ.

Lembrando que conjuntos numéricos é um assunto muito importante, pois estão relacionados com o nosso cotidiano e com outras áreas do conhecimento.

No começo, esta metodologia diferente gerou certa apreensão por parte dos alunos, mas à medida que as atividades foram transcorrendo, tudo caminhou muito bem, inclusive as atividades ligadas aos temas transversais. Tivemos êxito na maioria das atividades e experimentamos a sensação de vitória, coisa rara hoje em dia quando se fala de sala de aula da escola pública.

O resultado foi surpreendente, pois a turma A teve uma grande evolução do 1º para o 2º questionário, evolução maior que a da turma B.

Acreditamos que com coragem e conhecimento podemos avançar muito no ensino de Matemática para o ensino básico. Ao arriscar um caminho diferente, não temos a garantia do sucesso, porém, sairemos da inércia. Caso não tenhamos sucesso numa primeira tentativa, devemos levantar a cabeça e partir outra, e assim por diante. Buscar cursos como o PROFMAT é o caminho, pois isto nos fortalece.

Este trabalho é, portanto, uma sugestão de como atividades diferenciadas, podem fazer a diferença na busca de adquirir competências e habilidades sobre o tema números reais.

Quanto aos licenciandos da UFRRJ que participam do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência– PIBID e que responderam a um questionário de perguntas relacionadas aos conjuntos numéricos, percebemos que a maioria deles é favorável ao uso de metodologias de ensino que propiciem uma aprendizagem menos mecanizada e mais instigante, o que é um fator muito positivo.

Porém, notamos que alguns desses alunos ainda não conseguiram compreender adequadamente alguns conceitos importantes, como saber quando um número real é racional ou irracional, ou então, exibir um número irracional entre dois racionais. Como discutimos no Capítulo 4, essa não é uma deficiência encontrada apenas no âmbito da UFRRJ, mas sim em outros cursos de licenciatura em matemática de outras universidades.

Percebemos também que alguns licenciandos não mostraram conhecimento sobre quais habilidades relativas aos números reais os documentos oficiais consideram importantes de serem desenvolvidas pelos alunos do Ensino Médio.

De maneira geral, esperamos que essa pesquisa possa ajudar as licenciaturas em Matemática a manterem ativas as discussões sobre suas diretrizes curriculares de modo aperfeiçoar os seus cursos e atenuar esses problemas.

Finalmente, é necessário pensar sobre que tipo de sociedade desejamos formar. Devemos olhar para o hoje com o horizonte do futuro em nossa frente.

Fica como sugestão para o futuro, trabalhar os irracionais por meio geométrico e regra de sinais por um meio lúdico, algo que não foi explorado neste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOFF, D. S. **A construção dos números reais na escola básica**. Daiane Scopel Boff; orientadora: CydaraCavedonRipoll. Porto Alegre : s.n., 2006. Dissertação de mestrado.

BOYER, C. B. **História da matemática.** São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Matriz de referência do ENEM 2009.** Brasília: MEC, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 1999.

CERVO, A. L.; BERVIAN, P. A.; SILVA, R.**Metodologia científica.** 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

CRUZ, W. J. **“Os números reais”: um convite ao professor de matemática do ensino fundamental e do ensino médio.** Juiz de Fora : s.n., 2011. Dissertação de mestrado.

DANTZIG, T. **Número:** a linguagem da ciência. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

LIMA, E. L. **Meu professor de matemática.** Editora IMPA, 2000.

LIMA, E. L., et al. **A matemática do ensino médio**. 9. ed. . Rio de Janeiro : 2006. (v.1)

LOPES, P. C. R. **Construções dos números reais**. Funchal : s.n., 2006.

MUNIZ NETO, A.**Tópicos de Matemática Elementar: números reais**. 2.ed. Rio de Janeiro : SBM, 2013.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. **Pesquisa em Resolução de Problemas:** caminhos, avanços e novas perspectivas Boletim de Educação Matemática, vol. 25, número 41, 2011, PP.73-98. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2011. Disponível em <http://www.redalyc.org/pdf/2912/291223514005.pdf> .Acesso em: 24 de agosto 2015.

PASQUINI, R. C. G. **Um tratamento para os números reais viamedição de segmentos: uma proposta, uma investigação**.Letícia Vieira Oliveira Costa; orientadora: Rosa Lúcia SverzutBaroni.SãoPaulo : s.n., 2007. Tese de doutorado.

PERRENOUD, P. **Construir competências desde a escola.** Porto Alegre: Artmed, 1999.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

POMMER, W. M. **A construção de significados dos números irracionais no ensino básico: uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos números reais**. Wagner Marcelo Pommer; orientação Nilson José Machado. São Paulo : s.n., 2012. Tese de doutorado.

RIBEIRO, F. D., **Jogos e modelagem na educação matemática.** 1ª ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

SA, P. F.; ANJOS, L. J. S.**Números Negativos: uma trajetória histórica**. Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática, Aracaju, 2011.

SILVA, B. A.; PENTEADO, C. B. **Fundamentos dos números reais**: concepções de professores e viabilidade de inicío do estudo da densidade no ensino médio. Educ. Matem. Pesq. São Paulo: v.11, n.2, pp351-371, 2009. Artigo.

SILVA, A. L. V.**Números reais no ensino médio: identificando e possibilitando imagens conceituais**. Rio de Janeiro : s.n., 2011.

VYGOTSKY, L. S.; LEONTIEV, Alexis. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Edusp, 1998.

YIN, R. K.; Estudo de Caso – Planejamento e Métodos. 5ª ed., Ed. Bookman, 2014.

APÊNDICE A

Questionário 1 (Sondagem)

1- Qual é a fração que representa 0,75?

( ) 1/4

( ) 7/5

( ) 3/4

( ) 1/8

2- O resultado de 1/3 + 3/4 é:

( ) 9/4

( ) 5/3

( ) 13/12

( ) 4/7

3- Um produto que custa R$ 80,00 sofre um aumento de 10%. Após esse aumento, sofre um desconto de 5%. Qual será o valor desse produto após esse desconto?

( ) R$ 85,00

( ) R$ 86,80

( ) R$ 82,80

( ) R$ 83,60

4- Um possível racional que está entre 1/4 e 1/2 é:

( ) 3/8

( ) 3/4

( ) 5/2

( ) 1/8

5- Qual é o valor aproximado, com uma casa decimal, para a $\sqrt{7}$?

( ) 3,5

( ) 7,1

( ) 1,7

( ) 2,6

6- Sobre a soma de dois números irracionais, é verdade que:

( ) é sempre irracional.

( ) é sempre racional.

( ) poderá ser racional.

( ) não poderá ser efetuada.

7- Qual é a geratriz de 0,353535...?

( ) 7/99

( ) 35/99

( ) 5/99

( ) 35/100

8- O número π está localizado na reta real entre os números:

( ) 1 e 2

( ) 2 e 3

( ) 3 e 4

( ) 4 e 5

9- Qual conjunto abaixo apresenta somente números naturais?

( ) {-2, -1, 0, 1, 2}

( ) {0, 1/2, 1}

( ) {10, 20, 30}

( ) {3, 1/3, 0,8}

10- Qual igualdade é verdadeira?

( ) 1/2 = 2/8

( ) 1/3 = 0,333...

( ) 2/5 = 0,444...

( ) 6/8 = 1/4

APÊNDICE B

Questionário 2 (pós-atividades)

1- Qual é a fração que representa 0,33?

( ) 3/10

( ) 33/10

( ) 33/100

( ) 10/3

2- O resultado de 1/5 – 1/4 é:

( ) 1/20

( ) -1/20

( ) 1/10

( ) -1/10

3- Um produto que custa R$ 120,00 sofre um aumento de 15%. Após esse aumento, sofre um desconto de 10%. Qual será o valor desse produto após esse desconto?

( ) R$ 130,00

( ) R$ 120,80

( ) R$ 124,20

( ) R$ 110,40

4- Um possível racional que está entre 2/3 e 1 é:

( ) 0,25

( ) 0,444...

( ) 0,5

( ) 0,858585...

5- Qual é o valor aproximado, com uma casa decimal, para a $\sqrt{20}$?

( ) 20,2

( ) 4,4

( ) 2,3

( ) 9,8

6- Sobre a soma de dois números racionais, é verdade que:

( ) é sempre um número inteiro.

( ) é sempre zero.

( ) é sempre um racional.

( ) poderá ser um irracional.

7- Qual é a geratriz de 0,555...?

( ) 5/99

( ) 5/10

( ) 5/2

( ) 5/9

8- Em qual intervalo encontra-se o número -2/3?

( ) [-2, -1]

( ) [-1,0]

( ) [0,1]

( ) [1,2]

9- Qual conjunto abaixo apresenta somente números inteiros?

( ) {1/2, 3/4, 0, 1}

( ) {$\sqrt{5}$, 0, -5}

( ) {5,2; 6,8; 1/2}

( ) {-3, 0, 3}

10 - Qual igualdade é verdadeira?

( ) 3/6 = 1/2

( ) 2/3 = 0,333

( ) 5/2 = 2/5

( ) 0,222... = 1/5

APÊNDICE C

Questionário 3 (Questionário dos Licenciandos)

1- Se você fosse professor de um aluno que têm dificuldades em realizar somas e produtos de números inteiros, o que faria para tentar reduzir essas dificuldades?
-
____
____
____
____
____
____

2- Como você definiria num primeiro momento o conceito de número racional para um aluno da educação básica?
____
____
____

3- Você é capaz de apresentar duas situações do seu cotidiano onde os números racionais são utilizados?
____
____
____
____
____
____

4- Quando um número real é irracional?
____
____
____

5- Você é capaz de apresentar alguma situação do cotidiano que envolva os números irracionais?

____
____

6- Considere uma circunferência de comprimento C e diâmetro d. Sabe-se que o número π= C/d. Por que isso não faz de π um número racional, se ele pode ser escrito como um quociente de C por d?

7- Verdadeiro ou Falso: 0,999... é menor que 1? Justifique sua resposta.

8- O número 0,2121121112... é racional ou irracional? Por quê?

9- Existem irracionais entre 1,13 e 1,14. Exiba dois deles.

10- Descreva três habilidades, com relação aos números reais, que todo aluno ao fazer tal estudo deveria dominar?