

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO (UFFRJ)
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
(PROFMAT)

LUÍS CLÁUDIO LONGO MORAES

Ensino de Probabilidade: Historicidade e Interdisciplinaridade.

Seropédica (RJ)

2014

LUÍS CLÁUDIO LONGO MORAES

Ensino de Probabilidade: Historicidade e Interdisciplinaridade.

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luiz Martins Pereira

Seropédica (RJ)

2014

510.7
M827e
T

Moraes, Luís Cláudio Longo, 1973-
Ensino de probabilidade: historicidade e
interdisciplinaridade / Luís Cláudio Longo
Moraes. - 2014.
136 p.: il.

Orientador: André Luiz Martins Pereira.
Dissertação (mestrado) - Universidade
Federal Rural do Rio de Janeiro, Curso de
Mestrado Profissional em Matemática em
Rede Nacional, 2014.

Bibliografia: p. 105-107.

1. Matemática - Estudo e ensino -
Teses. 2. Probabilidades - Estudo e ensino
- Teses. 3. Jogos no ensino de matemática
- Teses. 4. Matemática - História - Teses.
5. Abordagem interdisciplinar do
conhecimento na educação - Teses. I.
Pereira, André Luiz Martins, 1980- II.
Universidade Federal Rural do Rio de
Janeiro. Curso de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional. III.
Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL – PROFMAT**

LUÍS CLAUDIO LONGO MORAIS

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 19/05/2014



André Luiz Martins Pereira – Doutor em Matemática – UFRRJ

(Orientador)



Montauban Moreira de Oliveira Júnior – Doutor em Engenharia de Sistemas e
Computação – UFRRJ



Maria Darci Godinho da Silva – Doutora em Matemática - UFRRJ

DEDICATÓRIA

À minha amada esposa Carla e às minhas queridas filhas Ana Carla e Ana Cláudia, fontes do meu viver, que compreendendo os momentos de grande ausência, contribuíram e incentivaram a difícil tarefa de escrever este trabalho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que colocou as pessoas certas no meu caminho e deu sua benção e permissão para que este trabalho fosse concluído.

Aos meus pais, Albano e Alair, que apesar de todas as dificuldades, viabilizaram que eu tivesse uma trajetória de vida que me conduzisse até este importante momento da minha vida.

Aos meus tios e padrinhos Altamiro e Irinéa, que me deram atenção, carinho e amor quando eu mais precisei.

Ao meu orientador, André, que na sua nobre tarefa docente, esteve sempre presente.

Aos meus queridos amigos e colegas da turma do PROFMAT/UFRRJ-2012 pelos momentos que passamos juntos.

Aos professores da turma do PROFMAT/UFRRJ-2012 pelos momentos de dedicação nas suas práticas docentes.

À SBM e à CAPES que idealizaram este curso de pós-graduação stricto sensu para aprimoramento profissional de professores de matemática.

A teoria das probabilidades, no fundo, não é mais do que o bom senso traduzido em cálculo; permite calcular com exatidão aquilo que as pessoas sentem por uma espécie de instinto... É notável que tal ciência, que começou nos estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano.

Pierre Simon Laplace

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar um material didático com uma abordagem interdisciplinar, com contextualização histórica, do ensino de probabilidade na educação básica, sem deixar de usar jogos que iniciaram e impulsionaram o desenvolvimento da teoria da probabilidade, dando ênfase às sete cartas trocadas entre os grandes matemáticos Pierre de Fermat e Blaise Pascal para desvendar o problema dos pontos do também matemático Luca Paccioli.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Probabilidade. História da Matemática. Interdisciplinaridade.

ABSTRACT

This paper aims to introduce a new educational material for the theory of probability. This material, which has an interdisciplinary and historical approach, was elaborated to support the learning of probability in basic education. This material does not exclude the classical games that have started and fueled the development of probability theory, giving emphasis to the seven letters that have been exchanged between the great mathematicians Pierre de Fermat and Blaise Pascal to unravel the problem of points due to the mathematician Luca Paccioli.

Keywords: Learning of Mathematics. Probability. History of Mathematics. Interdisciplinarity.

SUMÁRIO

Introdução.....	03
1 História da Probabilidade.....	05
2 Metodologia para o ensino da Probabilidade.....	13
2.1 Importância da História da Matemática como Recurso para o Ensino e a Aprendizagem.....	13
2.2 Importância de Jogos para o Ensino da Probabilidade.....	16
2.3 Importância do Conteúdo nas Diversas Áreas do Conhecimento.....	19
3 Criação do Material Didático.....	23
3.1 Conteúdo do Material Didático e Atividades.....	23
3.2 Proposta de Criação do Material Didático.....	24
4 Material Didático para o Ensino da Probabilidade.....	31
5 As Atividades Propostas no Material Didático.....	86
6 Considerações Finais.....	103
Referências.....	105
Apêndice (Cartas trocadas entre Blaise Pascal e Pierre de Fermat).....	108

Introdução

A teoria da probabilidade, pela sua incontestável utilidade, sua imensa competência e sua inigualável capacidade nos mais diversos contextos da sociedade, tem conseguido o reconhecimento da sua grande importância no ensino. O desenvolvimento dos conceitos probabilísticos é de extrema importância e é indiscutível sua inclusão nos diversos currículos existentes, em vários níveis de ensino, devem ser incluídos e trabalhados com qualidade nas escolas de educação básica de todo país. Mas a probabilidade contém diferentes significados e conceitos, que confirmam e determinam a sua natureza bastante complexa e abrangente, então sua abordagem pedagógica não pode limitar-se a uma única perspectiva.

Os conceitos de probabilidade, com suas características aleatórias, são muito úteis na sociedade atual, existe a necessidade de compreender as informações difundidas nos canais de informação, fazer previsões e tomar decisões que vão influenciar suas vidas pessoais e em comunidade; tais conceitos podem estar relacionados direta ou indiretamente com questões de cunho social ou questões críticas e reflexivas tanto da esfera social como profissional dos atuais alunos e futuros profissionais das mais diversas áreas do conhecimento.

A contextualização histórica da teoria da probabilidade é muito importante na prática de ensino e no aprendizado da matemática. Identificar e avaliar como são atribuídos significados a conteúdos matemáticos, verificando suas relações com documentos históricos e práticas sociais antigas e atuais com outros campos do saber podem nortear o aluno da educação básica, dando um sentido maior ao processo de aprendizagem.

Os jogos de azar, historicamente, foram o início do desenvolvimento da teoria da probabilidade. Utilizar jogos para processo de ensino e aprendizagem tem seu valor, mas não se pode resumir o estudo de probabilidade exclusivamente ao jogos. Um trabalho pedagógico com o auxílio dos jogos deve estar associado à resolução de problemas, deve ser trabalhado de maneira criativa, onde análises devem ser feitas, reflexões devem ser estimuladas e posteriormente formalizações de conceitos matemáticos devem ser construídos, o professor precisa ter seus objetivos claros e pré-estabelecidos, sabendo o que pretende atingir com o jogo escolhido para sua proposta de ensino.

A Probabilidade é ferramenta de trabalho das mais variadas ciências. Utilizam os conceitos probabilísticos a Biologia, a Física, a Economia, as Ciências Atuariais, a Engenharia, a Sociologia, a Meteorologia, a Química, entre outras diversas áreas. Fazem uso também de tais técnicas matemáticas diversos institutos de pesquisa de opinião pública, departamentos de propaganda e marketing, canais de telecomunicações como televisão, jornais ou revistas. As incertezas fazem parte da vida no mundo contemporâneo. No passado existia muito preconceito contra a teoria da probabilidade, mas atualmente eles não existem mais. A prática de ensino interdisciplinar no Ensino Médio, além de conseguir relacionar diferentes disciplinas, constrói fortes ligações entre elas que vão muito além do conteúdo ensinado, sendo uma grande ferramenta do professor do mundo contemporâneo.

Existe, hoje, uma necessidade de capacitar o aluno para o mundo atual, então o ensino de probabilidade deve incentivar à pesquisa e à experimentação, o estudo deve levar à reflexão e deve-se ter o senso crítico do conceito de probabilidade. São apontadas várias incorreções no ensino de probabilidade, falta de uma contextualização histórica e há a ausência de uma abordagem que confronte duas visões diferentes da probabilidade, a visão clássica e a visão frequentista. Este trabalho traz uma proposta de ensino da teoria da probabilidade, com contextualização histórica, interdisciplinaridade, confrontando duas visões diferentes do conceito probabilístico, visão clássica e a visão frequentista, sem deixar de usar jogos e problemas para a construção do conhecimento, com um objetivo maior: que o aluno possua uma postura crítica do conceito estudado.

Capítulo 1 - História da Probabilidade

A História da Probabilidade começou há muitos anos. Pinturas em tumbas egípcias feitas em 3500 a.C. mostram pessoas jogando uma forma primitiva de dados feitos de um osso do calcânhar de nome astrágalo e este osso era dotado de 4 faces. Foram encontrados também dados de 6 faces datados de 3000 a.C. no norte do Iraque, onde na época ficava a região da Mesopotâmia. Durante as Cruzadas vários jogos de dados foram trazidos para o Ocidente; a palavra “azar” tem sua origem derivada da expressão árabe “*al zahr*”, que significa “dado” em árabe.

Já o baralho não se tem certeza quanto à sua origem, mas alguns historiadores afirmam que sua origem é chinesa, enquanto outros dizem que é árabe. A certeza que se tem é que o baralho moderno surgiu na França por volta do século 14. Os jogos de azar estiveram presentes em quase todas as civilizações, como mostram alguns documentos do tipo arqueológicos ou históricos, porém nunca foram objetos de estudo até a Idade Média.

Quanto ao surgimento dos seguros, acredita-se que ocorram também na Mesopotâmia, 3000 a.C., entre os comerciantes marítimos mesopotâmicos, aplicados à perda de carga de navios em naufrágios ou roubos. A prática foi continuada pelos gregos e romanos e acabou chegando no Mundo Cristão Medieval através dos comerciantes marítimos italianos. Muito pouco chegou até nós acerca das técnicas empregadas pelos seguradores daqueles tempos, mas é garantido afirmar que baseavam-se em estimativas empíricas das probabilidades de acidentes para estipularem as taxas e prêmios correspondentes.

Os primeiros trabalhos relevantes a respeito da probabilidade foram dos matemáticos italianos Gerolamo Cardano (1501 - 1576) e Niccolò Tartaglia (1499 - 1557). Cardano era médico de profissão e matemático por inspiração, apaixonado por jogos de azar e apostas, escreveu um tratado sobre apostas com o título “*Liber de Ludo Aleae*” (Livro de Jogos de Azar). A palavra “*aleae*” refere-se a jogos de dados e tem a mesma raiz de “*aleatorius*” que significa eventos sujeitos ao acaso, dependentes de fatores incertos, parece ter sido este o primeiro trabalho a desenvolver princípios de probabilidade. Cardano define a probabilidade de um evento como sendo a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de possíveis resultados, e dá indicações da importância de métodos combinatórios no desenvolvimento de uma teoria da probabilidade. Em outro trabalho seu, “*Opus*

novum de proportionibus numerorum” (Novo trabalho em proporções), publicado em 1570, ele trata vários problemas ligados à combinatória. No entanto, apesar de ter sido escrito possivelmente em 1526, seu tratado ficou desconhecido até sua publicação, que ocorreu somente em 1663. Cálculos de probabilidades e combinatoriais foram também realizados por Tartaglia em seu trabalho “*Tratado geral sobre números e medidas*” publicado em Veneza em 1556, onde um problema proposto em 1494 por Luca Paccioli (1445 - 1514) também é investigado.

O também matemático italiano, além de físico e astrônomo, Galileu Galilei (1564 - 1642), provavelmente tendo conhecimento dos trabalhos e dos resultados de Cardano, fez um estudo completo do número possível de resultados em jogos de dados em seu trabalho “*Sopra le scorpeta dei dadi*” (Sobre o jogo de dados).

A Probabilidade recebeu uma visão e uma aplicação matemática, onde estabeleceu-se regras gerais, as quais originou uma teoria matemática da probabilidade, entendida como uma medida da chance de ocorrência de um evento sujeito ao acaso. Em 1654 com os resultados obtidos por dois franceses, Blaise Pascal (1623 - 1662) e Pierre de Fermat (1601 - 1665), em resposta a um desafio para solucionar o problema proposto anos antes por Paccioli.

O problema proposto por Paccioli, conhecido como o problema dos pontos, consiste em determinar qual deve ser a divisão das apostas quando um jogo é interrompido antes do seu final. Suponha que uma partida entre dois jogadores que é vencida pelo primeiro que fizer 6 pontos. Na hipótese de ambos jogadores terem a mesma habilidade no jogo, como se deve dividir o bolo se a partida for interrompida quando um dos jogadores tiver 5 pontos e outro 3? A solução sugerida é dividir o bolo de apostas proporcionalmente às chances que cada jogador tem de vencer o jogo. O grande problema está em como conseguir calcular essas chances. Este problema foi exposto a Pascal por Chevalier de Méré, um intelectual francês apaixonado por jogos de azar e influente na corte de Luís XIV, e que tem seu nome lembrado até hoje por sua participação na teoria da probabilidade.

Pascal foi um menino prodígio que já na sua adolescência havia redescoberto por si mesmo boa parte da geometria euclidiana. Ele trabalhou em problemas de hidrodinâmica, inventando o barômetro de mercúrio, estabelecendo a conhecida lei de pressão de Pascal e provando a existência do vácuo. Em seu “*Traité du triangle arithmétique*” (Tratado do triângulo aritmético), um fragmento de “*De Alea*

Geometriae” (O Jogo da Geometria), ele estabeleceu os fundamentos para o cálculo das probabilidades, fruto do trabalho desenvolvido com Fermat.

Em 1654 Pascal deu início a uma série de correspondências com Fermat onde estabeleceram um método sistemático para calcular probabilidades e solucionaram o problema de Paccioli. Esse conjunto de documentos históricos é composto por 7 cartas: a primeira carta, de Pascal para Fermat, infelizmente já não existe; a segunda carta, de Fermat para Pascal, não se conhece a data em que foi escrita; a terceira carta, de Pascal para Fermat, foi escrita em 29 de julho de 1654; a quarta carta, de Pascal para Fermat, foi escrita em 24 de agosto de 1654; a quinta carta, de Fermat para Pascal, é datada de 29 de agosto de 1654; a sexta carta, de Fermat para Pascal, é datada de 25 de setembro de 1654; a sétima e última carta, de Pascal para Fermat, foi redigida em 27 de outubro de 1654. As correspondências de Pascal e Fermat foram publicadas em 1679, em Toulouse na França, sendo hoje consideradas a origem do desenvolvimento da teoria matemática da probabilidade. Os conteúdos destas cartas, que correspondem a um grande patrimônio da História da Matemática, estão disponíveis, traduzidos para língua portuguesa, no apêndice deste trabalho.

Após esta exposição, Fermat refere um exemplo proposto por Pascal, na primeira carta.

“...caso eu queira saber qual o valor da 6ª jogada em 8 lançamentos, e caso tenha tentado três vezes sem o conseguir, e caso o meu opositor proponha que eu não devo jogar uma quarta vez, e se ele desejar que eu seja tratado com justiça, é aceitável que eu fique com 125/1296 da soma total das nossas apostas”.

Após esta justificação, Fermat convida Pascal a escrever-lhe.

“... para saber se concordamos com a teoria, como acredito que concordamos, ou se discordamos relativamente à sua aplicação.”

(Fermat, 2ª carta a Pascal, sem data, in, Smith, D. (1959) Source of Mathematics, volume II, (pp. 546-547)

(Instituto de Educação – Universidade de Lisboa – retirado da pág. www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/7cartas/cartas1e2.htm em 2 de janeiro de 2014)

A primeira publicação matemática em teoria da probabilidade foi um pequeno livro intitulado “*De Ratiociniis in Ludo Aleae*”, (O Raciocínio em jogos de azar), escrito em 1657 pelo matemático holandês Christiaan Huygens (1629 - 1695), que pertencia a uma nobre e importante família holandesa. Seu pai era muito amigo do ilustre matemático francês René Descartes (1596 – 1650) que teve grande influência

na educação matemática de Huygens. Em 1655, ele fez sua primeira visita a Paris onde ficou sabendo das importantes correspondências trocadas por Pascal e Fermat e dos problemas de probabilidade nelas contidos. Desconhecendo os detalhes dos resultados obtidos por Pascal e Fermat, que foram publicados somente em 1679, Huygens resolveu uma série de 14 problemas relacionados a jogos de azar sem utilizar análise combinatória, e estes problemas acabaram compondo seu livro que ficou muito famoso e foi reeditado e utilizado várias vezes até o século XVIII como um livro de introdução à teoria da probabilidade. Huygens foi o primeiro a perceber claramente o surgimento de uma importante teoria matemática pois, ao justificar a publicação de seu trabalho *“Ludo Aleae a van Schooten”* (Jogos de Azar a Van Schooten), escreve:

“... não estamos tratando apenas com jogos mas com os fundamentos de uma nova teoria, tanto profunda como interessante.”
(Christiaan Huygens, 2004, pág. 5)

Um notável e criativo tratado de probabilidade foi *“Ars Conjectandi”* (A Arte da Conjectura) escrito pelo matemático suíço Jacob Bernoulli (1654 - 1705), que infelizmente deixou, ao falecer, seu grandioso trabalho incompleto, mas que felizmente foi finalizado, posteriormente, por seu sobrinho, o também matemático Nicolaus Bernoulli (1687 - 1759) e finalmente publicado, após a sua morte, no ano de 1713. O tratado foi dividido em quatro partes: a primeira reeditou o livro de Huygens complementado com diversos e valiosos comentários, a segunda foi intitulada *“A Doutrina de Permutações e Combinações”* e utilizada como livro texto em análise combinatória durante todo o século XVIII, a terceira fez a aplicação da teoria das combinações na solução detalhada de 24 problemas de jogos de azar e, finalmente, na quarta e última parte, denominada *“Pars Quarta”*, se propôs fazer aplicações em problemas cívicos, morais e econômicos.

O lendário matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783), foi aluno de Johann Bernoulli (1667 - 1748), um dos mais importantes matemáticos da época e que era irmão de Jacob Bernoulli (1654 - 1705) e pai de Daniel Bernoulli (1700 - 1782). É interessante salientar que a família Bernoulli produziu vários grandes matemáticos ao longo de um século, um caso único em toda a História da Matemática, alguns dos quais com contribuições significativas na teoria da probabilidade. Outro fato interessante é que os nomes de vários membros da família

aparecem numerados devido à existência de múltiplos Bernoulli matemáticos partilhando o mesmo nome. Em 1726, com apenas 19 anos, Euler foi convidado a ocupar a vaga de Nicolaus II Bernoulli (1695 - 1726), que havia falecido, na Academia de Ciências de São Petersburgo.

Euler desenvolveu um importante trabalho, entre vários outros não menos importantes, o *“Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain”* (Pesquisa sobre a mortalidade geral e a multiplicação da humanidade), publicado no ano de 1760, resolvendo vários problemas que mais tarde se tornariam a base da demografia matemática. Resolvendo problemas associados ao crescimento de populações e taxas de mortalidade, construiu tabelas de taxas de mortalidade em função da distribuição de idade e desenvolveu o conceito de “duração provável de vida”.

O renomado matemático francês Abraham De Moivre (1667 - 1754) publicou no ano 1718 em inglês, o livro *“Doctrine of Chances”* (Doutrina das Chances), dedicando este trabalho a seu grande amigo Isaac Newton. Após ser preso na França por mais de dois anos, perseguido por ser um protestante calvinista, De Moivre emigrou para a Inglaterra em 1688 e rejeitou sua pátria mãe até o último dia de sua vida. Nesse livro notável, De Moivre propôs, mesmo de forma implícita, as técnicas de reduzir problemas de probabilidade a equações de diferenças e de usar funções geratrizes para solucionar essas equações, que foram mais tarde aperfeiçoadas por Laplace.

Na segunda metade do século XVIII a teoria da probabilidade começa a ser aplicada sistematicamente às ciências naturais. Nesse contexto destaca-se o naturalista, matemático e escritor francês Georges-Louis Leclerc (1707 - 1788), conhecido como Conde de Buffon, membro da Academia Francesa. Suas importantes teorias naturalistas influenciaram vários naturalistas, entre os quais se pode destacar o naturalista britânico Charles Darwin. O trabalho do Conde sobre espécies perdidas abriu caminho para o desenvolvimento da paleontologia, investigou as origens dos planetas como produto de colisões, para o que fez cálculos de probabilidades. O famoso “problema da agulha de Buffon”, hoje um exercício em cursos elementares, foi proposto por ele em 1777. O problema é determinar a probabilidade de uma agulha de comprimento l atravessar um feixe de paralelas, distantes entre si de $a > l$, quando lançada aleatoriamente. Os livros de

Bernoulli e De Moivre foram as contribuições mais importantes no período inicial da teoria da probabilidade.

Mais tarde foi publicado pelo renomado matemático francês Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827), em 1812, o seu grande tratado *“Théorie Analytique des Probabilités”* (Teoria Analítica das Probabilidades) com base em trabalhos que desenvolveu entre os anos de 1771 e 1786. Os fundamentos da teoria da probabilidade foram então colocados por Laplace em uma forma, conhecida hoje em dia como a *“Definição Clássica de Probabilidade”*, que se manteve praticamente inalterada até o início do século XX. Nesse trabalho, Laplace fez novas contribuições e reuniu, sistematizou e ampliou resultados desenvolvidos por seus predecessores, incluiu uma importante contribuição a aplicações de probabilidade na teoria de análise de erros de medições, desenvolvida inicialmente pelo matemático inglês Thomas Simpson (1730 - 1761) no ano de 1756.

“A teoria das probabilidades, no fundo, não é mais do que o bom senso traduzido em cálculo; permite calcular com exatidão aquilo que as pessoas sentem por uma espécie de instinto... É notável que tal ciência, que começou nos estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano.”

(Pierre Simon de Laplace)

(Instituto de Educação – Universidade de Lisboa – retirado da pág. <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm42/historia.htm> 2 de janeiro de 2014)

É muito interessante observar que Laplace não acreditava em chance na natureza, ele era um grande defensor do determinismo: o aleatório surge como consequência de ignorância humana e a probabilidade é uma medida do nosso desconhecimento das causas exatas dos fenômenos estudados. Essa difícil questão da essência do aleatório tem sido objeto de controvérsias filosóficas para a qual a teoria quântica veio dar uma contribuição de impacto, em contraposição ao determinismo da física do matemático e físico inglês Isaac Newton (1643 - 1727), a ponto de motivar o incomparável físico alemão Albert Einstein (1879 - 1955) a exclamar que Deus não joga dados, ao que o físico dinamarquês Niels Henrick David Bohr (1885 - 1962), um dos fundadores da teoria quântica, retrucou com a indagação de quem somos nós para determinarmos a Deus como proceder em sua criação. A incerteza quanto às condições iniciais e a sensibilidade às mesmas no

modelo matemático, que englobam tanto os aspectos do desconhecimento como da própria natureza dos fenômenos, são também vistas como explicações do aleatório.

No século XIX, o matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), um dos maiores gênios da História da Matemática, estabeleceu a relação da distribuição de erros de medidas com a curva normal e desenvolveu o método dos mínimos quadrados, independentemente do trabalho desenvolvido por um matemático americano pouco conhecido, Robert Adrian (1775 - 1843), e pelo matemático francês Adrien-Marie Legendre (1752–1833). No ano de 1837, o matemático e físico francês Siméon-Denis Poisson (1781 - 1840) publicou seu trabalho *“Recherches sur la Probabilité des Jugements”* (Pesquisa sobre sentenças de Probabilidade), onde defendia a tese que a teoria da probabilidade era aplicável na avaliação da correção de decisões judiciais. Para justificá-la, deduziu a distribuição que hoje leva seu nome. Embora originalmente derivado apenas como uma aproximação à distribuição binomial, a denominada Lei dos Pequenos Números contendo a distribuição de Poisson é hoje básica na análise de vários problemas relativos a ocorrências de eventos aleatórios no tempo e no espaço.

No final do século XIX, o matemático russo Pafnuty L'vovich Tchebyshev (1821 - 1894) fundou a célebre escola de São Petersburgo que produziu grandes matemáticos russos com contribuições fundamentais à teoria da probabilidade. Tchebyshev foi influenciado por dois grandes matemáticos, o russo Viktor Yakovlevich Bunyakovsky (1804 - 1889), que publicou o importante livro *“Fundamentos da teoria matemática das probabilidades”*, e o ucraniano Mikhail Vassiliovich Ostrogradski (1801 - 1862), que fazem parte da linhagem inaugurada por Daniel Bernoulli e Euler em São Petersburgo. O desenvolvimento da teoria das probabilidades foi enriquecida com novos conceitos, desenvolvidos por importantíssimos matemáticos russos.

Tchebyshev foi o primeiro a raciocinar sistematicamente em termos de variáveis aleatórias e seus momentos. Usando esses conceitos, Tchebyshev estabeleceu uma simples desigualdade que permitiu uma prova trivial da lei dos grandes números, que pode enunciar-se do seguinte modo: *“A frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar-se nas vizinhanças de um valor quando o número de provas cresce indefinidamente”*. O conceito de momentos foi utilizado por ele e, em seguida, por seu aluno Andrei Andreiwich Markov (1856 - 1922) para dar uma prova rigorosa do teorema central do limite. Foi feito também por este

matemático estudos sobre dependência de variáveis aleatórias analisando-as, hoje denominadas cadeias de Markov. Um outro de seus famosos estudantes da teoria da probabilidade, Alexander Mikhailovich Lyapunov (1857 - 1918), posteriormente usou o conceito de funções características para dar uma prova mais simples desse importante teorema. O trabalho fundamental sobre as cadeias de Markov em tempo contínuo foi desenvolvido posteriormente por Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903 - 1987), ele foi um dos mais importantes matemáticos do século XX, com trabalhos que tiveram impacto em várias áreas da matemática. Seu interesse em probabilidade iniciou-se em 1924 e em 1925 publicou seu primeiro trabalho nesta área junto com Aleksandr Yakovlevich Khinchin (1894–1959). A axiomatização de Kolmogorov marcou o início do desenvolvimento da teoria moderna da probabilidade e no ano de 1931 Kolmogorov publicou um importante artigo *“Métodos Analíticos na Teoria da Probabilidade”* no qual estabelece os fundamentos da teoria moderna de processos estocásticos. Pode-se dizer, então, que no século XX a teoria das probabilidades já era um instrumento eficaz, exato e confiável do conhecimento.

“A aproximação da teoria com a prática traz resultados muito benéficos, e não é só a prática que ganha nisso; a própria ciência se desenvolve sob sua influência: novos assuntos se abrem para pesquisa e novos aspectos de assuntos já conhecidos são descobertos... Conquanto a teoria se beneficia grandemente com novas aplicações ou maiores extensões de métodos antigos, ela se beneficia ainda mais pela descoberta de novos métodos e, neste caso, a ciência encontra um guia seguro na prática.”
(Pafnuty L'vovich Tchebyshev, 2008, pág. 18)

O desenvolvimento moderno da teoria das probabilidades caracteriza-se por um crescimento geral de interesse na teoria em si, junto com o alargamento do alcance de suas aplicações práticas. Muitos cientistas nos Estados Unidos, França, China, Itália, Grã-Bretanha, Polônia, Hungria e em outros países do mundo estão enriquecendo-a com importantes resultados. A escola soviética da teoria das probabilidades continua ocupando lugar notável neste vigoroso esforço científico.

Capítulo 2 - Metodologia para o ensino da Probabilidade

2.1 - Importância da História da Matemática como Recurso para o Ensino e a Aprendizagem

A História da Matemática pode e deve ser utilizada como recurso didático pedagógico para o ensino das diversas áreas da matemática. Mas, como este recurso deve ser utilizado? Qual a importância da História da matemática no relacionamento entre o professor e o aluno? Como relacionar os conceitos matemáticos aos acontecimentos históricos com eles interligados?

A utilização da História da Matemática como recurso didático está presente nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), como recurso de ensino e aprendizagem da matemática de forma mais significativa e produtiva.

“A História da Matemática, mediante um processo de transposição didática e juntamente com outros recursos didáticos e metodológicos, pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem em matemática. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor tem a possibilidade de desenvolver atitudes e valores mais favorecidos do aluno diante do conhecimento matemático.” (PCN, 1998)

As dificuldades no ensino e na aprendizagem da matemática são discutidas e questionadas nos Cursos de Pós-graduação, na Graduação e também nas Instituições de Ensino Básico de todo país. Tornar a matemática mais concreta sem abrir mão da capacidade de abstração que o seu estudo e aprendizado proporciona é o que mais se ouve falar a respeito de seu ensino. Existe a necessidade de tornar a matemática mais concreta, mas torná-la mais concreta não quer dizer, somente, que se deseja ver seus conteúdos e conhecimentos aplicados às necessidades práticas. Provavelmente compreender os conceitos Matemáticos em relação a algo que dê sentido é o mais importante, este pode ser o papel principal da História da Matemática para o seu ensino.

“A História da Matemática, da forma como tem sido contada contribui para criar no estudante a impressão de que ela é algo ao alcance

apenas de gênios. Para passar uma imagem mais verdadeira da Matemática (que é uma imagem mais agradável, o professor precisa conhecer a verdadeira história.” (Tatiana Roque - Revista Cálculo - 2013, pag. 16)

A matemática ensinada de maneira mais concreta e contextualizada pode ser o grande trunfo do professor. Isto não significa partir apenas de um problema do nosso cotidiano, mas sim saber com o que estes conceitos se relacionam, como eles podem ser inseridos em uma rede de relações e de significados, mesmo que estas relações pertençam à própria matemática, a sua história, pouco explorada hoje, no ensino da própria matemática.

Os conteúdos matemáticos ensinados no ensino fundamental, médio e superior, já foram desenvolvidos e descritos há muitos séculos e de várias maneiras diferentes. Podemos, então, analisar o momento no qual os conceitos foram criados e como os resultados, que hoje consideramos clássicos, foram demonstrados, contrabalançando a concepção tradicional que se tem da matemática como um saber operacional, técnico ou abstrato. Raramente entendemos o sentido dos conceitos e das ferramentas que aprendemos no Ensino Básico. A História da Matemática pode tirar do esconderijo onde se encontram os problemas que constituem o campo de experiência do matemático, ou seja, o lado concreto do seu fazer.

A História da Matemática pode oferecer uma importantíssima contribuição ao ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos, basta que ela seja associada à sua criação humana. É necessário que seja elucidado que ela está presente em diferentes culturas, em diferentes momentos históricos. Ao estabelecer comparações entre os conceitos e os processos matemáticos do passado e do presente. O profissional de educação matemática tem a possibilidade de desenvolver um trabalho mais rico e favorável na transmissão do conhecimento matemático.

A matemática foi escrita e suas descobertas foram registradas independentemente das causas e dos motivos que levaram os matemáticos a desenvolverem seus conceitos. A diferença entre o modo de produzir e de escrever os resultados é muito presente na matemática, que parece ter sido escrita de trás para a frente. A formalização só é obtida após diversos estudos, várias análises e pesquisas, porém ao serem apresentados as definições são as primeiras a aparecerem sem que sejam apresentados os acontecimentos que direcionaram as

pesquisas e as criações efetuadas. As definições, que precedem as conclusões sobre os objetos com os quais se está tratando, explicitam, na verdade, os requisitos para que um enunciado seja verdadeiro, que foram descobertos por último, em geral, no trabalho efetivo do matemático. Existe um encadeamento lógico na apresentação dos enunciados que dá a impressão de que a matemática é desconectada de seu contexto de descoberta.

Um dos fatores que contribuem negativamente para o ensino da matemática, para que ela seja considerada abstrata vem da forma como esta valiosa disciplina é ensinada, fazendo uso, na maioria das vezes, da mesma ordem de exposição presente nos textos matemáticos. Ao contrário de partir do modo como um conceito matemático foi desenvolvido e exibir as perguntas às quais ele responde, toma-se este conceito como algo pronto, isto dificulta o aprendizado e não mostra a real importância que fica escondida atrás do conceito matemático formalizado. As situações, as dificuldades e os objetos que motivaram os matemáticos são problemas em um sentido muito mais amplo e rico. Podem ter sido problemas do cotidiano, como registrar, contar, relacionar, medir; problemas relativos à descrição dos fenômenos naturais; problemas filosóficos (o que é conhecer, como a matemática ajuda a alcançar o conhecimento verdadeiro?); ou ainda, problemas matemáticos (como legitimar certa técnica ou certo conceito?). Na História da Matemática, encontram-se motivações que misturam todos estes tipos de problemas.

Até o século XIX, problemas físicos e ou de engenharia, bem como questões filosóficas, possuíam um papel muito mais importante no desenvolvimento da matemática do que possuem hoje. Entre os séculos XIX e XX, problemas relativos à formalização e à sistematização da matemática tornaram-se preponderantes. A matemática ensinada aos alunos é apresentada geralmente da forma tradicional. Primeiro as definições, depois os teoremas e as demonstrações que usam estas definições e, finalmente, as aplicações dos teoremas a alguma situação particular, considerada um problema. Então, a partir desta apresentação, pode-se demonstrar e aplicar o teorema de modo convincente.

A matemática se desenvolveu, e continua a se desenvolver, a partir de problemas. O papel da História da Matemática pode ser o de exibir estes problemas. É possível reinventar o ambiente “problemático” no qual os conceitos foram criados. Uma consequência da abordagem Histórica da Matemática, que também julga-se

interessante, é que o estudo da história pode ser também uma ocasião para se aprender matemática, ainda que seja uma matemática distinta daquela que se pratica hoje.

2.2 - Importância de Jogos para o Ensino da Probabilidade

Como já fora mencionado, a teoria da probabilidade tem suas origens no estudo dos jogos de azar, muito antes de 3000 a.C., no Egito e na região da Mesopotâmia, passando pelos célebres matemáticos Blaise Pascal e Pierre de Fermat que iniciaram, no século XVII, os estudos de probabilidade, analisando uma divisão das apostas de um jogo de azar interrompido antes do seu fim. Chegando à primeira publicação matemática em teoria da probabilidade, "*De Ratiociniis in Ludo Aleae*" (O Raciocínio em jogos de azar), escrita no ano de 1657 pelo matemático Huygens. Então, historicamente, os jogos estão relacionados a teoria da probabilidade e podem e devem ser utilizados como recurso do profissional de educação matemática para o ensino atual da probabilidade no Ensino Médio.

No ensino tradicional, os professores apresentam as fórmulas e resolvem exercícios aplicando essas fórmulas, mas os alunos não compreendem de onde elas surgiram, não entendem os seus significados e acabam mistificando a matemática como um conjunto de regras e fórmulas que aparecem sem justificativa, de utilidade duvidosa. Atualmente, tanto no Brasil como no exterior, diversas instituições de ensino, por meio de pesquisas, procuram elaborar metodologias de ensino de matemática diversificadas e que levem o sujeito a pensar, questionar e se arriscar a propor soluções para inúmeros problemas da vida. Apesar de estar claro que os PCN orientam para a utilização de jogos no ensino de matemática, não existem orientações de como este trabalho deve ser encaminhado. O trabalho pedagógico é de extrema importância e não deve ser "o jogo pelo jogo". O jogo deve ser trabalhado de maneira criativa, para que se possa fazer análises, desencadeamentos e formalizações de conceitos matemáticos. A aplicação de jogos têm suas vantagens no ensino da matemática desde que o professor tenha objetivos claros e estabelecidos do que pretende atingir com suas atividades propostas.

“Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas.” (PCN, 1998)

Entende-se que uma atividade que envolve jogo e o ensino de matemática favorece o trabalho com resolução de problemas, envolvendo o aluno como ser pensante e criador. Para isso, é exigida a presença da criatividade, do lúdico, da imaginação, da interação, da tomada de decisão e, principalmente, da necessidade, por parte do aluno envolvido, de querer resolver os problemas. A resolução de problemas é vista como uma situação na qual o problema é desencadeador do processo de aprendizagem, uma vez que o aluno está inserido em um movimento de pensamento e elaboração de conhecimentos, visando resolver o problema enfrentado, por meio da utilização de conceitos matemáticos.

O jogo deve ser trabalhado e associado à resolução de problemas. A literatura sobre jogos e resolução de problemas para o Ensino Fundamental é razoavelmente extensa, mas para o Ensino Médio é bastante escassa. Quando um profissional de educação escolhe o jogo como sua estratégia de ensino, ele deve fazer com a importante intenção de propiciar a aprendizagem e, ao fazê-lo, deve ter como propósito principal o ensino de o conteúdo matemático estabelecido. O jogo escolhido deverá, portanto, permitir o cumprimento deste objetivo. Então o papel do jogo no desenvolvimento dos conceitos devem demonstrar o caráter evolutivo do jogo simbólico no aluno e o papel que este exerce na evolução do pensamento abstrato. O jogo como ferramenta para ensinar matemática deve cumprir o papel de auxiliar no ensino do conteúdo, propiciar ao aluno a aquisição de habilidades, além de estar perfeitamente localizado no processo que leva o aluno do conhecimento primitivo ao conhecimento elaborado.

“... a união entre o jogo e a resolução de problemas está intimamente vinculada à intencionalidade do professor, que é um dos arquitetos do projeto pedagógico do trabalho coletivo da escola. Este projeto tem começo – a cultura primeira – e um fim – a cultura elaborada, sendo ambos móveis; trata-se do conhecimento em movimento. Aquele conhecimento que é síntese de um processo passa a ser começo de outros, num movimento crescente. [...] combinar jogo e

resolução de problemas [...] é muito mais que uma simples atitude, é uma postura que deve ser assumida na condução do ensino. [...] fazer isto é dar um sentido humano ao jogo, à resolução de problemas e, sendo assim, à Educação Matemática.” (Moura, M. O. - Revista Zetetiké - 2011, pag. 80)

O jogo como ferramenta do ensino da matemática, da mesma forma que o conteúdo, necessita de uma intencionalidade. Ele, assim como o conteúdo, é parte do projeto pedagógico utilizado pelo professor. Ao utilizar o jogo como objeto pedagógico de ensino da matemática, o professor já tem eleita, necessariamente, uma concepção de como ocorre a construção do conhecimento em questão e deve também ter planejado seu plano para desenvolver seu trabalho de maneira eficiente. A interação do aluno com o jogo tem como principal característica o desenvolvimento da ideia que o conhecimento evolui, de que o ensino deve ser lúdico e de que o objetivo final é o conceito científico.

Não se pode deixar de destacar que, além de uma valiosa ferramenta pedagógica, o jogo desenvolve a criatividade do aluno, os conhecimentos são adquiridos de maneira confortável e agradável, a atenção e importância dada pelo aluno ao trabalho através de jogos são diferenciadas positivamente, além de promover a relevante interação entre os alunos e dos alunos com o professor. Pode-se chegar até a uma maneira divertida de construção do conhecimento científico, que será utilizada futuramente na vida profissional do aluno que, provavelmente, terá um bom desempenho na carreira profissional que exercerá na sociedade.

Procura-se mostrar nesta proposta de ensino de matemática que o uso das fórmulas deve ocorrer somente no final de todas as atividades, depois que o aluno assimilou o conceito matemático que está sendo estudado. Deve-se desenvolver o raciocínio dedutivo do aluno. A memorização de fórmulas é apenas temporária, mas o desenvolvimento do raciocínio é para a vida toda. Tanto em situações de jogo como na resolução dos problemas, os alunos são estimulados a tomar uma decisão, e esse é um dos principais objetivos para o ensino de probabilidade. Os professores, juntamente com os alunos, podem trabalhar com resolução de problemas e jogos, dois instrumentos importantes e recomendados pelos PCN para o ensino de matemática, mas infelizmente ainda são pouco utilizados, principalmente no Ensino Médio. Trabalhar com atividades envolvendo jogos é mais prazeroso e divertido. Os alunos tornam-se ativos na construção de seus próprios conhecimentos; os jogos e os problemas podem tornar esse objetivo mais acessível.

A utilização de jogos no ensino de matemática, quando intencionalmente bem definidos, pode promover um contexto estimulador e desafiante para o movimento de formação do pensamento humano, de sua capacidade de cooperação e um auxiliar didático na construção de conceitos matemáticos. O jogo é um facilitador da aprendizagem, pois mobiliza a dimensão lúdica para a resolução de problema, disponibilizando o aluno a aprender, mesmo que a formalização do conceito seja depois do jogo. A metodologia de resolução de problemas dá mais trabalho ao professor, mas, se adequadamente utilizada, pode contribuir significativamente para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem da matemática e principalmente da teoria da probabilidade.

2.3 - Importância do Conteúdo nas Diversas Áreas do Conhecimento

Vive-se, hoje, no mundo da informação, onde uma grande quantidade de informação pode ser disponibilizada em questões de alguns segundos e a partir de alguns simples “clicks”, mas a quantidade de informação fornecida pelos meios de comunicação pode se transformar em um grande problema para o aluno que não estiver preparado para este processo natural de aprendizado. Diversos conteúdos de várias áreas do conhecimento são apresentados, interligados ou desconectados, com qualidades ou desqualificados, mas para que o aluno esteja preparado para o excesso de informação disponível, ele precisa estar preparado para atuar criticamente em relação a esses e outros conteúdos. Uma metodologia de ensino interdisciplinar pode ser adequada a esses objetivos? A interdisciplinaridade pode ser a grande arma a ser usada pelo professor para preparar o aluno para o mundo da informação?

Hoje em dia as pesquisas escolares podem ser realizadas em bancos de dados, onde obtém-se um “leque” de informações que podem complementar-se ou divergir, informações dignas das grandes e antigas enciclopédias. Mas todas essas informações, hoje, ficam acessíveis rapidamente, e quase simultaneamente, em apenas alguns “clicks”. A escola atual tem sua base na educação disciplinar. Desligar-se deste método é um grande desafio. A excessiva fragmentação do conhecimento, presente no dia a dia dos profissionais de educação, vem sendo questionada e discutida pela sociedade moderna, que cobra soluções para este tipo

problema, gerado pelo desenvolvimento tecnológico, que a escola não conseguiu absorver. As novas tecnologias, da Informação e Comunicação, estão presentes em nossos dias e para César Coll (Universidade de Barcelona) e Carles Monereo (Universidade Autônoma de Barcelona).

“(...) é indispensável uma intervenção educacional que permita uma análise explícita das restrições e regras implícitas que as próprias Tecnologias da Informação e Comunicação impõem.” (2010, p.110).

Ambos sugerem que as escolas e principalmente os professores devem estar atentos, eles podem e devem atuar com o objetivo de que os alunos possam utilizar a grande quantidade de informação e de conhecimento disponível, mas que esta pluralidade representacional não leve à perplexidade, transformando a densidade de informação em ruído.

“A Complexidade, a interdependência e a imprevisibilidade que presidem as atividades e as relações dos indivíduos, dos grupos, das instituições e dos países são, junto com a globalização ou mundialização da economia, características frequentemente atribuídas à Sociedade da Informação. O contexto das atividades humanas, que as condiciona e por sua vez é condicionado por elas, não é mais o contexto físico imediato, no qual estas surgem e se desenvolvem, mas um contexto muito mais amplo, sujeito a uma densa rede de inter-relações, de envolvimentos e de Influências mútuas.” (César Coll e Carles Monereo, 2010, pag. 22)

A interdisciplinaridade é a grande e poderosa arma que pode ser usada pelo profissional de educação para que os alunos possam estar preparados para o moderno e “mutante” mundo da informação, facilmente exemplificado nas páginas da internet que podem apresentar informações diferentes em um mesmo endereço em frações de segundos. Acredita-se que a inserção de conteúdos interdisciplinares que visem a abordagem entrelaçadas de dois ou mais conceitos, que busquem a integração entre duas ou mais disciplinas, pode possibilitar um aprendizado significativo destes conceitos, ampliando a capacidade do aluno de gerar novos conhecimentos e resolver situações novas. Dificilmente, no mundo atual, uma situação pode ser pensada ou resolvida utilizando apenas uma área do conhecimento. Desta forma as aulas fragmentadas, tradicionais e cada vez mais ultrapassadas, não são eficientes para o mundo da informação. Sugere-se, então, a interdisciplinaridade, em que os conhecimentos inerentes a cada disciplina são

aplicados em relação a uma situação problema, mantendo suas especificidades, mas atuando conjuntamente na resolução deste problema. Pensa-se que este tipo de interdisciplinaridade no ensino de ciências e/ou de matemática, como algo possível, mesmo dentro dos moldes atuais do ensino regular, com seu tempo fragmentado e de currículos extensos.

O ensino fragmentado e disciplinarizado, existente nas escolas de todo o país, não considera as possibilidades de ações interdisciplinares entre temas de áreas diferentes. Tradicionalmente, as Ciências têm o ensino baseado apenas na utilização de fundamentos científicos, sem que os mesmos se entrelacem.

A ligação existente entre conhecimentos da Biologia e da Matemática, a interdisciplinaridade se concretiza de modo a ocorrerem influências mútuas, sem a recorrência a excessivas formalizações das partes envolvidas, nem à perda de identidades. A articulação de áreas diferentes dos saberes por si mesma não tem a propriedade de resolver ou garantir a resolução dos problemas de ensino em sua totalidade, mas pode contribuir para a contextualização e a integração de temas. Não basta, apenas, propor a aproximação entre Probabilidade e a Genética, se a primeira continuar sendo abordada independentemente da outra. Interligando conceitos matemáticos inerentes à probabilidade e aos conhecimentos biológicos da genética no ensino médio, conscientes das muitas outras possibilidades entre estas ou outras disciplinas, entre estes e outros conhecimentos, independente dos níveis de ensino, os mesmos podem e devem ser utilizados neste como recursos metodológicos para elaboração de uma prática de ensino interdisciplinar.

“..., no Ensino Médio, das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, no sentido de se produzir um conhecimento efetivo, de significado próprio, não somente propedêutico. De certa forma, também organizam o aprendizado de suas disciplinas, ao manifestarem a busca de interdisciplinaridade e contextualização e ao detalharem, entre os objetivos educacionais amplos desse nível de ensino, uma série de competências humanas relacionadas a conhecimentos matemáticos e científico-tecnológicos. Referenda-se uma visão do Ensino Médio de caráter amplo, de forma que os aspectos e conteúdos tecnológicos associados ao aprendizado científico e matemático sejam parte essencial da formação cidadã de sentido universal e não somente de sentido profissionalizante.” (PCN, 1998)

Aplicar uma metodologia de ensino interdisciplinar é ter uma visão educacional que envolva diversas áreas do conhecimento científico, promovendo a

integração entre essas áreas, tornando o processo de ensino aprendizagem dinâmico, onde o aluno aprende a todo momento, a partir de variados pontos de observação. O aluno faz conexões entre as diversas áreas do conhecimento, criando em sua mente uma rede de saberes.

A interdisciplinaridade na escola tem como objetivo não só conseguir relacionar diferentes disciplinas, mas construir ligações entre elas que vão muito além do conteúdo ensinado.

Capítulo 3 - Criação do Material Didático

3.1 – Conteúdo do Material Didático e Atividades

O tratamento de situações probabilísticas diversificadas, contextualizadas historicamente e dentro de um contexto interdisciplinar, oferece ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construindo suas próprias estratégias de resolução de problemas e argumentação crítica e inteligente, relacionando diferentes tipos de conhecimentos a situações reais da vida, o que vem ao encontro das orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998).

O material que será apresentado é uma proposta didática do ensino de Probabilidade de acordo com o Currículo Mínimo da Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro, que prevê entre os conteúdos matemáticos da terceira série do Ensino Médio, no Campo Numérico Aritmético, no fim do primeiro bimestre “Introdução à probabilidade” e no segundo bimestre “Resolver problemas utilizando a probabilidade da união de eventos e a probabilidade de eventos complementares” e “Resolver problemas envolvendo probabilidade condicional”, em aulas ministradas em 4 tempos semanais de 45 minutos em 5 semanas de aula, totalizando 20 tempos de aula agrupados sempre em 10 aulas de dois tempos consecutivos.

Nos dois primeiros tempos, será dada à introdução a probabilidade através da contextualização histórica, relatando as 7 cartas trocadas por Pascal e Fermat, e com as atividades 1 e 2 serão inicialmente construídos e posteriormente definidos os conceitos de experimento determinístico, experimento aleatório, espaço amostral, evento e a definição clássica de probabilidade.

Nos terceiro e quarto tempos, através da atividade 3 será introduzido, intuitivamente, sem que sejam definidos, os conceitos de experimento equiprovável, experimento não equiprovável e a definição frequentista de probabilidade.

Nos quinto e sexto tempos, com a atividade 4 serão inicialmente construídos e posteriormente definidos os conceitos de experimento equiprovável, experimento não equiprovável e a definição frequentista de probabilidade.

Nos sétimo e oitavo tempos, com a atividade 5 serão inicialmente construídos e posteriormente definidos o conceito de probabilidade da união de eventos, a probabilidade de eventos complementares, evento impossível e evento certo.

Nos nono e décimo tempos, as atividades 6 e 7 têm como objetivo construir o conceito de probabilidade condicional, a regra da multiplicação de eventos e árvore das probabilidades, após o final das atividades esses conceitos serão definidos.

Nos décimo-primeiro e décimo-segundo tempos, a atividade 8 retorna ao problema dos pontos de Paccioli, mencionado na contextualização histórica, nas cartas trocadas por Pascal e Fermat. Suas soluções que são geniais e diferentes, mas que levam ao mesmo resultado, serão apresentadas.

Nos décimo-terceiro e décimo-quarto tempos, as atividades 9 e 10 terão conceitos de genética, utilizando a Primeira Lei de Mendel, para dar um contexto interdisciplinar ao conceito de probabilidade.

Nos décimo-quinto e décimo-sexto tempos as atividades 11 e 12 serão bem distintas; a primeira terá, também, o conceito de genética, desta vez com a utilização da Segunda Lei de Mendel, continuando com uma visão interdisciplinar do conceito de probabilidade; a segunda trará o curioso, intrigante e surpreendente problema da probabilidade de haver pelo menos dois alunos de uma turma que façam aniversário no mesmo dia.

Nos décimo-sétimo, décimo-oitavo, décimo-nono e vigésimo tempos, serão resolvidos os exercícios propostos, sendo feita uma revisão dos conceitos estudados nas atividades do material didático com o objetivo de colocar em prática e exercitar os conceitos aprendidos.

3.2 – Proposta de Criação do Material Didático

No XI ENEM (Encontro Nacional de Educação Matemática), realizado em 2013, foi apresentado um artigo a respeito dos materiais didáticos utilizados para o ensino de probabilidade no Ensino Médio, com base no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano anterior. Neste artigo os resultados observados indicaram algumas incorreções presentes nas coleções aprovadas para a disciplina de Matemática. Foram identificadas várias imprecisões, entre elas estava a falta de uma abordagem com contextualização histórica da probabilidade. Alguns e poucos livros didáticos até fazem uma pequena abordagem com acontecimentos históricos, mas a abordagem poderia ser mais significativa. Existe também a ausência de sugestão para uma abordagem que confronte duas visões diferentes da probabilidade, a visão

clássica e a visão frequentista, como é apontado e sugerido por pesquisas recentes, confirmando que ainda não fazem parte das propostas didáticas de ensino de probabilidade das coleções atualmente aprovadas.

“Que elementos do letramento probabilístico são identificados como presentes nas coleções aprovadas no processo de avaliação realizado pelo PNLD 2012?” (XI ENEM, 2013)

O ensino de probabilidade não deve se limitar a falar apenas sobre os jogos de azar, como acontece na maioria dos livros didáticos. Este fato tende a gerar no aluno a falsa impressão que a principal aplicação do conceito de probabilidade é dada nos jogos de azar.

A ideia de apresentar a probabilidade dentro de um contexto histórico é muito interessante, e é uma forte ferramenta para explicar a relação e a importância dos jogos azar na história da probabilidade. No entanto, deve-se ter bastante cuidado para não estender demais o texto, entretanto sem resumir muito o assunto. Propõe-se um material didático de ensino de probabilidade para aplicação no Ensino Médio que inicie com fatos históricos que incentivem o aluno a aprender esta teoria. Posteriormente, conforme os conceitos forem sendo desenvolvidos, acontecimentos históricos relacionados devem aparecer, para tornar os conceitos de probabilidade mais concretos. Contudo, torná-los concretos não quer dizer que compreender os conceitos em relação a algo que dê sentido é o mais importante, é necessário que o conteúdo seja associado à sua criação humana, assim o principal papel da História da Matemática para o seu ensino e aprendizado estará sendo usado.

O material didático proposto, por meio de suas atividades deve direcionar o aprendizado para que posteriormente sejam apresentados os conteúdos. Sugere-se, aqui, que ao conceituar um tópico apresentem-se atividades diversas, e não somente aquelas que envolvem jogos de azar. Preferencialmente é interessante que estas atividades que conjuguem a teoria com a aplicação do cotidiano ou sejam interdisciplinares, probabilidade introduzida com aplicações em outras áreas do conhecimento, na Biologia (Genética), na Estatística, na Economia, na Ciências Atuariais (Seguros), na Engenharia (Controle de Qualidade Industrial), no Marketing (Pesquisa de Mercado) ou dentre outros. Estas representam um fonte inesgotável para introdução ao estudo de fenômenos aleatórios de probabilidade. Portanto, uma destas aplicações, seria de extrema necessidade para provocar a curiosidade do

aluno a aprender probabilidade. Quanto às atividades, vê-se que é importante trabalhar não somente atividades que exijam respostas exatas, mas também atividades que permitam que o aluno dê uma resposta discursiva, ou seja, atividades que ajudem a desenvolver não só o senso lógico-matemático, mas também o senso crítico do aluno em relação ao que se está estudando. Estas atividades podem ser muito úteis aos alunos do ensino médio, pois são atividades que exigem dedicação, paciência e bom raciocínio lógico-matemático, além de poder aumentar a criatividade dos alunos.

“Os livros estudados, em geral, possuem uma gama de exercícios úteis para o aprendizado do conteúdo em estudo. Porém, ..., notamos que falta uma ligação mais direta com a realidade do aluno. A apresentação do conteúdo, por sua vez, poderia ser reavaliado, uma vez que quase todos explicam essa matéria se limitando a falar sobre os jogos de azar. No entanto, apresentam uma bateria de exercícios bem elaborados que envolvem muitos tópicos que eles nem sequer comentam. ... Os alunos até resolvem as questões, porém muitas vezes o fazem decorando a fórmula e a aplicando.”
(Carmo, Anselmo Gonçalves, 2011, pág. 11)

Pode-se dizer que os experimentos determinísticos são aqueles em que podemos determinar os resultados nas diversas vezes que os repetirmos, e os experimentos aleatórios são aqueles que podem ser repetidos diversas vezes sob as mesmas condições iniciais, e mesmo assim não é possível determinar previamente os seus resultados. Alguns livros didáticos nem falam sobre experimentos determinísticos, porém é interessante que se apresente pelo menos um exemplo sobre este conteúdo, sem aprofundar, pois o objeto de estudo da probabilidade são os experimentos aleatórios.

Destaca-se neste trabalho a importância do estudo no Ensino Médio da probabilidade teórica versus a probabilidade experimental, pois existe a ausência de sugestão para uma abordagem da probabilidade que confronte a visão clássica e frequentista. O conceito frequentista de probabilidade é obtido através de um processo de experimentação e simulação, importante para um aprendizado dinâmico e construtivo.

“[...] uma visão puramente determinista do conceito de Probabilidade, baseada no enfoque clássico de Probabilidade. Desta forma, o ensino de Probabilidade se distancia dos resultados de pesquisas

que propõem a realização da Probabilidade por meio da relação entre os enfoques: clássico e frequentista.” (XI ENEM, 2013)

A teoria da probabilidade, devido às suas diversas aplicações, possui três definições distintas para o conceito de probabilidade e uma não menos importante que a outra: a definição clássica, a definição frequentista e a definição axiomática. As duas primeiras são de grande importância para um processo de ensino e aprendizagem e suas diferenças devem ser confrontadas para criar no aluno uma visão crítica do conceito de probabilidade; a última, devido a toda sua formalização lógica-matemática não será utilizada nas atividades propostas por este trabalho.

A primeira é a definição clássica, atribuída aos estudos de Blaise Pascal e Pierre de Fermat na segunda metade do século XVII. Pode-se dizer que no contexto de um jogo ou de um fenômeno da natureza, a probabilidade de um evento foi baseada no conceito de simetria, sendo a razão entre o número de casos favoráveis do evento aleatório e o número total de casos possíveis. Logo, a probabilidade de um evento ocorrer define-se por:

$$\frac{\text{Casos Favoráveis}}{\text{Casos Possíveis}}$$

Existem duas importantes restrições na definição clássica: todos os casos possíveis devem ter a mesma probabilidade (equiprobabilidade) e um número finito de casos possíveis (finitude do espaço dos resultados).

A definição frequentista, surgiu na segunda metade do século XVII, logo após a introdução da definição clássica. Considera-se um experimento que possa ser repetido nas mesmas condições um número “grande” de vezes. Seja A um evento cuja probabilidade se deseja calcular. Neste caso o experimento será repetido várias vezes, estimando-se a probabilidade de A pela sua frequência relativa de ocorrência, ou seja:

$$\frac{\text{Número de ocorrências de A}}{\text{Número Total de Repetições}}$$

Observe-se que, através da definição frequentista, não são necessárias as hipóteses de equiprobabilidade dos eventos elementares nem de finitude do espaço dos resultados, superando-se portanto as duas restrições da definição clássica. Mas a definição frequentista apresenta as seguintes dificuldades: existe a necessidade de uma certa regularidade da sequência das frequências relativas, no sentido de que a mesma se mantenha estável e convergindo para um valor que seria a probabilidade de A. E mesmo admitindo a existência do limite, quando se deve parar?

É válido ressaltar que este método, frequentista, não foi utilizado originalmente como definição, mas como critério empírico destinado a revisar cálculos feitos no contexto dos jogos segundo a definição clássica, na época sujeitos a muitos erros, pois ainda estava sendo iniciado o desenvolvimento das técnicas de contagem.

De acordo com Coutinho (2001), Batanero e Godino (2002) a construção dos conceitos probabilísticos deve ser feita a partir da compreensão de suas três noções básicas: percepção do acaso, ideia de experiência aleatória, noção de probabilidade.

Kataoka, Rodrigues e Oliveira (2007) afirmam que é desejável que o professor aborde tais conceitos por meio de atividades em que os alunos possam realizar experimentos e observar os eventos, promovendo a manifestação intuitiva do acaso e da incerteza, construindo, a partir desses resultados, métodos matemáticos para o estudo de tais fenômenos.

Segundo Iddo Gal em seu artigo "*Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas*" (Em direção a "alfabetização em probabilidade" para todos os cidadãos: blocos de construção e dilemas no ensino) publicado no ano de 2005 e estudado e apresentado no XI ENEM, para uma melhor utilização de uma proposta teórica nós fundamentamos nossos elementos de conhecimento em probabilidade, é preciso dar a devida atenção aos seguintes aspectos:

1º) Elementos de Conhecimento

1 - *Grandes ideias: Variação, Aleatoriedade, Independência Previsibilidade e Incerteza.*

2 - *Figurando probabilidades: maneiras de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos.*

- 3 - *Idioma: Os termos e os métodos utilizados para comunicar sobre chance.*
- 4 - *Contexto: Compreender o papel e as implicações de questões probabilísticas e mensagens em vários contextos e no discurso pessoal e público.*
- 5 - *Questões críticas: questões para refletir sobre quando se lida com probabilidades.*

2º) Elementos Disposicionais

- 1 - *Postura crítica.*
- 2 - *Crenças e atitudes.*
- 3 - *Sentimentos pessoais sobre a incerteza e o risco (por exemplo, a aversão ao risco).*

(GAL, 2005, p.46). [Tradução XI ENEM, 2013]

Assim, nosso referencial teórico seria construído não apenas pelos resultados de pesquisas na área, mas, principalmente, pela articulação entre o estudo da transposição didática e os elementos de letramento probabilístico enunciados por Gal (2005).

Deve-se tentar instigar o aluno à pesquisa, à experiência, ao estudo reflexivo e crítico do conceito de probabilidade. Propõe-se neste trabalho a inclusão de questões discursivas, que permitam que o aluno tenha mais intimidade com a escrita, e conseqüentemente com a leitura. Não é interessante retirar as questões tradicionais abordadas pela maioria dos livros didáticos do ensino médio, mas acrescentar estas questões tem o seu devido valor, tanto histórico quanto atual, e são questões com qualidades comprovadas para desenvolver o raciocínio lógico-matemático.

Hoje, existe uma extrema necessidade de capacitar o aluno para o mundo atual, então o ensino e o aprendizado de probabilidade deve estar voltado para a necessidade existente de estudar este conteúdo matemático de maneira reflexiva, onde o aluno não se limite a resolver as atividades de maneira exclusivamente mecânica, mas que ele analise o que está acontecendo no decorrer das soluções e as respostas encontradas, reflita sobre o que está ocorrendo e também seja capaz de perceber o elo existente entre o conteúdo em estudo e o cotidiano.

Considera-se de extrema importância que a definição de probabilidade somente seja apresentada depois das diversas atividades propostas e experimentos

sugeridos, pois deve-se partir do conhecimento adquirido pelo aluno, e somente depois o conteúdo deve ser sistematizado, isto é, o conceito de probabilidade deve ser definido, possibilitando que o ensino e a aprendizagem possam ocorrer da melhor maneira possível.

Capítulo 4 - Material Didático para o Ensino da Probabilidade

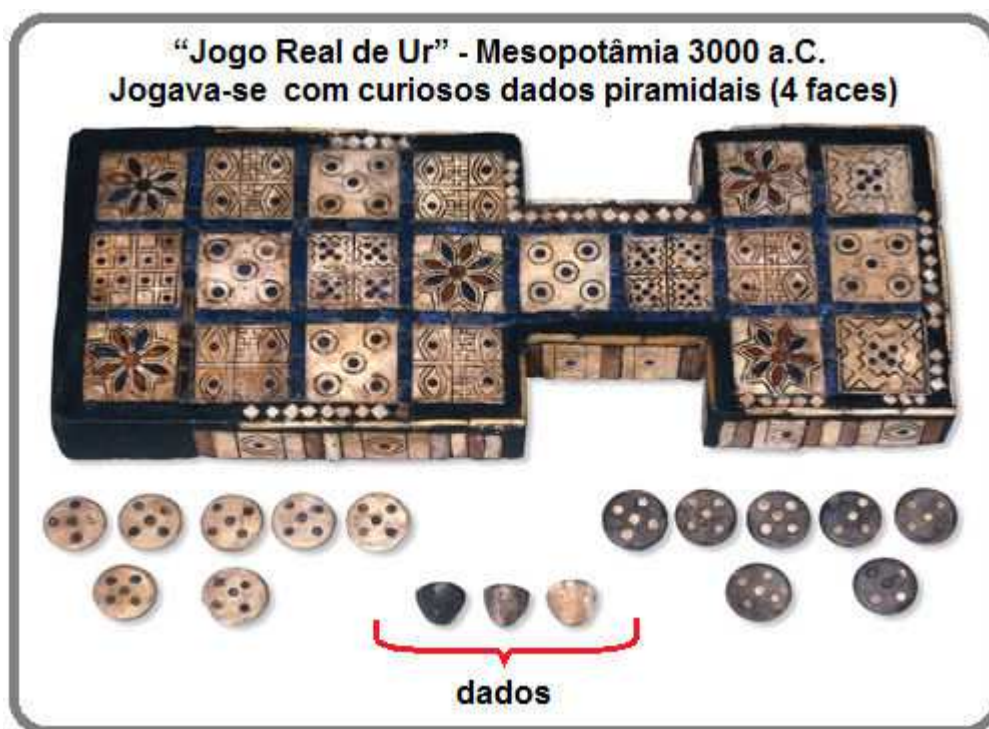
Probabilidade

1 - O Conceito de Probabilidade

1.1 - Contextualização Histórica

A teoria da probabilidade é uma das principais ferramentas da matemática do mundo atual, seus conceitos são úteis nas diversas aplicações do cotidiano e nas diferentes áreas do conhecimento humano. Devido à sua incontestável utilidade, sua imensa competência e sua inigualável capacidade nos mais diversos contextos da sociedade, tem conquistado nas últimas décadas o seu devido reconhecimento de sua inestimável importância. Este conceito foi criado e desenvolvido com quais objetivos? Mas, como, para que e porquê?

A História da Probabilidade começou há muitos anos. Pinturas em tumbas egípcias feitas em 3500 a.C. mostram pessoas jogando uma forma primitiva de dados feitos de um osso do calcânhar de nome astrágalo e este osso era dotado de 4 faces. Foram encontrados também dados de 4 e 6 faces datados de 3000 a.C. no norte do Iraque, onde na época ficava a região da Mesopotâmia. A palavra “azar” tem sua origem derivada da expressão árabe “*al zahr*”, que significa “dado” em árabe. Existe no Museu Britânico um exemplar valiosíssimo de um jogo oriundo da cidade Ur, que foi uma importante cidade na antiga Suméria (Mesopotâmia). Há arqueólogos que consideram Ur a cidade mais antiga do Mundo. O “Jogo Real de Ur” é jogado em um tabuleiro e com 3 dados primitivos de 4 faces parecidos com pirâmides triangulares (tetraedros), a matemática e os jogos sempre tiveram fortes ligações desde o início das civilizações.



(The British Museum (Museu Britânico). Retirado da página

https://www.britishmuseum.org/explore/highlights/highlight_image.aspx?image=ps121289.jpg&retpage=23082/www.jogos.antigos.nom.br/jrealur.asp em 11 de fevereiro de 2014)

Por volta de 1652, Chevalier de Méré, um intelectual francês, que era apaixonado por jogos de azar e muito influente na corte de Luís XIV, que tem seu nome lembrado até hoje por sua participação na construção da teoria da probabilidade, propôs ao amigo, também francês, e reconhecido matemático da época Blaise Pascal, um problema proposto em 1494 pelo padre e matemático italiano Frei Luca Paccioli. Méré é o principal motivo de uma troca de

correspondências entre os matemáticos Blaise Pascal e o imortal matemático Pierre de Fermat, que tinham como principal objetivo desvendar o problema de Paccioli.



Blaise Pascal (1623 - 1662)



Pierre de Fermat (1601 - 1665)



Registros históricos afirmam que foram trocadas 7 cartas; que formam hoje um conjunto de importantíssimos documentos históricos que são valiosos patrimônios da humanidade. Infelizmente a primeira carta não existe mais, porém os conteúdos de todas as outras correspondências estão disponíveis na internet em diversos idiomas, inclusive em português.

O problema proposto por Paccioli, conhecido historicamente como o **problema dos pontos**, consiste em determinar qual deve ser a divisão das apostas

quando um jogo é interrompido antes do seu final. Suponha que uma partida entre dois jogadores que é vencida pelo primeiro que fizer 6 pontos. Na hipótese de ambos jogadores terem a mesma habilidade no jogo, como se deve dividir o bolo se a partida for interrompida quando um dos jogadores tiver 5 pontos e outro 3 pontos?

Vários matemáticos através dos tempos tentaram resolver este problema. O próprio Paccioli deu uma solução, mas equivocada.

A solução sugerida é dividir o bolo de apostas proporcionalmente às chances que cada jogador tem de vencer o jogo. O grande problema está em como conseguir calcular essas chances.

O primeiro a perceber que não se tratava apenas de jogos de azar, mas que uma grande teoria estava sendo desenvolvida, foi matemático holandês Christiaan Huygens, que pertencia a uma nobre e importante família holandesa. Seu pai era muito amigo do ilustre matemático francês René Descartes (1596 – 1650) que teve grande influência na educação matemática de Huygens.



O matemático francês Pierre Simon de Laplace foi, certamente, o que mais contribuiu para a teoria das probabilidades. Os fundamentos da teoria da probabilidade foram então colocados por Laplace em uma forma, conhecida hoje em dia como a *"Definição Clássica de Probabilidade"*, que se manteve praticamente inalterada até o início do século XX.

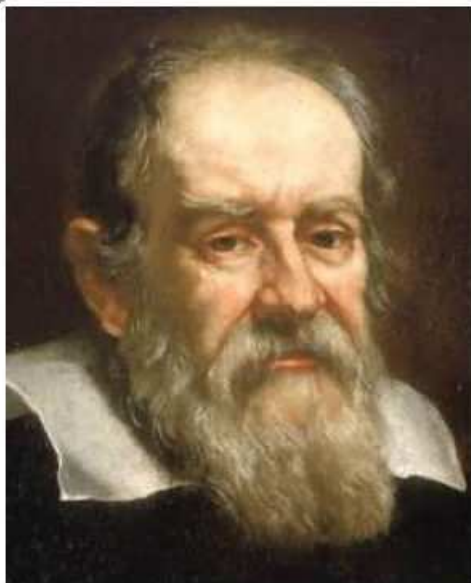


Pierre Simon de Laplace (1749 - 1827)

"A teoria das probabilidades, no fundo, não é mais do que o bom senso traduzido em cálculo; permite calcular com exatidão aquilo que as pessoas sentem por uma espécie de instinto... É notável que tal ciência, que começou nos estudos sobre jogos de azar, tenha alcançado os mais altos níveis do conhecimento humano."

1.2 – Introduzindo a Noção de Probabilidade e Construção de Conceitos Básicos

Atividade 1 - A Consulta ao Célebre Gênio Galileu Galilei



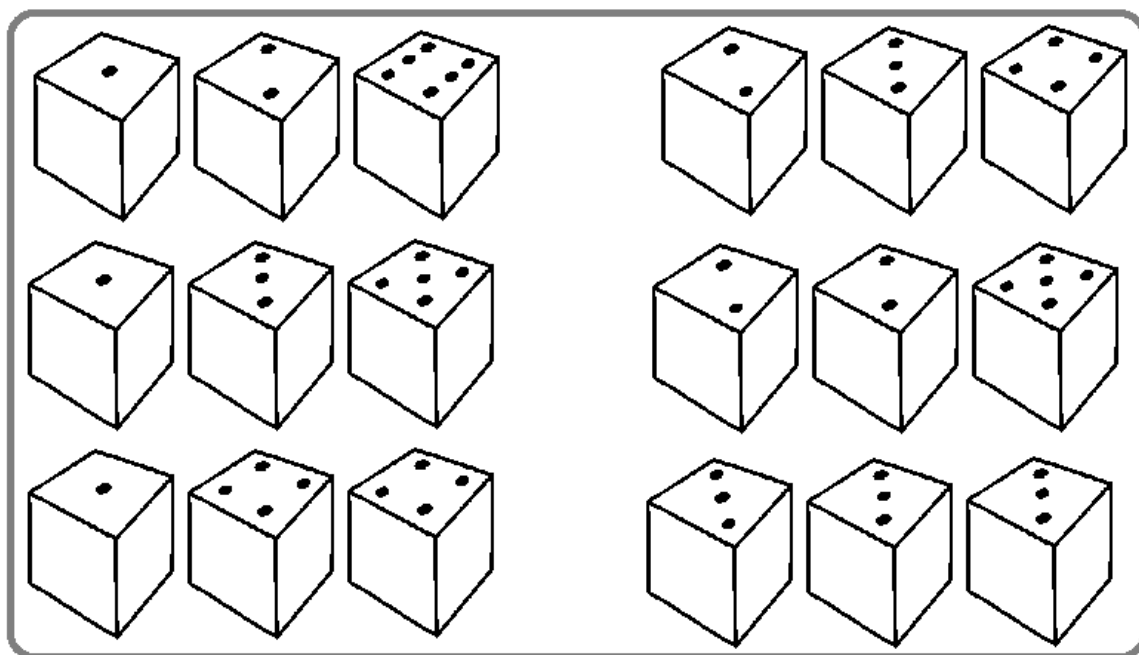
Galileu Galilei (1564 - 1642)



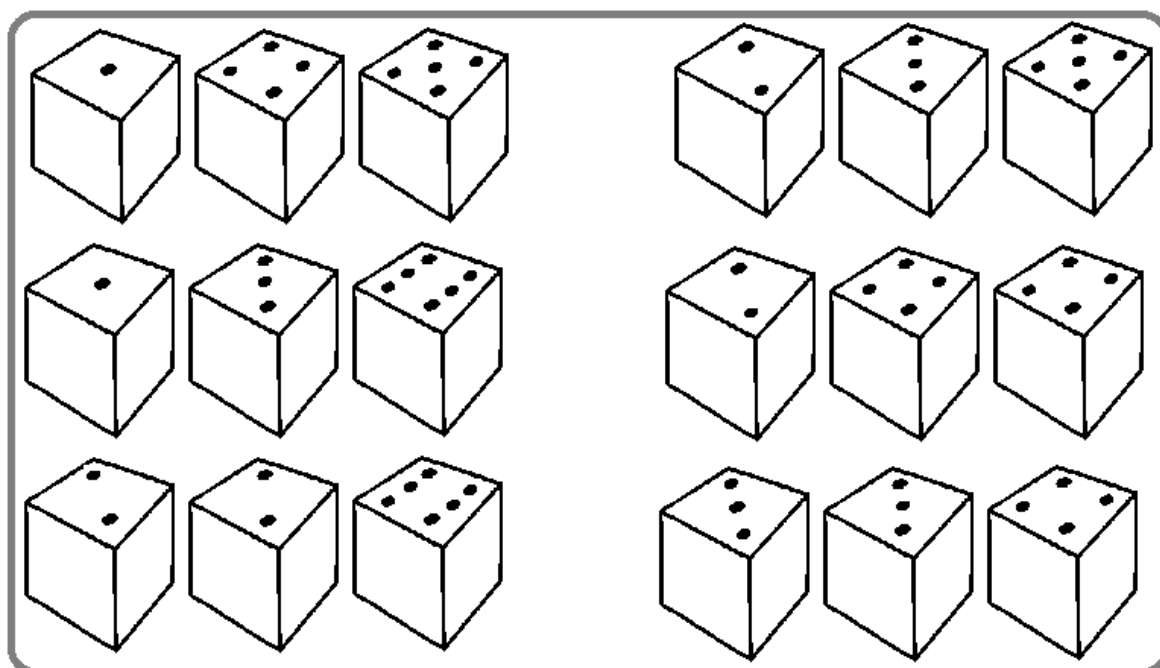
No século XVII, italianos viciados em jogos de azar tinham o hábito de fazer apostas sobre o número total de pontos obtidos no lançamento de 3 dados

somando-se as faces que ficavam voltadas para cima. Eles acreditavam que a possibilidade de obter um total de 9 pontos era a mesma possibilidade de obter um soma total de 10 pontos.

Eles acreditavam que existiam 6 possibilidades para obter nos três dados uma soma total de 9 pontos.



Eles acreditavam que existiam também 6 possibilidades para obter nos três dados uma soma total de 10 pontos.



Como estes italianos jogavam com bastante frequência, perceberam que a soma 10 aparecia com uma frequência um pouco maior que a soma 9, então solicitaram ao mestre Galileu que os ajudasse nesta aparentemente contradição.

Questão 1: Os jogadores acreditavam que:

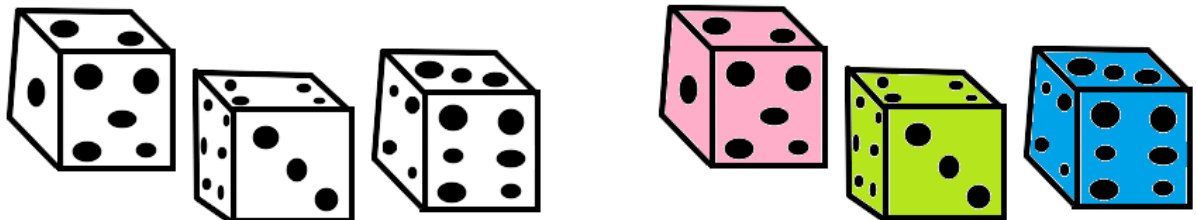
São 6 possibilidades para 9 pontos, isto é:

1+2+6 1+3+5 1+4+4 2+3+4 2+2+5 3+3+3

São 6 possibilidades para 10 pontos, isto é:

1+4+5 1+3+6 2+2+6 2+3+5 2+4+4 3+3+4

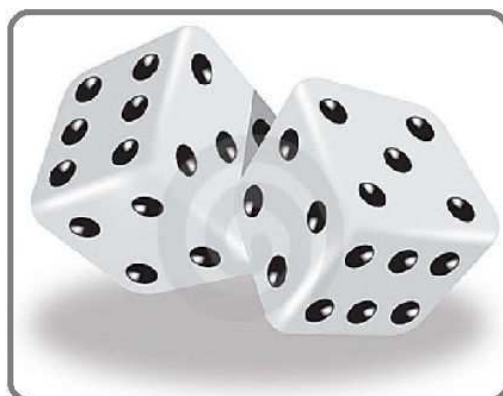
Sabendo que Galileu teve a brilhante ideia do usar dados de cores diferentes, como ele deve ter resolvido esse intrigante problema?



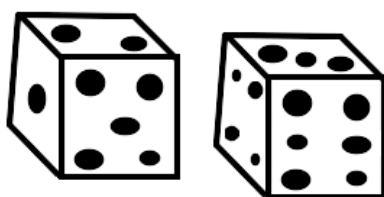
Questão 2: Os jogadores estavam certos? A quantidade de possibilidades possíveis para 9 e 10 pontos são iguais ou existe uma frequência um pouco maior para obter 10 pontos?

Questão 3: Descreva com suas palavras a genial ideia obtida por Galileu para resolver este problema.

Atividade 2 - Jogo a Soma da Sorte



Na sala de aula os alunos serão agrupados em no máximo 11 grupos. Um ficará com o número 2, outro o 3 e assim por diante até o número 12. Escolhem-se dois componentes de cada grupo, cada um deles ficará com um dado. A partir de uma ordem estipulada o primeiro componente do grupo jogará um dado e anotará o resultado. Logo após, o segundo componente do grupo jogará o segundo dado e também anotará o resultado. Finalmente, um terceiro componente somará as faces que ficaram voltadas para cima e obtém-se o total de pontos. O grupo cujo número é igual à soma faz um ponto no placar geral que estará no quadro. O jogo termina no fim de 50 lançamentos e será vencedor o grupo que obter a maior pontuação no placar geral.















Questão 1: O grupo vencedor obteve êxito apenas por ser aquele que possuía mais sorte ou não?

Questão 2: Ao se lançarem os dois dados e somando-se as faces que ficam voltadas para cima, quantas somas podem ser obtidas?

Questão 3: Existe alguma soma com maior possibilidade de sair?

Questão 4: Preencha as células em branco da tabela abaixo com a soma dos valores correspondentes aos dois dados (dado 1 e dado 2).

<div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">dado 2</div> <div style="writing-mode: vertical-rl; transform: rotate(180deg);">dado 1</div> </div>						
						
						
						
						
						
						

Questão 5: Utilizando a tabela preenchida responda:

- Quantas possibilidades diferentes de soma dos dois dados existem?
- Se você pudesse escolher um número para o seu grupo, qual você escolheria? Por quê?
- Quantas são as possibilidades de dar soma 9?
- Quantas são as possibilidades de dar soma 10?
- Qual das duas possibilidades acima, soma 9 ou soma 10, tem mais chances de acontecer?

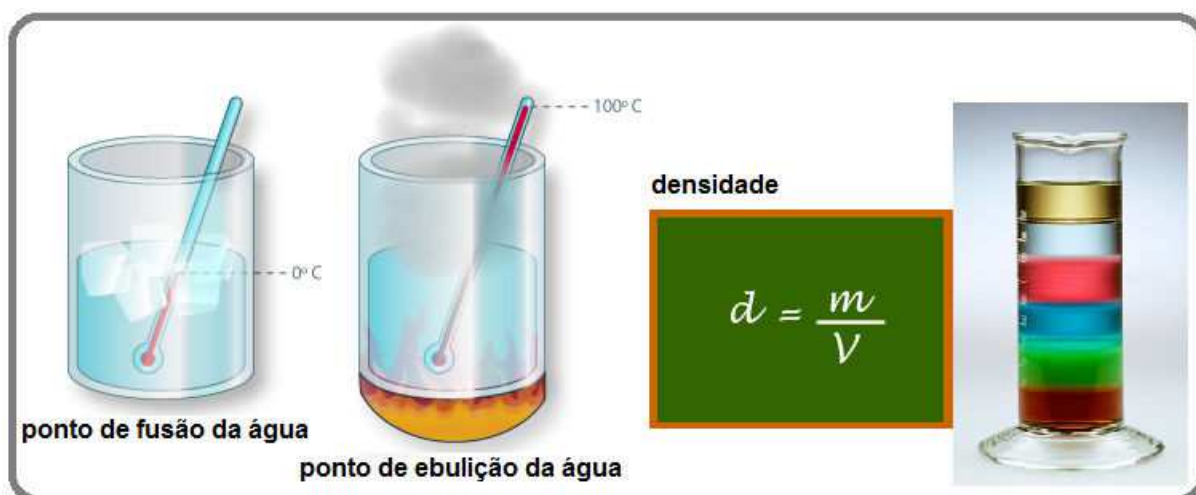
Questão 6: Descreva com suas palavras o fenômeno matemático que acabou de ser observado e solucionado.

1.3 - Definições Básicas de Probabilidade

1.3.1 - Experimento Determinístico

Um experimento determinístico é aquele que repetidas as condições iniciais do experimento pode-se prever com certeza o seu resultado final. Existem vários exemplos químicos e físicos de experimentos determinísticos. É atribuído ao grande Galileu Galilei a primazia de estabelecer fórmulas matemáticas para expressar relacionamentos entre variáveis comprovados experimentalmente. Através dessas fórmulas, conhecidas as condições iniciais, o resultado final pode ser obtido com exatidão e com uma certa facilidade.

Em Química, ao estudar-se os estados físicos da matéria, pode-se determinar a temperatura de ebulição ou de fusão da água, antes mesmo que estes fenômenos sejam observados. Na Física, sabendo-se a massa em gramas e o volume em cm^3 de um corpo é possível determinar sua densidade, pois estabeleceu-se que a densidade de um corpo é calculada através da sua massa dividida pelo seu volume. É claro que existem outras interferências na maioria dos experimentos, mas elas são consideradas desprezíveis e retiradas do modelo ou da fórmula para uma maior compreensão e facilidade de representação.



1.3.2 - Experimento Aleatório

Nas duas primeiras atividades foram lançados os tradicionais dados de 6 faces, as condições iniciais foram perfeitamente estabelecidas, entretanto não foi possível determinar o que aconteceria, tornando-se o resultado final desconhecido, o lançamento de um dado é um exemplo de experimento aleatório. Pode-se concluir que um experimento aleatório é um experimento não determinístico, então o experimento aleatório é aquele que, mesmo que seja repetido nas mesmas condições anteriores, não será possível prever o seu resultado.

O experimento aleatório pode ser aquele que não sabemos com certeza qual será o resultado final. Um para-brisa quebrando em um automóvel em movimento é um bom exemplo, ou aquele que não sabemos o seu resultado final por existirem mais de um resultado possível. Pode-se exemplificar através do sexo de um feto no momento de sua concepção.



Na Biologia, quando um bebê está prestes a nascer, o material genético de uma criança é uma combinação aleatória do material genético dos pais, então o nascimento de uma criança é um experimento aleatório com relação à cor dos olhos, o tipo de cabelo e muitas outras características físicas que serão transmitidas aleatoriamente pelos pais.

São os experimentos aleatórios a fonte de estudo para o cálculo da probabilidade de que um fenômeno ocorra.

1.3.3 - Espaço Amostral

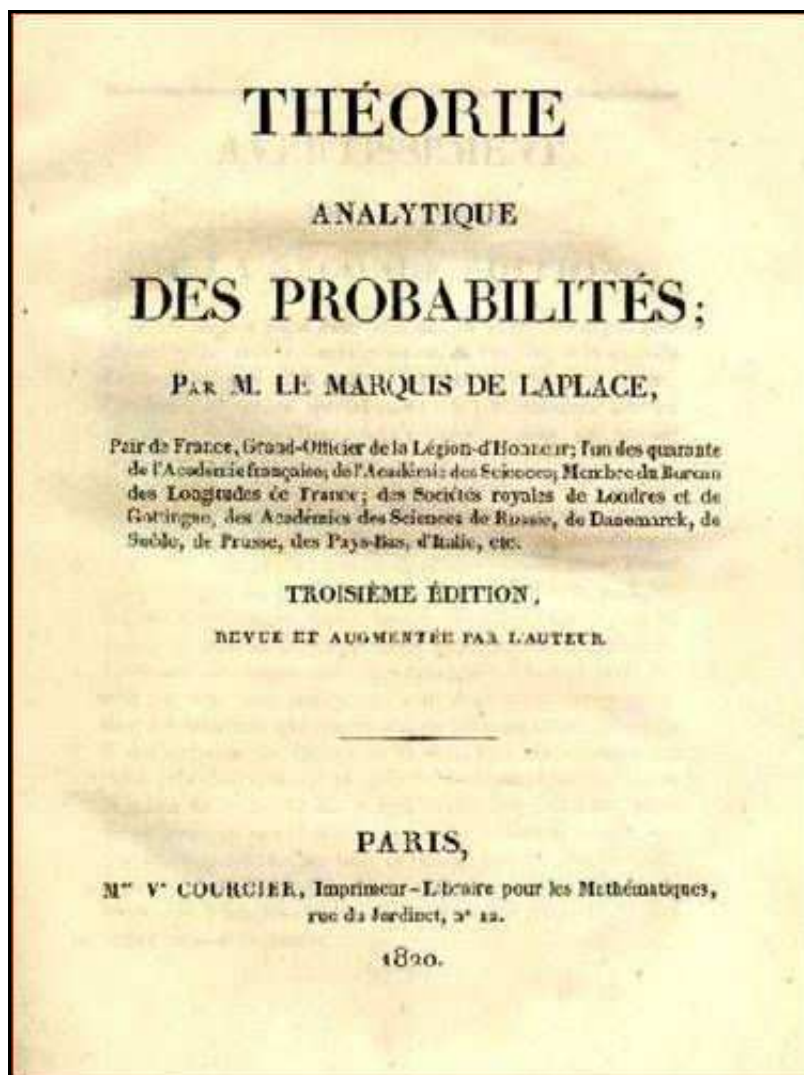
Para cada experimento aleatório, teremos um espaço amostral que será o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento aleatório em questão. Nas duas atividades anteriores constatamos que no caso do lançamento de um dado, o espaço amostral é igual ao conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, seis possíveis resultados, e constatamos também ao preencher a tabela do Jogo a Soma da Sorte que o espaço amostral é composto por 36 possibilidades. É com base no espaço amostral que consegue-se calcular a Probabilidade de que um fenômeno ocorra.

1.3.4 - Evento

Na atividade a Consulta ao Célebre Gênio Galileu Galilei ele foi indagado sobre o número total de pontos obtidos no lançamento de 3 dados. A possibilidade de obter um total de 9 pontos era a mesma possibilidade de obter um soma total de 10 pontos. Obter um total de 9 pontos é um possível evento do meu espaço amostral e obter um total de 10 pontos é um outro possível evento do meu espaço amostral. Os eventos são estudados do ponto de vista de sua "ocorrência" ou de sua "não ocorrência". Considerando o Espaço amostral com o conjunto Universo do experimento aleatório, o evento é um subconjunto do espaço amostral.

1.3.5 - Definição Clássica de Probabilidade

A "Definição Clássica de Probabilidade" foi introduzida no mundo da matemática em 1812 por Pierre Simon de Laplace em seu artigo de nome "Théorie Analytique des Probabilités" (Teoria Analítica das Probabilidades).



(*Théorie Analytique des Probabilités* - Pierre Simon de Laplace. Retirado da página <http://www.syllogismos.it/libristorici/laplaceprobabilit%C3%A0.htm> em 16 de março de 2014)

Pode-se dizer que em qualquer experimento aleatório a probabilidade de um acontecimento (evento) é a chance que ele possui de ocorrer, é uma medida para a incerteza. Então a “Definição Clássica de Probabilidade” é:

“A probabilidade de que um evento ocorra é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis à ocorrência desse evento e o número de todos os casos possíveis desse experimento aleatório (espaço amostral).”

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{Número de casos favoráveis}}{\text{Número de casos possíveis}}$$

Atividade 3 – Dados de RPG (Role-Playing Game)



Os dados mais usados de RPG (Role-Playing Game) são os cinco poliedros regulares (os Poliedros de Platão).

O primeiro é o Tetraedro Regular (uma pirâmide triangular regular) que possui 4 faces triangulares (triângulos equiláteros).



O segundo é o Hexaedro Regular (um cubo) que possui 6 faces quadrangulares (quadrados).



O terceiro é o Octaedro Regular que possui 8 faces triangulares (triângulos equiláteros).



O quarto é o Dodecaedro Regular que possui 12 faces pentagonais (pentágonos regulares).



O quinto é o Icosaedro Regular que possui 20 faces triangulares (triângulos equiláteros).



Questão 1: Por que os poliedros regulares (os Poliedros de Platão) foram escolhidos como formato para os dados de RPG?

Questão 2: Existe algum dado em que uma das faces tem maior ou menor probabilidade de sair, ou em todos os 5 dados cada uma das faces possui a mesma probabilidade de sair? Justifique sua resposta.

Questão 3: Encontre o espaço amostral para o lançamento individual de cada um dos cinco dados.

Questão 4: Escolha dois dados diferentes. Ao lançar-se os dois dados e somando-se as faces que ficam voltadas para cima, qual o seu espaço amostral?

Questão 5: Qual a probabilidade de sair um número par no lançamento de um Tetraedro Regular?

Questão 6: Qual a probabilidade de sair um número primo no lançamento de um Dodecaedro Regular?

Questão 7: Qual a probabilidade de sair um número múltiplo de 7 no lançamento de um Icosaedro Regular?

Questão 8: Descreva com suas palavras o fenômeno matemático que acabou de ser observado.

Atividade 4 – O Experimento da Moeda e do Percevejo



Vamos supor dois experimentos. O primeiro é jogar uma moeda para cima e identificar a face voltada para cima e o segundo é jogar um percevejo, usado para afixar painéis de aviso, e também identificar a face voltada para cima, ambos feitos sobre uma superfície perfeitamente lisa.

Questão 1: Encontre o espaço amostral para o lançamento da moeda.

Questão 2: Encontre o espaço amostral para o lançamento de um percevejo.

Questão 3: Qual a probabilidade de sair cara no lançamento da moeda?

Questão 4: Qual a probabilidade do percevejo cair apontado para cima em lançamento de um percevejo?

Na sala de aula os alunos serão agrupados em vários grupos. Metade dos grupos fará o experimento de lançar 100 vezes uma moeda e a segunda metade fará o experimento de lançar 100 vezes um percevejo. Cada grupo anotar os resultados obtidos.

Questão 5: Após o experimento, algum grupo desejaria mudar as respostas da questões 3 e 4? Por quê?

Questão 6: Descreva com suas palavras o fenômeno matemático que acabou de ser observado e solucionado.

1.3.6 - Espaços Amostrais Equiprováveis e não Equiprováveis

Historicamente, é na idade média, mais uma vez com Galileu Galilei, que se registrou pela primeira vez o termo equiprovável. Sabia-se que mesmo em épocas remotas a definição clássica de probabilidade era considerada muito restrita, pois não respondia a todas as questões.

Nos espaços amostrais equiprováveis temos que os eventos possuem probabilidades iguais de ocorrência. No lançamento de um dado temos que a ocorrência de cada face é a mesma, isto é $1/6$. Nesses casos, calculamos a probabilidade de um evento ocorrer relacionando o número de casos favoráveis com o número de casos possíveis.

1.3.7 - Definição Frequentista de Probabilidade

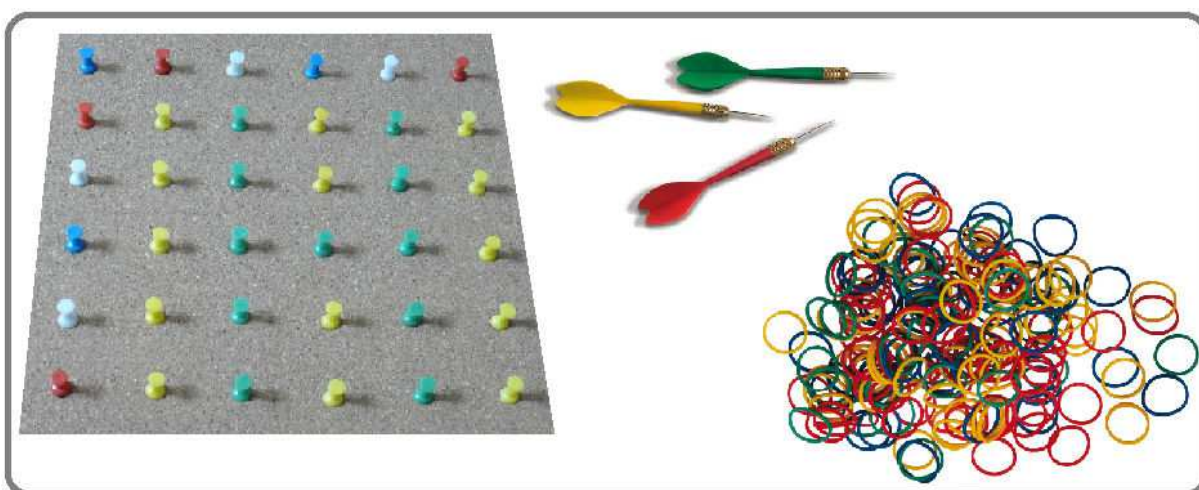
A visão frequentista de probabilidade foi iniciada pelo matemático suíço Jacques Bernoulli em sua obra “Ars Conjectandi” (1713), que aproxima Probabilidade de um evento pela sua frequência observada quando a experiência é repetida um grande número de vezes.

Nesta fabulosa obra ele aproxima a probabilidade de um evento pela sua frequência observada quando a experiência é repetida um grande número de vezes. Bernoulli provou a *Lei dos Grandes Números* que estabelece que numa série imensa de experimentos, a frequência relativa de um evento se aproxima cada vez mais da sua probabilidade, isto é, quando se repete um experimento aleatório um número muito grande de vezes é possível calcular a probabilidade de um evento.



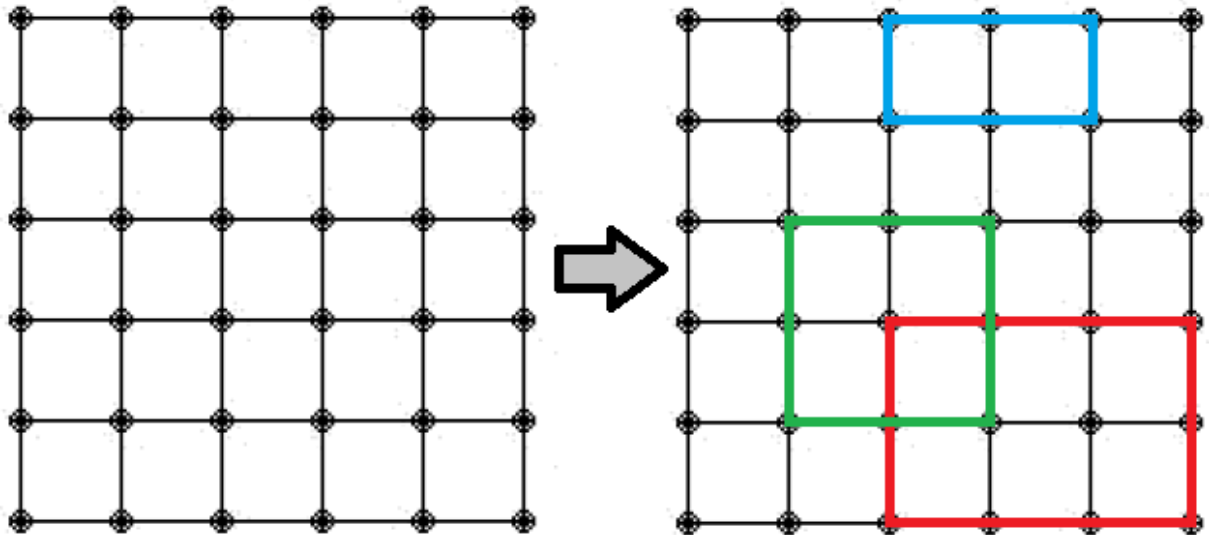
(Jacques Bernoulli (1654-1705) – Selo emitido na Suíça em 1994. Retirado da página <http://faculty.madisoncollege.edu/alehnen/EngineeringStats/derangedpresentation.htm> em 22 de março de 2014)

Atividade 5 - O Geoplano e o Jogo de Dardos



Na sala de aula os alunos serão separados em grupos de três alunos. Utilizando o Geoplano de 36 pinos e 25 quadrados menores (o menor quadrado possível representa uma unidade de área), cada grupo deve construir três polígonos convexos em cores diferentes utilizando elásticos vermelho, verde e azul. O

vermelho e o verde interceptando-se e o azul não interceptando nenhum dos outros dois, conforme exemplo abaixo.



Após a construção jogue um dardo até acertar a superfície do Geoplano, somente é válido o arremesso se o dardo ficar fixo na superfície limitada pelos pinos do Geoplano, e responda as perguntas abaixo.

Questão 1: Encontre a área total limitada pelos pinos do Geoplano.

Questão 2: Encontre as áreas limitadas pelos três polígonos criados com os elásticos.

Questão 3: Qual a área que é comum aos dois polígonos que se interceptam?

Questão 4: Jogando um dardo até acertar a superfície limitada pelos pinos do Geoplano, qual é espaço amostral?

Questão 5: Qual a probabilidade de o dardo fixar no polígono limitado pelo elástico vermelho?

Questão 6: Qual a probabilidade de o dardo fixar na área não limitada pelo polígono do elástico vermelho?

Questão 7: Qual a probabilidade de o dardo fixar no polígono limitado pelo elástico verde?

Questão 8: Qual a probabilidade de o dardo fixar na área não limitada pelo polígono do elástico verde?

Questão 9: Qual a probabilidade de o dardo fixar no polígono limitado pelo elástico azul?

Questão 10: Qual a probabilidade de o dardo fixar na área não limitada pelo polígono do elástico azul?

Questão 11: Qual a probabilidade de o dardo fixar no polígono limitado pelo elástico vermelho e no polígono limitado pelo elástico verde?

Questão 12: Qual a probabilidade de o dardo fixar no polígono limitado pelo elástico vermelho ou no polígono limitado pelo elástico verde?

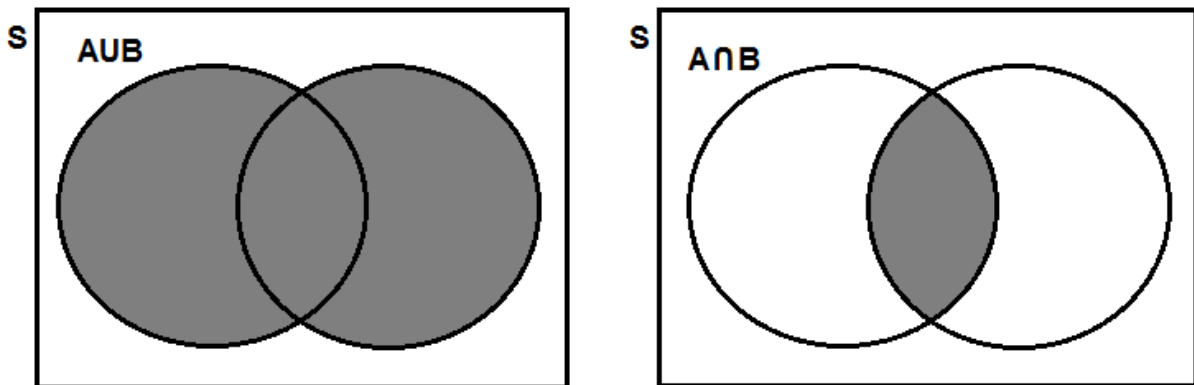
Questão 13: Qual a probabilidade de o dardo fixar no polígono limitado pelo elástico vermelho e no polígono limitado pelo elástico azul?

Questão 14: Qual a probabilidade de o dardo fixar no polígono limitado pelo elástico vermelho ou no polígono limitado pelo elástico azul?

Questão 15: Descreva com suas palavras o fenômeno matemático que acabou de ser observado e solucionado.

1.3.8 - Probabilidade da União de dois Eventos

Considere dois eventos A e B em um espaço amostral S, o número de casos favoráveis da união de dois eventos ($A \cup B$) é igual à soma do número dos casos favoráveis do evento A com o número dos casos favoráveis do evento B, menos uma vez o número dos casos favoráveis da interseção dos dois eventos ($A \cap B$) que foi contado duas vezes (uma em A e outra em B). Veja os diagramas.



Assim temos o número de casos favoráveis da união dos dois eventos ($A \cup B$):

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

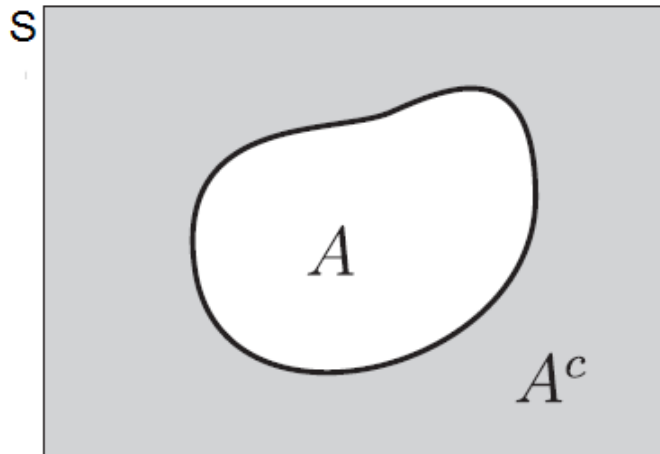
Se dividirmos os dois membros pelo espaço amostral: $n(S)$, temos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}, \text{ que é a mesma coisa que:}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

1.3.9 - Probabilidade de um Evento Complementar

Sejam A um evento de um espaço amostral S e A^c o seu evento complementar, a união de um evento com o seu evento complementar forma o espaço amostral, $A \cup A^c = S$, e a intersecção dos dois eventos é o conjunto vazio. Veja o diagrama.



Então:

$$P(A) + P(A^c) = 1$$

1.3.10 – Evento Impossível

Um evento impossível ocorre com probabilidade igual a 0, ou seja, sempre que um determinado fenômeno ocorra, esse evento nunca irá ocorrer. Um evento impossível não irá acontecer, independentemente de qualquer variação do fenômeno. Um bom exemplo é: qual a probabilidade do Natal cair no dia 15 de novembro? É claro que nunca isto vai acontecer, a probabilidade é igual a 0, isto é, 0% de chance de ocorrer.

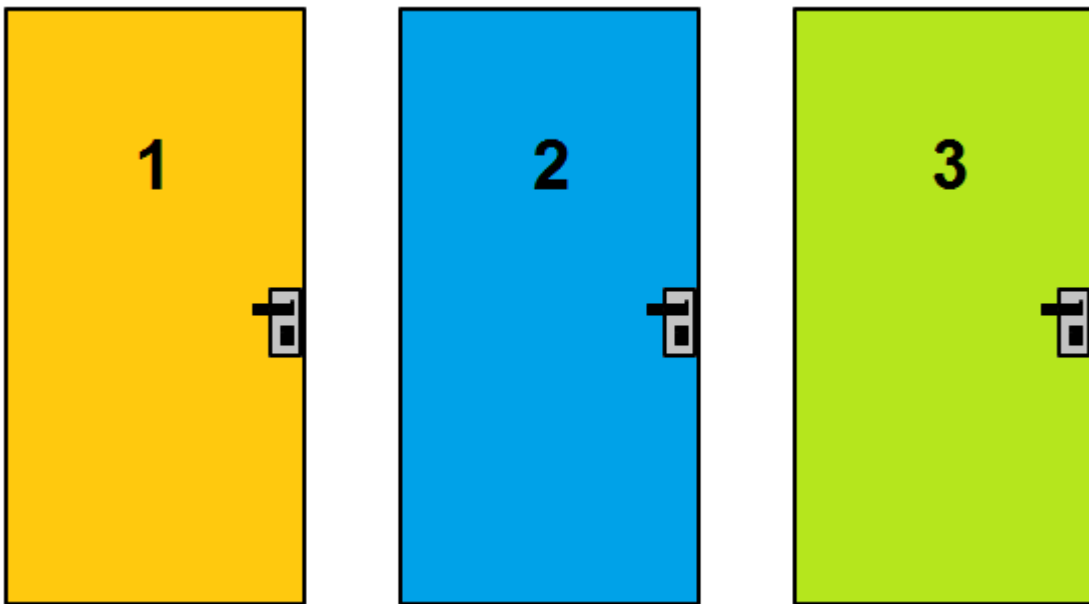
1.3.11 – Evento Certo

Um evento certo ocorre com probabilidade igual a 1, ou seja, sempre que um determinado fenômeno ocorra esse evento sempre irá ocorrer. Um evento certo irá acontecer, independentemente de qualquer variação do fenômeno, um bom exemplo é: qual a probabilidade do Natal cair no dia 25 de dezembro? É claro que o natal vai cair no dia 25 de dezembro, a probabilidade é igual a 1, isto é, 100% de chance de ocorrer.

Pode-se concluir, então, que a probabilidade de um evento ocorrer pode variar do evento impossível ao evento certo, isto é de zero a um.

$$0 \leq \textit{probabilidade} \leq 1$$

Atividade 6 - O Enigma de Monty Hall (Jogo das três portas)



Este enigma não é tão simples quanto parece, teve grande repercussão nos anos 70, nos Estados Unidos, como o “*Enigma de Monty Hall*”, em homenagem a um carismático apresentador de um programa de televisão cujo nome era *Let's Make a Deal?* (Vamos fazer um acordo?).

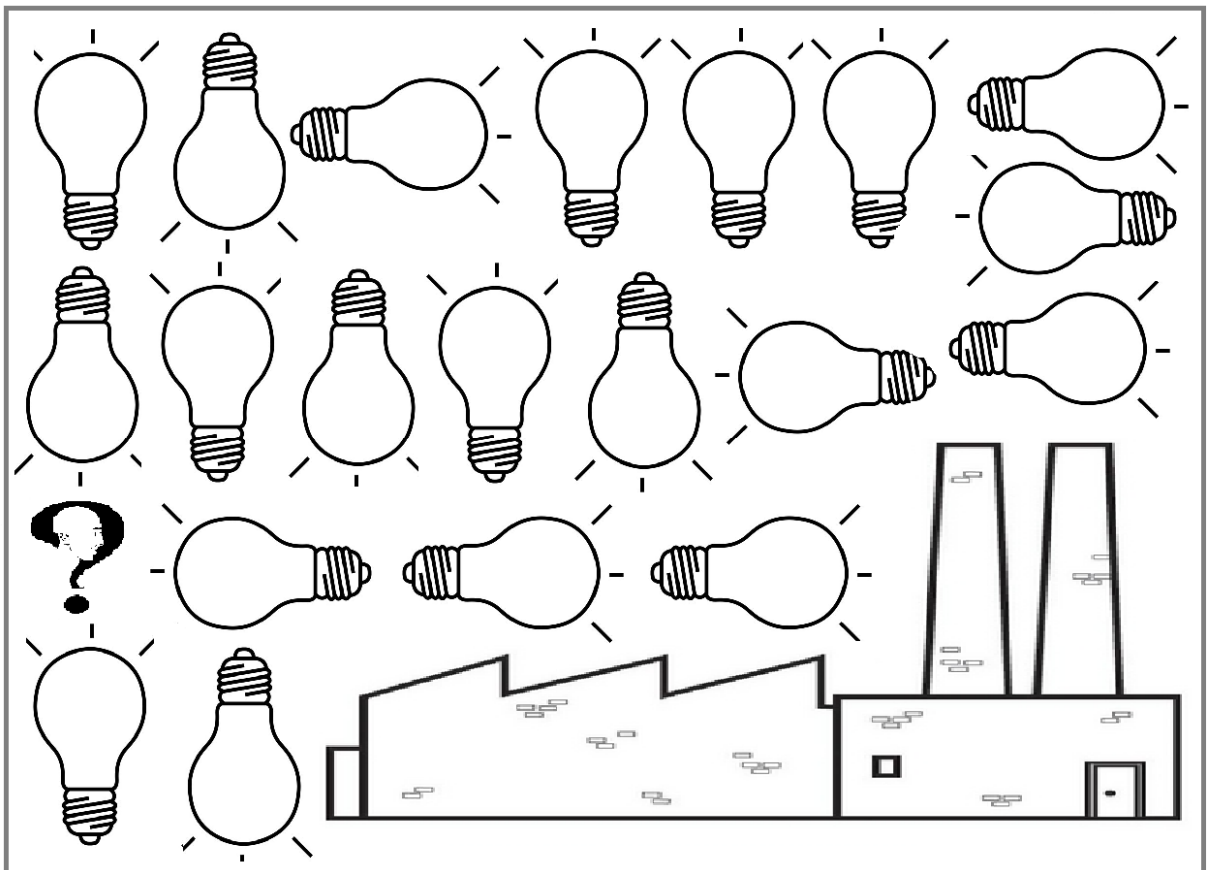
O apresentador faz um desafio que tem-se a impressão de ser muito simples. É um jogo muito divertido; existem três portas e atrás de apenas uma delas existe um grande prêmio, enquanto que atrás das outras duas portas não há nada ou um prêmio simbólico. O jogador terá que ter a sorte de escolher a porta premiada. O jogador faz a sua escolha, o apresentador, que sabe onde está escondido o prêmio, abre uma das outras duas que não foi escolhida, que ele já sabe que não está premiada e ele dá a opção ao jogador de manter a escolha ou trocar de porta pela terceira que ainda não foi aberta. O enigma deste jogo desafiador consiste em saber se a troca de porta é mais vantajosa ou se a troca é indiferente no que se diz respeito à probabilidade de ganhar o prêmio.

Questão 1: A troca da porta escolhida é a mais vantajosa ou não? Justifique sua resposta.

Questão 2: Calcule a probabilidade do jogador ganhar o prêmio se trocar de porta?

Questão 3: Calcule a probabilidade do jogador ganhar o prêmio se não trocar de porta?

Atividade 7 – A Fábrica de Lâmpadas



Uma fábrica de lâmpadas possui um setor de controle de qualidade muito eficiente, este setor separou um lote com 100 lâmpadas para uma análise criteriosa. Após os testes técnicos foi constatado que o lote possuía 20 lâmpadas defeituosas e 80 lâmpadas em perfeitas condições. Escolhendo-se duas lâmpadas ao acaso, uma após a outra, pergunta-se:

Questão 1: Qual a probabilidade de a primeira lâmpada ser defeituosa?

Questão 2: Qual a probabilidade de a segunda lâmpada ser defeituosa?

Questão 3: Qual a probabilidade de a primeira lâmpada ser perfeita?

Questão 4: Qual a probabilidade de a segunda lâmpada ser perfeita?

Questão 5: Qual a probabilidade de ambas serem defeituosas?

Questão 6: Qual a probabilidade de ambas serem perfeitas?

Questão 7: Qual a probabilidade de a primeira ser defeituosa e a segunda perfeita?

Questão 8: Qual a probabilidade de a primeira ser perfeita e a segunda defeituosa?

Questão 9: Qual a probabilidade de que pelo menos uma delas seja perfeita?

Questão 10: Qual a probabilidade de que pelo menos uma delas seja defeituosa?

1.3.12 – Probabilidade Condicional

Em muitos casos quando realiza-se um experimento aleatório tem-se algumas informações sobre a ocorrência de um evento. Lançar mão desta informação é imprescindível e importante para o cálculo correto da probabilidade. Se for escolhido aleatoriamente um aluno da Escola de Ensino Fundamental e Médio e fosse calculado qual a probabilidade de ele estar cursando a disciplina Espanhol, inicialmente o cálculo seria: número de alunos matriculados em Espanhol, casos favoráveis) dividido pelo número de alunos matriculados na Escola (casos possíveis). Entretanto, se for dada a informação de que a disciplina Espanhol é oferecida nesta Escola apenas para alunos do Ensino Médio, sabe-se que a probabilidade de ele estar cursando Espanhol é muito menor. Tem-se um caso de Probabilidade Condicional.

Então, Probabilidade condicional é um segundo evento de um espaço amostral que ocorre em um evento depois que já tenha ocorrido o primeiro. Para melhor compreensão do que seja a probabilidade condicional; pode-se dizer que a probabilidade condicional irá formar um novo espaço amostral, pois com a ocorrência do primeiro evento tem-se um novo espaço amostral para que ocorra o segundo evento.

Para melhor compreensão deste importante conceito, faremos uso de uma ferramenta que definiremos a seguir.

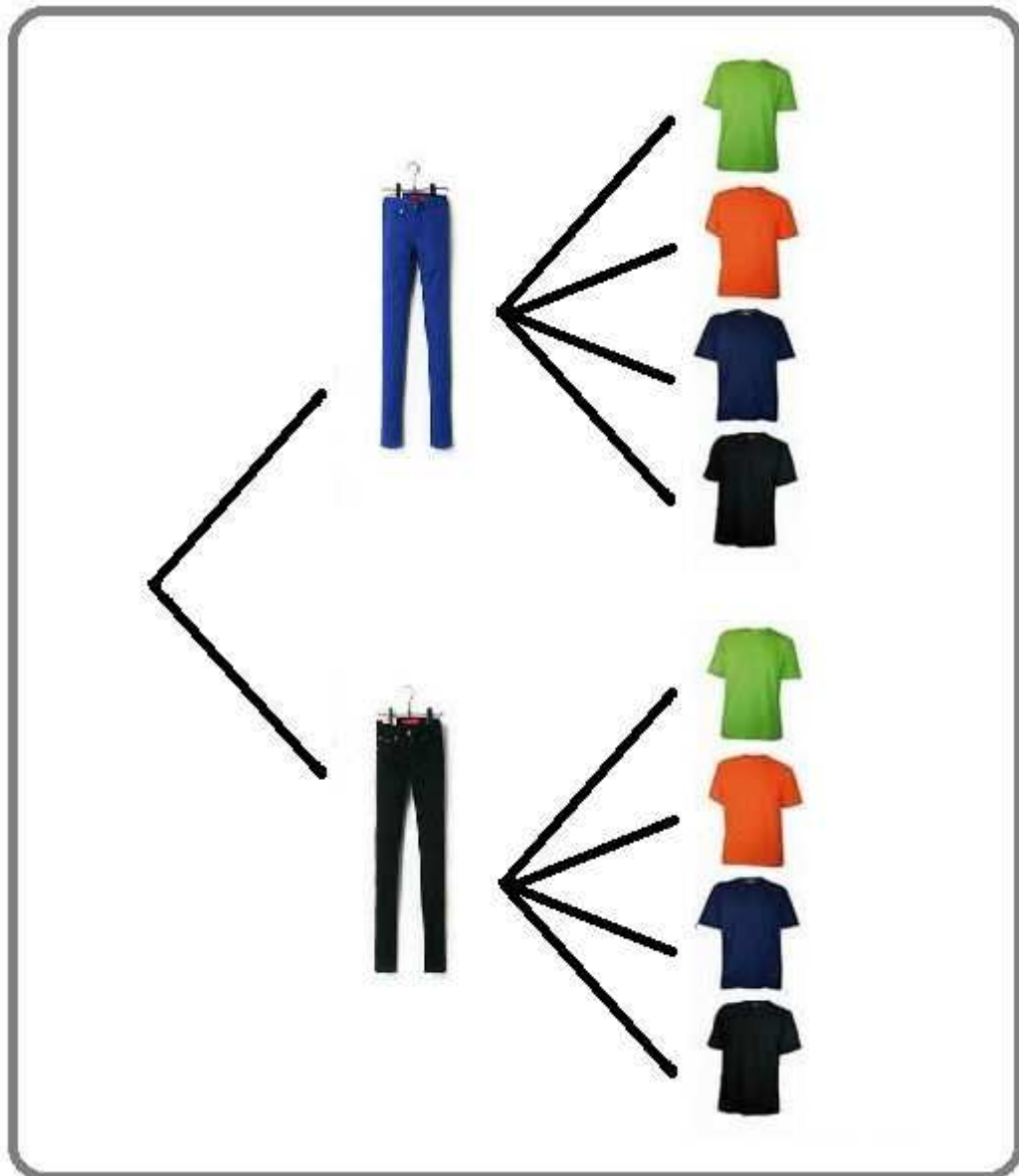
1.3.13 – Árvore de Probabilidades e Teorema da Multiplicação

A árvore de probabilidades é uma excelente ferramenta para aplicação em problemas de probabilidade, principalmente de probabilidade condicional; a árvore é uma maneira inteligente de representar a divisão dos eventos.

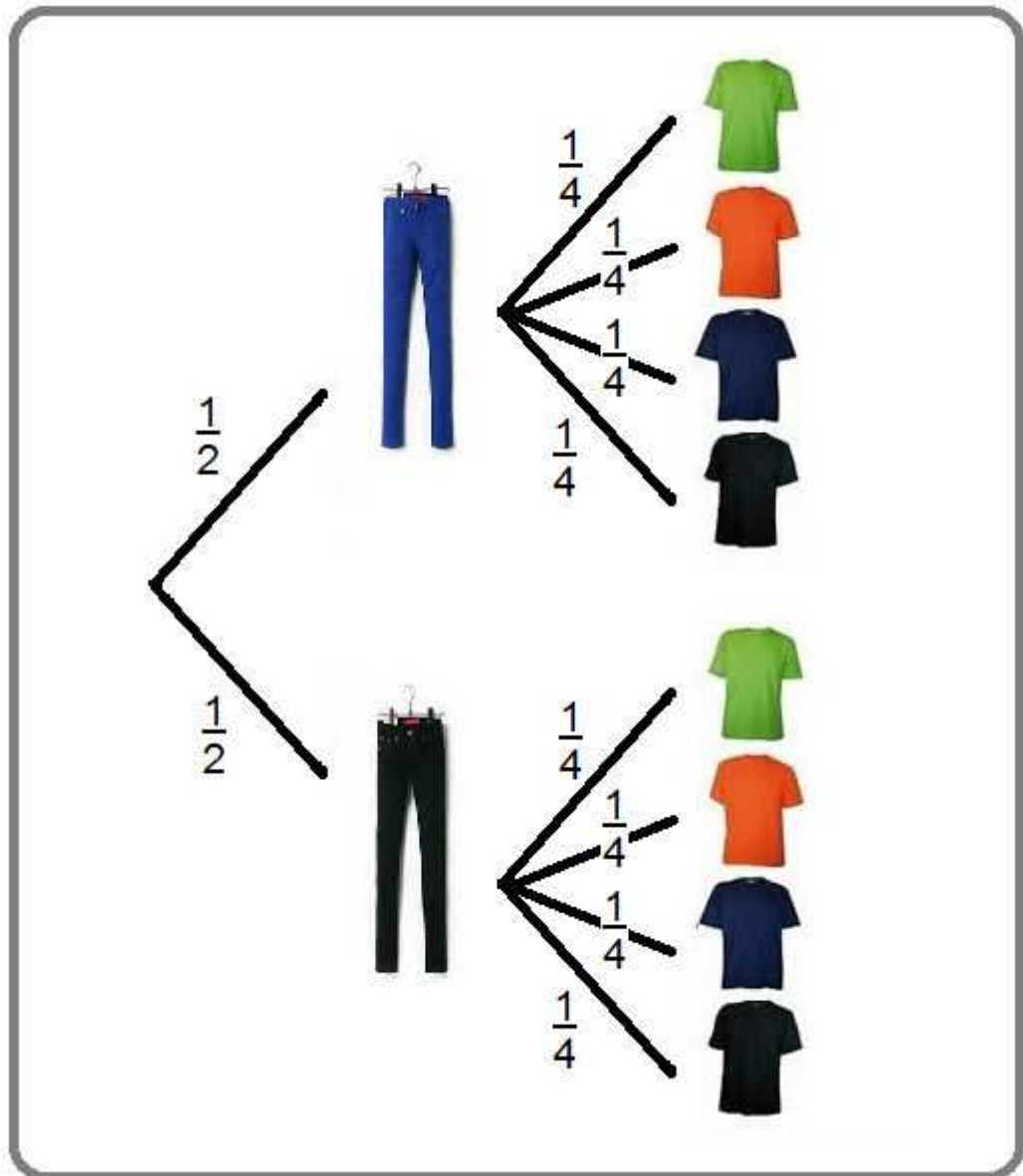
Suponha que um professor de matemática se apresenta para ministrar uma palestra sobre probabilidade vestindo calça e blusas de cores diferentes. Ele possui as peças nas seguintes cores:



As possibilidades de maneiras, espaço amostral, que ele pode vestir-se são facilmente exploradas através da árvore de probabilidades, veja:



No diagrama da árvore de probabilidades colocamos as probabilidades condicionais da extremidade de cada galho na certeza da origem do galho. Para determinar uma probabilidade usando esse diagrama, basta percorrer todos os caminhos que levam ao evento cuja probabilidade é procurada, multiplicando as probabilidades em cada caminho e somando os produtos ao longo dos vários caminhos.



A probabilidade de o professor de matemática usar a calça azul com a blusa laranja possui um caminho. Percorrendo este caminho que leva ao evento cuja probabilidade é procurada, multiplicando as probabilidades, tem-se:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

A probabilidade de o professor de matemática usar a blusa laranja possui dois caminhos. Percorrendo estes caminhos que levam ao evento cuja probabilidade é procurada, multiplicando as probabilidades em cada caminho e somando os produtos, tem-se:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

Atividade 8 – Desvendar o Problema de Paccioli

Agora, o objetivo é desvendar o problema proposto por Paccioli, conhecido historicamente como o problema dos pontos, que consiste em determinar qual deve ser a divisão das apostas quando um jogo é interrompido antes do seu final. Suponha que uma partida entre dois jogadores que é vencida pelo primeiro que fizer 6 pontos. Na hipótese de ambos jogadores terem a mesma habilidade no jogo, como se deve dividir o bolo se a partida for interrompida quando um dos jogadores tiver 5 pontos e outro 3 pontos?



(Luca Paccioli (1445 - 1514). Retirado da página

<http://123matematic.blogspot.com.br/> em 16 de março de 2014)

Já foi mencionado anteriormente que vários matemáticos através dos tempos tentaram resolver este problema. O próprio Paccioli deu uma solução, mas

equivocada. Pascal e Fermat trocaram 7 cartas para desvendá-lo; foi este problema que deu início à teoria da probabilidade.

A solução sugerida é dividir o bolo de apostas proporcionalmente às chances que cada jogador tem de vencer o jogo. O grande problema está em como conseguir calcular essas chances.

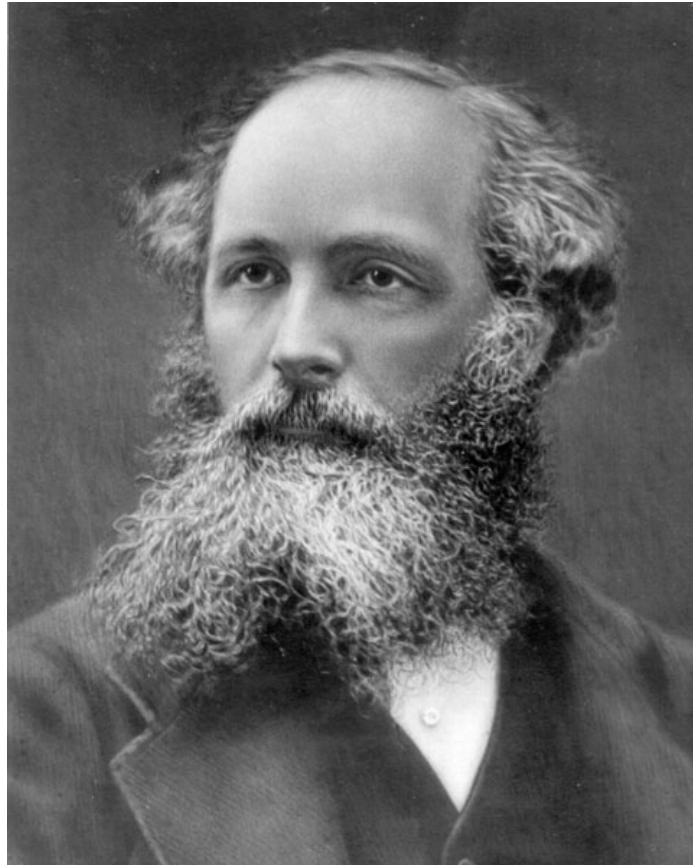
Após diversas descobertas a respeito da probabilidade e vários estudos feitos, em dupla, assim como Pascal e Fermat, tente desvendar o problema dos pontos.

1.4 - A Probabilidade e a Interdisciplinaridade

1.4.1 – A Interdisciplinaridade

A teoria da probabilidade, que se iniciou com os jogos de azar, atualmente é a área da matemática com mais aplicações em outras áreas do conhecimento, sejam elas ciências exatas ou ciências sociais, entre muitas outras ciências.

Na Física, inicialmente, o conceito de probabilidade era recebido apenas como um conceito matemático, mas a partir do século XVIII os instrumentos de medida desenvolveram-se, o que fez com que se multiplicassem as observações quantitativas em laboratório e em campo. Então os físicos não se contentavam mais apenas em ter conseguido medir, queriam a melhor medida possível; eles queriam a resposta do *“Problema fundamental da teoria dos erros”*, pois medir é um ato de comparar que envolve erros de vários tipos (dos instrumentos, do operador, do processo de medida). Este problema foi exaustivamente aprofundado por Laplace, Gauss e Legendre. Até metade do século XIX os físicos viam a teoria dos erros como a única utilidade das probabilidades, mas o físico britânico James Clerk Maxwell (1831 - 1879) derrubou este preconceito. Mais tarde as ideias de Maxwell foram tornadas práticas e mais gerais com o norte-americano Josiah Willard Gibbs (1839 - 1903). Em 1902, com seu artigo *“Principles of statistical mechanics”*. Esta obra deu uma maturidade à abordagem probabilística dos fenômenos físicos.



(James Clerk Maxwell (1831 - 1879). Retirado da página

<http://www.findagrave.com/cgi-bin/fq.cgi?page=gr&GRid=16871396>

em 22 de março de 2014)

Sem a teoria da probabilidade não existiria Física Quântica. A teoria da probabilidade era útil para estender o poder da ciência clássica e equipá-la com instrumentos capazes de uma análise muito mais ampla do comportamento da matéria e da energia, o estudo das reações químicas, dos processos termodinâmicos, reação eletromagnética. A mecânica quântica não prevê um resultado único definido para cada observação; existe a aleatoriedade, prevê um número de resultados diferentes possíveis e informa-nos sobre a probabilidade de cada um.

Na engenharia, a probabilidade têm grande aplicabilidade no controle de qualidade da produção industrial. A difusão dos métodos probabilísticos na engenharia se iniciou durante a Segunda Guerra Mundial, os americanos e os ingleses desenvolveram um grande programa, procurando disseminar a prática do controle de qualidade probabilístico na produção militar. Ao fim da guerra, foram

incluídos, rapidamente, os Conceitos de Probabilidade em todos os cursos de engenharia da América, da Inglaterra e de outros países também.

As Ciências Atuariais, profissão que exige capacidade de concentração para lidar com altos valores, é responsável por dimensionar valores de seguros, planos de previdência, planos de saúde, títulos de capitalização, entre outros. O atuarista é um especialista em riscos. Cabe a ele avaliar as possibilidades de danos e perdas da instituição seguradora ou previdenciária e determinar o valor das prestações do seguro e dos prêmios a serem pagos. O atuarista utiliza conhecimentos probabilísticos matemáticos e estatísticos, estima a incidência de doenças, mortes, acidentes de trânsito ou de trabalho e fenômenos naturais.

1.4.2 - Probabilidade e Biologia

Na biologia destaca-se o padre austríaco, Gregor Johann Mendel (1822 - 1884), que é considerado o pai da genética. Ele iniciou no século XIX um estudo sobre hereditariedade, utilizando experiências sobre cruzamentos de ervilhas de diferentes características.



(Gregor Mendel (1822-1884) – Selo emitido na Áustria em 1984. Retirado da página <https://library.uthsc.edu/exhibits/stamps/physicians.htm> 22 de março de 2014)

As ervilhas escolhidas para as experiências de Mendel são de fácil cultivo, produzem muitas sementes, apresentam características bem marcantes e contrastantes. A cor das sementes pode ser amarela ou verde. Sua textura pode ser lisa ou rugosa, sua flor é púrpura ou branca e sua vagem pode ser verde ou amarela. Suas flores são bissexuais e reproduzem-se predominantemente por autofecundação possuindo, desta forma, linhagens puras.

Mendel desenvolveu o seu estudo e demonstrou-o através do livro “A Matemática da Hereditariedade”. Esta obra foi considerada como uma das primeiras aplicações importantes da Teoria das Probabilidades à Biologia. Através da sua experiência, Mendel concluiu que os seres vivos possuem duas potencialidades hereditárias que são herdadas dos pais através dos gametas. Cada gameta transporta para cada descendente e para cada carácter uma informação hereditária a qual Mendel chamou fator hereditário (atualmente este fator é chamado de gene). No ano de 1865, formula e apresenta em dois encontros da Sociedade de História Natural da cidade de Brno as leis da hereditariedade, hoje chamadas “*Leis de Mendel*”, que regem a transmissão dos caracteres hereditários.

1.4.2.1 - Primeira Lei de Mendel (monoibridismo)

Mendel achava que existia algum fator responsável pela característica da semente da ervilha, então ele resolveu cruzar as plantas puras usando a parte masculina de uma planta com sementes amarelas e a feminina com as de sementes verdes. A primeira geração de ervilhas foi chamada de geração parental ou geração P; a próxima geração foi chamada de geração híbrida ou geração F1. Após a autofecundação, houve a segunda geração ou geração F2.

Na geração F1, todas as ervilhas apresentavam as sementes amarelas, sendo chamadas por Mendel de híbridos. Após esse cruzamento, Mendel realizou a autofecundação de uma dessas sementes híbridas e o resultado encontrado na segunda geração levou Mendel a concluir que o fator para amarelo seria o dominante, e o fator para verde, recessivo.

1.4.2.2 - Heterozigoto e Homozigoto

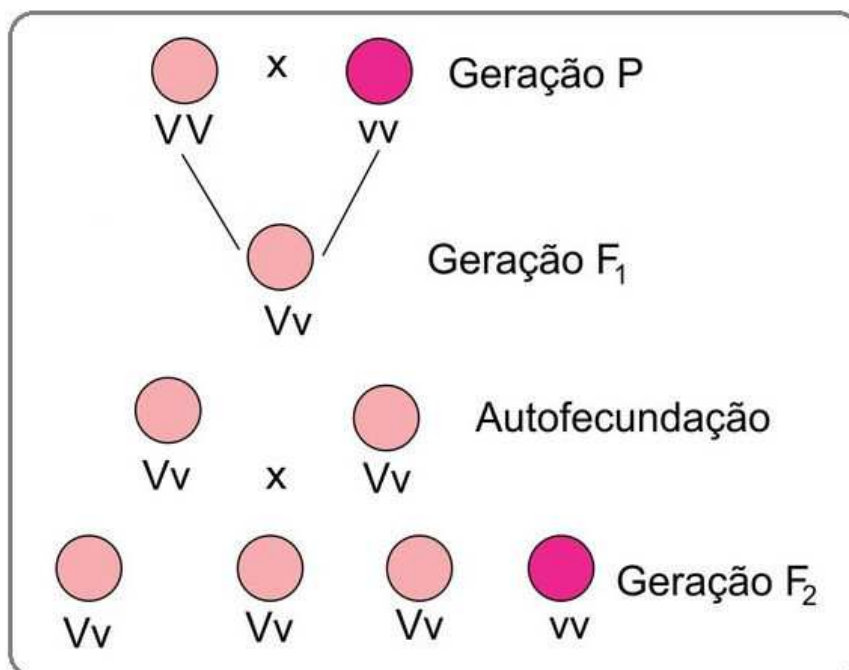
Um gene é definido como uma unidade de hereditariedade que é passada de um ser para a sua descendência. Cada gene é composto de dois alelos que são representados por letras; quando os dois alelos de um gene são iguais se fala de um gene homozigoto e quando eles são diferentes são chamados heterozigotos. Uma planta pode ser alta (AA) homozigota ou alta (Aa) heterozigota, que permite afirmar que o alelo "A" é o alelo dominante no alelo "a" é o recessivo, e que o alelo (A) é fenotipicamente alto. Se tem-se uma planta fenotipicamente baixa necessariamente seu genótipo é (aa). Quando o gene é "AA" se chama gene dominante homozigoto "aa", gene recessivo homozigoto, finalmente o "Aa" é considerado heterozigoto.

1.4.2.3 - Genótipo e Fenótipo

Genótipo é o conjunto de genes e o Fenótipo é o conjunto de características morfológicas, fisiológicas e comportamentais de um indivíduo. Veja a ilustração.

Genótipo	Fenótipo
AA	Pigmentação
Aa	Pigmentação
aa	Ausência de pigmentação

A primeira geração de ervilhas é a geração parental (geração P), a próxima geração é a geração híbrida (geração F1). Após a autofecundação tem-se a segunda geração (geração F2). Veja a primeira Lei de Mendel no quadro elucidativo abaixo.



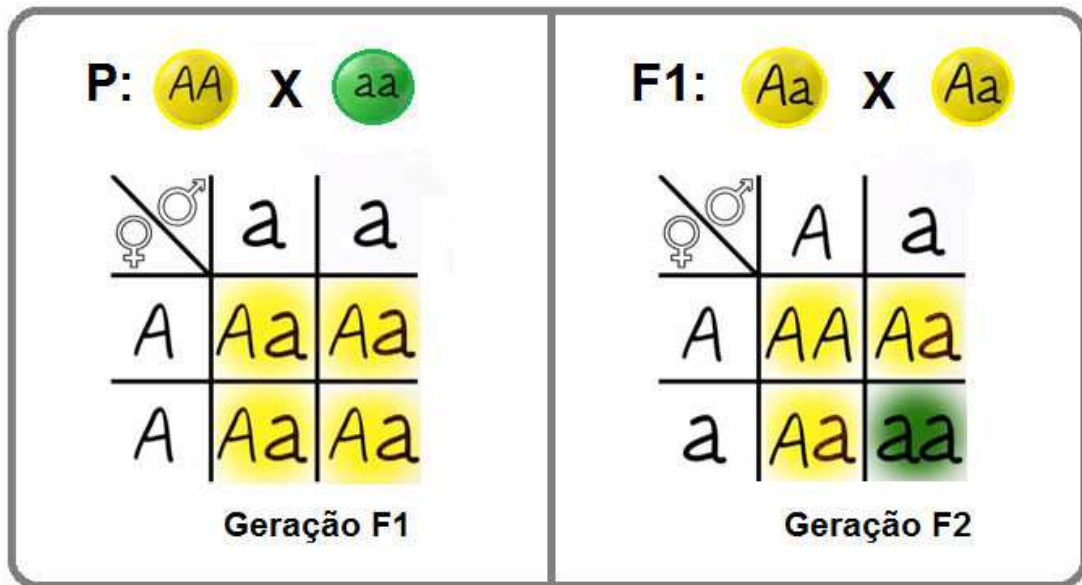
1.4.2.4 - Segunda Lei de Mendel (Diibridismo)

Após realizar vários testes de monoibridismo, Mendel resolveu fazer experiências com dois tipos de características. Mendel cruzou as sementes de ervilhas amarelas e lisas (dominante) com sementes verdes e rugosas (recessivo). A geração F₁ era composta apenas por sementes amarelas e lisas, mas era o esperado já que as sementes eram puras e com características dominantes. Já na geração F₂, foi observada a presença dos quatro tipos de características: 9/16 amarela lisa; 3/16 amarela rugosa; 3/16 verde lisa e 1/16 verde rugosa. A partir disso, Mendel concluiu que a herança da cor é independente da superfície da semente. Também se concluiu que as sementes puras lisas e amarelas possuem genótipo VV (amarelo) RR (liso), ou seja, VVRR (dominante); já as puras verdes e rugosas possuem genótipo vvrr (recessivo).

Atividade 9 – Genética e Probabilidade (Quadro de Punnett)

Criado pelo geneticista inglês Reginald Punnett (1875 - 1967), o quadro de Punnett é a maneira mais simples de analisar os problemas de genética que envolvem Monoibridismo e Diibridismo. Com ele pode-se visualizar os gametas de cada genitor e os possíveis genótipos e fenótipos resultantes de um cruzamento.

Veja como ficaria a Primeira Lei de Mendel através do Quadro Punnett para o fenótipo cor da semente de ervilha, amarelo (AA) e verde (aa).



Discuta com seus colegas e entenda como é construído e preenchido o Quadro de Punnett, após suas conclusões responda as perguntas abaixo.

Questão 1: Na geração F1, qual é a probabilidade de a ervilha apresentar as sementes verdes?

Questão 2: Na geração F1, qual é a probabilidade de a ervilha apresentar as sementes amarelas?

Questão 3: Na geração F2, qual é a probabilidade de a ervilha apresentar as sementes verdes?

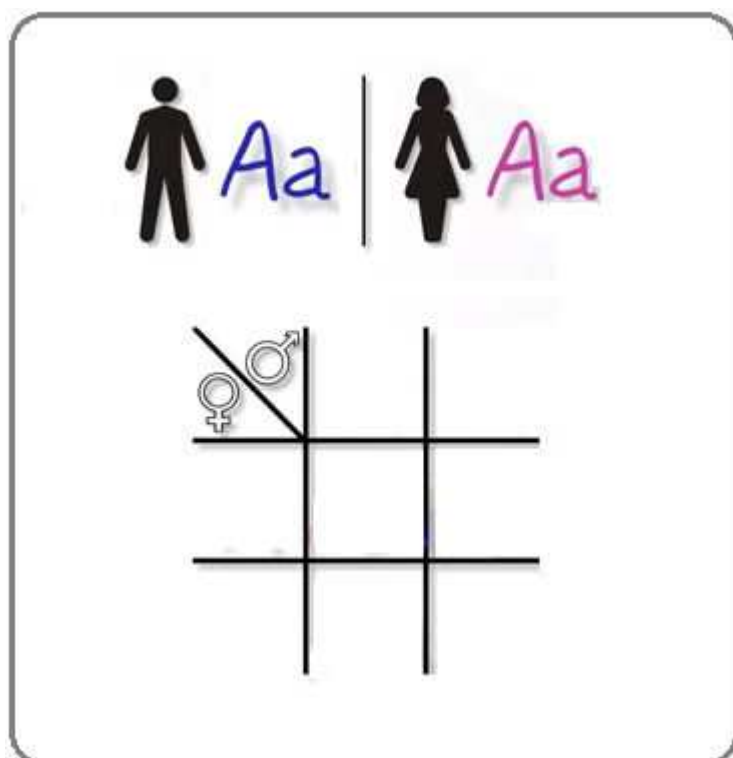
Questão 4: Na geração F2, qual é a probabilidade de a ervilha apresentar as sementes amarelas?

Questão 5: Por que Mendel chegou à conclusão de que o fator para amarelo seria o dominante e o fator para verde recessivo?

Atividade 10 – Cálculo de Probabilidade na Genética

Um casal pretende ter filhos. Para o fenótipo cor dos olhos o homem e a mulher possuem genótipo heterozigoto Aa. Sabe-se que o alelo "A" é o alelo dominante, olhos castanhos, e o alelo "a" é o recessivo, olhos azuis.

Preencha o Quadro de Punnett abaixo, analise-o e responda às perguntas abaixo.



Questão 1: Qual é a probabilidade de nascer um filho de olhos azuis?

Questão 2: Qual é a probabilidade de nascer um filho de olhos castanhos?

Questão 3: Qual é a probabilidade de nascer um filho de olhos azuis e do sexo feminino?

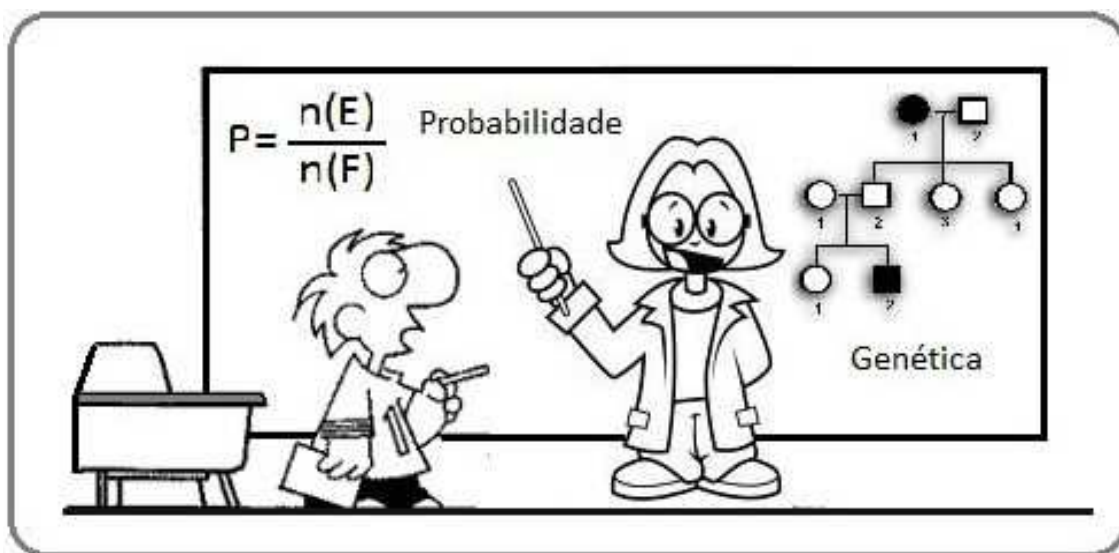
Questão 4: Qual é a probabilidade de nascer um filho de olhos castanhos e do sexo masculino?

Questão 5: Qual é a probabilidade de nascer um filho de olhos azuis ou do sexo feminino?

Questão 6: Qual é a probabilidade de nascer um filho de olhos castanhos **ou** do sexo masculino?

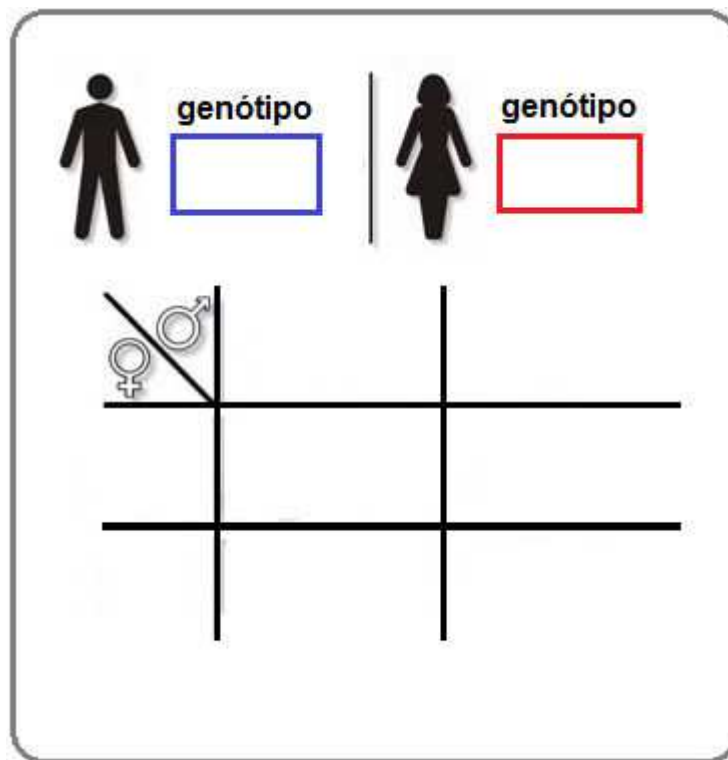
Atividade 11 - O Professor de Matemática e a Professora de Biologia

O professor Luís de Matemática e a professora Ana de Biologia são casados, ambos trabalham em uma escola do município do Rio de Janeiro. Neste ano eles tiveram a brilhante ideia de criar atividades interdisciplinares; claro que Probabilidade e Genética estavam em seus planos.



O professor Luís tem sardas e olhos azuis, sendo homozigoto para ambas as características. Sua esposa Ana não possui sardas e seus olhos são castanhos, sendo heterozigota para a última característica. Sabendo que o gene que condiciona as sardas é dominante e que não se encontra no mesmo cromossomo que contém o gene para cor de olhos.

Represente os genótipos, preencha o Quadro de Punnett e responda as perguntas.



Questão 1: Qual a probabilidade de o casal gerar um filho com sardas e olhos azuis?

Questão 2: Qual a probabilidade de o casal gerar um filho com sardas e olhos castanhos?

Questão 3: Qual a probabilidade de o casal gerar um filho sem sardas e olhos azuis?

Questão 4: Qual a probabilidade de o casal gerar um filho sem sardas e olhos castanhos?

Atividade 12 – A Aposta do Professor de Matemática

Um professor de Matemática em uma de suas aulas de probabilidade, para despertar a curiosidade dos seus alunos, propôs uma inesperada aposta. Sabendo que sua turma possuía 50 alunos, ele apostou o seu carro, afirmando que pelo menos dois alunos da turma fariam aniversário no mesmo dia. Com o auxílio da calculadora responda às perguntas abaixo.



Questão 1: Intuitivamente, sem fazer cálculos, você acredita que o professor perderá o seu carro nesta aposta?

Questão 2: Qual é a probabilidade de haver pelo menos dois alunos da turma que façam aniversário no mesmo dia?

Questão 3: Preencha a tabela abaixo com a probabilidade de haver pelo menos dois alunos da turma que façam aniversário no mesmo dia, se a turma possuíse 5, 10, 15, 20, 23, 25, 30, 35, 40, 45 ou 50 alunos.

x	Probabilidade
5	
10	
15	
20	
23	
25	
30	
40	
45	
50	

Questão 5: Descreva com suas palavras o fenômeno matemático que acabou de ser observado.

1.5 – Exercícios Propostos

Exercício 1 (UERJ – 2013)

Em uma escola, 20% dos alunos de uma turma marcaram a opção correta de uma questão de múltipla escolha que possui quatro alternativas de resposta. Os demais marcaram uma das quatro opções ao acaso. Verificando-se as respostas de dois alunos quaisquer dessa turma, a probabilidade de que exatamente um tenha marcado a opção correta equivale a:

- a) 0,48
- b) 0,40
- c) 0,36
- d) 0,25

Exercício 2 (UERJ – 2010)

Na espécie humana, a calvície - uma herança influenciada pelo sexo - é determinada por um alelo dominante nos homens (C), mas recessivo nas mulheres (c). Considere um casal, ambos heterozigotos para a calvície, que tenha um filho e uma filha. Com base apenas nos genótipos do casal, a probabilidade de que seus dois filhos sejam calvos é de:

- a) 3/16
- b) 3/4
- c) 1/8
- d) 1/2

Exercício 3 (UERJ – 2009)

Um pesquisador possui em seu laboratório um recipiente contendo 100 exemplares de *Aedes aegypti*, cada um deles contaminado com apenas um dos tipos de vírus, de acordo com a seguinte tabela:

tipo	quantidade de mosquitos
DEN 1	30
DEN 2	60
DEN 3	10

Retirando-se simultaneamente e ao acaso dois mosquitos desse recipiente, a probabilidade de que pelo menos um esteja contaminado com o tipo DEN 3 equivale a:

- a) $\frac{8}{81}$
- b) $\frac{10}{99}$
- c) $\frac{11}{100}$
- d) $\frac{21}{110}$

Exercício 4 (ENEM – 2009)

Anemia Falciforme é uma das doenças hereditárias mais prevalentes no Brasil, sobretudo nas regiões que receberam maciços contingentes de escravos africanos. É uma alteração genética, caracterizada por um tipo de hemoglobina mutante designada por hemoglobina S. Indivíduos com essa doença apresentam eritrócitos com formato de foice, daí o seu nome. Se uma pessoa recebe um gene do pai e outro da mãe para produzir a hemoglobina S ela nasce com um par de genes SS e assim terá a Anemia Falciforme. Se receber de um dos pais o gene para hemoglobina S e do outro o gene para hemoglobina A, ela não terá doença, apenas o Traço Falciforme (AS), e não precisará de tratamento especializado. Entretanto, deverá saber que se vier a ter filhos com uma pessoa que também herdou o traço, eles poderão desenvolver a doença. Dois casais, ambos membros heterozigotos do

tipo AS para o gene da hemoglobina, querem ter um filho cada. Dado que um casal é composto por pessoas negras e o outro por pessoas brancas, a probabilidade de ambos os casais terem filhos (um para cada casal) com Anemia Falciforme é igual a:

- a) 5,05%.
- b) 6,25%.
- c) 10,25%.
- d) 18,05%.
- e) 25,00%

Exercício 5 (UERJ – 2011)

Uma máquina contém pequenas bolas de borracha de 10 cores diferentes, sendo 10 bolas de cada cor. Ao inserir uma moeda na máquina, uma bola é expelida ao acaso.

Observe a ilustração:



Inserindo-se 3 moedas, uma de cada vez, a probabilidade de que a máquina libere 3 bolas, sendo apenas duas delas brancas, é aproximadamente de:

- a) 0,008
- b) 0,025
- c) 0,040
- d) 0,072

Exercício 6 (UERJ – 2006)

Com o intuito de separar o lixo para fins de reciclagem, uma instituição colocou em suas dependências cinco lixeiras de diferentes cores, de acordo com o tipo de resíduo a que se destinam: vidro, plástico, metal, papel e lixo orgânico.



Sem olhar para as lixeiras, João joga em uma delas uma embalagem plástica e, ao mesmo tempo, em outra, uma garrafa de vidro.

A probabilidade de que ele tenha usado corretamente pelo menos uma lixeira é igual a:

- a) 25%
- b) 30%
- c) 35%
- d) 40%

Exercício 7

Sabe-se que a sigla AIDS significa Síndrome da Imunodeficiência Adquirida, o vírus desta doença é conhecido como HIV. No dia 1º de dezembro comemora-se o Dia Mundial de Luta contra a Aids.



(Retirado da página <https://hivempauta.wordpress.com/tag/anos/> em 5 de abril de 2014)

Num determinado país sabe-se que 10% da população está infectada pelo vírus do HIV. Sabe-se também que, nos exames para detectar a doença, há 90% de acerto para o grupo dos infectados e 80% de acerto para os não infectados. Pergunta-se:

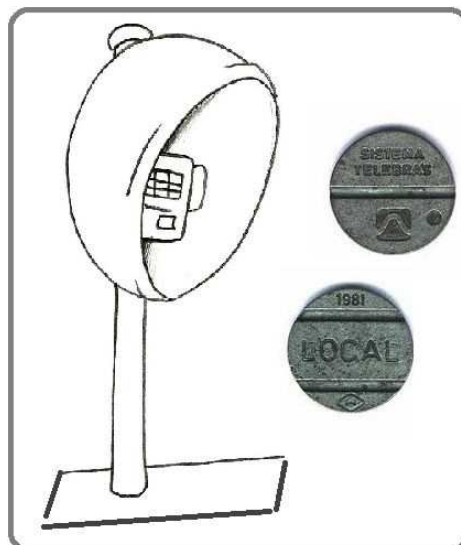
- 1) Qual a probabilidade de que uma pessoa, cujo exame deu positivo para a doença, esteja realmente infectada?
- 2) Qual a probabilidade de que uma pessoa, cujo exame deu negativo para a doença, esteja realmente sadia?

Marque a opção correta para as respostas aproximadas para as perguntas 1 e 2, respectivamente.

- a) 66,7% e 98,6 %
- b) 33,3% e 98,6 %
- c) 66,7% e 95,5 %
- d) 33,3% e 95,5 %

Exercício 8

Há alguns anos não existiam os recursos tecnológicos de hoje, aparelhos de telefones celulares, e-mails, whatsapp, facebook, twitter, instagram, blogs, entre muitos outros.



Imagine que um rapaz, que viveu na década de 80 do século passado, esqueceu o último algarismo do número do telefone da sua namorada e resolveu tentar ligar para ela mesmo assim, escolhendo ao acaso o último dígito. Se ele está num telefone público antigo e possui apenas duas fichas, qual é a probabilidade de que ele consiga conversar com a namorada?

- a) 25 %
- b) 20 %
- c) 30 %
- d) 15 %

Exercício 9

Duas máquinas A e B produzem 3000 peças de automóveis a partir do aço feito em metalúrgicas em um dia.

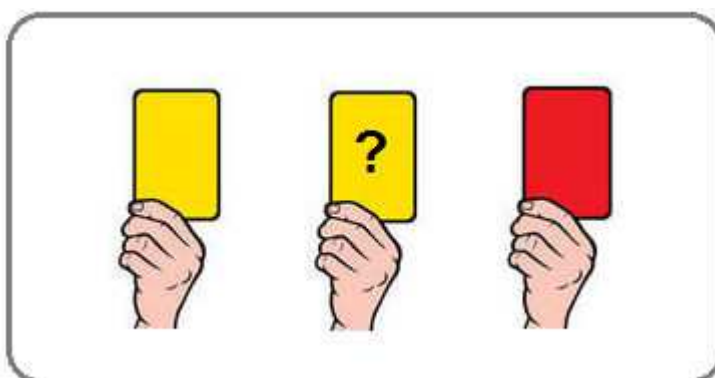


A máquina A produz 1000 peças, das quais 3% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2000, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia, uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que ela é defeituosa. Qual é a probabilidade de que ela tenha sido produzida pela máquina A?

- a) 3/5
- b) 3/4
- c) 1/4
- d) 1/6

Exercício 10

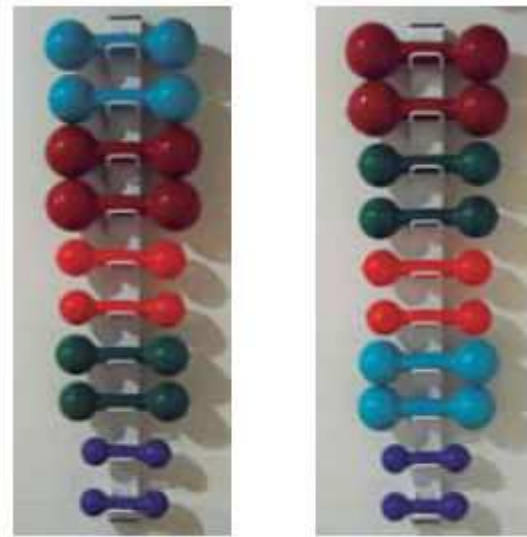
Uma partida do campeonato carioca de futebol possui um árbitro de futebol meio atrapalhado, ele tem no bolso um cartão amarelo, um cartão vermelho e um cartão com uma face amarela e uma face vermelha. Depois de uma jogada muito violenta, o árbitro mostra um cartão, retirado do bolso ao acaso, para um jogador de uma das equipes. Se a face que o jogador vê é amarela, qual é a probabilidade da face voltada para o juiz ser vermelha?



- a) $1/4$
- b) $2/3$
- c) $1/2$
- d) $1/3$

Exercício 11 (UERJ – 2014)

Em uma sala, encontram-se dez halteres, distribuídos em cinco pares de cores diferentes. Os halteres de mesma massa são da mesma cor. Seu armazenamento é denominado “perfeito” quando os halteres de mesma cor são colocados juntos. Nas figuras abaixo, podem-se observar dois exemplos de armazenamento perfeito.

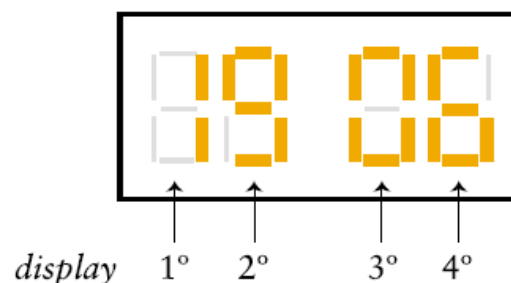


Arrumando-se ao acaso os dez halteres, a probabilidade de que eles formem um armazenamento perfeito equivale a:

- a) $1/5040$
- b) $1/945$
- c) $1/252$
- d) $1/120$

Exercício 12 (UERJ – 2007)

A maioria dos relógios digitais é formada por um conjunto de quatro displays, compostos por sete filetes luminosos. Para acender cada filete, é necessária uma corrente elétrica de 10 miliampères. O 1º e o 2º displays do relógio ilustrado abaixo indicam as horas, e o 3º e o 4º indicam os minutos.



Admita, agora, que um outro relógio, idêntico, apresente um defeito no 4º display: a cada minuto acendem, ao acaso, exatamente cinco filetes quaisquer.

Observe, a seguir, alguns exemplos de formas que o 4º display pode apresentar com cinco filetes acesos.

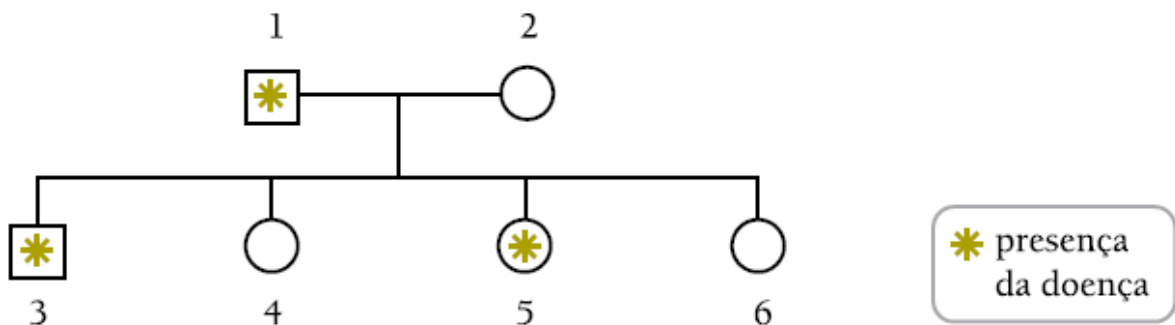


A probabilidade de esse display formar, pelo menos, um número em dois minutos seguidos é igual a:

- a) $13/49$
- b) $36/49$
- c) $135/441$
- d) $306/441$

Exercício 13 (UERJ – 2007)

A doença de von Willebrand, que atinge cerca de 3% da população mundial, tem causa hereditária, de natureza autossômica dominante. Essa doença se caracteriza pela diminuição ou disfunção da proteína conhecida como fator von Willebrand, o que provoca quadros de hemorragia. O esquema abaixo mostra o heredograma de uma família que registra alguns casos dessa doença.

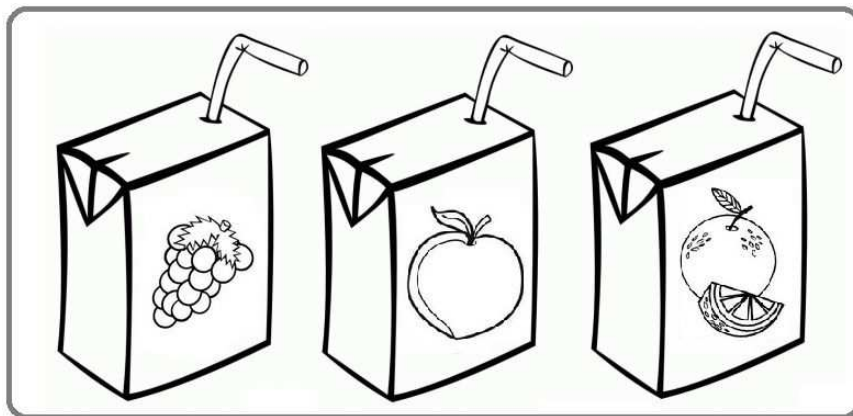


Admita que os indivíduos 3 e 4 casem com pessoas que não apresentam a doença de von Willebrand. As probabilidades percentuais de que seus filhos apresentem a doença são, respectivamente, de:

- a) 50 e 0
- b) 25 e 25
- c) 70 e 30
- d) 100 e 50

Exercício 14 (UERJ – 2011)

Uma fábrica produz sucos com os seguintes sabores: uva, pêsego e laranja. Considere uma caixa com 12 garrafas desses sucos, sendo 4 garrafas de cada sabor. Retirando-se, ao acaso, 2 garrafas dessa caixa, a probabilidade de que ambas contenham suco com o mesmo sabor equivale a:



- a) 9,1%
- b) 18,2%
- c) 27,3%
- d) 36,4%

Exercício 15 (UERJ – 2012)

Três modelos de aparelhos de ar-condicionado, I, II e III, de diferentes potências, são produzidos por um determinado fabricante. Uma consulta sobre intenção de troca de modelo foi realizada com 1000 usuários desses produtos. Observe a matriz A , na qual cada elemento a_{ij} representa o número daqueles que pretendem trocar do modelo i para o modelo j .

$$A = \begin{pmatrix} 50 & 150 & 200 \\ 0 & 100 & 300 \\ 0 & 0 & 200 \end{pmatrix}$$

Escolhendo-se aleatoriamente um dos usuários consultados, a probabilidade de que ele não pretenda trocar seu modelo de ar-condicionado é igual a:

- a) 20%
- b) 35%
- c) 40%
- d) 65%

Exercício 16

Para disputar a final de um torneio internacional de natação, classificaram-se 8 atletas: 3 norte-americanos, 1 australiano, 1 japonês, 1 francês e 2 brasileiros.

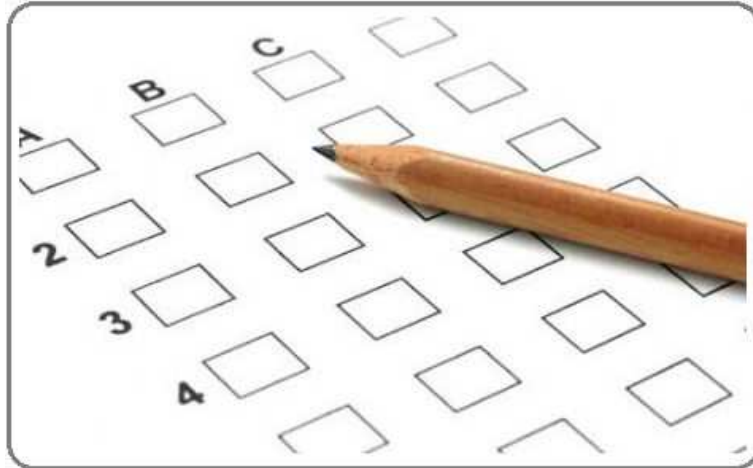


Considerando que todos os atletas classificados são ótimos e têm iguais condições de receber uma medalha (de ouro, prata ou bronze), a probabilidade de que pelo menos um brasileiro esteja entre os três primeiros colocados é igual a:

- a) 5/14
- b) 3/7
- c) 4/7
- d) 9/14
- e) 5/7

Exercício 17

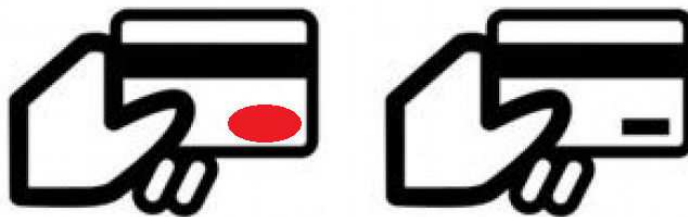
Um estudante resolve um teste de múltipla escolha de 10 questões, com 5 alternativas por questão. Ele sabe 60% da matéria do teste. Quando ele sabe uma questão, ele acerta, e, quando não sabe, escolhe a resposta ao acaso. Se ele acerta uma questão, qual é a probabilidade de que tenha sido por acaso?



- a) $2/15$
- b) $1/10$
- c) $2/17$
- d) $3/19$

Exercício 18

Uma pesquisa realizada entre 1000 consumidores, registrou que 650 deles trabalham com cartões de crédito da bandeira MasterCard, que 550 trabalham com cartões de crédito da bandeira VISA e que 200 trabalham com cartões de crédito de ambas as bandeiras.

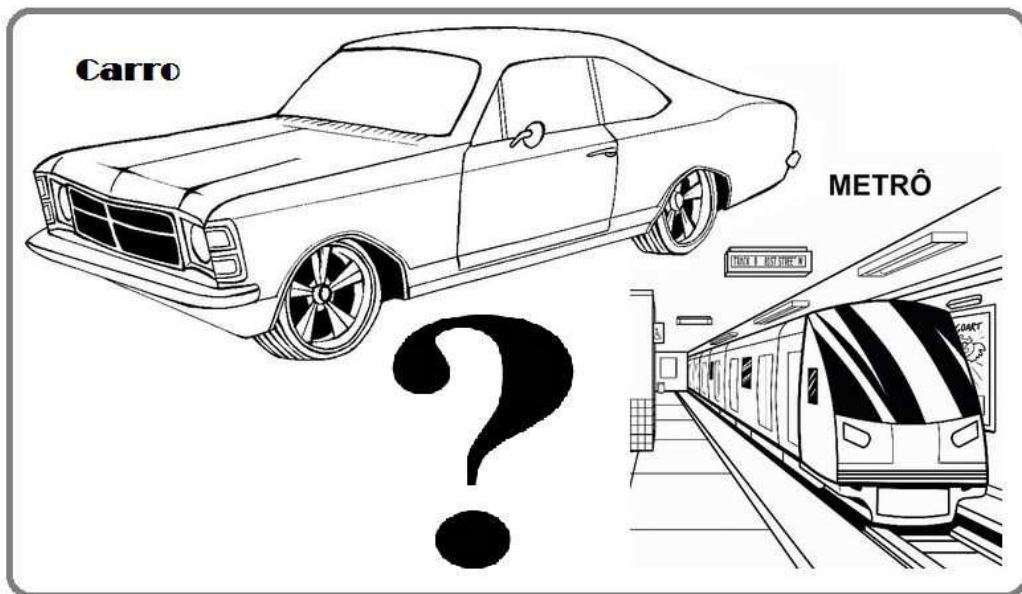


Qual a probabilidade de, ao escolhermos, desse grupo, uma pessoa que utiliza a bandeira VISA, ser também um dos consumidores que utilizam cartões de crédito da bandeira MasterCard?

- a) 10%
- b) 30%
- c) 40%
- d) 20%

Exercício 19

Há apenas dois modos, mutuamente excludentes, de Ana ir para o trabalho: ou de carro ou de metrô. A probabilidade de Ana ir de carro é de 60% e de ir de metrô é de 40%. Quando ela vai de carro, a probabilidade de chegar atrasada é de 5%. Quando ela vai de metrô a probabilidade de chegar atrasada é de 17,5%.

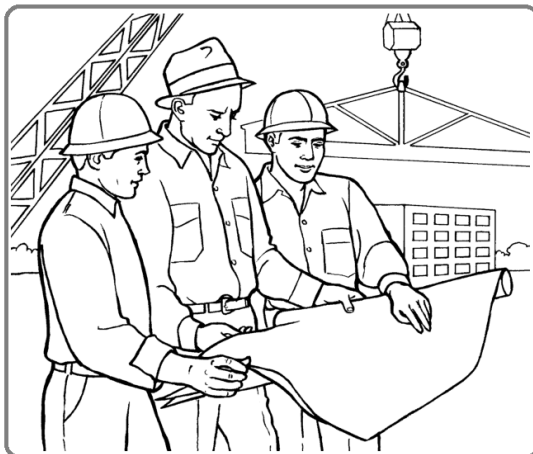


Em um dado dia, escolhido aleatoriamente, verificou-se que Ana chegou atrasada ao seu local de trabalho. A probabilidade de ela ter ido de carro nesse dia é:

- a) 10%
- b) 30%
- c) 40%
- d) 70%

Exercício 20

Uma companhia preocupada com sua produtividade costuma oferecer cursos de treinamento a seus operários. A partir da experiência, verificou-se que um operário, recentemente admitido, que tenha frequentado o curso de treinamento tem 82% de probabilidade de cumprir sua quota de produção.



Por outro lado, um operário, também recentemente admitido, que não tenha frequentado o mesmo curso de treinamento, tem apenas 35% de probabilidade de cumprir com sua quota de produção. Dos operários recentemente admitidos, 80% frequentaram o curso de treinamento. Selecionando-se, aleatoriamente, um operário recentemente admitido na companhia, a probabilidade de que ele não cumpra sua quota de produção é:

- a) 11,70%
- b) 27,40%
- c) 35%
- d) 83%

Exercício 21

Um aluno amante da matemática conhece bem a “Teoria da Probabilidade” e sabe a diferença que existe entre a definição clássica e a definição frequentista de probabilidade.



Ele possuía um dado um pouco estranho, ao lançar esse dado um número muito grande de vezes, ele percebeu que a face 6 saía com o dobro de frequência da face 1, e que as outras faces saíam com a frequência esperada em um dado normal. Então, ao arremessar-se este dado, pode-se concluir que a probabilidade de que ocorra a face com o número 1 é:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{2}{3}$

c) $\frac{1}{9}$

d) $\frac{2}{9}$

e) $\frac{1}{12}$

Gabarito:

Exercício 1: a

Exercício 3: d

Exercício 5: b

Exercício 7: b

Exercício 9: a

Exercício 11: b

Exercício 13: a

Exercício 15: b

Exercício 17: c

Exercício 19: b

Exercício 21: c

Exercício 2: a

Exercício 4: b

Exercício 6: c

Exercício 8: b

Exercício 10: d

Exercício 12: a

Exercício 14: c

Exercício 16: d

Exercício 18: d

Exercício 20: b

Capítulo 5 - As Atividades Propostas no Material Didático

Atividade 1

Título da Atividade: A Consulta ao Célebre Gênio Galileu Galilei

Tipo de atividade: Atividade em grupo

Material necessário: 3 dados brancos e 3 dados de cores diferentes

Divisão da turma para atividade: Turma dividida em grupos de três alunos

Aspectos operacionais:

Introduzir na primeira atividade do material didático a figura do Célebre Gênio Galileu Galilei. Esta tem como objetivo contextualizar historicamente o desenvolvimento do conceito de probabilidade, onde Galileu tem uma simples, mas genial ideia para desvendar o problema levado a ele, para tornar o ensino de matemática mais concreto e contextualizado.

Esta atividade se propõe a um questionamento por parte dos alunos a respeito do que os jogadores argumentavam que a soma 9 e a soma 10 deveriam ter a mesma possibilidade de se verificar, porém a frequência indicava que a soma 10 aparecia com uma frequência um pouco maior que a soma 9. Além disso, o professor pode explorar as possibilidades de soma através da constatação feita por Galileu e a frequência observada pelos jogadores, que intuitivamente perceberão maneiras diferentes para chegarem às mesmas conclusões, diferenças que mais tarde serão trabalhadas quando chegar-se-á às definições clássica e frequentista da probabilidade.

Intervenção Pedagógica:

Com os 3 dados brancos o aluno pode não perceber possibilidades distintas. Por exemplo o evento 3, 3 e 4 que somam 10; na verdade existem 3 maneiras diferentes da soma dar dez: $4+3+3$, $3+4+3$ e $3+3+4$, o 4 pode aparecer no primeiro,

no segundo ou no terceiro dado, mas com dados coloridos, como sugere Galileu, fica mais fácil e visível verificar as diferenças. O professor deve informar que Galileu listou todas as 216 maneiras (6x6x6) de 3 dados se apresentarem depois de lançados e, analisando a lista, verificou que existiam 25 maneiras de obter uma soma 9 e 27 maneiras de obter soma 10.

Com este jogo tem-se a possibilidade de construir os conceitos de experimento aleatório, espaço amostral, evento e a definição clássica de probabilidade. Mas como o espaço amostral desta atividade é composto por 216 possibilidades, será feita a próxima atividade, similar a esta, porém com dois dados que formarão 36 pares de somas distintos, formando assim um espaço amostral composto por 36 possibilidades, para facilitar a intuitividade dos alunos.

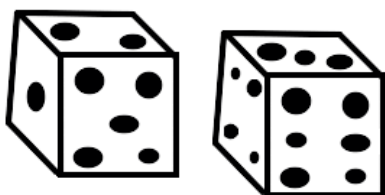
Nas questões 1 e 2, os alunos devem refletir sobre as chances de soma 9 e soma 10. Após a questão 3, ao final da atividade, o professor deve promover um debate sobre a atividade baseado nos resultados obtidos.

Atividade 2

Título da Atividade: Jogo a Soma da Sorte

Tipo de atividade: Atividade em grupo













Material necessário: 2 dados



Divisão da turma para atividade: Turma dividida em no máximo 11 grupos

Aspectos operacionais:

A tabela tem a importante tarefa de apresentar aos alunos todos os casos possíveis e os casos favoráveis de cada grupo.

<div style="display: inline-block; border: 1px solid black; padding: 2px;"> <div style="display: flex; justify-content: space-between; width: 100%;"> dado 1 dado 2 </div> </div>						
	2	3	4	5	6	7
	3	4	5	6	7	8
	4	5	6	7	8	9
	5	6	7	8	9	10
	6	7	8	9	10	11
	7	8	9	10	11	12

Esta atividade leva os alunos ao questionamento da sorte do grupo vencedor. Através da experiência adquirida na atividade 1, dados coloridos de Galileu, a respeito da soma 9 e a soma 10.

O jogo e os problemas escolhidos são simples, com a finalidade de serem conduzidos rapidamente para os objetivos que devem atingir. Com este tipo de jogo não existe a necessidade de grandes cálculos. A teoria deve ser construída gradativamente a partir das questões resolvidas.

Com a tabela preenchida, os alunos podem perceber e entender que alguns times começam o jogo com mais chances de vencer que os outros. A vitória de certos times não é apenas pura sorte.

Intervenção Pedagógica:

O professor deve mediar e estimular os alunos a pensar, a questionar e a arriscar, levá-lo a propor soluções para o problema gerado pelo jogo.

Neste caso o professor deve deixar bem claro que a ordem dos dados influi, então o espaço amostral será de 36 eventos, para facilitar o entendimento do aluno.

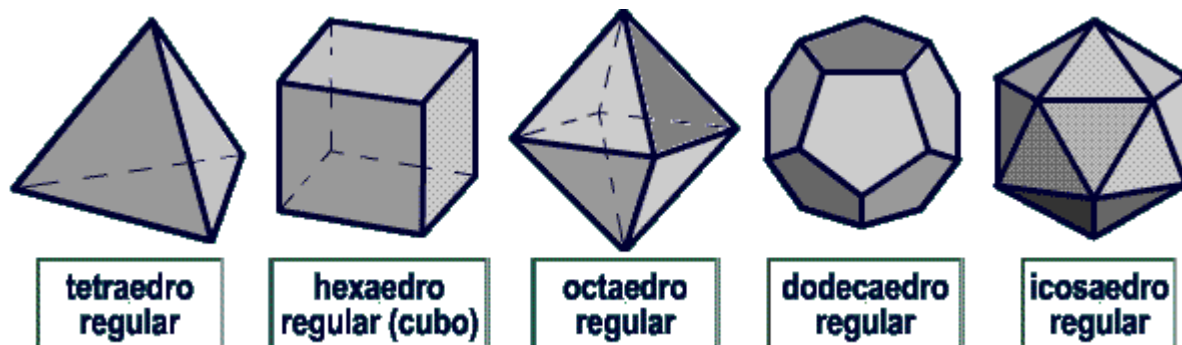
Após várias discussões e reflexões dos alunos sobre o jogo, analisando todos os casos possíveis, os casos favoráveis de cada grupo, as chances de vitória de cada um, deve-se estimar o resultado, intuitivamente, antes de apresentar as definições ou qualquer processo de resolução, os conceitos devem ser construídos. Somente no final do jogo deverá ser introduzido o conceito de experimento determinístico, experimento aleatório, espaço amostral, evento e a definição clássica de Probabilidade.

Atividade 3

Título da Atividade: Dados de RPG (Role-Playing Game)

Tipo de atividade: Atividade individual ou em grupo

Material necessário: 5 dados (Poliedros Regulares)



Divisão da turma para atividade: Turma dividida em grupos de três alunos

Aspectos operacionais:

Esta atividade trabalha conceitos já definidos e o cálculo de probabilidades através da definição clássica e faz com que os alunos reflitam, através da questão 1, sobre a escolha dos poliedros regulares, o questionamento intuitivo de equiprobabilidade e não equiprobabilidade, sem defini-los, o que ocorrerá na próxima atividade. Deve ficar bem claro que os poliedros regulares foram escolhidos

porque são construídos de forma perfeita e homogênea, todas as faces têm a mesma chance de sair.

O jogo e os problemas escolhidos mais uma vez são de simples resolução, com a importante finalidade de serem conduzidos rapidamente para os objetivos que o professor já tem estabelecido.

Intervenção Pedagógica:

Após várias discussões e reflexões dos alunos sobre a escolha dos poliedros regulares como dados para o jogo, deve-se direcionar, intuitivamente, mas somente no final da próxima atividade será introduzido o conceito de experimento equiprovável, experimento não equiprovável e a definição frequentista de Probabilidade.

Os jogos de RPG são bem recebidos pelos alunos da faixa etária do terceiro ano do Ensino Médio. Este jogo é popular e curioso, porém ele é bastante complexo e deve-se ter um grande cuidado. O trabalho pedagógico é de extrema importância e não deve ser “o jogo pelo jogo”, por isto as questões direcionam para os conceitos matemáticos, se possível depois de alcançado o objetivo pode-se permitir partidas entre os alunos.

Atividade 4

Título da Atividade: O Experimento da Moeda e do Percevejo

Tipo de atividade: Atividade em grupo

Material necessário: Moedas e Percevejos



Divisão da turma para atividade: Turma dividida em grupos de três alunos

Aspectos operacionais:

Esta atividade tem como objetivo trabalhar com experimentos diferentes que direcionarão para os conceitos de equiprobabilidade, não equiprobabilidade e definição frequentista de probabilidade.

O jogo e os problemas escolhidos mais uma vez são de simples resolução, com a importante finalidade de serem conduzidos rapidamente para os objetivos que o professor já tem estabelecido. Deve ficar bem claro que no caso do percevejo os resultados não são igualmente prováveis.

Intervenção Pedagógica:

Após várias discussões e reflexões dos alunos sobre os diferentes problemas, moedas e percevejos, deve-se direcionar, intuitivamente, aos conceitos que somente no final do jogo serão introduzidos.

Primeiramente é necessário que o aluno entenda que no caso do percevejo não existe propriedade de simetria. O objeto não é homogêneo, portanto ele deve ser questionado sobre como calcular a probabilidade de ele cair apontado para cima.

Finalmente, ao término do jogo serão introduzidos os conceitos de experimento equiprovável, experimento não equiprovável e a definição frequentista de probabilidade.

A ideia é aproximar a probabilidade pela estimativa da probabilidade de ocorrência do evento, jogar a moeda e o percevejo várias vezes. A escolha da definição a ser aplicada, clássica ou frequentista, depende muito da natureza do fenômeno. O aluno deve ser direcionado a este raciocínio:

$$P(\text{cair apontado para cima}) = \frac{\text{número de vezes que cair apontado para cima}}{\text{número total de observações}}$$

Um espaço amostral é equiprovável se as frequências relativas de seus elementos tendem a um mesmo valor quando o número de vezes que o experimento é repetido um grande número de vezes. Sabendo disso, esta atividade foi proposta

para auxiliar na construção deste conceito, como o objetivo de desenvolver no aluno a noção intuitiva de infinito, para que deste modo ele compreenda melhor a equiprobabilidade e não equiprobabilidade.

Atividade 5

Título da Atividade: O Geoplano e o Jogo de Dardos

Tipo de atividade: Atividade em grupo

Material necessário: Isopor ou cortiça, percevejos (pinos), elásticos e dardos



Divisão da turma para atividade: Turma dividida em grupos de 3 alunos

Aspectos operacionais:

O geoplano é um dos recursos que pode auxiliar o profissional de educação matemática no ensino de probabilidade, desenvolvendo atividades com figuras e formas geométricas planas. A atividade proposta foi construída no contexto da probabilidade geométrica, que propõem a resolução de problemas de probabilidade que envolvam conceitos geométricos. Esta atividade se propõe a um questionamento por parte dos alunos no momento da resolução dos problemas utilizando a probabilidade da união de eventos e a probabilidade de eventos complementares. A teoria deve ser construída de forma gradativa a partir das questões resolvidas.

Intervenção Pedagógica:

Após várias discussões e reflexões dos alunos sobre as áreas possíveis de fixação dos dardos, analisando e calculando as probabilidades através das áreas dos polígonos, a interseção e a união das áreas criadas, as chances de acerto e erros das regiões limitadas pelos elásticos, deve-se estimular, intuitivamente, antes de apresentar as definições ou qualquer processo de resolução, os conceitos devem ser construídos. Como recurso didático é possível fazer uma associação dos resultados obtidos no Geoplano com os diagramas de conjuntos muito utilizados para explicar a probabilidade da união de eventos e de eventos complementares. Somente no final do jogo deverá ser introduzido o conceito de probabilidade da união de eventos, a probabilidade de eventos complementares, evento impossível e evento certo.

Atividade 6

Título da Atividade: O Enigma de Monty Hall (Jogo das três portas)

Tipo de atividade: Atividade individual

Material necessário: Somente o material didático

Divisão da turma para atividade: Turma não dividida em grupos

Aspectos operacionais:

Os conceitos de probabilidade já foram trabalhados anteriormente e definidos; nesta atividade os alunos terão a difícil tarefa de desvendar o enigma probabilístico, é preciso muita astúcia para solucioná-lo.

O problema escolhido é de simples resolução, porém com um grau de dificuldade apurado, com a importante finalidade de que o aluno raciocine de forma criativa e inteligente.

Este jogo desenvolve a criatividade do aluno, o conhecimento é adquirido de maneira confortável e agradável, a atenção e importância, dada por aluno em

problemas relacionados com jogos, são diferenciadas e positivamente, além de promover a interação entre os alunos e dos alunos com o professor, pode ser uma valiosa maneira divertida de construção do conhecimento.

Intervenção Pedagógica:

Após várias discussões e reflexões dos alunos sobre o problema, a provável resposta intuitiva da maioria dos alunos é de que tanto faz ficar com a porta inicial ou mudar para a outra, com um caso favorável em dois possíveis, 50% de chance para cada uma, não levando em conta a ação do apresentador do programa de televisão, que jamais abriria a porta premiada, ele sempre abrirá uma porta não premiada a partir da porta que nós tivermos aberto inicialmente.

O professor deve orientar e direcionar as ideias discutidas para que o alunos sozinhos cheguem a conclusão de que trocar de porta é mais interessante. Se ele não trocar, sua chance de vitória está em ter escolhido a porta certa da primeira vez, o que ocorre com probabilidade $1/3$. Trocando a porta, ele vai ganhar o prêmio exatamente nos casos em que a porta escolhida é a errada, o que tem probabilidade $2/3$. Deve-se ficar bem claro que, do ponto de vista probabilístico, a melhor estratégia do jogador é trocar de porta.

O professor deve mediar o raciocínio e deixar bem claro muitas vezes quando realizamos um experimento aleatório, recebe-se informações extras sobre a ocorrência de um evento, então deve-se utilizar estas novas informações para calcular a probabilidade dos outros eventos. Desta maneira a noção intuitiva de probabilidade condicional será introduzida, mas não será definida, o que acontecerá somente após a próxima atividade.

Atividade 7

Título da Atividade: A Fábrica de Lâmpadas

Tipo de atividade: Atividade em dupla

Material necessário: Somente o material didático

Divisão da turma para atividade: Turma dividida em grupos de dois alunos

Aspectos operacionais:

O conceito de probabilidade condicional já foi introduzido, intuitivamente, na atividade anterior, porém já foi trabalhado, mas não definido. Nesta atividade os alunos terão a difícil tarefa de identificar e construir o conceito de probabilidade condicional e a regra da multiplicação de eventos. É preciso muita criatividade e analisar cuidadosamente os fatos.

O problema escolhido é simples para facilitar o desenvolvimento do importante conceito probabilístico, com a grande finalidade de que o aluno raciocine de forma criativa e inteligente.

Intervenção Pedagógica:

Após várias discussões e reflexões dos alunos entre os componentes das duplas e também entre as duplas sobre os problemas criados, os alunos devem perceber que o segundo evento ocorrerá após a interferência do primeiro evento. Existe uma condição anterior que muda a questão a ser analisada, com isso ocorre uma mudança no espaço amostral e nos casos favoráveis à ocorrência do evento.

O professor deve orientar e direcionar as ideias discutidas para que o alunos sozinhos cheguem à conclusão do conceito de probabilidade condicional, ele deve mediar o raciocínio e deixar bem claro que quando um experimento aleatório recebe informações extras sobre a ocorrência do evento, então deve-se utilizar estas informações para calcular a probabilidade dos outros eventos.

Nesta atividade, além de definir o conceito de probabilidade condicional, pode-se construir e definir também a regra da multiplicação de eventos e árvore das possibilidades. As questões 9 e 10 podem ser resolvidas de maneira mais simples através de eventos complementares; o professor não deve perder a chance de comparar as duas possibilidades de solução para enriquecer o aprendizado e o conhecimento sobre probabilidade.

Atividade 8

Título da Atividade: Desvendar o problema de Paccioli

Tipo de atividade: Atividade em dupla

Material necessário: Somente o material didático

Divisão da turma para atividade: Turma dividida em grupos de dois alunos

Aspectos operacionais:

O conceito de probabilidade condicional já foi construído e definido, assim como a árvore de probabilidades e o teorema da multiplicação. Nesta atividade os alunos terão a difícil tarefa de desvendar o Problema de Paccioli utilizando o conceito de probabilidade condicional e a regra da multiplicação de eventos, utilizando ou não a árvore de probabilidades. É preciso muita criatividade e analisar cuidadosamente os fatos.

O problema escolhido não é simples mas é historicamente muito importante. A matemática ensinada de maneira mais concreta e contextualizada é o grande trunfo do professor de matemática, saber com o que estes conceitos se relacionam, como eles podem ser inseridos em uma rede de relações e de significados, o aluno perceberá que estas relações pertençam à própria matemática, a sua história.

Intervenção Pedagógica:

Após várias discussões e reflexões dos alunos das duplas e entre as duplas, mesmo que os alunos não consigam resolver o problema, o professor deve orientar e direcionar as ideias discutidas para que o problema seja resolvido, ele deve mediar o raciocínio e resolver passo a passo, gradativamente, juntamente com os alunos, dando chances aos alunos de concluir o raciocínio iniciado pelo professor, até chegar a solução final.

O professor deve apresentar as soluções de Fermat e Pascal, que foram diferentes, compará-las com a solução obtida em sala de aulas, mas Fermat e

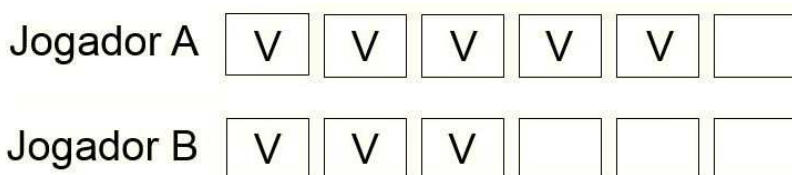
Pascal chegaram ao mesmo resultado. Mostrar pequenos trechos das cartas é de extrema importância; em uma das cartas Pascal escreve a Fermat dizendo:

“O seu método é muito bom e foi o primeiro que me ocorreu durante estas pesquisas. Mas, devido ao facto de as combinações serem excessivas, eu encontrei um atalho e, na realidade, outro método mais curto e claro, o qual lhe passo a descrever em poucas palavras; pelo que gostaria de lhe abrir o meu coração daqui para a frente, se tal me é permitido, visto ter sido enorme o prazer que tive com o nosso acordo. Claramente vejo que a verdade é a mesma em Toulouse e em Paris.” (Terceira carta, de Pascal para Fermat, 1654)

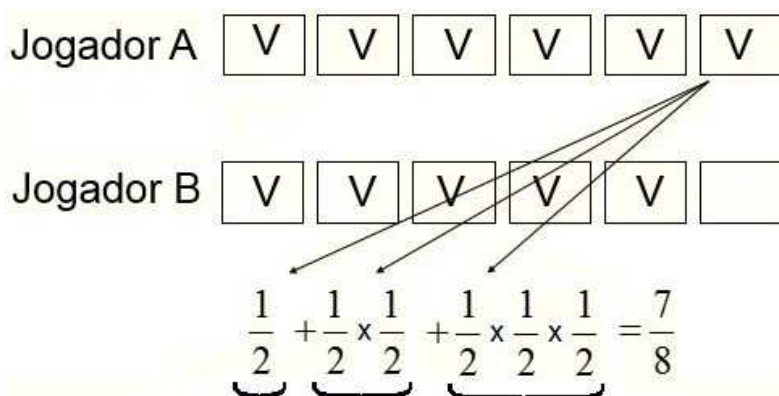
O problema dos Pontos reduz-se ao cálculo da probabilidade de um jogador ganhar a partida.

Solução similar à de Pascal:

Inicialmente Pascal analisa a situação:



Pascal conclui que:

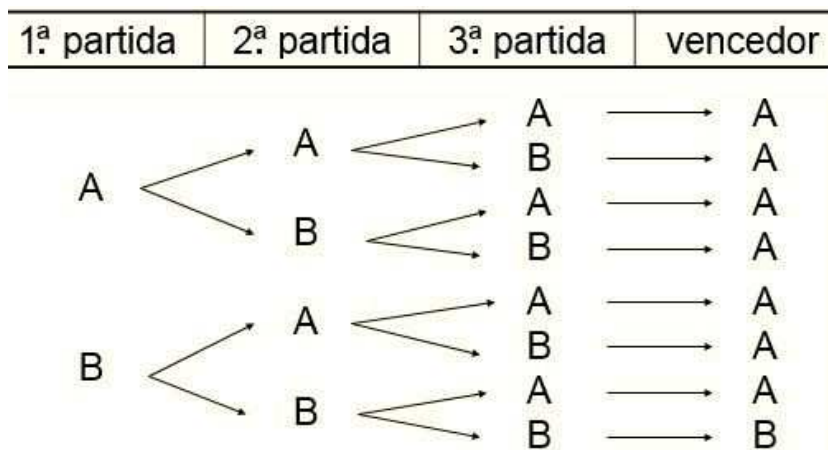


O jogador A recebe $\frac{7}{8}$ das apostas.

O jogador B recebe $\frac{1}{8}$ das apostas.

Solução similar à de Fermat:

Fermat analisa a situação:



Fermat conclui que:

O jogador A recebe $\frac{7}{8}$ das apostas.

O jogador B recebe $\frac{1}{8}$ das apostas.

Atividade 9

Título da Atividade: Genética e Probabilidade (Quadro de Punnett)

Tipo de atividade: Atividade em dupla

Material necessário: Somente o material didático

Divisão da turma para atividade: Turma dividida em grupos de dois alunos

Aspectos operacionais:

O conceito de probabilidade já foi construído, definido e estudado. Nesta atividade interdisciplinar os alunos terão que aplicar o que aprenderam em uma outra disciplina, a Biologia, mais precisamente em Genética, como é construído e preenchido o Quadro de Punnett, para auxiliar no cálculo de probabilidade dos

conceitos biológicos genéticos. O problema escolhido está relacionado historicamente ao importante trabalho de Mendel e suas pesquisas com as ervilhas. É preciso ter conhecimento básicos de Genética, que serão trabalhados, explicados e definidos anteriormente neste material didático, pelo próprio professor de matemática, ou nas aulas de Biologia.

Intervenção Pedagógica:

Após várias análises e reflexões dos alunos, o professor deve orientar e direcionar as ideias discutidas, ele deve mediar o raciocínio, sempre dando chances aos alunos de concluir o raciocínio iniciado por ele, até chegar a solução final.

Deve ficar bem claro para os alunos que na geração F1, todas as ervilhas apresentavam as sementes amarelas, sendo chamadas por Mendel de híbridos. Após esse cruzamento, Mendel realizou a autofecundação de uma dessas sementes híbridas e o resultado encontrado da segunda geração foi $\frac{3}{4}$, 75%, de sementes amarelas e $\frac{1}{4}$, 25%, de sementes verdes. Este foi o motivo que levou Mendel a concluir que o fator para amarelo seria chamado de dominante e o fator para verde chamado de recessivo.

Atividade 10

Título da Atividade: Cálculo de Probabilidade na Genética

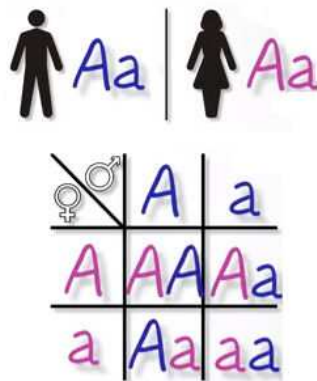
Tipo de atividade: Atividade em dupla

Material necessário: Somente o material didático

Divisão da turma para atividade: Turma dividida em grupos de dois alunos

Aspectos operacionais:

O Quadro de Punnett, após preenchido, tem a importante tarefa de apresentar aos alunos todos os casos possíveis e os casos favoráveis para o fenótipo desejado. Veja o quadro preenchido corretamente:



Nesta atividade interdisciplinar os alunos terão que aplicar ao conceito de genética, preenchendo o Quadro de Punnett para auxiliar nos cálculos de probabilidade dos conceitos biológicos genéticos.

Intervenção Pedagógica:

Após as análises do Quadro de Punnett feitas pelos alunos, o professor deve orientar e mediar o raciocínio, dando chances aos alunos de identificar a diferença entre o “e” e o “ou” se o correto é utilizar a regra da multiplicação de eventos ou não.

Atividade 11

Título da Atividade: O Professor de Matemática e a Professora de Biologia

Tipo de atividade: Atividade em dupla

Material necessário: Somente o material didático

Divisão da turma para atividade: Turma dividida em grupos de dois alunos

Aspectos operacionais:

Nesta atividade interdisciplinar existe uma dificuldade maior: os alunos terão que analisar com mais atenção os conceitos de Genética para identificar os genótipos corretos. Logo após, deve preencher o Quadro de Punnett, para analisar o

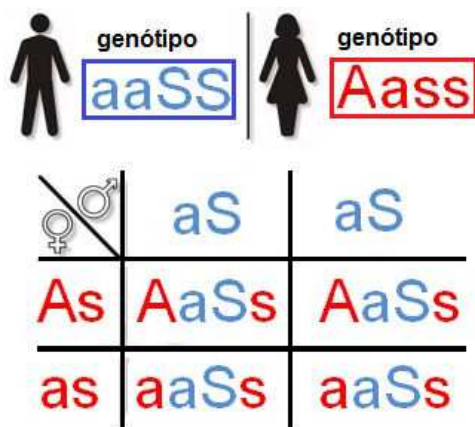
cruzamento dos dois fenótipos simultaneamente, pois trata-se de uma questão de diíbrido, Segunda Lei de Mendel.

Intervenção Pedagógica:

Primeiramente, o aluno deve encontrar os genótipos, Luís possui genótipo homocigoto para as duas características. Ele tem olhos azuis, característica condicionada por um gene recessivo, então o genótipo para olhos azuis pode ser representado por “aa”; ele possui sardas, característica condicionada por um gene dominante, então seu genótipo em relação às sardas pode ser representado por “SS”. Logo o genótipo de Luís, levando em consideração as duas características será “aaSS”. Ana tem olhos castanhos e é heterocigota para essa característica, logo ela terá genótipo “Aa” para cor de olhos. Como Ana não possui sardas, característica condicionada por um gene recessivo, ela será “ss”. Então o genótipo de Ana, levando em consideração as duas características, será “Aass”.

O segundo passo é encontrar os gametas de Luís e de Ana, para tal, é preciso combinar cada alelo de uma característica com cada alelo da outra. Luís, genótipo “aaSS”, é homocigoto para ambas as características, então todos os seus gametas terão genótipo “aS”. Ana, genótipo “Aass”, terá metade dos gametas com genótipo “As” e a outra metade dos gametas com genótipo “as”.

O terceiro passo é preencher e analisar o cruzamento através do Quadro de Punnett:



Com o quadro preenchido pode-se identificar os genótipos e os fenótipos. O professor deve mediar o raciocínio e direcionar a solução, os alunos devem identificar as situações possíveis e concluir que o casal possui 50% de chances de

ter um filho com sardas e olhos castanhos, genótipo “AaSs”, e 50% de chances de ter um filho com sardas e olhos azuis, genótipo “aaSs”.

Atividade 12

Título da Atividade: A Aposta do Professor de Matemática

Tipo de atividade: Atividade em dupla

Material necessário: O material didático e uma calculadora

Divisão da turma para atividade: Turma dividida em dupla

Aspectos operacionais:

A tabela tem a importante tarefa de apresentar a probabilidade de haver pelo menos dois alunos da turma que façam aniversário no mesmo dia, em turmas com diferentes quantidades de alunos.

X	Probabilidade
5	0,03
10	0,12
15	0,25
20	0,41
23	0,51
25	0,57
30	0,71
40	0,89
45	0,94
50	0,97

Nesta última atividade faz-se necessária a utilização de uma calculadora para auxiliar nos cálculos. A atividade escolhida é muito interessante e seu resultado é bastante surpreendente. Tem-se a importante finalidade de despertar a curiosidade do aluno e fazer com que ele raciocine mais uma vez de forma criativa e inteligente.

Promove a interação entre os alunos e dos alunos com o professor, dando sentido ao aprendizado, valorizando o conhecimento científico.

Intervenção Pedagógica:

Após várias discussões e reflexões dos alunos sobre o problema, a provável resposta intuitiva da maioria dos alunos é de que o professor perderá a aposta.

O professor deve orientar e direcionar as ideias discutidas para que o alunos, após os cálculos, cheguem a conclusão de que a probabilidade do professor ganhar a aposta, em uma turma com 50 alunos, é de quase 100%, e somente por isso ele apostou o seu carro. Finalmente pode-se conferir a data de nascimento dos alunos da turma e verificar na prática se pelo menos dois alunos fazem aniversário no mesmo dia.

6 - Considerações Finais

O ensino da matemática vem sofrendo grandes transformações em todo mundo, mas ainda precisa de grandes evoluções. Diversas instituições científicas espalhadas pelo mundo estão desenvolvendo várias pesquisas com o objetivo de elaborar inovadoras metodologias de ensino da matemática. Estas novas abordagens visam levar o aluno a pensar, questionar e criar soluções para os mais variados problemas da vida, não só de caráter profissional, mas também de cunho social.

A matemática está diretamente ligada à sua grandiosa história; são os fatos e os acontecimentos históricos que levaram os renomados matemáticos a desenvolverem e construir as teorias e os conceitos que a regem. A maneira com que esse desenvolvimento aconteceu deve direcionar a prática pedagógica do ensino da matemática.

O professor utilizará a evolução dos conceitos para nortear sua prática pedagógica em sala de aula, sendo de fundamental importância que os acontecimentos históricos caminhem juntamente com o aprendizado de matemática. Se o início da teoria da probabilidade deu-se historicamente através dos jogos do azar, este fator deve ser evidenciado em materiais didáticos, juntamente com os matemáticos envolvidos. Apresentando aos alunos uma prática pedagógica utilizando tais jogos, visando a construção do conhecimento, que é de extrema importância para o ensino de matemática.

Relacionando os conhecimentos da Biologia e da Matemática, a interdisciplinaridade concretiza-se sem a necessidade de grandes e detalhadas formalizações de ambas as partes envolvidas. Uma prática pedagógica interdisciplinar não precisa ser criada na sua totalidade, mas contribui efetivamente para uma contextualização e para uma integração entre essas duas áreas do conhecimento. Todos envolvidos com a interdisciplinaridade tiram proveito desta prática, os professores pela necessidade de evoluírem profissionalmente repensando a sua prática pedagógica, os alunos por estarem inseridos num contexto mais próximo da realidade, voltados para compreensão do mundo ao seu redor, e finalmente a escola, que tem suas propostas pedagógicas recalculadas, refletidas e modificadas para atender novas necessidades e tornar-se mais atual.

O material desenvolvido neste trabalho resgatou ricas situações problemas do passado, contextualizando historicamente a teoria da probabilidade, evidenciando as dificuldades enfrentadas por gerações de matemáticos e as brilhantes soluções encontradas por estes celebres e imortais matemáticos. Através dos jogos, históricos ou não, relacionamos a suas problemáticas o conceito matemático é construído antes de ser formalizado.

A definição clássica de probabilidade é confrontada com a frequentista através de experimentação feita através dos jogos, para que os alunos reflitam, pensem, discutam e possam tirar suas próprias conclusões. A interdisciplinaridade complementa o ensino, desenvolvendo uma visão global do conhecimento científico, onde os alunos inseridos neste contexto podem identificar que o mundo no qual eles vivem é composto de vários saberes, que juntos formam uma complexidade de conhecimentos que se interceptam e não caminham independentes um dos outros.

REFERÊNCIAS

- [1] BRASIL. Secretaria da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio – Matemática**. Brasília: MEC, 1998.
- [2] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 4^a. edição. Campinas. Editora da UNICAMP, 2004.
- [3] ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012. 511p.
- [4] ROQUE, Tatiana; PITOMBEIRA, João Bosco. **Tópicos de História da Matemática**. (Material da disciplina MA31) PROFMAT, 2012.
- [5] BRASIL. **Currículo Mínimo**. Secretaria de Educação. Rio de Janeiro. http://www.conexaoprofessor.rj.gov.br/curriculo_identificacao.asp. 2013.
- [6] MORGADO, Augusto Cesar; CARVALHO, João Bosco Pitombeira; CARVALHO, Paulo Cesar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Coleção do Professor de Matemática. SBM. Editora SBM. 2006.
- [7] GNEDENKO, Boris Vladimirovich. **A Teoria da Probabilidade**. Tradução da Série de Textos Clássicos da American Mathematical Society. Editora Ciência Moderna. 2008.
- [8] BAYER, Arno; BITTENCOURT, hélio e ROCHA, Josy e ECHEVESTE, Simone. ULBRA. **Probabilidade na Escola**. 2005.
- [9] BATANERO, C. e GODINO, J. **Estadística y su didáctica para maestros: Proyecto Edumat maestros**. Granada: Universidad de Granada, 2002.
- [10] COUTINHO, C. **Introduction aux Situations Aléatoires dès le Collège: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement**

informatique Cabrigéomètre II. Tese de Doutorado. Univ. J. Fourier, Grenoble, France, 2001.

[11] KATAOKA, V., RODRIGUES, A. e OLIVEIRA, M. **Utilização do conceito de Probabilidade Geométrica como recurso didático no ensino de Estatística**. Proc. IX Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, MG, 2007.

[12] BRASIL. **Revista Cálculo – Matemática para Todos**. Edição 31 – ano 3 – agosto de 2013.

[13] BRASIL. **Zetetiké: Revista de Educação Matemática**. Versão 19, número 36 – julho/dezembro de 2011 – Faculdade de Educação - UNICAMP.

[14] GADELHA, Augusto. **Notas de Aula - Teoria de Probabilidade I - Curso de Pós-Graduação em Estatística. DME/IM/UFRJ**. Rio de Janeiro – RJ, março de 2004.

[15] COLL, César; MONEREO, Carles. **Psicologia da Educação Virtual: aprender e ensinar com as tecnologias da informação e da comunicação**. Porto Alegre: Artmed, 2010.

[16] CABERLIM, Cristiane Candido Luz; COUTINHO, Cileda de Queiroz e Silva. **O Ensino Atual de Probabilidade na Escola Básica: um Estudo do Guia do PNDL 2012**. Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). XI Encontro Nacional de Educação Matemática. Curitiba – Paraná, 18 a 21 de julho de 2013.

[17] MOURA, Manoel Oriosvaldo. **O jogo e a construção do conhecimento matemático**. São Paulo: FDE, 1992. (Série Ideias, 10).

[18] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática / Brasília, 2011.

CARMO, Anselmo Gonçalves do. **Teoria e Aplicação da Probabilidade**. Disponível em <http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/AnselmoGoncalvesdoCarmo.pdf>. Acesso em 17/01/2014.

[19] Gneri, Mario Antonio. ***A Evolução Histórica do Conceito de Probabilidade***. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC) da UNICAMP. Disponível em www.ime.unicamp.br/~cnaber/APOSTILA%20PROBABILIDADE.doc. Acesso em 20/01/2014.

[20] Gal, Iddo. ***Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas***. 2005.

[21] Carvalho, Paulo Cezar Pinto. ***Métodos de Contagem e Probabilidade***. IMPA. Disponível em <http://www.obmep.org.br/docs/Apostila2-contagem.pdf>. Acesso em 05/02/2014.

[22] Sá, Ilydio Pereira de. ***Elementos de Matemática Discreta para Educadores Matemáticos***. 4ª Edição, julho de 2005. <http://www.magiadamatematica.com/>. Acesso em 06/02/2014.

APÊNDICE

Cartas trocadas entre Blaise Pascal e Pierre de Fermat no século XVII.

1) Primeira carta, de Pascal para Fermat.

Infelizmente, esta carta se perdeu no tempo, já não existe.

2) Segunda carta, de Fermat para Pascal.

Não se sabe a data em que foi escrita.

Senhor,

Se comprometo-me a fazer um ponto com um único dado em oito lançamentos, e se estamos de acordo depois que o dinheiro é colocado em jogo, e que eu não vou fazer o primeiro lançamento, é necessário por minha teoria de que eu tome $1/6$ da soma total a ele imparcial por causa do primeiro lançamento citado.

E se estamos de acordo que depois que eu não vou fazer o segundo lançamento, eu deveria, por minha parte, pegar um sexto do que resta que é $5/36$ do total.

Se, depois disso, concordarmos que não vou fazer o terceiro lançamento, eu deveria recuperar-me, pegar $1/6$ do que resta que é $25/216$ do total.

E se, posteriormente, concordamos mais uma vez que eu não vou fazer o quarto lançamento, devo tomar $1/6$ do restante ou $125/1296$ do total, e eu concordo com você que esse é o valor do quarto lançamento supondo que um já foram feitas as jogadas anteriores.

Mas você propôs no último exemplo em sua carta (cito seus próprios termos) que se caso eu queira saber qual o valor da sexta jogada em 8 lançamentos, e caso tenha tentado três vezes sem o conseguir, e caso o meu adversário proponha que eu não devo jogar uma quarta vez, e se ele desejar que eu seja tratado com justiça, é aceitável que eu fique com $125/1296$ da soma total das nossas apostas.

Isto, no entanto, não é verdadeira pela minha teoria. Pois neste caso, os três primeiros arremessos feitos sem o jogador que detém o dado ter ganho nada, a

soma total mantendo-se assim em jogo, aquele que detém o dado e que concorda em não vai fazer seu quarto lançamento deve tomar $1/6$ como recompensa.

E se ele fez o quatro arremesso sem encontrar o ponto desejado e se eles concordam que ele não deve fazer o quinto, ele vai, no entanto, ter $1/6$ do total de sua parte. Uma vez que toda a soma permanece em jogo não só decorre da teoria, mas é realmente o senso comum de que cada lance deverá ser de igual valor.

Convido-vos, portanto, (para me escrever) para saber se concordamos com a teoria, como acredito que concordamos, ou se discordamos relativamente à sua aplicação.

Eu sou, mais sinceramente, etc.,

Fermat.

3) Terceira carta, de Pascal para Fermat.

Quarta-feira, 29 de julho 1654.

Senhor,

1. A impaciência tomou conta de mim, bem como de si, e embora eu ainda esteja acamado, não posso evitar de lhe dizer que recebi a sua carta respeitante ao problema dos pontos, ontem à noite, das mãos de Sr. Carcavi e que estou mais admirado do que lhe posso contar. Não ousou escrevê-lo por extenso mas, numa palavra, o Sr. encontrou as duas divisões dos pontos e do dado com toda a justiça.

Admiro o seu método para o problema dos pontos mais do que para o do dado. Vi soluções para o problema do dado de várias pessoas, tais como a do Sr. Cavaleiro de Méré que me colocou a questão, e também a do Sr. Roberval. O Sr. de Méré nunca foi capaz de encontrar o valor exato dos pontos, nem foi capaz de encontrar um método de derivação, pelo que eu sou o único que conhece esta proporção.

2. O seu método é muito bom e foi o primeiro que me ocorreu durante estas pesquisas. Mas, devido ao fato de as combinações serem excessivas, eu encontrei um atalho e, na realidade, outro método mais curto e claro, o qual lhe passo a descrever em poucas palavras; pelo que gostaria de lhe abrir o meu coração daqui

para a frente, se tal me é permitido, visto ter sido enorme o prazer que tive com o nosso acordo. Claramente vejo que a verdade é a mesma em Toulouse e em Paris.

Este é o caminho que tomo para saber o valor de cada parte quando 2 jogadores jogam, por exemplo 3 lançamentos, e quando cada um aposta 32 pistolas (dinheiro da época).

Suponhamos que o primeiro tem 2 (pontos) e o outro 1 (ponto). Eles jogam agora uma vez na qual as hipóteses são tais que, caso o primeiro ganhe, ele ganhará a totalidade do que está apostado, ou seja, 64 pistolas. Se o outro ganhar eles ficarão 2 para 2 e, conseqüentemente, se pretenderem dividir acontecerá que cada um retirará o valor da sua aposta, ou seja, 32 pistolas.

Considere então Sr. que se o primeiro ganha 64, serão dele. Se perder, 32 serão dele. Então, se eles não quiserem jogar este ponto e queiram dividir, sem o fazer, o primeiro jogador deverá dizer: Eu tenho 32 pistolas, porque, mesmo que perca elas serão minhas. Quanto às outras 32, talvez as venha a ganhar ou talvez você as ganhe, o risco é igual. Assim, vamos dividir as 32 pistolas a meias, e eu fico com as 32 que são realmente minhas.

Ele terá então 48 e o outro 16.

Agora suponhamos que o primeiro tinha 2 pontos e o outro nenhum, e que jogavam para 1 ponto.

As hipóteses são tais que, caso o primeiro ganhe, levará a totalidade da aposta, 64 pistolas. Se o outro ganhar, tenha em atenção de que eles voltarão à situação atrás descrita, na qual o primeiro tem 2 pontos e o segundo 1 ponto.

Neste caso, já demonstrámos que 48 serão do que tem 2 pontos. Portanto, se eles não quiserem jogar este ponto ele deverá dizer: Se eu ganhar fico com tudo, ou seja, com 64 pistolas. Se eu perder, 48 serão legitimamente minhas. Portanto, dê-me as 48 que me pertencem de certeza mesmo que eu perca e, vamos dividir as outras 16 ao meio pois temos as mesmas hipóteses de as ganhar. Então, ele terá 48 + 8 que são 56.

Vamos agora imaginar que o primeiro tem apenas 1 ponto e o outro nenhum. Repare Sr., que se eles iniciarem uma nova jogada as hipóteses serão tais que, caso o primeiro ganhe, ele terá 2 pontos e o outro 0 e dividindo, como na situação anterior, 56 serão dele. Se ele perder, eles ficarão empatados e 32 serão dele. Ele deverá dizer então: Se não quer jogar dê-me as 32 pistolas que são de certeza

minhas e, vamos dividir o resto das 56 ao meio. De 56 tira 32 ficam 24. Depois, divide 24 ao meio dá 12 para si e 12 para mim, que com 32 dará 44.

Como vê, por este meio, por simples subtração, pela primeira jogada ele terá 12 do outro, pela segunda mais 12 e pela terceira 8.

Mas, para não tornar isto mais misterioso, uma vez que você deseja ver tudo a descoberto, e como não tenho outro objetivo que não seja o de ver se estou errado, o valor (quero dizer, apenas o valor da aposta do outro jogador) da última jogada de 2 é o dobro do da última jogada de 3 e quatro vezes o da última jogada de 4 e 8 vezes o da última jogada de 5, etc.

3. Mas, a relação das primeiras jogadas não é tão fácil de encontrar.

Como não pretendo esconder nada, aqui fica o método e aqui está o problema que considere em tantos casos, como tive o prazer de o fazer: sendo considerado qualquer número de jogadas que alguém pretenda, encontrar o valor da primeira.

Por exemplo, suponhamos que o número de jogadas é 8. Tomam-se os primeiros 8 números pares e os primeiros 8 números ímpares, assim:

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16

e

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

Multiplica-se os números pares desta forma: o primeiro pelo segundo, o seu produto pelo terceiro, o seu produto pelo quarto, o seu produto pelo quinto, etc.; multiplica-se os números ímpares da mesma forma: o primeiro pelo segundo, o seu produto pelo terceiro, etc.

O último produto dos números pares é o denominador e o último produto dos números ímpares é o numerador da fracção, que exprime o valor da primeira jogada de 8. Isto quer dizer que, se cada um joga o número de pistolas iguais ao produto dos números pares, pertencer-lhe-ão (quem perder a jogada) a quantia da aposta do outro, expressa pelo produto dos números ímpares. Isto pode ser provado mas, com muita dificuldade devido às combinações, tais como você imaginou, e eu não consegui prová-lo por este outro método que agora lhe vou explicar mas, apenas pelo das combinações.

Eis aqui os teoremas que conduzem a este, os quais são proposições aritméticas corretas, no que diz respeito às combinações nas quais eu encontrei tantas propriedades bonitas:

4. *Se de qualquer número de letras, como 8 por exemplo,*

A, B, C, D, E, F, G, H,

você formar todas as combinações possíveis de 4 letras, depois todas as combinações de 5 letras, depois as de 6 depois as de 7, de 8, etc. e tomar todas as combinações possíveis, eu digo que, se você adicionar metade das combinações de 4 com cada uma das combinações mais altas, a soma será um número igual ao número da progressão quaternária começando com 2, o qual é metade do número total.

Por exemplo, utilizarei o latim visto o Francês não servir para nada:

Se qualquer número de letras, por exemplo 8,

A, B, C, D, E, F, G, H,

for somado em todas as combinações possíveis, de 4,5,6 até 8, eu afirmo que, se você somar metade das combinações de 4, que são 35 (metade de 70) a todas as combinações de 5, que são 56, e todas as combinações de 6, a saber 28, e todas as combinações de 7, a saber 8, e todas as combinações de 8, a saber 1, a soma é o quarto número da progressão quaternária cujo primeiro termo é 2. Eu digo que o quarto número para 4 é metade de 8.

Os números da progressão quaternária cujo primeiro termo é 2 são

2, 8, 32, 128, 512, etc.,

dos quais 2 é o primeiro, 8 o segundo, 32 o terceiro, e 128 o quarto. Destes o 128 é igual:

+35 (metade das combinações de 4 letras)

+ 56 (as combinações de 5 letras)

+ 28 (as combinações de 6 letras)

+ 8 (as combinações de 7 letras)

+ 1 (a combinação de 8 letras)

5. *Este é o primeiro teorema, o qual é puramente aritmético. O outro diz respeito à teoria dos pontos e é assim:*

É necessário dizer primeiro que: se um (jogador) tem um ponto de 5, por exemplo, apesar de perder 4, o jogo será definitivamente decidido em 8 jogadas, que são o dobro de 4.

O valor da primeira jogada de 5, na aposta do outro, é a fracção que tem como numerador metade da combinação de 4 das 8 (tomei 4 porque é igual ao número de pontos que ele perdeu e 8 porque é o dobro de 4) e para denominador, o mesmo numerador somado a todas as mais altas combinações.

Assim, se eu tiver 1 ponto de 5, 35/128 da aposta do meu opositor pertence-me. Isto quer dizer que, se ele tiver apostado 128 pistolas eu tirarei 35 e deixá-lo-ei com o resto, 93.

Mas, esta fracção, 35/128, é a mesma que 105/384 que é o resultado da multiplicação dos números pares para o denominador e da multiplicação dos números ímpares para o numerador.

O Sr. verá tudo isto sem qualquer dúvida se se der ao trabalho, por isso acho desnecessário discutir mais consigo acerca disto.

6. Contudo, enviar-lhe-ei uma das minhas antigas tabelas; não tenho tempo para copiá-la mas mencioná-la-ei.

Você verá aqui, como sempre, que o valor da primeira jogada é igual ao da segunda, algo que será facilmente provado pelas combinações.

Verá também que os números da primeira linha estão sempre a crescer; os da segunda igualmente, bem como os da terceira.

Mas, após isto, os da quarta linha diminuem, bem como os da quinta. Isto é ímpar.

<i>Se cada um apostar 256 pistolas</i>						
	6 lançamentos	5 lançamentos	4 lançamentos	3 lançamentos	2 lançamentos	1 lançamento
1.º lançamento	63	70	80	96	128	256
2.º lançamento	63	70	80	96	128	
3.º lançamento	56	60	64	64		
4.º lançamento	42	40	32			
5.º lançamento	24	16				
6.º lançamento	8					

<i>Se cada um apostar 256 pistolas</i>						
	<i>6 lançamentos</i>	<i>5 lançamentos</i>	<i>4 lançamentos</i>	<i>3 lançamentos</i>	<i>2 lançamentos</i>	<i>1 lançamento</i>
<i>1.º lançamento</i>	63	70	80	96	128	256
<i>2.º lançamento</i>	126	140	160	192	256	
<i>3.º lançamento</i>	182	200	224	256		
<i>4.º lançamento</i>	224	240	256			
<i>5.º lançamento</i>	248	256				
<i>6.º lançamento</i>	256					

7. Não tenho tempo para lhe enviar a prova de um ponto difícil que muito espantou o Sr. De Méré, pois ele tem competência mas não é um geômetra (o que é como sabe um grande defeito), e ele ainda não compreende que uma linha matemática é infinitamente divisível e está firmemente convencido que é composta por um número finito de pontos. Nunca consegui tirar-lhe essa ideia. Se você conseguisse isso torná-lo-ia perfeito.

Ele diz-me, então, que encontrou um erro nos números, por esta razão:

Se alguém aceitar jogar um 6 com um dado, a vantagem de aceitar fazer isso em 4, está como 671 para 625.

Se alguém aceitar jogar um doble de 6 com 2 dados, a desvantagem de acertar é 24.

Mas, contudo, 24 está para 36 (que é o número de faces de 2 dados) como 4 está para 6 (que é o número de faces de um dado).

Este foi o seu grande escândalo que o fez dizer, altivamente, que os teoremas não eram consistentes e que a aritmética era de loucos. Mas, o Sr. verá facilmente a razão, pelos princípios que possui.

Devo pôr em ordem tudo o que já fiz, quando acabar o Tratado sobre Geometria, no qual tenho vindo a trabalhar há já algum tempo.

8. Também fiz algo com aritmética e peço-lhe para me dar o seu conselho sobre tal assunto.

Propus o seguinte lema, que toda a gente aceitou: a soma dos n primeiros termos da progressão contínua partindo da unidade, como

$$1, 2, 3, 4,$$

multiplicada por 2 é igual ao último termo, 4, multiplicado pelo termo seguinte, 5. Isto equivale a dizer que a soma dos inteiros até A, multiplicada por 2 é igual ao produto

$$A \cdot (A + 1)$$

Chego agora ao meu teorema:

Se um for subtraído à diferença dos cubos de quaisquer dois números consecutivos, o resultado é seis vezes todos os números contidos na raiz do menor deles.

Deixemos as duas raízes, R e S, diferirem por uma unidade. Digo que $R^3 - S^3 - 1$ é igual a seis vezes a soma dos números contidos em S.

Tomemos S como A, então R é A + 1. Portanto, o cubo da raiz R ou A + 1 é

$$A^3 + 3A^2 + 3A + 1^3$$

O cubo de S, ou A, é A^3 e a diferença disto é $R^3 - S^3$; portanto, se subtrairmos uma unidade $3A^2 + 3A$ é igual a $R^3 - S^3 - 1$. Mas, pelo lema, o dobro da soma dos números contidos em A ou S é igual a $A \cdot (A + 1)$; isto é, $A^2 + A$. Portanto, seis vezes a soma dos números em A é igual a $3A^2 + 3A$. Mas, $3A^2 + 3A$ é igual a $R^3 - S^3 - 1$. Então, $R^3 - S^3 - 1$ é igual a seis vezes a soma dos números contidos em A ou S. Quod erat demonstrandum (está demonstrado).

Ninguém me colocou nenhuma dificuldade em relação ao que foi dito atrás mas, disseram-me que ninguém o fez porque todos estão acostumados a este método. Em relação a mim próprio, e digo isto sem estar a fazer nenhum favor a mim próprio, deveriam admitir isto como um excelente tipo de demonstração. Contudo, aguardo pelo seu comentário, com deferência. Tudo o que já provei em aritmética é desta natureza.

9. Aqui estão duas dificuldades (posteriores ou suplementares): provei um teorema simples fazendo uso do cubo de uma linha comparado com o cubo de outra. Com isto quero dizer, que isto é puramente geométrico e de grande rigor.

Assim, resolvi o problema: Dados quaisquer 4 planos, 4 pontos e 4 esferas, encontrar a esfera que, tocando nas esferas dadas, passa pelos pontos dados e deixa nos planos segmentos, nos quais podem ser inscritos certos ângulos e este: Dados quaisquer 3 círculos, 3 pontos e 3 retas, encontrar o círculo que toca nos círculos dados e nos pontos, e que deixa nas retas um arco onde um dado ângulo pode ser inscrito.

Resolvi estes problemas no plano, usando nada mais na sua construção a não ser círculos e retas mas, na demonstração fiz uso de cónicas, parábolas e hipérbolas. Contudo, uma vez que a construção é no plano, mantenho a minha solução no plano, e é assim que ela deve passar.

Este é um pobre reconhecimento da honra que me deu ao apresentar o meu discurso, que o tem vindo a afligir à tanto tempo. Nunca pensei que lhe deveria ter dito duas palavras e, se eu lhe dissesse o que me predomina no meu coração - quanto melhor o conheço, mais o honro e o admiro - e, se quisesse ver a que grau corresponde isto, permitiria um lugar na sua amizade para aquele que é, Sr., o seu...

Pascal.

4) Quarta carta, de Pascal para Fermat.

Segunda-feira, 24 de agosto de 1654.

Senhor,

1. Na última carta não consegui explicar-lhe todas as minhas ideias acerca do problema dos pontos e, ao mesmo tempo, tenho um certo receio em fazer isso pois, temo que esta admirável harmonia conseguida entre nós e que é tão querida para mim, comece a diminuir pois, tenho receio que tenhamos opiniões diferentes em relação a este assunto. Desejo expor-lhe todo o meu raciocínio e, peço-lhe o favor de me corrigir caso eu esteja em erro, ou de me endossar caso esteja correto. Peço-lhe isto com toda a confiança e sinceridade pois nem sequer estou certo que você estará do meu lado.

Quando há somente dois jogadores a sua teoria, que prossegue das combinações, é muito justa. Mas, quando há três, acredito que tenho a prova que é injusto que proceda de qualquer outra maneira diferente daquela que eu tenho. Mas, o método que lhe dei a conhecer, e o qual tenho usado universalmente, é comum a todas as condições imagináveis de distribuição dos pontos, em vez do das combinações (as quais eu não uso, exceto em casos particulares quando é mais curto do que o método habitual), um método que só é bom em casos isolados.

Tenho a certeza de que conseguirei fazê-lo entender mas, são necessárias algumas palavras da minha parte e um pouco de paciência da sua parte.

2. Este é o método de procedimento quando se tem dois jogadores: se dois jogadores estiverem a jogar em vários lançamentos, encontram-se num estado tal que o primeiro carece de 2 pontos e o segundo de 3 para ganhar a aposta, você diz que é necessário ver em quantos pontos será o jogo, absolutamente, decidido.

É conveniente supor que isto será em 4 pontos, donde se conclui que, é necessário ver de quantas maneiras diferentes podem ser distribuídos os pontos, entre os dois jogadores, quantas combinações existem para fazer com que o primeiro ganhe e, quantas para fazer com que o segundo ganhe e, para dividir a aposta de acordo com essa proporção. Eu dificilmente poderia entender esta explicação se não a soubesse antes; mas, você também escreveu isto na sua discussão. Então, para ver de quantas maneiras 4 pontos podem ser distribuídos entre dois jogadores, é necessário imaginar que eles jogam com um dado de apenas 2 faces (uma vez que há apenas dois jogadores), como cara e coroa, e que eles lançam 4 dados destes (porque eles jogam 4 vezes). Agora, é necessário ver de quantas maneiras podem eles cair. Isso é fácil de calcular. Podem haver 16, que é a segunda potência de 4; que é o mesmo que dizer, o seu quadrado. Agora imagine que uma das faces tem marcado a, favorável ao primeiro jogador. E, suponha que a outra tem marcado b, favorável ao segundo. Então estes 4 dados podem cair de acordo com qualquer uma destas disposições:

a	a	a	a		a	a	a	a		b	b	b	b		b	b	b	b
a	a	a	a		b	b	b	b		a	a	a	a		b	b	b	b
a	a	b	b		a	a	b	b		a	a	b	b		a	a	b	b
a	b	a	b		a	b	a	b		a	b	a	b		a	b	a	b
1	1	1	1		1	1	1	2		1	1	1	2		1	2	2	2

e, porque o primeiro jogador carece de dois pontos, todas as disposições que têm 2 a's fazem com que ele ganhe. Assim sendo, tem 11 a seu favor. E, porque o segundo carece de três pontos, todas as disposições que têm 3 b's, fazem com que ele ganhe. Há 5 desta forma. Assim, é necessário que eles dividam a aposta como 11 está para 5.

Pelo seu método, quando temos dois jogadores, você diz que se existirem mais jogadores, não será difícil fazer a divisão por este método.

3. Neste ponto Sr., digo-lhe que esta divisão, baseada nas combinações, é muito equitativa e boa mas, se houver mais do que dois jogadores nem sempre é justo e devo-lhe dizer a razão para tal diferença. Comuniquei o seu método a (alguns dos) nossos cavalheiros, e o Sr. Roberval fez-me esta objecção:

Que é errado basear o método de divisão na suposição que eles estão a jogar por 4 lançamentos vendo que, quando um carece de dois pontos e o outro de três, não há necessidade que eles joguem quatro jogadas, uma vez que, pode dar-se o caso que joguem dois, ou três ou, na verdade, talvez quatro.

Isto porque ele não vê por que é que um deve fingir fazer uma divisão justa, com a condição assumida que um jogue quatro lançamentos, tendo em consideração o facto de que, nos termos naturais do jogo, eles não devem lançar o dado depois de um dos jogadores ter ganho; e que, se isto pelo menos não é falso, deve ser provado. Consequentemente, ele suspeita que nós tenhamos cometido um paralogismo.

Eu respondi-lhe que não tinha encontrado a minha explicação, tanto no método das combinações, que na verdade não está em causa neste momento, como no meu método universal, do qual nada escapa e que transmite a sua prova por si mesmo. Este encontra a mesma divisão que a do método das combinações. Além disso, mostrei-lhe a verdade das divisões entre os dois jogadores pelas combinações, da seguinte forma: não é verdade que, se dois jogadores, estando de acordo com as condições da hipótese de que um carece de dois pontos e o outro de três, devem, de comum acordo, jogar 4 jogadas completas, isto é, que devem lançar 4 vezes, ao mesmo tempo, dois dados de duas faces - não é verdade, digo eu, que, caso eles estejam impedidos de jogar as 4 jogadas, a divisão deve ser, como já dissemos, de acordo com as combinações favoráveis a cada um? Ele concordou com isto e isto está de facto provado. Mas, ele negou que o mesmo acontece

quando eles não são obrigados a jogar as 4 jogadas. Então, eu respondi como se segue:

Não é óbvio que os mesmos jogadores, não estando obrigados a fazer as 4 jogadas mas, desejando desistir do jogo antes de um deles ter alcançado a sua pontuação, podem, sem perda ou ganho, ser obrigados a jogar as 4 jogadas, e que esse entendimento não muda, de modo algum, as suas condições? Visto que se o primeiro ganhar os 2 primeiros pontos de 4, não deverá, aquele que ganhou, recusar jogar mais 2 jogadas, vendo que se ele ganhar, não ganhará mais e se perder, não ganhará menos? Porque os dois pontos que o outro ganhar não são suficientes, dado que ele carece de 3 e não há pontos que cheguem, em 4 jogadas, para ambos conseguirem o número que lhes falta.

É com certeza conveniente considerar que, é absolutamente igual e indiferente para cada um, quer eles joguem segundo a maneira natural do jogo, a qual é acabar assim que um consiga a sua pontuação, quer eles joguem as 4 jogadas por completo. Assim sendo, dado que estas duas condições são iguais e indiferentes, a divisão deve ser semelhante para ambos. Mas, dado que só é justo quando eles são obrigados a jogar as 4 jogadas, como eu mostrei, também é, portanto, justo no outro caso.

Esta foi a maneira como eu o provei e, como deve estar recordado, esta demonstração é baseada na igualdade das duas condições verdadeiras, assumidas em relação aos dois jogadores, a divisão é a mesma em cada um dos métodos e, se um ganhar ou perder por um método, ele perderá ou ganhará pelo outro, e os dois terão sempre a mesma quantia.

4. *Usemos o mesmo argumento para três jogadores e, assumamos que ao primeiro falta 1 ponto, ao segundo 2 e ao terceiro 2. Para fazer a divisão, seguindo o mesmo método das combinações, é necessário primeiro descobrir em quantos pontos pode ser decidido o jogo, como fizemos quando havia 2 jogadores. Aqui, terão que ser em três pontos, pois eles não conseguem jogar 3 jogadas sem, necessariamente, chegar a uma conclusão.*

É agora necessário ver de quantas maneiras podem ser combinadas as 3 jogadas, entre os jogadores, e quantas são favoráveis ao primeiro, quantas são ao segundo e quantas ao terceiro, e seguindo a proporção na distribuição da aposta, como fizemos na hipótese dos 2 jogadores.

É fácil ver quantas combinações há ao todo. Isto é a terceira potência de 3; que é o mesmo que dizer, o seu cubo, ou 27. Pois, se um atirar 3 dados ao mesmo tempo (pois é necessário atirar 3 vezes), tendo estes dados 3 faces cada um (uma vez que há 3 jogadores), uma marcada a favorável ao primeiro, uma marcada b favorável ao segundo e outra marcada c favorável ao terceiro, - é evidente que estes 3 dados atirados, ao mesmo tempo, podem cair de 27 maneiras diferentes, como:

a	a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b	b	c	c	c	c	c	c	c	c	c	
a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c	
a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1			1	1	1	1			1			
				2						2		2	2	2		2						2					
								3									3			3			3	3	3	3	

Dado que o primeiro carece de 1 ponto então, todas as distribuições onde aparece um a são-lhe favoráveis. Ao todo há 19. O segundo carece de 2 pontos. Então, todas as distribuições onde há dois b's, são a seu favor. Há 7 delas. O terceiro carece de 2 pontos. Portanto, todas as distribuições onde aparecem dois c's são-lhe favoráveis. Há 7 destas.

Se nós concluirmos daqui, que é necessário dar a cada um de acordo com a proporção 19, 7, 7, estamos a cometer um sério erro, e eu hesitaria em acreditar que você faria isto. Há diversos casos favoráveis ao primeiro e ao segundo, como **abb** tem o a de que o primeiro precisa, e os 2 b's de que precisa o segundo. Assim como o **acc** é favorável ao primeiro e ao terceiro.

Portanto, não é desejável contar as distribuições que são comuns aos dois como valendo o valor total de cada mas, somente metade do ponto. Pois, se a distribuição **acc** ocorrer, o primeiro e o terceiro deverão ter o mesmo direito à aposta, fazendo cada um à sua pontuação. Assim sendo, eles devem dividir a aposta ao meio. Se a distribuição **aab** ocorrer, o primeiro ganha sozinho. É necessário fazer a seguinte suposição:

Existem 13 distribuições que dão o total da aposta ao primeiro, 6 que dão metade e 8 que não lhe valem de nada. Assim, se a soma total for uma pistola, há 13 distribuições, em que cada uma lhe vale uma pistola, há 6 que lhe valem 1/2 de uma pistola, e 8 que não lhe valem de nada.

Então, neste caso da divisão, é necessário multiplicar

	13	<i>por uma pistola que dá</i>	13
	6	<i>por metade que dá</i>	3
	8	<i>por zero que dá</i>	0
Total	27		16

e dividir a soma dos valores, 16, pela soma das distribuições, 27, o que dá a fracção 16/27 e é esta quantia que pertence ao primeiro jogador, no caso de haver uma divisão; o que quer dizer, 16 pistolas de 27.

As partes do segundo e terceiro jogador serão as mesmas:

<i>Há</i>	<i>4</i>	<i>distribuições que valem 1 pistola; multiplicando,</i>	<i>4</i>
<i>Há</i>	<i>3</i>	<i>distribuições que valem 1/2 de uma pistola; multiplicando,</i>	<i>1 1/2</i>
<i>e</i>	<i>20</i>	<i>distribuições que não valem nada</i>	<i>0</i>
<i>Total</i>	<i>27</i>		<i>5 1/2</i>

Assim 5 1/2 pistolas de 27 pertencem ao segundo jogador, e o mesmo ao terceiro. A soma de 5 1/2, 5 1/2 e 16 dá 27.

5. *Parece-me que é esta a maneira na qual é necessário fazer a divisão pelas combinações, de acordo com o seu método, a não ser que tenha algo mais sobre o assunto que eu não saiba. Mas, se não estou enganado, esta divisão é injusta.*

A razão é que estamos a fazer uma suposição falsa, isto é, que eles estão a jogar 3 lançamentos sem exceção, em vez da condição natural deste jogo que é, que eles não devem jogar a não ser quando um dos jogadores obtiver o número de pontos que lhe faltam, e nesse caso o jogo termina.

Não é que tal não possa acontecer ao jogarem 3 vezes mas, pode acontecer que eles joguem uma ou duas vezes e não necessitem de jogar outra vez.

Mas dirá você: porque é que é possível fazer a mesma suposição neste caso como fizemos no caso dos 2 jogadores? Aqui fica a razão: na verdadeira condição (do jogo) entre 3 jogadores só um pode ganhar pois, pelos termos do jogo, terá terminado assim que um (dos jogadores) ganhe. Mas, sob as condições assumidas, 2 podem obter o número dos seus pontos, dado que o primeiro pode ganhar o ponto

que lhe falta e, um dos outros pode ganhar os 2 pontos que lhe faltam, desde que eles tenham jogado só 3 jogadas. Quando há apenas 2 jogadores, as condições assumidas e as verdadeiras condições contribuem para a vantagem dos 2. É isto que faz a maior diferença entre as condições assumidas e as verdadeiras.

Se os jogadores se encontrarem no estado dado na hipótese, - o que é o mesmo que dizer que, se o primeiro carece de 1 ponto, o segundo de 2 e o terceiro de 2; e se eles concordarem e cooperarem para a estipulação de que eles jogarão 3 jogadas completas; e se aquele que fizer e os pontos que lhe faltam tomar o total da soma se for o único a conseguir os pontos; ou se dois conseguirem obtê-los, que devem partilhar equitativamente, - neste caso, a divisão deve ser feita como eu indico aqui: o primeiro deve ficar com 16, o segundo com $5\frac{1}{2}$ e o terceiro com $5\frac{1}{2}$ de 27 pistolas, e isto traz consigo a sua prova na suposição da condição acima indicada.

Mas, se eles jogarem simplesmente na condição de que não jogarão necessariamente as 3 jogadas mas, que jogarão apenas até que um deles tenha obtido os seus pontos, e que então o jogo deve acabar sem dar a outro a oportunidade de alcançar a sua pontuação, então 17 pistolas deverão pertencer ao primeiro, 5 ao segundo e 5 ao terceiro, de um total de 27. E isto é dado pelo meu método geral que também determina que, sob a condição precedente, o primeiro deve ficar com 16, o segundo com $5\frac{1}{2}$ e o terceiro com $5\frac{1}{2}$, sem usar as combinações - pois, isto resulta para todos os casos e sem nenhum obstáculo.

6. Estas, Sr., são as minhas reflexões sobre este tópico, no qual não tenho nenhuma vantagem sobre si excetuando o facto de ter meditado nele mais tempo mas, isto é pouco (vantajoso para mim) do seu ponto de vista, uma vez que o seu primeiro palpite é mais penetrante que as minhas prolongadas tentativas.

Não me é permitido revelar-lhe as minhas razões para estar ansioso pelas suas opiniões. Acredito que você reconheceu nisto que a teoria das combinações é boa, para o caso dos 2 jogadores, por acidente, como também é, por vezes, boa no caso dos 3 jogadores, como quando um carece de 1 ponto, outro de 1 e o outro de 2, pois neste caso, o número de pontos aos quais o jogo termina não é suficiente para permitir que 2 ganhem mas, não é um método geral e é bom somente no caso de ser necessário jogar, exatamente, um dado número de vezes.

Consequentemente, como você não tinha o meu método quando me enviou a divisão entre vários jogadores mas, (dado que você tinha) só o das combinações, temo que defendamos diferentes pontos de vista relativamente a este assunto.

Após ter referido, mais uma vez, para que casos a teoria das combinações é boa, Pascal volta a confessar a Fermat, como já tinha feito no início desta carta, o seu receio de que estejam a ser utilizadas diferentes abordagens do problema.

Peço-lhe que me informe acerca do modo como procederia na sua pesquisa neste problema. Receberei a sua resposta com respeito e alegria, mesmo que as suas opiniões sejam contrárias às minhas.

Pascal.

5) Quinta carta, de Fermat para Pascal.

Sábado, 29 de agosto de 1654.

Senhor,

*1. A nossa troca continua e fico contente que os nossos pensamentos estejam em tão perfeita sintonia como parece, desde o momento em que tomámos a mesma direcção e seguimos o mesmo caminho. O seu recente **"Tratado Aritmético do Triângulo"** e as suas aplicações são uma prova autêntica e se as minhas computações não me enganam, a sua 11^a consequência foi de Paris a Toulouse, enquanto o meu teorema sobre números figurados, que é praticamente o mesmo, ia de Toulouse a Paris.*

Enquanto estive a trabalhar no problema, não me preocupei em procurar os erros e estou convencido que o verdadeiro modo de escapar aos erros é cooperando consigo. Mas, se devo dizer mais, será da natureza de um cumprimento, e que devemos banir aquele inimigo da doce e fácil conversação.

Chegou agora a minha vez de lhe dar a conhecer algumas das minhas descobertas numéricas mas, o fim do parlamento aumenta os meus deveres e espero que, pondo de lado a sua bondade, me concederá o devido e quase necessário respeito.

2. *Contudo, irei responder à sua questão dos 3 jogadores que fazem 3 jogadas. Quando o primeiro tem um (ponto) e os outros nenhum, a sua primeira solução é a verdadeira e a divisão da aposta deve ser 17, 5 e 5. A razão para isto é por si só evidente e segue sempre o mesmo princípio, as combinações, tornando claro que o primeiro tem 17 hipóteses enquanto cada um dos outros tem apenas 5.*

3. *Quanto ao resto, não haverá nada que eu lhe escreva no futuro que não seja com franqueza. Contudo, medite, se achar conveniente, neste teorema: as potências quadradas de 2 adicionadas à unidade(3) são sempre números primos. [Isto é,]*

O quadrado de 2 adicionado à unidade dá 5, que é um número primo;

O quadrado do quadrado é 16 que, quando a unidade lhe é adicionada faz 17, um número primo;

O quadrado de 16 é 256 que, quando lhe é adicionada a unidade faz 257, um número primo;

e assim até ao infinito.

Esta é uma propriedade cuja veracidade lhe mostrarei. A sua prova é muito difícil e asseguro-lhe que ainda não a consegui encontrar completamente. Não deverei pô-la em ordem para si, a não ser que chegue ao seu fim.

Este teorema serve na descoberta dos números que estão numa dada relação às suas partes alíquotas, tendo em conta que fiz muitas descobertas. Falaremos disso noutra altura.

Eu sou, Senhor, o seu etc.

Fermat.

Em Toulouse, a 29 de agosto de 1654.

6) Sexta carta, de Fermat para Pascal.

Sexta-feira, 25 de setembro de 1654.

Senhor,

1. *Não esteja apreensivo que o nosso argumento está a chegar ao fim. Você incutiu a si próprio o pensamento de destruí-lo e, parece-me que respondendo por si próprio ao Sr. Roberval, também está a responder por mim.*

*Ao tomar o exemplo dos três jogadores aos quais, ao primeiro falta um ponto e a cada um dos outros faltam dois, que é o caso a que você se opõe, eu encontro aqui apenas 17 combinações para o primeiro e 5 para cada um dos outros; porque quando você diz que a combinação **acc** é boa para o primeiro, lembre-se que tudo o que é feito após um dos jogadores ter ganho nada vale. Mas, esta combinação tendo obrigado o primeiro a ganhar na primeira jogada, o que é que importa que o terceiro ganhe 2 (jogadas) em seguida, se mesmo quando ele ganha trinta, tudo isto é supérfluo? A consequência, como você bem a chamou, "está invenção", de estender o jogo a um certo número de jogadas serve apenas para tornar a regra fácil e (de acordo com a minha opinião) tornar todas as hipóteses iguais; ou melhor, mais logicamente, para reduzir todas as fracções ao mesmo denominador.*

*Para que você não tenha dúvidas, se em vez de três pessoas você alargar a conjectura para quatro, não haverá apenas 27 combinações mas 81; e será necessário ver quantas combinações fazem o primeiro ganhar o seu ponto mais tarde do que cada um dos outros ganhar dois e, quantas combinações farão cada um dos outros ganhar dois [pontos] mais tarde do que o primeiro ganhar um. Você verá que as combinações que fazem o primeiro ganhar são 51 e para cada um dos outros dois são 15, o que se reduz para a mesma proporção. Por conseguinte, se você tirar 5 jogadas ou qualquer outro número que quiser, você vai sempre encontrar 3 números na proporção de 17, 5, 5. E, de acordo com isto, estou certo em afirmar que a combinação **acc** é [favorável] apenas para o primeiro e não para o terceiro, e que **cca** é apenas para o terceiro e não para o primeiro e, conseqüentemente a minha lei de combinações é a mesma para 3 jogadores como para 2, e em geral para todos os números.*

2. *Você já viu através da minha carta anterior que não levantei objecções à verdadeira solução da questão dos 3 jogadores sobre a qual lhe envio os 3 números definitivos 17, 5, 5. Mas, porque o Sr. Roberval vai provavelmente ficar mais satisfeito em ver uma solução sem qualquer dissimulação e porque poderá talvez render-se a abreviações em muitos casos, aqui está um exemplo:*

O primeiro poderá ganhar numa única jogada, ou em duas, ou em três.

Se ele ganhar num único lançamento, é necessário que ele faça um lançamento favorável com um dado de 3 faces à primeira tentativa. Um único dado irá conceder 3 hipóteses. O jogador tem então 1/3 da aposta porque irá jogar apenas um terço. Se ele jogar 2 vezes, poderá ganhar de 2 maneiras,- ou quando o

segundo jogador ganha a primeira e ele a segunda, ou quando o terceiro ganha a jogada e quando ele ganha a segunda. Mas, 2 dados produzem 9 hipóteses. O jogador tem então $2/9$ da aposta quando eles jogam duas vezes.

Mas, se ele jogar 3 vezes, ele pode ganhar apenas de 2 maneiras, ou o segundo ganha na primeira jogada e o terceiro ganha na segunda, e ele na terceira; ou quando o terceiro ganha a primeira jogada, o segundo a segunda, e ele a terceira; pois se o segundo ou o terceiro jogador ganha as 2 primeiras, ele irá ganhar a aposta e o primeiro jogador não. Mas 3 dados dão 27 hipóteses, nas quais o primeiro jogador tem $2/27$ das hipóteses quando eles jogarem 3 partidas.

A soma das hipóteses que fazem o primeiro jogador ganhar é conseqüentemente $1/3$, $2/9$, e $2/27$, que dá $17/27$.

Esta regra é boa e geral para todos os casos do género, onde, sem recorrer a supostas condições, as verdadeiras combinações de cada número de jogadas dão a solução e, tornam claro o que eu disse no início, que a expressão para um certo número de pontos não é nada mais do que a redução das diversas fracções ao mesmo denominador. Em poucas palavras, é «o todo» do mistério, que nos reconcilia sem qualquer dúvida no entanto, cada um de nós procurou apenas razão e verdade.

3. *Espero enviar-lhe, no dia de São Martinho, um resumo de tudo o que descobri de anotações que dizem respeito a números. Permita-me ser conciso, [visto ser suficiente] para me dar a entender a um homem [como você] que compreende o todo com poucas palavras. O que você irá achar de mais importante em relação ao teorema de que cada número é composto por 1, 2 ou 3 triângulos; por 1, 2, 3 ou 4 quadrados; por 1, 2, 3, 4 ou 5 pentágonos; por 1, 2, 3, 4, 5, ou 6 hexágonos, e assim até ao infinito.*

Para obter isto é necessário mostrar que todo o número primo maior que um múltiplo de 4, uma unidade, é composto por 2 quadrados, como 5, 13, 17, 29, 37, etc.

Dado um número primo maior deste tipo, como 53, encontrar, através de uma regra geral, os 2 quadrados que o compõem.

Todo o número primo maior que um múltiplo de 3, uma unidade, é composto por um quadrado e por um triplo de outro quadrado, como 7, 13, 19, 31, 37, etc.

Todo o número primo maior que um múltiplo de 8, uma ou 3 unidades, é composto por um quadrado e pelo dobro de outro quadrado, como 11, 17, 19, 41, 43, etc.

Não existe nenhum triângulo de números cuja área é igual a um número quadrado.

Isto vem de uma invenção de muitos teoremas, com os quais Bachet se consagrou a si próprio ignorante e que faltam em Diofante.

*Estou convencido que assim que você tenha conhecimento da minha maneira de demonstrar este tipo de teoremas, lhe irá parecer boa e que lhe dará a oportunidade para uma multidão de novas descobertas, pois tal segue como sabe de que **multi pertranseant ut augeatur scientia** (muitos vão longe com o aumento da sabedoria).*

Quando tiver tempo, falaremos posteriormente de números mágicos e resumirei o meu anterior trabalho sobre este assunto.

Eu sou, Sr, cordialmente o seu

Fermat.

25 de setembro.

Estou a escrever isto do campo, e isto poderá atrasar as minhas respostas durante as férias.

7) Sétima carta, de Pascal para Fermat.

Terça-feira, 27 de outubro de 1654.

Senhor,

Sua última carta satisfaz-me perfeitamente. Eu admiro o seu método para o problema dos pontos, ainda mais porque eu entendo-o muito bem. Ele é inteiramente seu, não tem nada em comum com o meu, e chega facilmente às mesmas conclusões. Agora a nossa harmonia começou novamente.

Mas, Sr., eu concordo com você nisso, encontrar alguém em outro lugar para segui-lo em suas descobertas sobre números, as declarações de que você era tão

bom quanto para me enviar. De minha parte, confesso que isso me passa a uma grande distância, eu sou competente apenas para admirá-lo e peço-lhe humildemente para usar seu tempo livre para o mais cedo possível chegar a uma conclusão. Todos os nossos senhores viram no sábado passado e o apreciaram cordialmente. Não é possível, muitas vezes esperarmos por coisas que são tão boas e tão desejáveis. Pense nisso, se você quiser, e tenha a certeza de que eu sou etc.

Pascal.

Paris, 27 de outubro de 1654.