UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO (UFRRJ)
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

DISSERTAÇÃO

O USO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E DE SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA NO ENSINO DE MATRIZES E SUAS OPERAÇÕES

ANDRÉ ARRUDA GOMES

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

O USO DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS E DE SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA NO ENSINO DE MATRIZES E SUAS OPERAÇÕES

ANDRÉ ARRUDA GOMES

Sob a Orientação do Professor
Douglas Monsôres de Melo Santos

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática,** no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Seropédica, RJ
Agosto/2013

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

ANDRÉ ARRUDA GOMES

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre** , no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 20/08/2013

Douglas Monsôres de Melo Santos

Douglas Monsôres de Melo Santos

Doutor em Matemática – UFRRJ

(Orientador)

Aline Mauricio Barbosa

Aline Mauricio Barbosa

Doutora em Matemática – UFRRJ

Edilaine Ervilha Nobili

Edilaine Ervilha Nobili

Doutora em Matemática – UFF

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer, primeiramente a Deus, por me proporcionar condições para a conquista desse objetivo.

À minha família, que muitas vezes me serviu de inspiração para prosseguir.. Em especial as minhas filhas Juliana e Joana que com carinho me deram a certeza de que não estive sozinho nessa caminhada. E a minha esposa Maria Luiza que apesar das dificuldades e momentos difíceis permaneceu ao meu lado até agora. E a todos os meus familiares que compreenderam a minha ausência.

Ao meu orientador e professor Douglas Monsôres, que participou de forma muito ativa nesse trabalho, compartilhando comigo seus conhecimentos.

Agradeço também a todos os professores do PROFMAT que influenciaram de modo contundente para a minha formação profissional e para a realização desse trabalho.

Ao meus colegas de jornada, por todos os momentos de companheirismos em que trocamos experiências, conhecimentos e risadas, transformando nossas estudos em momentos prazerosos.

E por fim a todos que fizeram parte direta ou indiretamente durante esse período.

RESUMO

Este trabalho trata de uma proposta pedagógica alternativa para o ensino de matrizes e de suas operações. Tradicionalmente, os livros didáticos abordam as operações entre matrizes baseando-se apenas no ponto de vista algébrico, de uma maneira abstrata e com contextualizações artificiais. A abordagem proposta aqui é conduzida através do estudo das transformações geométricas no plano. Assim, é possível dar uma interpretação geométrica para cada matriz. Uma das vantagens dessa escolha é poder se utilizar de softwares de Geometria Dinâmica, que tornam o processo de ensino-aprendizagem mais instigante, permitindo que o aluno tenha uma posição menos passiva no decorrer desse processo. Com isso espera-se que ele deixe de ser um mero expectador de regras e conceitos e passe a ser responsável pela produção do seu conhecimento, contribuindo assim para a desmistificação da aprendizagem da Matemática.

Palavras-chave: Matrizes, Transformações Geométricas, GeoGebra.

ABSTRACT

This work is a pedagogical alternative for teaching arrays and their operations. Traditionally, textbooks dealing transactions between matrices based solely on algebraic point of view, in an abstract way and contextualization artificial. The approach proposed here is conducted through the study of geometric transformations in the plane. Thus, it is possible to provide a geometric interpretation for each matrix. One advantage of this choice is to use the power of Dynamic Geometry software, that make the process of teaching and learning more exciting, allowing the student to have a less passive during this process. Thus it is expected that it ceases to be a mere spectator of rules and concepts and become responsible for its knowledge production, thereby helping to demystify the learning of mathematics.

Keywords: Matrices, Geometric Transformations, GeoGebra.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Muito se diz acerca da importância da educação no desenvolvimento de uma nação, assim como as deficiências do sistema educacional brasileiro. Um reflexo dessas deficiências é a dificuldade no aprendizado da Matemática, verificadas em avaliações estaduais ou nacionais como Enem, Saeb, Saerj, entre outras.

De um modo geral, o ensino da Matemática nas escolas, se faz de maneira compartimentalizada, onde os professores do ensino fundamental e médio desenvolvem com os seus alunos os conteúdos de cunho algébrico e os algoritmos das operações matemáticas, de um modo repetitivo, descontextualizado, sem conexão com outras áreas da própria matemática, quiçá com a vivência social desse aluno, para depois se sobrar tempo, mostrar que esses algoritmos têm aplicações que podem ser relacionadas a essas vivências.

O objetivo dessa dissertação é abordar o ensino das matrizes e de suas operações, através de um viés geométrico, contemplando o plano cartesiano, os seus pontos, vetores e as transformações geométricas clássicas no plano, como homotetias, translações, reflexões, rotações, projeções e cisalhamentos, além de composições dessas transformações.

A metodologia desta pesquisa será norteada pelo uso de uma ferramenta digital, o *software* de Geometria Dinâmica Geogebra, visando estimular os alunos a entender as propriedades algébricas dessas transformações. Espera-se também que essa proposta motive professores do ensino básico e estudantes de licenciatura em Matemática a pesquisar novas alternativas de ensino.

Seguindo o curso natural da História da Matemática, em 1858, trabalhando com sistemas lineares em duas variáveis e transformações geométricas no plano, Arthur Cayley, matemático britânico, definiu o conceito de matriz e suas operações. Como um sistema linear em duas variáveis “x” e “y” é caracterizado por quatro coeficientes dependentes “a”, “b”, “c” e “d”, e dois coeficientes independentes “ x’ ” e “ y’ ”, ele denotou esse sistema da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad \text{escrevia} \quad (x', y') = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (x, y)$$

Cayley observou que álgebra de matrizes por ele definida era tal que o produto de dois elementos depende da ordem dos fatores, ou seja, o produto não é comutativo. Cayley publicou suas descobertas no livro “Memoir on the theory of matrices”. Esse sistema linear pode ser interpretado geometricamente através de uma transformação linear do plano que transforma um vetor (x, y) num vetor (x’, y’).

O que se percebe nos dias de hoje é que essa ponte existente entre a Geometria e a Álgebra das Matrizes é omitida dos alunos ao estudar esse tema, assim como informações como esta sobre a História da Matemática, que poderiam ampliar o interesse do aluno em saber como todos esses conhecimentos matemáticos foram construídos com o passar do tempo. A grande maioria dos livros didáticos de Ensino Médio se importa apenas em definir matriz como sendo uma tabela composta de números, e suas operações são simplesmente informadas, sem qualquer ligação com o contexto geométrico que deu origem à teoria das matrizes.

A dissertação é organizada como segue: no Capítulo 1 analisam-se os documentos oficiais e as reflexões de pesquisadores da área de Educação e de Educação Matemática, que fundamentem a proposta da presente pesquisa.

O Capítulo 2 introduz de maneira formal os conceitos de vetores, de transformações geométricas no plano, até a composição dessas transformações, mostrando também a relação desses objetos com as matrizes e sua álgebra de operações.

No Capítulo 3 detalha-se o desenvolvimento da pesquisa em sala de aula, durante quatro semanas, tempo destinado à apresentação do tema do modo tradicional. As considerações finais sobre o trabalho são feitas após esse capítulo.

1. A RELAÇÃO DA METODOLOGIA APLICADA COM OS SABERES PEDAGÓGICOS

O estudo do tema abordado na presente dissertação se justifica com base no baixo rendimento dos alunos dos ensinos fundamental e médio durante o processo de aprendizagem da Matemática, como é verificado em diversas avaliações nacionais como, a Prova Brasil.

Segundo Oliveira e Rezende (2012), esses resultados são reflexos da baixa qualidade de ensino oferecido nas Escolas Públicas do Brasil.

Quando se coloca em foco a disciplina de Matemática, percebe-se que muitas das habilidades algébricas e geométricas que deveriam ser adquiridas pelos alunos do ensino básico não são sequer contempladas.

> *Para mencionar outro desafio também relevante, a educação matemática e científica proporcionada aos nossos alunos que concluem o ensino médio é muito deficiente. Para ficar em um exemplo, há um largo conjunto de competências associadas à resolução de problemas algébricos e geométricos, cujo desenvolvimento sequer chega a ser observado. (*OLIVEIRA, REZENDE, 2012)

O fracasso desse resultado pode ser atribuído ao ensino de Matemática, que no início de século XX foi majoritariamente pautado em processos de repetição, algoritmos decorados sem a compreensão dos porquês da execução de cada passo, e nem mesmo dos objetivos da execução desses processos.

Esse modelo de ensino, descompromissado em conectar os conteúdos matemáticos com a vivência social do aluno e que coloca esse último como mero coadjuvante do processo de aprendizagem, se enquadra na concepção "bancária" de educação, descrita por Paulo Freire:

> *O educador aparece como seu indiscutível agente, como o seu real sujeito, cuja tarefa indeclinável é "encher os educandos dos conteúdos de sua narração". Conteúdos que são retalhos da realidade desconectados da totalidade em que se engendram e que em cuja visão ganhariam significação". (FREIRE, 1970)*

Todas essas concepções equivocadas acerca do ensino da Matemática acabam rotulando-a como uma disciplina detestável e de difícil entendimento. Reclamações por parte dos alunos são constantes: de onde surgiu e para que isso professor? Em que isso me será útil algum dia?

> *A maioria dos currículos escolares de Matemática se apresentam mais ricos do que aqueles do começo do século. Apesar de tudo isso ainda hoje se ouve as mesmas queixas: que os estudantes não gostam e não aprendem Matemática suficientemente bem; que os professores não sabem Matemática e não sabem ensiná-la; que os currículos escolares são superficiais, repetitivos e fragmentados... Todas essas queixas demonstram que os alunos saem mal preparados da escola, não sabendo fazer uso da Matemática trabalhada ao longo de muitos anos de escolaridade. Como já dissemos muitas vezes, adultos podem se mostrar incapazes de tomar decisões na vida. Essas pessoas nem sempre pensam matematicamente e tampouco percebem que, se o fizessem, poderiam tomar melhores decisões. (ONUCHIC, 2008)*

Esses dados sobre o ensino de Matemática e sobre as avaliações nacionais tornam legítima a pesquisa por métodos alternativos de ensino de todos os conteúdos da área de Matemática presentes na matriz curricular do Ensino Médio.

1.1. O estudo de Matrizes e Transformações Geométricas. Um paralelo com os PCN.

O tema escolhido na presente pesquisa é o ensino das Matrizes e de suas operações, normalmente estudados pelos alunos do segundo ano do Ensino Médio. A abordagem escolhida para o desenvolvimento deste tema será feita relacionando-o aos conceitos de vetores e transformações geométricas no plano.

Neste item, pretende-se explorar os escritos dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), e encontrar informações que corroborem com essa abordagem geométrica no ensino da álgebra matricial.

Os PCN foram construídos a fim de facilitar o trabalho da educação escolar, auxiliando as instituições de ensino na elaboração de seu Projeto Político Pedagógico.

Atualmente os PCN estão divididos em três grandes grupos, o que contempla o primeiro segmento do Ensino Fundamental, do 1º ao 5º ano, outro que corresponde ao segundo segmento do Ensino Fundamental, do 6º ao 9º ano, e por fim, o grupo dedicado ao Ensino Médio. Cada grupo tem seis volumes que apresentam as áreas do conhecimento, como: Língua Portuguesa, Matemática, Ciências Naturais, História, Geografia, Arte, Educação Física e os "Temas Transversais", discriminados em: Ética, Saúde, Educação Sexual, Meio Ambiente, Trabalho e Consumo e Pluralidade Cultural.

Assim os PCN são usados como referências para o trabalho dos professores em todas as disciplinas e áreas do Ensino Fundamental e Ensino Médio, tendo como objetivo garantir que todo estudante, independente da série cursada, possa usufruir dos conhecimentos básicos necessários para o exercício da cidadania.

Quando se analisam os escritos sobre matrizes nos PCN, é possível perceber a preocupação para com o uso da notação tabular, necessária no trato de planilhas eletrônicas e de calculadoras.

> *As planilhas eletrônicas são programas de computador que servem para manipular tabelas cujas células podem ser relacionadas por expressões matemáticas. Para operar com uma planilha, em um nível básico, é preciso conhecimento matemático similar àquele necessário ao uso de calculadora, mas com maiores exigências quanto à notação de trabalho*, já que as operações e as funções são definidas sobre as células de uma tabela em que se faz uso de notação para matrizes. *(BRASIL, 2000. P.87)*

Em geral, é assim que o conceito de matriz é introduzido nos livros didáticos, isto é, como uma tabela de dados. Saber realizar leitura e interpretação de gráficos e tabelas é uma competência exigida pelo MEC em sua matriz curricular do Exame Nacional do Ensino Médio (Brasil, 2009. p6): "interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação."

Quando se fala das operações entre duas matrizes, o que se observa é uma desconexão com essa contextualização das tabelas de dados, principalmente no caso da multiplicação de matrizes. Não há nenhuma relação entre a maneira como são definidos a soma e o produto de matrizes. Enquanto a soma é bastante natural, o produto parece um tanto "forçado". Bem artificiais também são algumas tentativas de contextualizar o produto de matrizes usando tabelas, presentes em alguns livros didáticos como relata Stormowski (2008, p.13).

> *Para a multiplicação de matrizes é apresentado um exemplo de notas de um bimestre com pesos diferentes para cada nota, e a média do aluno é obtida como a multiplicação de matrizes de notas e pesos. Gostaríamos de salientar que, além de não ser natural, essa abordagem complica desnecessariamente, um problema simples há muito tempo conhecido e resolvido de outra maneira pelos alunos. Abordagens desse tipo, quando, os alunos já possuem solução mais simples costumam sofrer rejeição em sala de aula.*

Nenhuma outra referência ao tema matrizes é encontrada nos PCN do ensino Médio, nem da ligação com o conceito de transformações geométricas no plano. O mais próximo que se pode encontrar nessa direção é uma sugestão de relacionar tais transformações com a álgebra dos números complexos(Brasil, 2002, p.94)

Diferente do conteúdo de matrizes, a parte que confere a geometria e as transformações geométricas está descrita com muita ênfase em todos os volumes do PCN. Os blocos "Espaço e Forma" dos PCN do Ensino Fundamental apontam para a compreensão, a descrição e a representação das formas geométricas presentes no cotidiano dos alunos. Além disso, eles tratam também das transformações geométricas no plano e ressaltam a importância delas na construção de outros conceitos geométricos, tais como congruência e semelhança:

> *"Construindo figuras a partir da reflexão, por translação, por rotação de outra figura, os alunos vão percebendo que as medidas dos lados e dos ângulos, da figura dada e da figura transformada são as mesmas. As atividades de transformação são fundamentais para que o aluno desenvolva habilidades de percepção espacial e podem favorecer a construção da noção de congruência de figuras planas (isometrias). De forma análoga, o trabalho de ampliação e redução de figuras permite a construção da noção de semelhança de figuras planas (Homotetia). (BRASIL, 1998, p.86)".*

Novamente vemos uma fala muito clara sobre as transformações geométricas no plano em outra edição

> *'As atividades que envolvem transformações geométricas devem ser privilegiadas nestes ciclos, porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais "dinâmico para este estudo. (BRASIL, 2000, p. 124)".*

Apesar dessa ênfase ao estudo das transformações geométricas recomendada pelos PCN, ela não é verificada na prática, sendo pouco abordada nos livros didáticos:

> *Analisando a coleção Novo Praticando a Matemática (ANDRINI;VASCONCELOS, 2006) que se destina aos quatro últimos anos do Ensino Fundamental, verificamos que a única menção ás transformações geométricas ocorre no último volume, quando é utilizado um único exemplo de ampliação para introduzir o conceito de semelhança. Há também três exercícios para aplicação de ampliações e reduções de figuras. ... .Outras transformações como rotação, translação e reflexão, não são abordadas pela coleção. (Stormorski 2008, p.12).*

A abordagem adotada nesta pesquisa, pretende explorar o conceito de matriz e de suas operações, através das transformações geométricas no plano. Além de abordar um tema puramente algébrico e abstrato a partir de um viés geométrico, que é mais intuitivo para o aluno, essa escolha resgata um conteúdo que deveria ter sido amplamente trabalhado no ensino fundamental e que muito provavelmente, não teve a devida atenção.

Stormoswki (2008) trabalha paralelamente com essa ideia, porém seu foco vai além do que é abordado nesta dissertação, destinando parte do estudo para aplicar os conceitos matriciais a problemas envolvendo fractais. Além disso, o público alvo de sua pesquisa era uma turma especial de um colégio de aplicação da UFRGS, em um curso extracurricular.

Essa filosofia de se fazer o uso da ligação Álgebra-Geometria, tem sido pesquisada sistematicamente nos últimos anos. No caso de Números Complexos, Mathias (2008) os descreve como operadores geométricos, e as operações fundamentais entre esses números são vistas como composição desses operadores.

Como se pode ver, cresce nos últimos anos o número de trabalhos de pesquisa na área de Educação Matemática que sugerem, sempre que possível, o uso de ferramentas geométricas no ensino de tópicos abstratos e puramente algébricos.

1.2 A História da Matemática no processo de ensino e aprendizagem

Cada conteúdo matemático abordado nas escolas pode trazer à tona uma série de questionamentos do ponto de vista histórico: quem foram as primeiras pessoas que pesquisaram acerca desse conteúdo? Em que época isso se deu? Qual o interesse essas pessoas tinham ao se empenhar no estudo desse conteúdo? Há portanto, uma riqueza de informações que devem ser abordadas, por um caráter de informação cultural, sociológica e antropológica. Além disso, essas informações tendem a tornar a aula mais interessante e dinâmica, permitindo que haja uma interdisciplinaridade entre a Matemática e a História, despertando um maior interesse e favorecendo o aprendizado de ambas as disciplinas. Esse ponto de vista é defendido pelo PCN, que sugere que o professor explore acontecimentos da História da Matemática em suas aulas:

> *Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (Brasil, 1998, p.42).*

Ao se incluir a História da Matemática como parte importante da prática pedagógica, o aluno também perceberá que os avanços tecnológicos de hoje, se devem a uma herança matemática de gerações passadas. Portanto, esse tema não pode ser simplesmente utilizado para dar nomes e datas, deve ser explorado como um recurso didático.

> *Entretanto, essa abordagem não deve ser entendida simplesmente que o professor deva situar no tempo e no espaço cada item do programa de Matemática ou contar sempre em suas aulas trechos da História da Matemática, mas que a encare como um recurso didático com muitas possibilidades para desenvolver diversos conceitos, sem reduzi-la a fatos, datas e nomes a serem memorizados. .(Brasil, 1998, p.43).*

Em muitas situações, o recurso à História da Matemática pode esclarecer ideias matemáticas que estão sendo construídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a alguns "porquês" e, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos de conhecimento.

Os documentos oficiais sugerem então que a utilização da História da Matemática é uma possibilidade de aprimorar e estimular a aprendizagem da Matemática, fazendo uma breve reflexão acerca de "como chegamos até aqui", ou seja, como a Matemática foi desenvolvida até chegar aos dias de hoje, e como ela se faz presente no cotidiano, embora despercebida pela grande maioria.

1.2.1 Alguns fatos históricos sobre transformações geométricas e álgebra matricial.

A História da Matemática é repleta de momentos de interação entre a Álgebra e a Geometria, de modo que uma é responsável pelo desenvolvimento e aprimoramento da outra.

A Geometria Euclidiana Clássica se desenvolveu a partir de problemas estudados por civilizações antigas, nos quais havia a necessidade de realizar cálculos envolvendo medições de segmentos, ângulos, etc. Outras áreas da Matemática, como a Álgebra, também se aprimoraram com auxílio da Geometria. Por exemplo, os babilônios já conheciam uma "receita" para determinar as raízes de equações completas do 2º grau. Essas equações eram contextualizadas em problemas envolvendo cálculos de área e de comprimento de lados de quadrados (PITOMBEIRA, 2004). Porém, o ensino das equações do 2º grau em nossas escolas tem um enfoque puramente algébrico e abstrato.

Analisando a História da Matemática, pode-se observar que os conceitos de matriz e de suas operações, como adição e multiplicação (temas a serem explorados nessa dissertação), foram introduzidos por Arthur Cayley, em 1858 aproximadamente, ao estudar as transformações lineares no espaço euclidiano n-dimensional. Cayley percebeu que a álgebra matricial era diferente da tradicional dos números reais, pois o produto de duas matrizes não era comutativo. Segundo Eves (1992, p.548) a ideia de uma álgebra não-comutativa ainda não era considerada razoável no século XIX:

> *"Parecia inconcebível, no inicio do século XIX, que pudesse haver uma álgebra diferente da álgebra comum da aritmética. Tentar, por exemplo, a construção, de uma álgebra consistente na qual não se verificasse a lei comutativa da multiplicação não só provavelmente não ocorria a ninguém na época, como também, se ocorresse, certamente seria descartada por parecer uma ideia ridícula; afinal de contas, como seria possível uma álgebra lógica na qual a x b fosse diferente de b x a?".*

O estudo das matrizes permitiu ampliar os horizontes da Matemática da época, como também foi útil para outras áreas que surgiriam alguns anos depois, como a Computação.

Apesar dessa interessante análise histórica, ainda se ouve muito pouco ou quase nada sobre ela nas escolas, e o mais impressionante é como se ignora a "linha do tempo", ou seja, a ordem cronológica com que os conceitos matemáticos evoluíram. Em certos casos como o do Cálculo Diferencial e Integral, que é estudado em cursos de nível superior como Matemática, Física e Engenharia, há uma justificativa plausível para se inverter a lógica cronológica da aprendizagem. Com efeito, a maioria dos autores de livros didáticos sobre o assunto coloca a noção de derivadas (que surgiu com Newton e Leibniz, no século XVII) como um pré-requisito para o estudo das integrais (cujo conceito surgiu essencialmente com do Método da Exaustão, de Eudoxo, no século IV A.C.) Isso porém, se justifica diante do fato de que sem as derivadas, ou mais precisamente, sem o Teorema Fundamental do Cálculo, o trato com as Integrais fica extremamente trabalhoso e inviável.

Uma inversão semelhante não se justifica quando os assuntos escolhidos são matrizes, vetores e transformações lineares, pois os conceitos geométricos presentes nesses dois últimos já foram trabalhados (em boa parte) pelos alunos nos cursos de Física ou até mesmo de Matemática em séries anteriores

Nessa proposta acredita-se que o ensino das matrizes sendo feito seguindo essa linha cronológica, deixa o ensino mais palpável, mais intuitivo e mais interessante para os alunos.

1.3 A utilização de novas tecnologias no ensino de Matemática

As novas tecnologias, como computadores portáteis, *tablets*, projetores, *software*, etc, estão cada vez mais acessíveis aos professores. No anseio de melhorar o processo de ensino-aprendizagem, os governos estão investindo muito nessa vertente.

Um exemplo é o da Rede Estadual do Rio de Janeiro que já distribuiu notebooks para professores e reestruturou as redes elétricas das escolas para atender os Laboratórios de Informática. O apoio pedagógico está sendo incrementado com software, jogos, sites e vídeos destinados a melhorar a qualidade da aprendizagem com ao auxílio destes recursos. É um caminho sem volta, onde o público alvo está cada vez mais informatizado. A escola deve então se adaptar e fazer uso da mesma linguagem, para se atualizar, tornando-se mais próxima do universo desses novos alunos.

Segundo D'Ambrosio a escola deve se atualizar e se estruturar, para atender à demanda dessa nova geração:

> *"Estamos entrando na era do que se costuma chamar a "sociedade do conhecimento". A escola não se justifica pela apresentação de conhecimento obsoleto e ultrapassado e muitas vezes morto, sobretudo, ao se falar em ciências e tecnologia. Será essencial para a escola estimular a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores e expectativas da sociedade. Isso será impossível de se atingir sem a ampla utilização de tecnologia na educação. Informática e comunicações dominarão a tecnologia educativa do futuro. (D'AMBRÓSIO, 1996, p. 80)"..*

Além da necessidade de se evoluir junto com o aluno, essas novas tecnologias transformam o processo de ensino-aprendizagem, facilitando-o por vários motivos diferentes.

> *"Os ambientes virtuais de aprendizagem permitem a interatividade entre o aprendiz e o objeto de seu interesse e representam uma motivação despertando no aluno a vontade de interagir e de organizar seu conhecimento, ampliando o seu saber e a sua visão de mundo. (AGUIAR, 2011)."*

Podemos pensar que temos em mãos uma ferramenta passível de:

- transformar um conteúdo abstrato em um conteúdo mais concreto, pois o aluno terá liberdade para manipular o objeto de estudo, verificando os resultados e obtendo suas próprias conclusões;

- analisar as propriedades geométricas de uma figura seja ela no plano ou no espaço,

- visualizar com mais clareza figuras que possuem interpretação mais complexa quando estudadas apenas usando ferramentas rudimentares como a lousa, principalmente quando se tratam de figuras em três dimensões;

- atrair o aluno para ao aprendizado com softwares que possuem um caráter lúdico e de diversão, como determinados jogos de computador.

Existem hoje muitas pesquisas sobre a influência dos jogos digitais na aprendizagem. O estudo de Mayo (2005) compara as teorias de aprendizagem com características dos jogos.

> *- aprendizagem experimental (você faz você aprende): participação ativa com decisões que tem consequências. Típico de jogos imersivos;*
>
> *- aprendizagem baseada no questionamento e feedback (o que acontece quando eu faço isto?): exploração em jogos;*
>
> *- autenticidade (quanto mais a situação de aprendizagem for realista, mais facilmente os aprendizes transferem a informação para a vida real): mundos virtuais;*
>
> *- eficácia própria (se você acredita que você pode fazer você aumenta suas chances de sucesso): recompensas e níveis nos games;*
>
> *- cooperação (aprendizagem em time) – estudos mostram que a aprendizagem cooperativa apresenta resultados 50% superiores sobre a aprendizagem individual ou competitiva: jogos massivamente multiusuário – MMOGs. (MAYO, 2005).*

Em se tratando de *softwares* de Matemática, temos hoje várias opções. Os softwares de Geometria Dinâmica mais conhecidos são: Cabri- Géométre, Cinderella, Régua e Compasso e Geogebra. Nas atividades propostas na presente pesquisa, foi utilizado o Geogebra, por ser um software de licença livre e que possui uma interface simples e intuitiva.

Todas essas vantagens discutidas nesse item, reforçam cada vez mais o uso das ferramentas digitais no processo de ensino e aprendizagem. A escolha de se trabalhar com transformações geométricas no ensino de matrizes é vantajosa pois permite o uso dessas novas tecnologias.

2. A MATEMÁTICA DAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS

Neste capítulo, descreveremos de maneira formal os conceitos e os resultados básicos de Geometria Analítica e Álgebra Linear, que servirão de suporte para o desenvolvimento das atividades a serem realizadas com os alunos no Capítulo 3. Faremos uma abordagem formal do conceito de transformações lineares no plano. Discutiremos alguns exemplos clássicos dessas transformações e como relacioná-las com as matrizes.

Descreveremos na primeira seção as operações com vetores em IR^2 e, na segunda seção, as transformações lineares no plano, alguns exemplos clássicos, e a relação entre essas transformações e as matrizes, inclusive abordando as questões operacionais de ambas.

Todas as definições, teoremas e suas respectivas demonstrações tiveram como referência as notas do curso de Geometria Analítica do PROFMAT, desenvolvidas por Delgado, Frensel e Crissaff (2012).

2.1-Vetores e operações

A base da Geometria Analítica é o conceito de vetor. Segundo Venturi (1949), em seu livro "Álgebra Vetorial e Geometria Analítica", o surgimento do conceito de vetor se deve ao engenheiro holandês Simon Stevin, que em 1586 enunciou o problema de composição de forças, uma regra para encontrar a soma de duas forças aplicadas em um mesmo ponto, que é o que conhecemos hoje como regra do paralelogramo. Em 1797, Gaspar Wessel, um matemático dinamarquês, deu aos vetores a forma de "linhas dirigidas", porém a sistematização da teoria vetorial ocorreu apenas no século XIX com William Hamilton, Hermann Grassmann e com Josiah Gibbs.

Sobre a etimologia da palavra *vetor* pode-se dizer que ela vem do verbo latim *vehere*: transportar, levar. *Vetor* é o particípio passado de *vehere* (Venturi, 1949), ou seja, *vetor* significa transportado, levado. A representação mais usual dos vetores é feita por uma letra minúscula do nosso alfabeto, com uma seta acima da letra.

2.1.1- Vetor

Considere uma reta r pertencente a um plano π, determinada por dois pontos A e B desse plano. A porção da reta limitada por esses dois pontos é chamado de segmento de reta $\overline{AB}$. Ao segmento $\overline{AB}$ podemos associar um sentido, de A (origem) para B (extremidade) ou de B (origem) para A (extremidade). O segmento $\overline{AB}$ munido de um dos dois sentidos possíveis será chamado de *segmento orientado*.

Dois segmentos orientados têm *a mesma direção* quando estão na mesma reta suporte, ou então quando estão em retas paralelas. Dois segmentos orientados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ que possuem mesmo módulo (comprimento), direção e sentido são chamados de *equipolentes*. Dado um segmento orientado $\overline{AB}$ no plano π, o *vetor* associado a esse segmento é a coleção de todos segmentos orientados de π que têm mesmo módulo, direção e sentido que $\overline{AB}$. Por abuso, muitas vezes os segmentos orientados dessa coleção também serão chamados de vetores.

Suponha que, no plano π, foi escolhido um sistema de coordenadas cartesianas xy. Um vetor é definido pelos pontos de suas extremidades e o sentido que o segmento determinado por esses pontos terá. Por exemplo, considere o vetor associado ao segmento que tem origem no ponto A de coordenadas (1,2) e termina no ponto B de coordenadas (3,5). Esse vetor é o mesmo referente ao segmento que começa no ponto (0,0) e termina no ponto (2,3). Dizemos que as *coordenadas* de ambos os vetores são (2,3). Mais geralmente, as *coordenadas* do vetor que começa no ponto $A=(x_a, y_a)$ e termina no ponto $B=(x_b, y_b)$ são $(x_b - x_a, y_b - y_a)$. Note que, as coordenadas do vetor associado a AB determinam o representante desse vetor, cuja origem é o ponto (0, 0) e a extremidade é o ponto $(x_b - x_a, y_b - y_a)$.

2.1.2- Vetores Opostos

Quando invertemos o sentido de um vetor, obtemos outro, chamado de *vetor oposto*. Assim, dados dois pontos A e B quaisquer do plano, temos que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$ são opostos.

Em termos de coordenadas se $\overrightarrow{AB} = (x, y)$, então $\overrightarrow{BA} = (-x, -y)$. Denota-se também $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

2.1.3- Multiplicação de um vetor por um escalar

Para definir multiplicação por um escalar precisaremos definir *vetor nulo*, que é o vetor que tem origem e extremidade no mesmo ponto.

Dado um $k \in IR$, e um vetor $\vec{v}$ em IR^2, então o *produto de* k *por* $\vec{v}$ é o vetor do IR^2, denotado por $k \cdot \vec{v}$, que é definido da seguinte forma:

(i) Se $k>0$, $k \cdot \vec{v}$ é o vetor que tem mesma direção e mesmo sentido que $\vec{v}$, cujo comprimento é igual a k vezes o comprimento de $\vec{v}$. Se $k>1$ o vetor $k \cdot \vec{v}$ terá o comprimento k vezes maior em relação ao vetor $\vec{v}$, ocorrendo o que se chama de uma dilatação em relação à $\vec{v}$. Se $0<k<1$, então o vetor $k \cdot \vec{v}$ terá comprimento menor em relação ao vetor $\vec{v}$ (de magnitude k), ocorrendo o que se chama de uma contração em relação a $\vec{v}$.
Exemplo para k = 3 e k = 1/2:

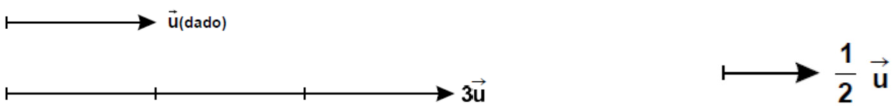


Figura 1

(ii) Para $k < 0$, temos $-k > 0$, logo faz sentido falar do vetor $(-k)\cdot\vec{v}$. O vetor $k\cdot\vec{v}$ será o vetor oposto ao vetor $(-k)\cdot\vec{v}$. Se k for um número negativo, o tamanho de $k\cdot\vec{v}$ poderá aumentar ou diminuir, (dependendo se $|k|>1$ ou $0<|k|<1$), porém seu sentido será contrário ao de $\vec{v}$.

Exemplo para $k = -2$:

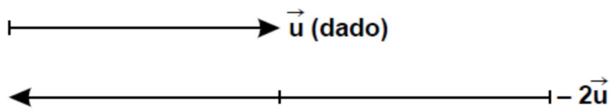


Figura 2

(iii) Se $k = 0$, então $k\cdot\vec{v} = 0$.

As observações a seguir são imediatas:

(a) $k\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow k = 0$ ou $\vec{v} = 0$.

(b) $(-1)\,\vec{v} = -\vec{v}$, onde $-\vec{v}$ é o vetor oposto a $\vec{v}$.

(c) $m\cdot(n\cdot\vec{v}) = n\cdot(m\cdot\vec{v}) = (m\cdot n).\vec{v}$

(d) $(m+n)\cdot\vec{v} = m\cdot\vec{v} + n\cdot\vec{v}$

2.1.4- Adição de Vetores

Dado dois vetores no plano $\vec{u}$ e $\vec{v}$, a soma $\vec{u}+\vec{v}$, é obtida como segue: fixamos um ponto A qualquer do plano e colocamos a origem do vetor $\vec{u}$ neste ponto. A extremidade do vetor $\vec{u}$ ficará então sobre um ponto B. Sobre o ponto B, colocamos a origem do vetor $\vec{v}$ e, assim, a extremidade deste vetor ficará sobre um ponto C. O *vetor soma* $\vec{u}+\vec{v}$ é o vetor cuja origem é o ponto A e a extremidade é o ponto C. Note que:

$$\vec{u}+\vec{v} = (B - A) + (C - B) = (C - A).$$

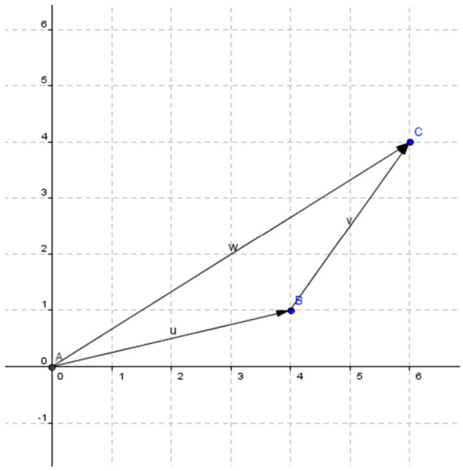


Figura 3

Também podemos identificar o vetor soma $\vec{u}+\vec{v}$ através da diagonal do paralelogramo de lados formados pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Esta representação chama-se *Lei do Paralelogramo*.

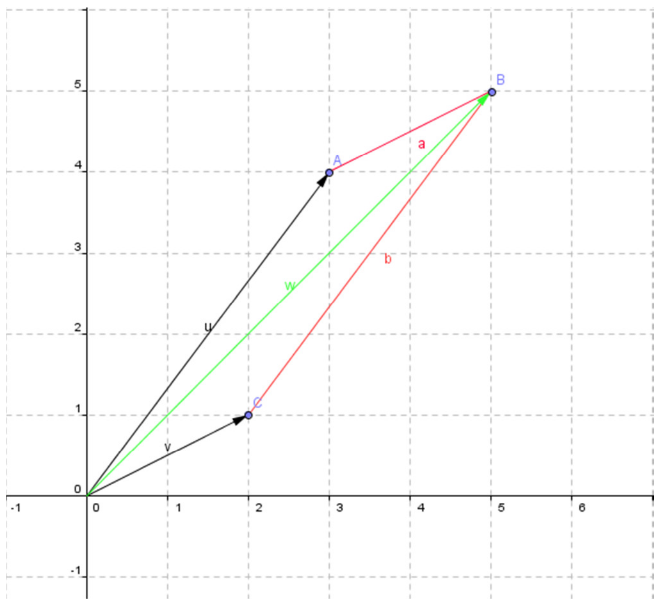


Figura 4

Geometricamente, a soma de *n* vetores é feita de modo que a extremidade de cada vetor coincida com a origem do vetor seguinte, tendo como resultado geométrico o vetor que tem a origem do primeiro vetor do sistema e extremidade do último vetor. Na figura acima podemos perceber que o vetor $\vec{w}$ corresponde ao vetor soma de $\vec{u}+\vec{v}$. Veja outros exemplos:

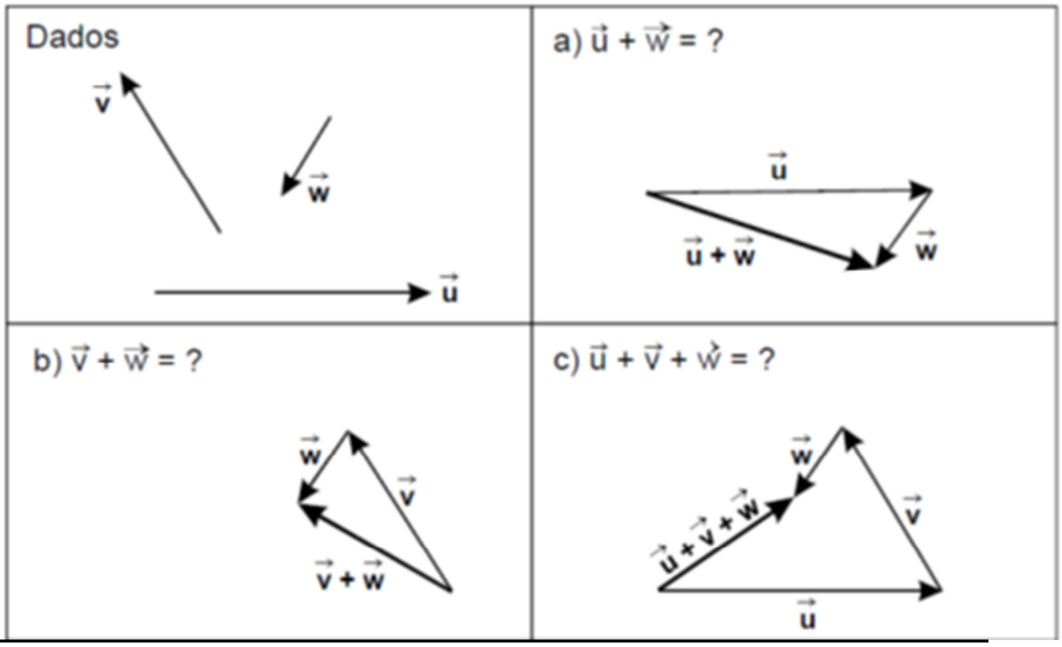


Figura 5. Fonte: (Ventura 1949, p.)

Propriedades da soma de vetores:

(i) Comutativa:

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u},$$

$$(B - A) + (C - B) = (D - A) + (C - D)$$

$$(C - A) = (C - A)$$

(ii) Associativa

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

$$(B - A) + (C - B) + (D - CD) = (B - A) + (C - B) + (D - C) = (D - A)$$

(iii) Elemento neutro

$$\vec{u} + 0 = \vec{u}$$

(iv) Elemento oposto

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = 0$$

(v) Distributiva

$$m \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = m \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{w}$$

2.1.5- Subtração de vetores

A *subtração* de um vetor $\vec{u}$ por outro $\vec{v}$ é denotada por $\vec{u} - \vec{v}$. Ela é definida como sendo a soma de $\vec{u}$ com o opsto de $\vec{v}$, isto é, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$. Geometricamente, podemos representar a diferença de dois vetores pela lei do paralelogramo, porém os vetores têm que ter a mesma origem. A subtração de vetores não é comutativa.

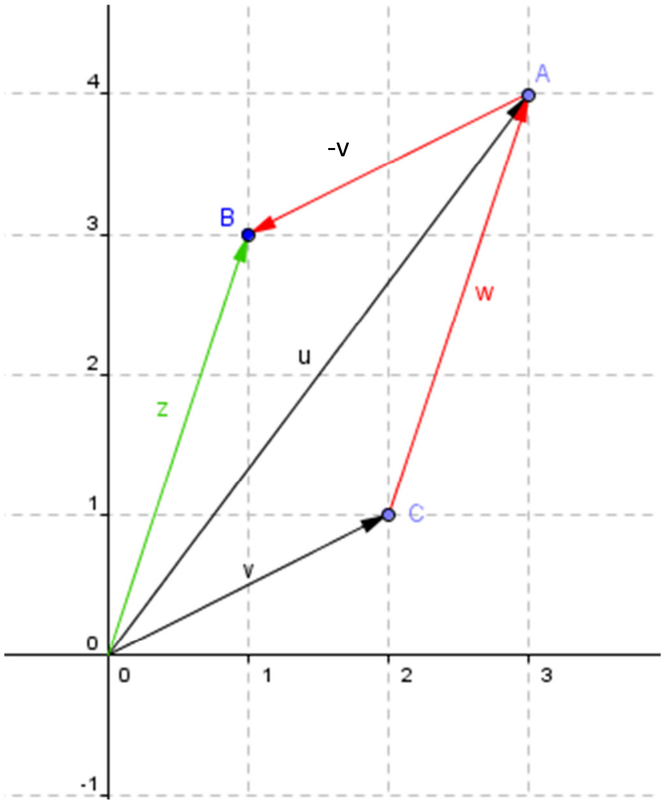


Figura 6

O vetor $\vec{u} - \vec{v}$ foi representado pela cor verde (z).

2.2- Transformações geométricas no plano

Uma *transformação no plano* IR^2 é uma função $T : IR^2 \rightarrow IR^2$ que a cada ponto $P \in \pi$, associa um segundo ponto $T(P)$ de IR^2, chamado a *imagem* de P.

Em certas situações, interpretaremos um par (x, y) de IR^2 como um ponto do plano ou como o vetor que tem como origem o ponto de coordenadas $(0,0)$ (origem do plano cartesiano) e a extremidade no ponto (x, y).

Definição: Uma transformação no plano $T: IR^2 \rightarrow IR^2$ será dita *linear* se ela atende às seguintes propriedades:

1) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$, para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v} \in IR^2$.
2) $T(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot T(\vec{u})$, para todo $\vec{u}$, $\in IR^2$ e todo $\alpha \in IR$.

Como consequência imediata dessa definição, temos que toda transformação linear no plano deixa fixo o vetor nulo. Com efeito:

$$T(\vec{0}) = T(\vec{0} + \vec{0}) = T(\vec{0}) + T(\vec{0}) \quad \Rightarrow \quad T(\vec{0}) = \vec{0}.$$

O resultado a seguir descreve a lei de formação geral de uma transformação linear no plano:

Proposição: Uma transformação no plano $T: IR^2 \to IR^2$ é linear se, e somente se, existem números reais a, b, c e d tais que:

$$T(x,y) = (ax+by, cx+dy), \text{ para todo } (x,y) \in IR^2.$$

Demonstração:

Consideremos os *vetores canônicos* $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$ e $\overrightarrow{e_2} = (0,1)$ de IR^2 e $T(\overrightarrow{e_1}) = (a,c)$ e $T(\overrightarrow{e_2}) = (b,d)$. Se T é linear, então:

$$T(x,y) = T(x\overrightarrow{e_1} + y\overrightarrow{e_2}) = xT(\overrightarrow{e_1}) + yT(\overrightarrow{e_2}) = x(a,c) + y(b,d) = (ax+by, cx+dy),$$

para todo, $(x,y) \in IR^2$.

Reciprocamente, se existem números reais ***a, b, c*** e ***d*** de modo que $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$, para todo $(x,y) \in IR^2$, então sejam $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2) \in IR^2$ e $\alpha \in IR$. Então:

$$\begin{aligned}
T(\vec{u}+\vec{v}) &= T((x_1,y_1)+(x_2,y_2)) = T(x_1+x_2, y_1+y_2) \\
&= \left(a\cdot(x_1,x_2) + b\cdot(y_1+y_2), c\cdot(x_1,x_2) + d\cdot(y_1+y_2)\right) \\
&= \left((ax_1+by_1)+(ax_2+by_2), (cx_1+dy_1)+(cx_2+dy_2)\right) \\
&= (ax_1+by_1, cx_1+by_1) + (ax_2+by_2, cx_2+dy_2) \\
&= T(\vec{u}) + T(\vec{v}).
\end{aligned}$$

Temos também que:

$$\begin{aligned}
&T(\alpha\cdot\vec{u}) = T(\alpha\cdot(x_1,y_1)) = T(\alpha x_1, \alpha y_1) = (a\cdot(\alpha x_1) + b\cdot(\alpha y_1), c\cdot(\alpha x_1) + d\cdot(\alpha y_1)) \\
&= (\alpha\cdot(ax_1+by_1), \alpha\cdot(cx_1+dy_1)) = \alpha\cdot(ax_1+by_1, cx_1+dy_1) = \alpha\cdot T(\vec{u})
\end{aligned}$$

Logo T é linear.

c.q.d.

Seja $T: IR^2 \to IR^2$ uma transformação linear, cuja lei de formação é $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$. Podemos associar à transformação T uma matriz $2x2$ $(M_T)_{2x2}$ dada por:

$$M_T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

cujas entradas são os coeficientes a, b, c e d. A matriz M_T será chamada a *matriz da transformação* T. Note que a primeira coluna corresponde ao vetor $\overrightarrow{T(e_1)} = (a,c)$ e a segunda coluna, ao vetor $T(\overrightarrow{e_2}) = (b,d)$.

Podemos concluir então que: $T(\vec{u}) = M_T\vec{u}$, para todo vetor $\vec{u}$, onde o vetor $\vec{u}$ está sendo visto como uma matriz coluna.

A transformação que a cada vetor $\vec{v}$ associa o vetor nulo $\vec{0}$ é linear, e é dita a *Transformação Linear Nula*. A matriz dessa transformação é a matriz nula:

$$M_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A *transformação identidade* $I : IR^2 \to IR^2, I(x, y) = (x, y)$ também é linear. A matriz dessa transformação é a matriz identidade:

$$M_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Em seguida, veremos alguns exemplos mais interessantes de transformações lineares**.**

2.2.1-Projeção Ortogonal sobre uma reta que passa pela origem

Fixemos uma reta r passando pela origem. Para cada ponto P do plano associamos o ponto $P` \in r$, de modo que o segmento *PP'* seja perpendicular a $r$. A transformação $T : IR^2 \to IR^2$, dada por $T(P) = P`$ é chamada a *projeção ortogonal sobre a reta* r.

A reta r faz um ângulo α no sentido anti-horário com o eixo OX. Temos então que, $(\cos\alpha, sen\alpha)$ corresponde a um vetor paralelo a r. Esta reta possui equação cartesiana

$$(-sen\alpha)x + (\cos\alpha)y = 0.$$

Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto qualquer do plano. A equação reta r ', que passa pela origem e é perpendicular a r é:

$$(\cos\alpha)x + (sen\alpha)y = 0.$$

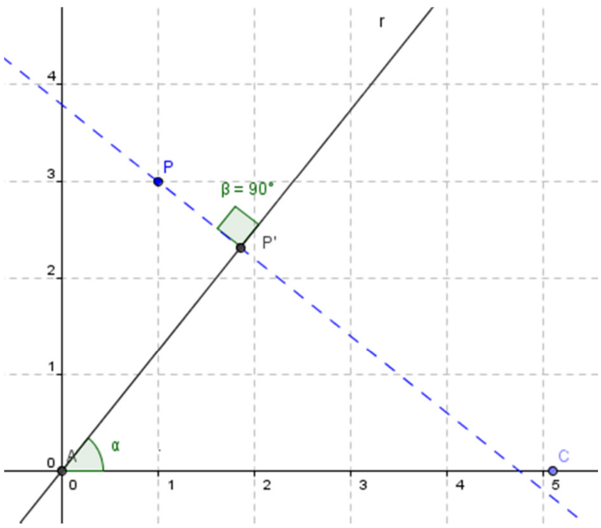


Figura 7

Se $P` = T(P) = (x`, y`)$, temos que $(x`, y`)$ é a solução do sistema:

$$\begin{cases}(-sen\alpha)x'+(\cos\alpha)y'=0\\(\cos\alpha)x'+(sen\alpha)y'=(\cos\alpha)x_0+(sen\alpha)y_0.\end{cases}$$

Resolvendo o sistema temos que:

$$P'=((\cos^2\alpha)x_0+(\cos\alpha.sen\alpha)y_0,(\cos\alpha.sen\alpha)x_0+(sen^2\alpha)y_0).$$

Portanto, a lei de formação da projeção ortogonal sobre a reta r é:

$$T(x,y)=(\cos^2\alpha)x+(\cos\alpha.sen\alpha)y,(\cos\alpha.sen\alpha)x+(sen^2\alpha)y).$$

Segue da Proposição anterior que esta transformação é linear.

Fazendo a projeção ortogonal relativamente ao eixo OX, teremos $\alpha=0$ Portanto, a projeção ortogonal sobre o eixo OX fica:

$T(x,y)=(x,0),\forall(x,y)\in IR^2$, pois dado $P=(x_0,y_0)$,

$$P`=(\cos^2 0)\ x_0+(\cos 0.sen0)y_0,(\cos 0\ .sen0)x_0+(sen^2 0)y_0).$$

$$P`=(x_0,0).$$

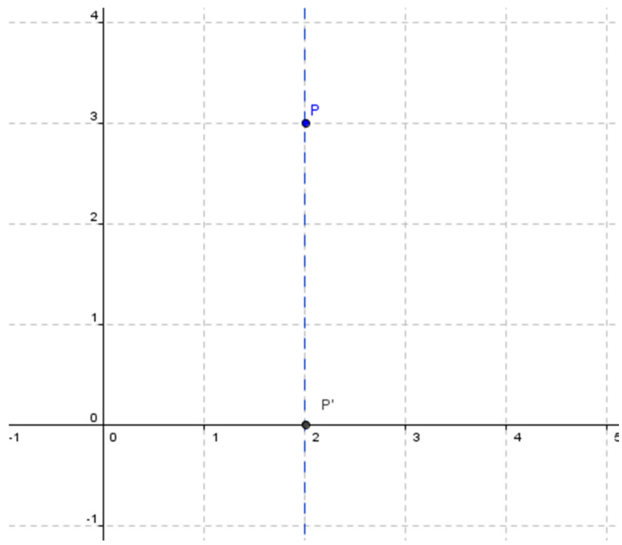


Figura 8

$P`=((\cos^2\frac{\pi}{2})x_0+(\cos\frac{\pi}{2}.sen\frac{\pi}{2})y_0,(\cos\frac{\pi}{2}.sen\frac{\pi}{2})x_0+(sen^2\frac{\pi}{2})y_0)$ De modo análogo, fazendo a projeção de um ponto P em relação ao eixo OY, teremos $\alpha=\pi/2$ Portanto:

$$P`=(0,y_0)$$

Logo, $T(x,y)=(0,y),\forall(x,y)\in IR^2$

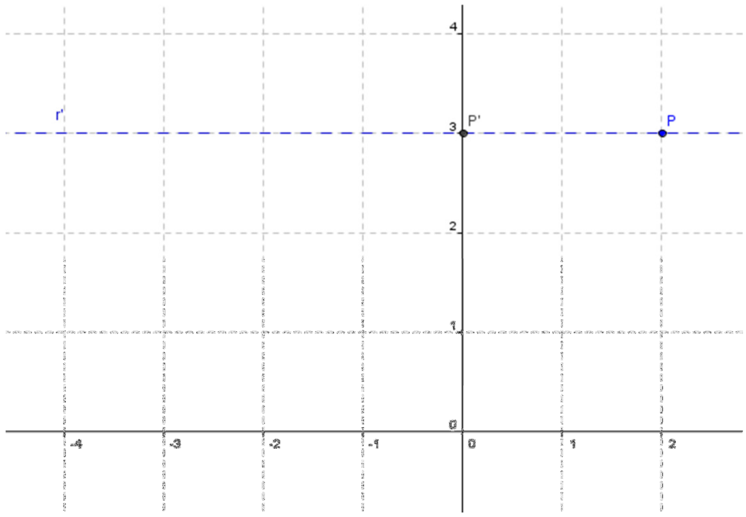


Figura 9

Na forma matricial, as projeções em relação ao eixo OX e ao eixo OY são expressas respectivamente por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

2.2.2-Reflexão em relação a uma reta r qualquer

A reflexão em relação à uma reta r que passa pela origem é uma transformação linear que associa a cada ponto P do plano ao ponto $P``$ de modo que a reta $r$ seja mediatriz do segmento $PP`$. Podemos perceber que o ponto $P`$ da Transformação de Projeção em Relação a uma reta é o ponto médio do segmento $PP``$, em que $P``$ é a reflexão do ponto P em relação a r.

Seja $P = (x, y)$ e $r : -sen\alpha x + \cos\alpha y = 0$. Pelo item anterior temos que:

$P'' + P' = 2P'$, onde $P' = (x', y')$ e $P'' = (x'', y'')$. Logo,

$P'' = (x'', y'') = 2(x', y') - (x, y)$,

$R_r(x, y) = (2\cos^2 \alpha)x + (2\cos\alpha.sen\alpha)y - x, (2\cos\alpha.sen\alpha)x \ + (2sen^2\alpha)y_0 - y)$

$R_r(x, y) = ((2\cos^2 \alpha - 1)x + (2\cos\alpha.sen\alpha)y, (2\cos\alpha.sen\alpha)x \ + (2sen^2\alpha - 1)y)$

Isso resulta em:

$R_r(x, y) = (\cos(2\alpha)x + sen(2\alpha)y, sen(2\alpha)x - \cos(2\alpha)y)$

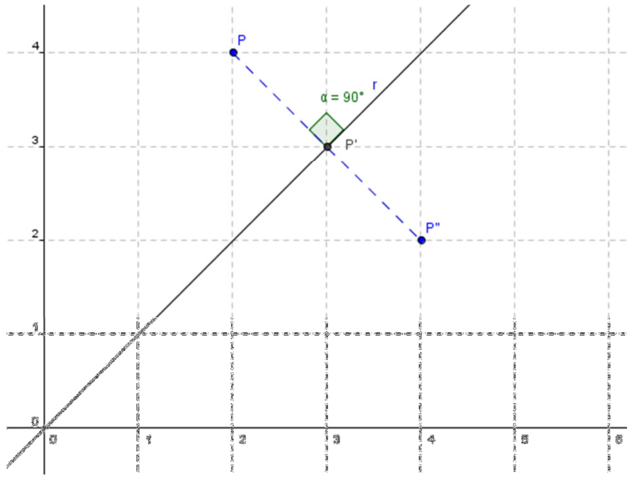


Figura 10

Temos alguns casos particulares, como por exemplo a Reflexão em relação ao eixo OX e OY.

Fazendo a Reflexão de um ponto P em relação ao eixo OX, temos $\alpha = 0$ e $c = 0$. Portanto:

$$R_r(x, y) = (\cos 0)x + (sen 0)y, (sen 0)x - (\cos 0)y) + 2.0(-sen 0, \cos 0)$$

$$R_r(x, y) = (x, -y)$$

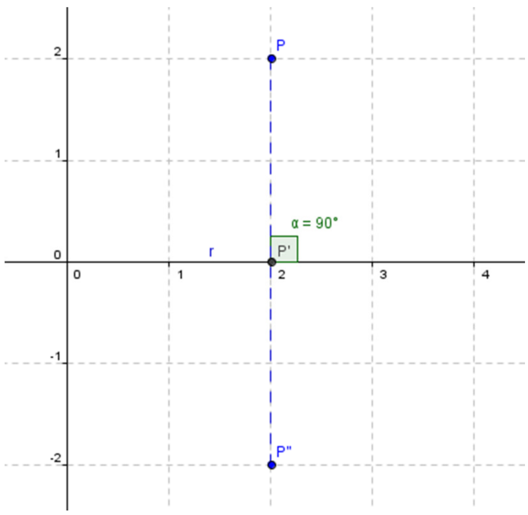


Figura 11

De modo análogo, a Reflexão de um ponto P em relação ao eixo OY, é obtida com $\alpha = \pi/2$ e $c = 0$. Portanto:

$$R_r(x, y) = ((\cos 2\alpha)x + (sen 2\alpha)y, (sen 2\alpha)x - (\cos 2\alpha)y) + 2c(-sen\alpha, \cos\alpha)$$

$$R_r(x, y) = ((\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right))x + (sen 2\left(\frac{\pi}{2}\right))y, (sen 2\left(\frac{\pi}{2}\right))x - (\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right))y) + 2.0(-sen\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}\right))$$

$$R_r(x, y) = ((\cos\pi)x + (sen\pi)y, (sen\pi)x - (\cos\pi)y) + 2.0(-sen\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}\right))$$

$$R_r(x, y) = (-x, y)$$

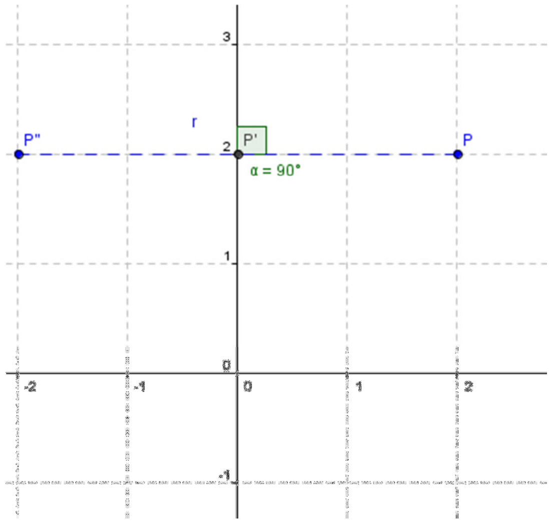


Figura 12

As transformações geométricas de Projeção em relação ao eixos (OX ou OY), e as Reflexões em relação aos eixos e a qualquer reta que passe pela origem, são exemplos de Transformações Lineares.

2.2.3-Homotetia

A Homotetia é definida como sendo uma dilatação ou contração de vetores, dada por:

$$T : IR^2 \rightarrow IR^2, \alpha \in IR$$
$$v \rightarrow \alpha v$$

Essa transformação é chamada de Homotetia de razão α, onde para α = 1, temos a transformação identidade. A Homotetia de razão α = -1 corresponde a uma transformação chamada de *reflexão em relação à origem*, que leva o vetor v a seu simétrico $-v$. Podemos perceber também que, para $|\alpha|$<1, teremos uma contração. Para $|\alpha|$>1, teremos uma dilatação do vetor v, ou seja, a imagem desta transformação corresponde a um vetor de mesma direção e sentido de v, mas com módulo maior, sendo v um vetor não nulo.
Essa transformação é escrita em coordenadas por $T(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, ou matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}.$$

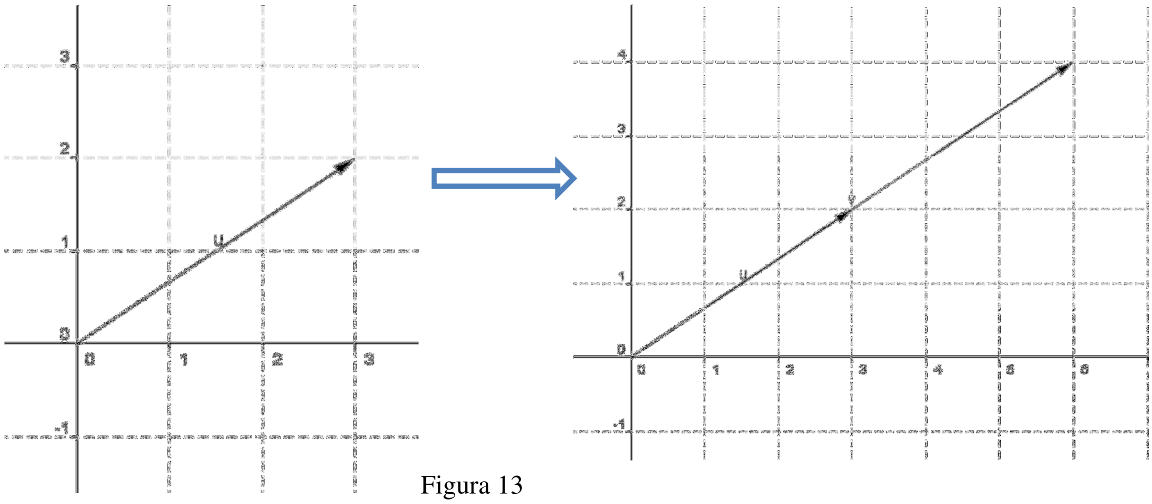


Figura 13

.

2.2.4-Rotação

Dado um ângulo positivo α, ou seja, um ângulo α medido no sentido anti-horário, definimos a rotação de α em torno da origem como:

$$T : IR^2 \to IR^2$$
$$(x, y) \to (x \cdot \cos\alpha - y \cdot sen\alpha, y \cdot \cos\alpha + x \cdot sen\alpha)$$

Ou matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - ysen\alpha \\ xsen\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Consideraremos alguns casos particulares como $\alpha = \pi/2$, $\alpha = \pi$ e $\alpha = 3\pi/2$.

Rotação de $\pi/2$:

Neste caso, $sen\pi/2 = 1$ e $\cos\pi/2 = 0$, então podemos escrever essa transformação como:

$T : IR^2 \to IR^2$
$(x, y) \to (-y, x)$

Ou matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

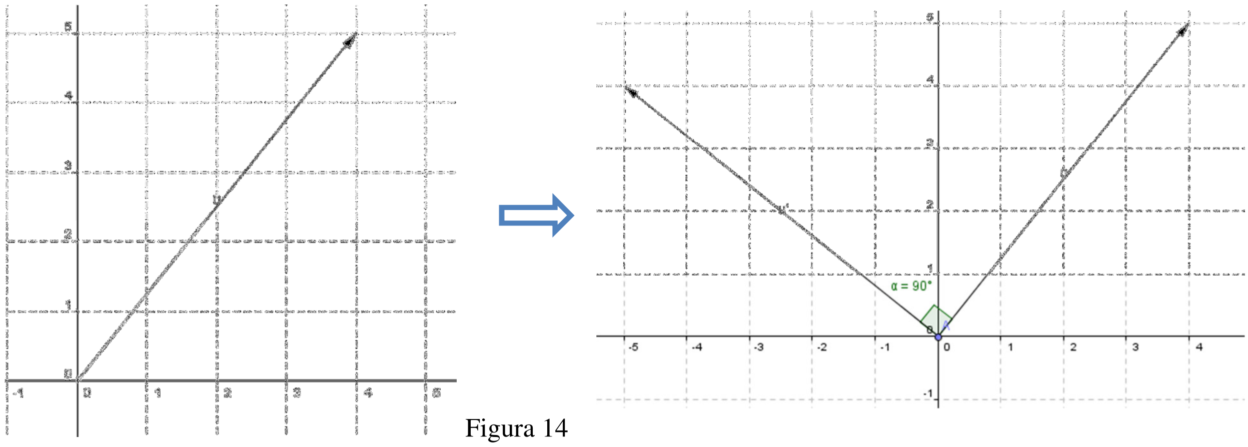


Figura 14

Rotação de π:

Neste caso, $sen\pi = 0$ e $\cos\pi = -1$, então podemos escrever essa transformação como: $T : IR^2 \to IR^2$, $(x, y) \to (-y, -x)$.

Ou matricialmente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

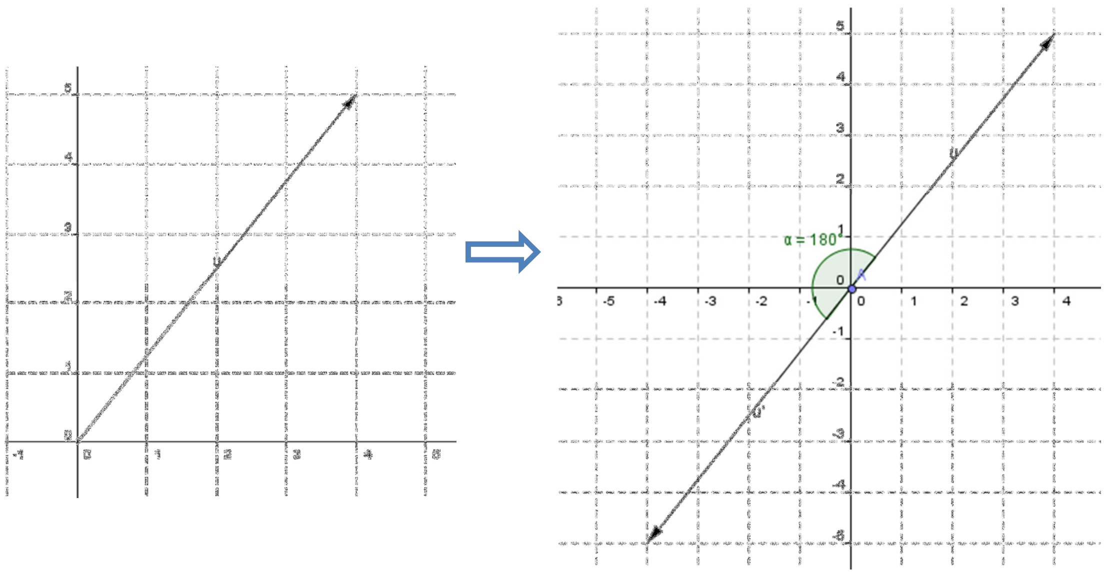


Figura 15

Rotação de $3\pi/2$:

Neste caso, $sen\, 3\pi/2 = -1$ e $\cos 3\pi/2 = 0$, então podemos escrever essa transformação como:

$$T : IR^2 \to IR^2$$
$$(x, y) \to (y, -x)$$

Ou matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

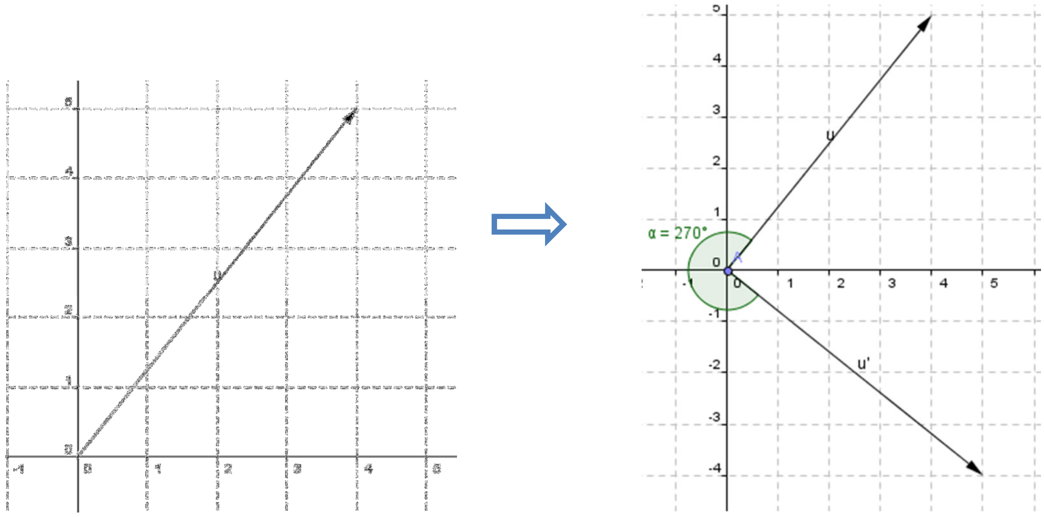


Figura 16

2.2.5. Cisalhamento

A transformação geométrica que chamamos de cisalhamento corresponde a um efeito de deslizamento. Pode ser em relação ao eixo x ou ao eixo y

O cisalhamento na direção do eixo x, ao ser aplicado a todos os pontos de um retângulo com base no eixo x, tem um efeito semelhante ao de deslizarmos um baralho de cartas em uma mesa, transformando esse retângulo em um paralelogramo.

O cisalhamento em relação ao eixo Ox, é chamado cisalhamento horizontal, e em relação ao eixo Oy, cisalhamento vertical.

Cisalhamento horizontal: É dado pela transformação linear:

$$T : IR^2 \to IR^2$$
$$(x, y) \to (x + \alpha y, y)$$

Ou matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \alpha y \\ y \end{pmatrix}$$

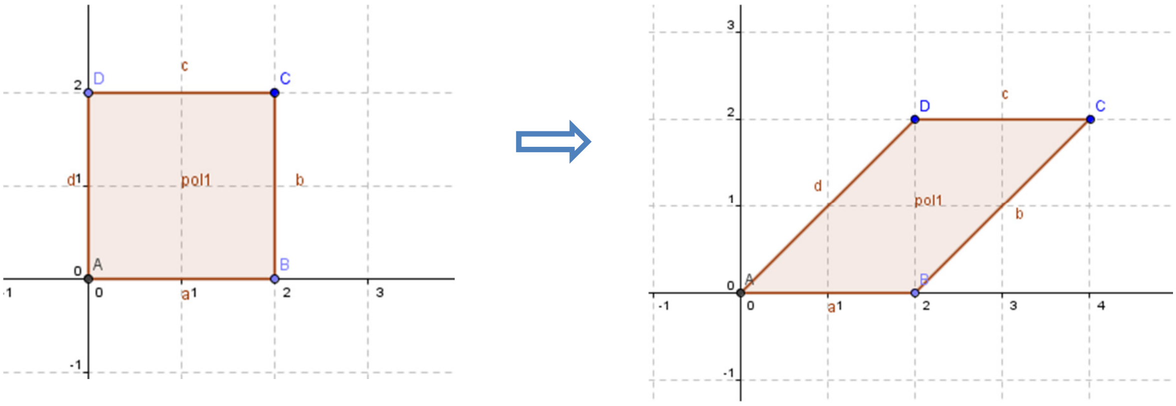


Figura 17.

No exemplo acima, consideramos $\alpha = 1$

Cisalhamento vertical: É dado pela transformação linear:

$$T : IR^2 \rightarrow IR^2$$
$$(x, y) \rightarrow (x, y + \alpha x)$$

Ou matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + \alpha x \end{pmatrix}$$

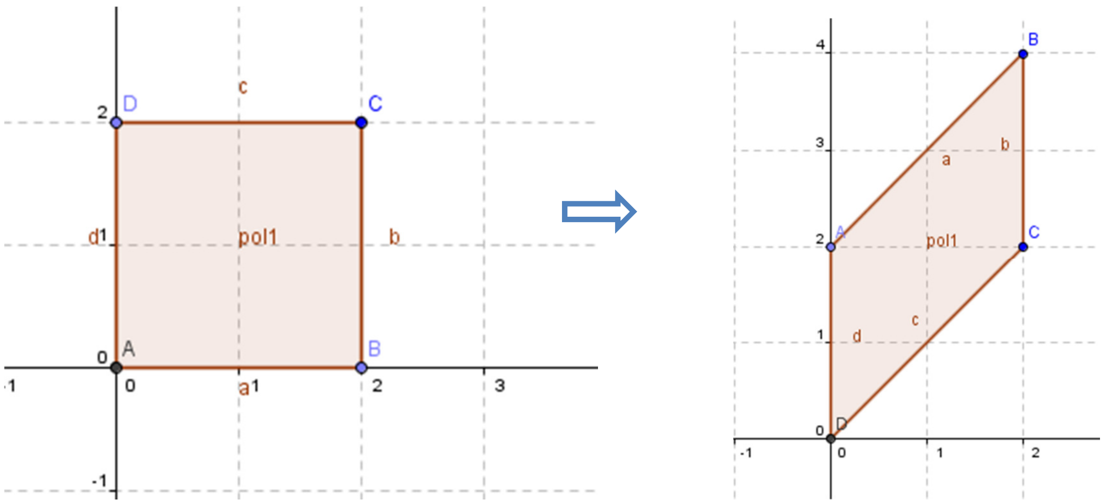


Figura 18

No exemplo acima, consideramos $\alpha = 1$

2.2.6-Translação

Fixando um ponto P_0 do plano, a translação de um ponto P qualquer, por OP_0 correspondente ao deslocamento do ponto P aplicado OP_0, resultando no ponto $P`$, tal que, $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{OP_0}$.

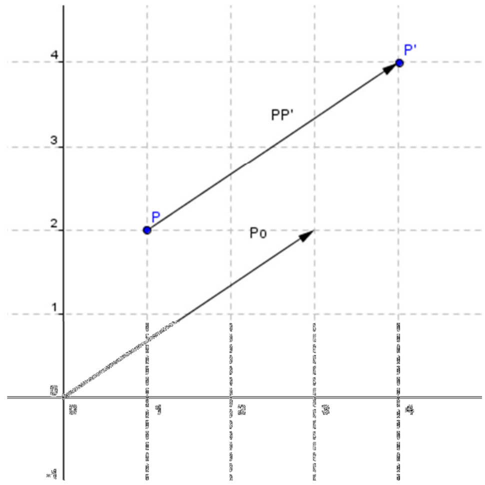


Figura 19

Sendo $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P = (x, y)$ temos que $T(P) = P' = (x', y') = (x_0 + x, y_0 + y)$.

Podemos perceber que a transformação de translação pode ser descrita através de um vetor $\vec{v}$,tal que $T_{\vec{v}}(P) = P'$, onde $\vec{v} = \overrightarrow{PP'}$. Podemos escrever então, que:

$T_{\vec{v}}(p) = P + \vec{v}$. Se $\vec{v} = (a, b)$, então $T_{\vec{v}}(x, y) = (x + a, y + b),$ para todo $(x, y) \in IR^2$.

Note que, apesar da translação ser uma transformação geométrica simples, ela não é linear, para $\vec{v} \neq \vec{0}$, pois transforma o vetor nulo em outro diferente de zero.

2.3- Composições de transformações

Podemos somar vetores do plano IR^2, multiplicar esses vetores por números reais. Além disso, as transformações lineares no plano são funções, portanto faz sentido efetuar as seguintes operações envolvendo essas transformações:

- Soma de duas Transformações Lineares;
- Produto de um escalar por uma Transformação;
- Composição de duas Transformações Lineares.

Veremos que ainda será linear a transformação obtida da composição de duas outras transformações lineares, e que a matriz associada a essa transformação é o produto das matrizes associadas à essas duas transformações lineares.

Dado um vetor v e duas transformações T_1 e T_2, tal que: $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}., T_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

$$T_1 \longrightarrow v,$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

$$T_2\left((T_1)(\vec{v})\right)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(ax + by) + B(cx + dy) \\ C(ax + by) + D(cx + dy) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{pmatrix} =$$

$$\left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

2.3.1- A Não-Comutatividade do Produto de Matrizes

Fazendo a composição de duas transformações, verificaremos que, em alguns casos, a multiplicação de duas matrizes satisfaz a propriedade Comutativa, em outros não. Sendo assim, concluiremos concluir que a multiplicação de matrizes não é Comutativa, pois para ser, teria que satisfazer a comutatividade em todas as situações. Vamos mostrar agora a composição de duas transformações que são Comutativas.

Dado um vetor $\vec{v}$ qualquer, aplica-se a ele uma transformação de Reflexão em relação a OY . Com o vetor resultante aplica-se outra transformação de Reflexão agora em relação ao eixo OX .

Se com o mesmo vetor $\vec{v}$ aplicarmos primeiro a Reflexão em relação ao eixo OX e depois aplicarmos a Reflexão em OY sobre o vetor transformado, teremos o mesmo resultado, ou seja, ele estará no mesmo lugar no plano quando se inverteu a ordem das Reflexões. Veja geometricamente essa aplicação feita com o vetor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

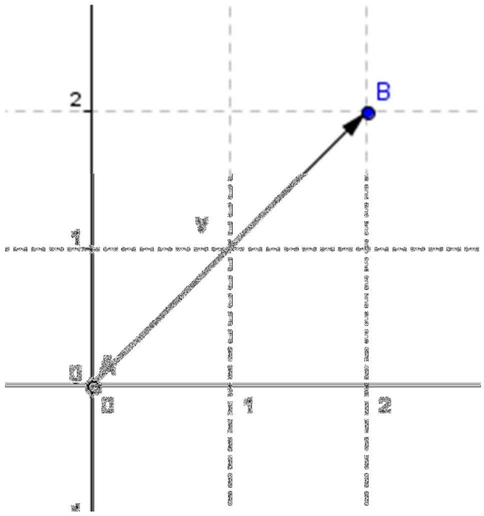


Figura 20

Aplicada a Reflexão em relação ao eixo Oy.

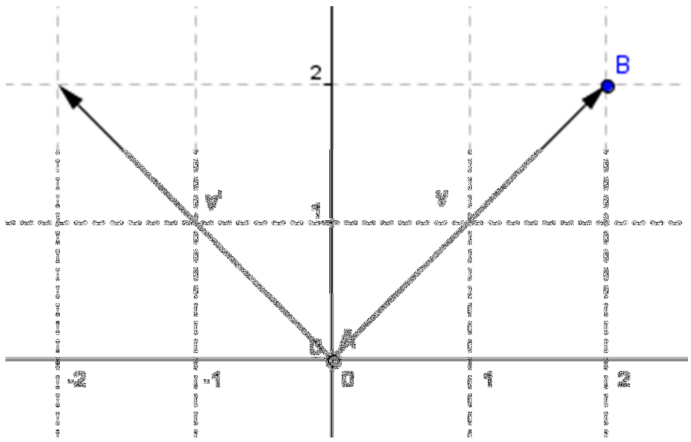


Figura 21

Criou-se o vetor $\vec{v}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, resultado dessa transformação. Agora, a esse vetor, vamos aplicar a Reflexão em relação a OX .

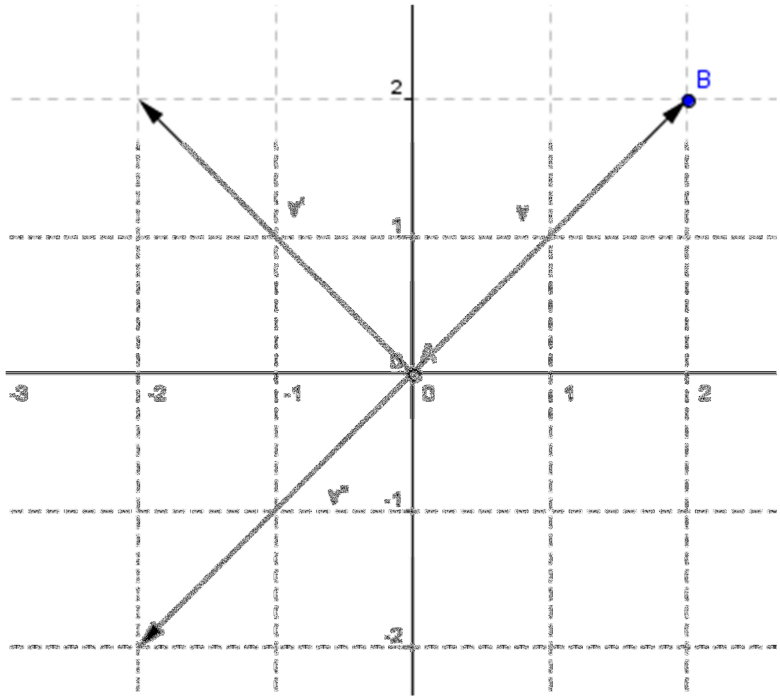


Figura 22

Obtemos então o vetor $\vec{v''} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ resultante dessas duas transformações.

Vamos agora trocar a ordem das transformações, aplicar a Reflexão em relação a OX e depois então em OY .

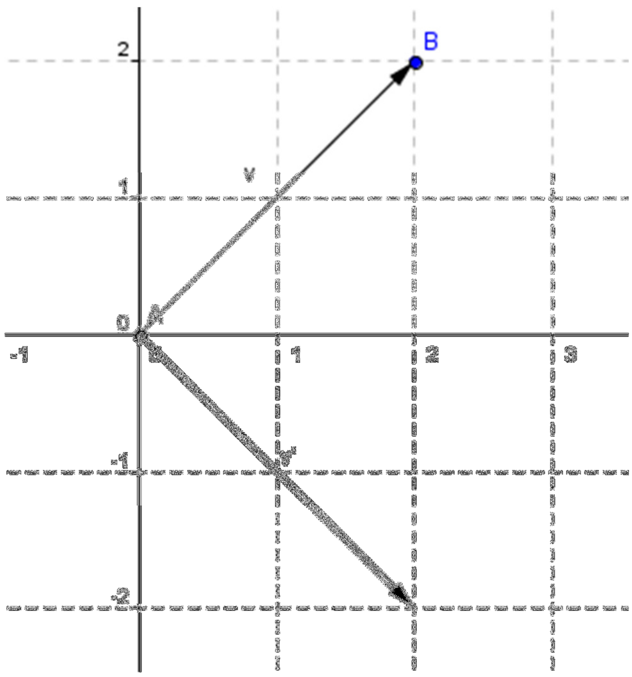


Figura 23

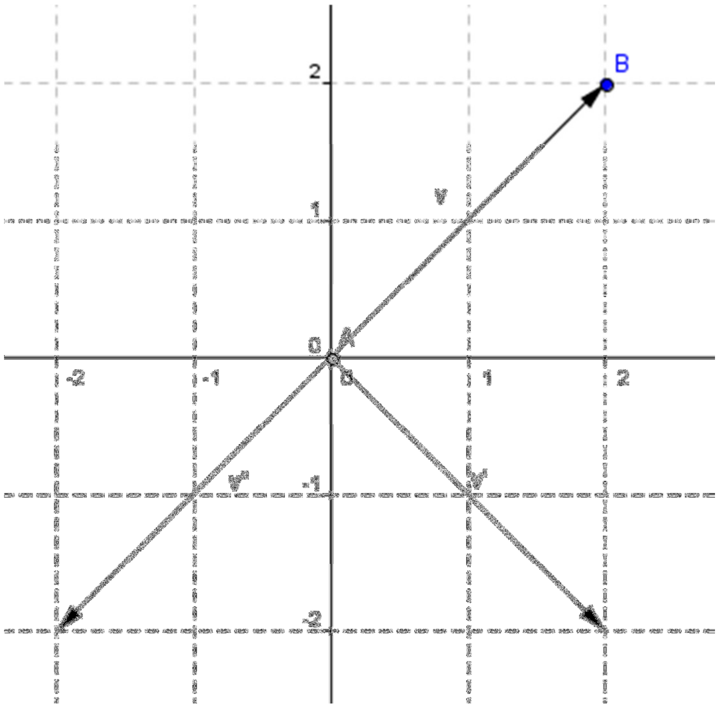


Figura 24

Concluiremos que, nesse caso não importa a ordem de aplicação das reflexões, que o resultado será o mesmo, valendo a Comutatividade. Para ver isso, chamaremos a Reflexão em relação a OX de T_1 e a Reflexão em relação a OY de T_2. Temos algebricamente que:

$$T_1 \rightarrow \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$$T_2 \rightarrow \left(T_1\left(\vec{v}\right)\right)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$ou:$

$$(T_2 \circ T_1)(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

$e:$

$$(T_1 \circ T_2)(\vec{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Agora, aplicaremos duas transformações ao vetor $\vec{v}$, e inverter a ordem para verificar a comutatividade. Começamos com uma Rotação de 90º em relação a origem e depois uma Reflexão em relação a OY .

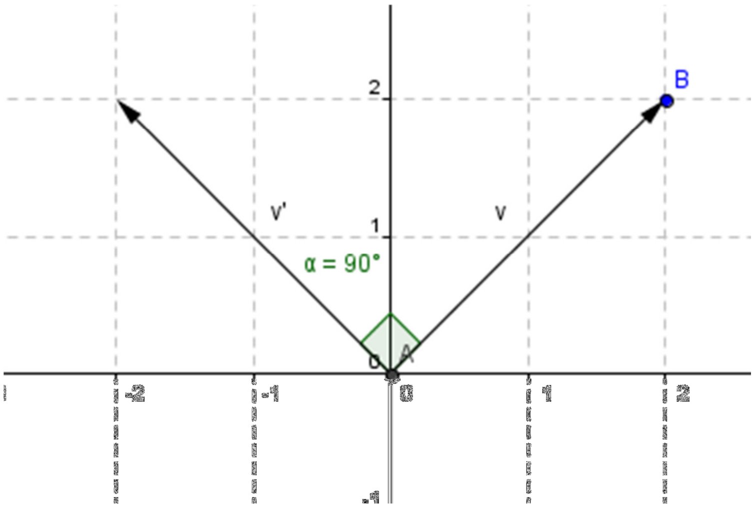


Figura 25

Agora a segunda transformação, a Reflexão.

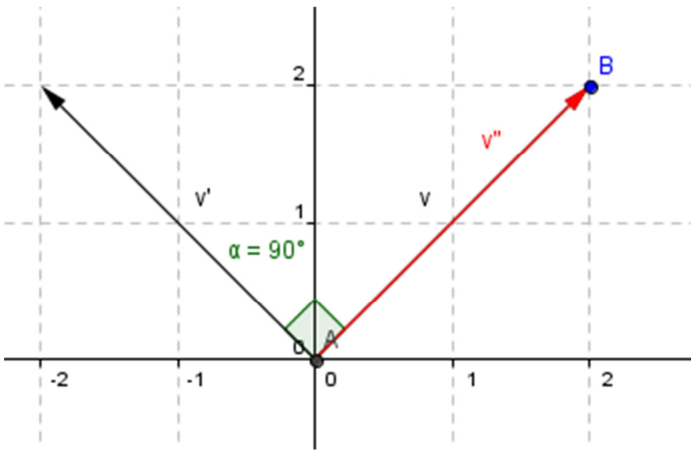


Figura 26

A reflexão em relação a OY fez o vetor voltar para o primeiro quadrante e ficar sobre o vetor original, ou seja, $v` = v$.

Agora vamos inverter a ordem. Primeiramente faremos a Reflexão e depois a Rotação.

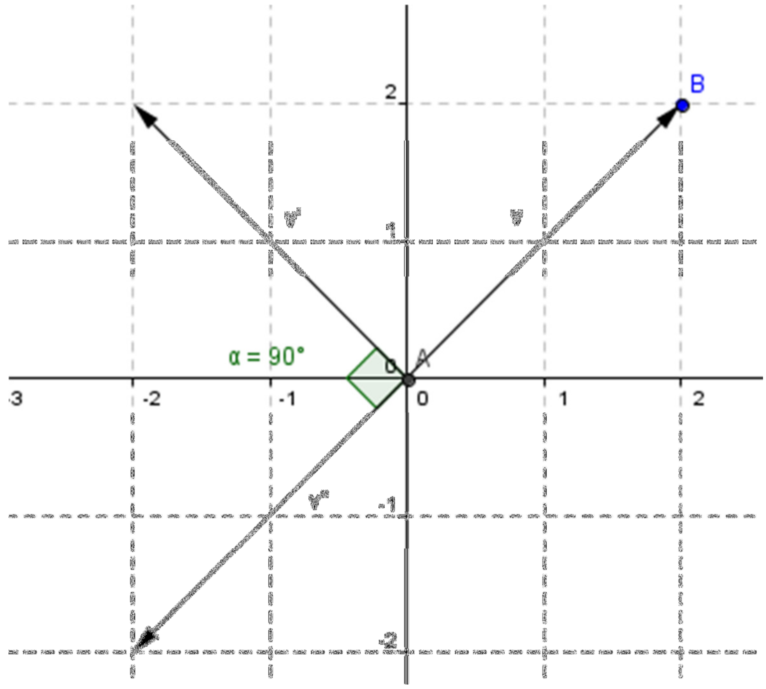


Figura 27

Podemos perceber que essas transformações, se aplicadas em ordem diferentes, os resultados serão diferentes.

No primeiro caso o vetor v’’ resultante das duas operações tinha como coordenadas $\vec{v}''=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$, e seguindo a ordem contrária encontramos como vetor resultante $\vec{v}''=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$, mostrando então que não há comutatividade para essas transformações.

Se T_1 é a reflexão em relação a OY e T_2, a rotação de 90º em relação a origem, temos:

$$T_1 \rightarrow \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$$

$$T_2 \rightarrow \left(T_1\left(\vec{v}\right)\right)$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\-x\end{pmatrix}$$

ou :

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\,,\\y\end{pmatrix}\right]=\left[\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-y\\-x\end{pmatrix}$$

Invertendo a ordem, ou seja, aplicando T_2 primeiro, e depois, T_1, temos

$$T_2 \to \vec{v}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

$$T_1 \to \left(T_2 \left(\vec{v} \right) \right)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

ou :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x, \\ y \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Podemos perceber que os vetores estão em quadrantes diferentes.

3. Aplicando uma metodologia alternativa para o ensino de matrizes em sala de aula

Esse item apresentará como decorreu em sala de aula a abordagem do estudo de matrizes e da álgebra matricial através de conceitos de Geometria Analítica, como vetores e transformações geométricas no plano.

O objetivo geral das atividades a serem descritas a seguir é motivar a aprendizagem da álgebra matricial através da visualização geométrica das operações envolvendo essas transformações no plano. Também será discutido como a ferramenta computacional de Geometria Dinâmica serviu de suporte para essas atividades. Esse trabalho teve como objetivo introduzir o tema matriz e suas operações, através de conceitos geométricos como, vetor, operações com vetores, transformações geométricas e a composição de duas transformações. Além disso, mostrar que essas operações geométricas possuem uma correspondência direta com as operações de matrizes (soma, subtração, multiplicação por um escalar e multiplicação de duas matrizes), não mostradas nos livros didáticos que atualmente são encontrados nas escolas. Essas transformações foram estudadas com o auxílio de um *software* de Geometria Dinâmica chamado Geogebra. Esse programa possui interface simples e intuitiva e a sua instalação não requer conhecimentos específicos de informática. Seu *download* pode ser feito no site: http://www.geogebra.im-uff.mat.br/

Durante o planejamento das atividades, teve-se a preocupação de que a apresentação dessa metodologia alternativa fosse viável em relação ao tempo gasto para se apresentar o conteúdo, de modo que ele fosse equivalente ao utilizado pelo modo tradicional.

As atividades foram desenvolvidas em uma turma do 2º ano do Ensino Médio de uma escola particular em Miguel Pereira, durante o mês de Março e Abril de 2013, que é conveniada a uma rede de escolas muito tradicional do Rio de Janeiro. A escolha dessa instituição para realizar a pesquisa de campo se deu pois: era a única turma do 2º ano em que o autor estava atuando no momento. Essa turma era composta por quinze alunos de aproximadamente quinze anos, sem nenhum repetente. Atualmente, diversas escolas públicas possuem laboratórios de informática, portanto, o autor acredita que as atividades poderiam ser aplicadas nesses outros ambientes de ensino.

O tema "Matriz" foi abordado de maneira que pudesse agregar o aprendizado do *software* Geogebra, abrindo caminho para que o aluno possa usá-lo posteriormente no aprendizado de outros conteúdos da matemática.

Durante as atividades, buscou-se também comentar alguns fatos de História da Matemática para trazer um pouco mais de conhecimento geral para o aluno e fazer com que as aulas fiquem mais interessantes,

O planejamento das aulas teve como referência o elaborado pela escola, que contempla o estudo das matrizes desde a definição até a multiplicação destas, em quatro semanas. Semanalmente, há duas aulas de uma hora e dez minutos, que foram distribuídos da seguinte maneira:

3.1- Primeira semana

Nesta primeira semana, foi explicado aos alunos sobre o objetivo das futuras aulas. Para isso foi solicitado ao aluno para que ele não tivesse contato com a apostila, para que ela não influenciasse nos resultados esperados da pesquisa.

Ainda na sala de aula foi preciso relembrar o conceito de vetor, visto no ano anterior no curso de Física.

Logo após esses primeiros comentários os alunos se dirigiram à sala de informática, onde puderam manusear pela primeira vez o Geogebra, que fora previamente instalado em todas as dez máquinas, ali tiveram as primeiras explicações de como utilizar o *software*, sendo dada evidentemente, uma ênfase sobre os comandos principais para o proposto nessa aula como: criar ponto, criar um vetor por dois pontos e por um ponto e um outro vetor já existente, apagar, configurar escala dos eixo, etc.

Paralelo à realização da tarefa no computador, os alunos fizeram o registro em seus cadernos, utilizando a notação apresentada pelo programa. O *slide* a seguir foi apresentado nesse momento.

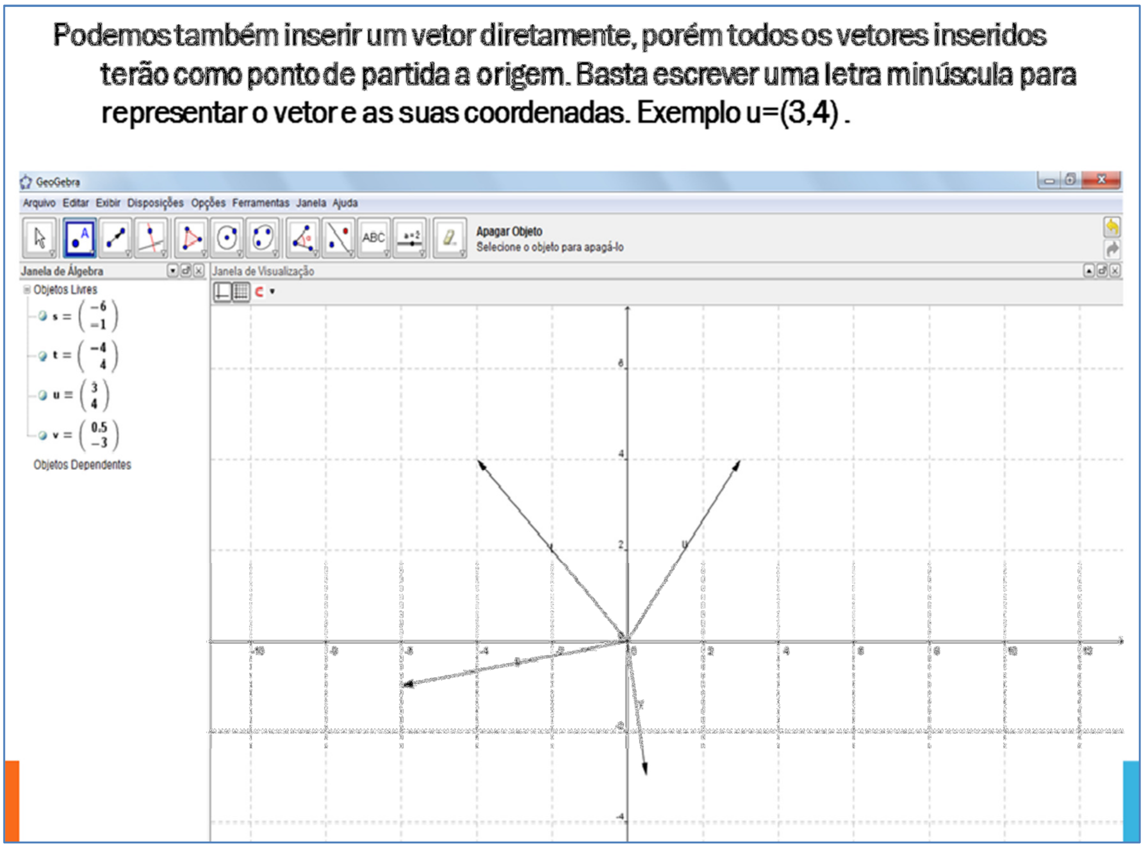


Figura 28

Após a criação dos vetores, os alunos fizeram algumas operações de soma e subtração de vetores, sempre olhando os resultados obtidos na "Janela da Álgebra" para que pudessem perceber que o programa representa os vetores por uma matriz coluna 2x1.

Essa aula teve como objetivo fazer com que o aluno identificasse como a operação de soma e subtração de matrizes do mesmo tipo (2x1) se comporta em nível de coordenadas, visto que as operações com vetores vistas no curso de Física do 1º ano do Ensino Médio não costumam envolver coordenadas cartesianas. O foco normalmente é a Regra do Paralelogramo. Assim, a ideia era que o aluno percebesse que o resultado encontrado, no caso da soma, também seria uma matriz 2x1, dada da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+t \end{pmatrix}$$

Após a exibição dos slides de adição e subtração de vetores, pode-se fazer uma correspondência com a soma e subtração de matrizes. Como o resultado da soma de dois vetores é um vetor de mesmo “formato” (2x1), obtido somando as coordenadas correspondentes, podemos então generalizar essa ideia de uma maneira natural para a soma de duas matrizes de ordem arbitrária: soma-se duas matrizes apenas quando elas têm a mesma ordem, e o resultado é a matriz obtida somando as entradas correspondentes.

3.2- Segunda semana

Após um primeiro momento em que os alunos já visualizaram a soma e a subtração de vetores e que eles puderam perceber que o vetor resultante correspondia à soma das coordenadas x e y de cada vetor, agora tentaremos induzir nos alunos como deve ser definida a multiplicação de uma matriz por um escalar. Para isso, utilizaremos o conceito de uma transformação geométrica chamada Homotetia (confira item 3.2.3).

Homotetias

Em sala de aula, com o auxílio do Geogebra foram feitos vários exemplos para que os alunos pudessem comparar as coordenadas do vetor inicial e do vetor transformado, para que verificasse a generalização dessa transformação. Abaixo está o *slide* que foi mostrado.

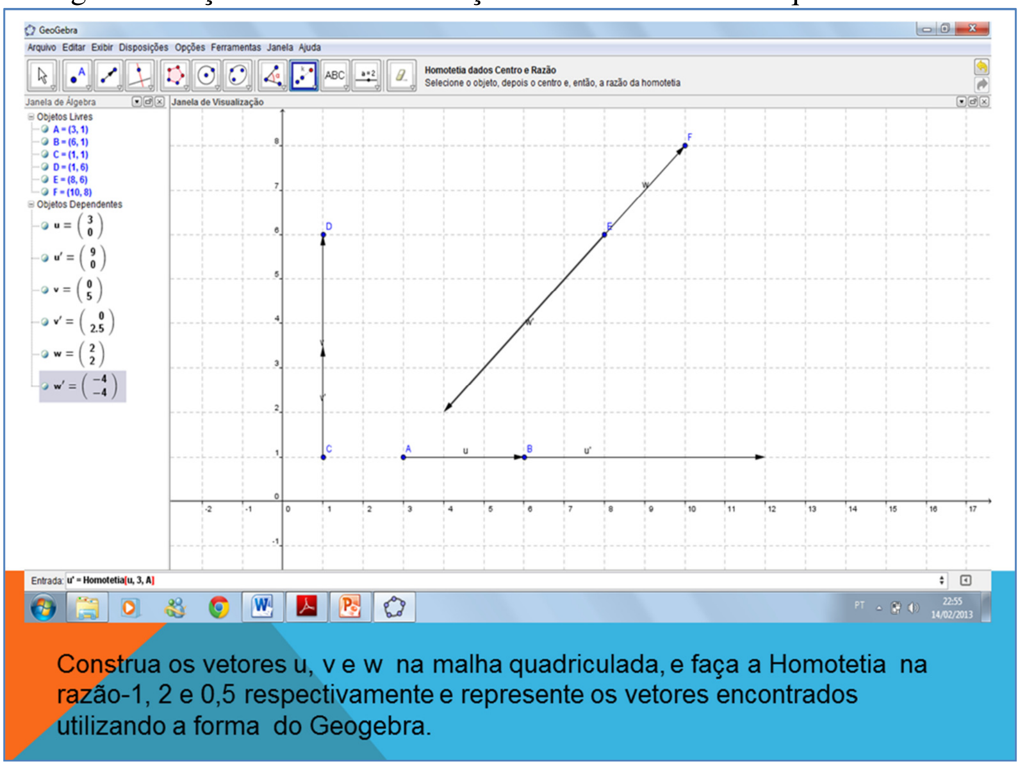


Figura 29

Uma opção feita pelo autor foi trabalhar com o conceito de transformação geométrica apenas do ponto de vista intuitivo: o interesse é entender como as transformações agem nos vetores do plano, sem se ater a formalismos, tais como definir linearidade, ou até mesmo, dizer que essas transformações se tratam de funções de IR^2 em IR^2. A justificativa para essa escolha foi feita com base no objetivo geral, que é fazer com que o aluno compreenda as definições e propriedades da álgebra matricial, e não propriedades sobre funções. Assim, dados uma transformação geométrica T e um vetor v do plano, escolheu-se a notação não convencional a seguir, para se referir ao vetor $T(v)$:

$$T \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}, T \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

$$T \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}, T \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$x' = kx$$

$$y' = ky$$

Onde k é a razão da Homotetia. No primeiro exemplo $k = 3$, no segundo $k = 0{,}5$ e no terceiro $k = -2$.

Primeiramente foi verificada a representação apresentada pelo programa ao aplicar uma transformação, no caso, a Homotetia, em um vetor que tivesse uma coordenada nula, para, em um segundo momento, verificar em uma coordenada não nula, tentando assim generalizar essa operação.

Podemos ver abaixo parte de uma representação feita por um aluno.

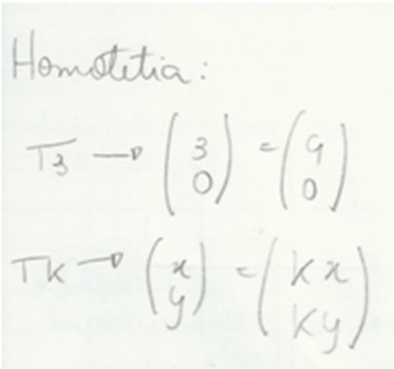


Figura 30

Multiplicação por um escalar

Para verificação da operação de multiplicação de um escalar e uma matriz utilizamos a Homotetia, com o auxílio do Geogebra, mostramos geometricamente que, ao ampliar ou reduzir um vetor, precisamos de uma constante k responsável pela expansão ou contração do vetor, onde a coordenada do vetor resultante dessa transformação corresponde a constante k multiplicada pela coordenadas iniciais. Sendo assim, generalizando a nossa percepção, podemos concluir que, para multiplicar um escalar por uma matriz qualquer, basta fazer a operação de multiplicação desse escalar por todas as suas entradas.

Para motivar a definição de multiplicação de duas matrizes, utilizamos as transformações de Reflexão, Projeção Ortogonal e Cisalhamento.

Reflexão

A princípio foi explicado o conceito de Reflexão. Mostrou-se a transformação Reflexão em relação à OX e foi solicitado então que fizessem a transformação em OY. Nesse momento, foi apresentado à turma a ideia de Cayley, de representar transformações geométricas da forma $T \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ onde $x' = ax + by$ e $y' = cx + dy$ (ou equivalentemente, sistemas lineares em duas variáveis x e y), através de uma matriz 2X2: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.Essa informação abre caminho para descobrirmos qual a matriz de transformação em cada caso.

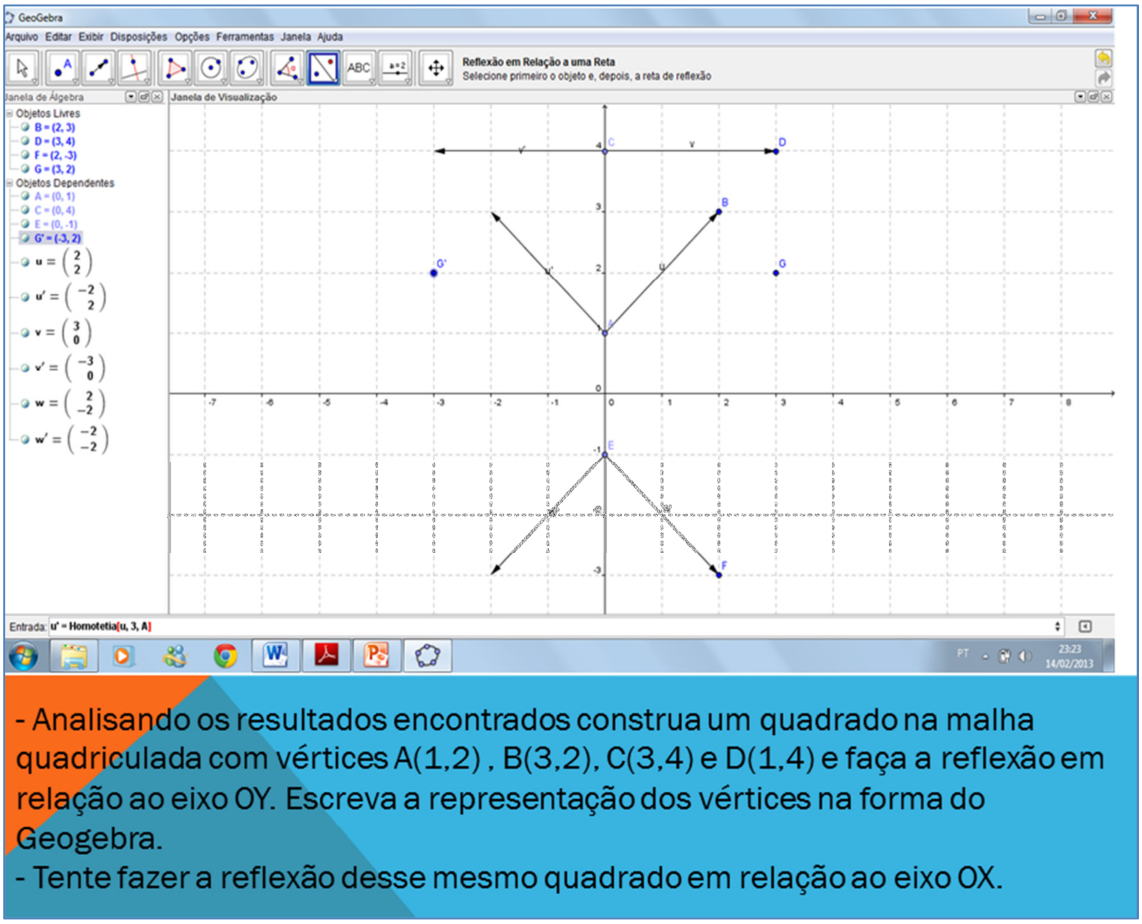


Figura 31

Depois dos alunos calcularem as reflexões de vetores em relação aos eixos coordenados, passou-se ao caso da reflexão em relação a reta $y = x$, para que ficasse claro que uma transformação de reflexão poderia ser realizada em relação a qualquer reta do plano.

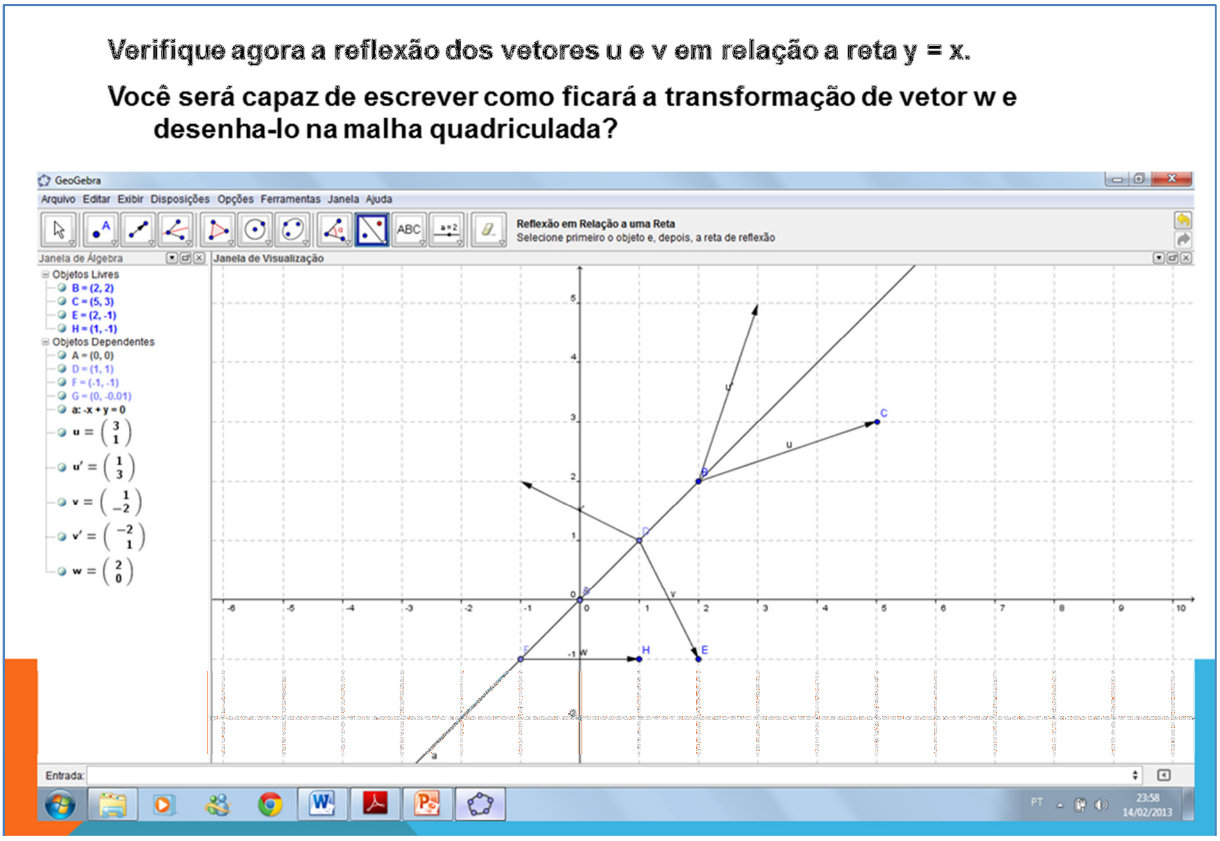


Figura 32

Após as três reflexões foram feitas as generalizações correspondentes.

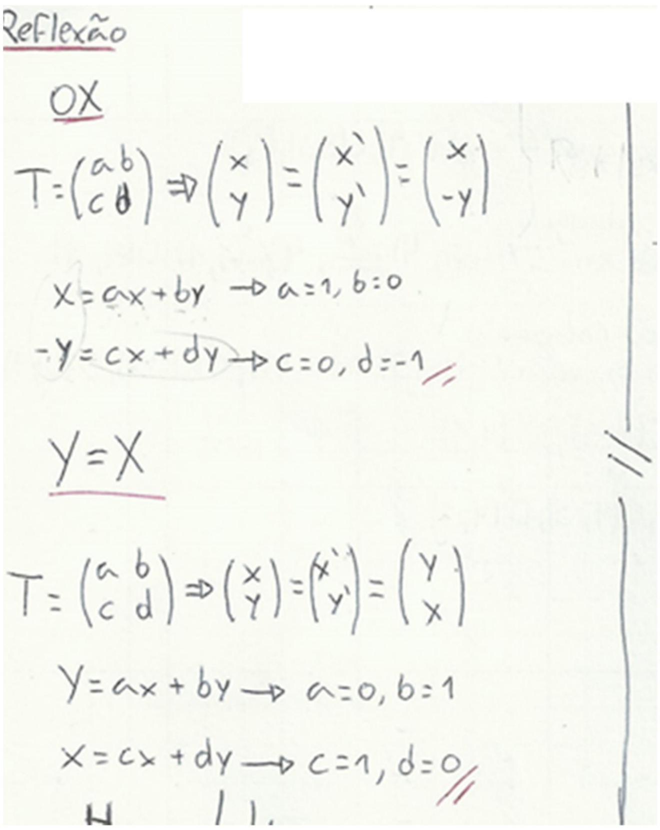


Figura 33

Projeção Ortogonal

Nesse momento houve uma breve explicação sobre o que é uma projeção ortogonal sobre uma reta.

Nas atividades propostas, tratamos apenas das projeções sobre os eixos OX e OY, por simplicidade.

Em sala de aula foi apresentado o slide abaixo.

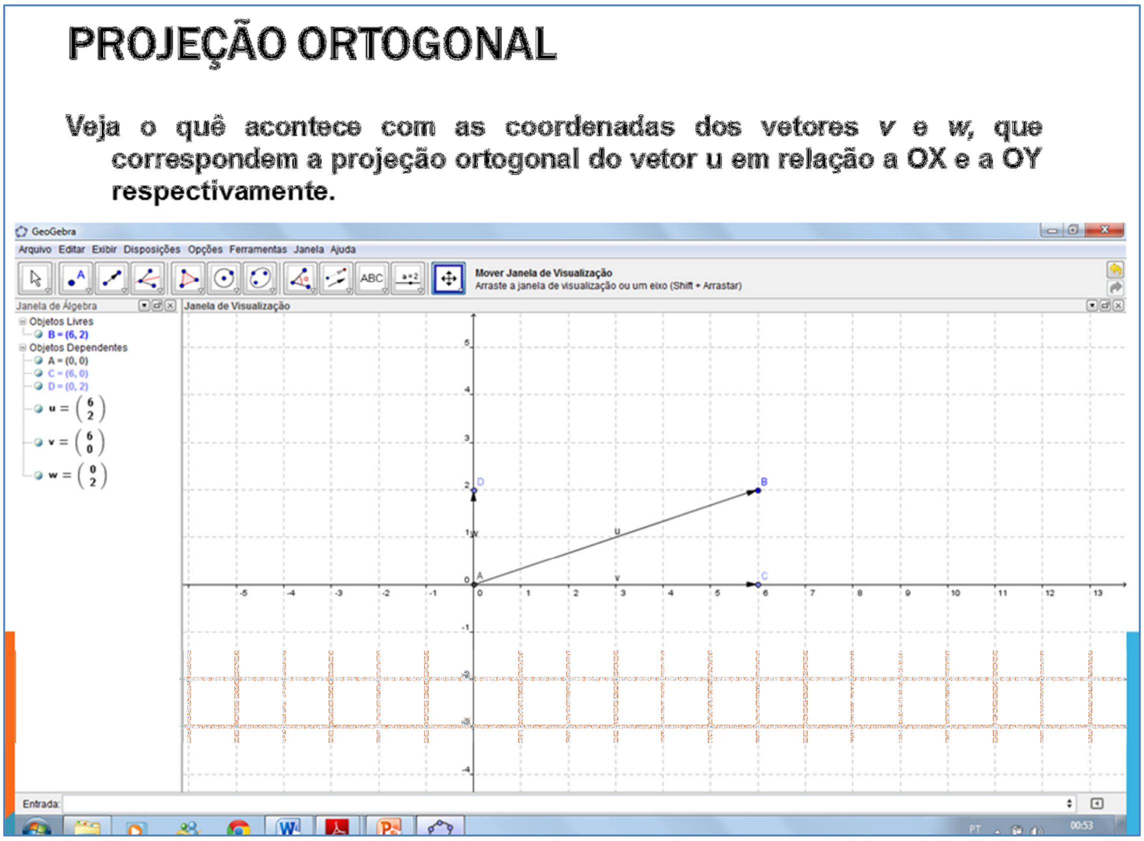


Figura 34

Após a projeção, foi solicitado aos alunos para que eles verificassem as coordenadas dos vetores v e w após projeção ortogonal aos eixos, que fizessem um registro de dados tentando entender como opera essa transformação, e que descobrissem quais entradas possuem as matrizes associadas a cada uma dessas projeções.

3.3- Terceira semana

Rotação

A rotação de um ângulo α, em torno de um ponto, teve a origem como eixo de rotação.

Em sala de aula foi mostrado uma rotação de 90º de um retângulo em relação a origem.

Para facilitar a visualização da operação, os alunos tiveram que construir as outras rotações referentes a 180º e 270º.

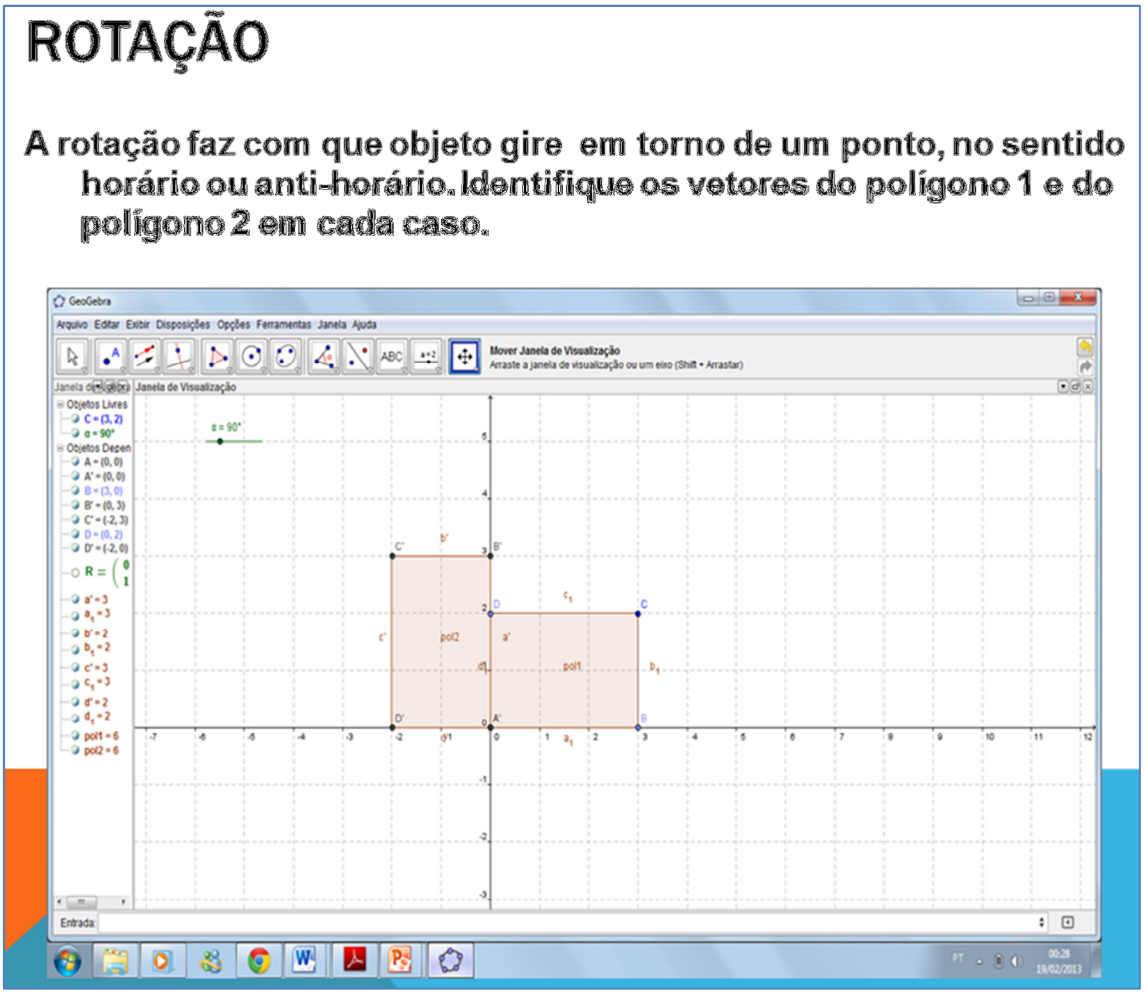


Figura 35

Pode-se perceber os resultados e generalizar.

- Rotações no sentido anti-horário de:

90º	180º	270º
$T \longrightarrow \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}$	$T \longrightarrow \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$	$T \longrightarrow \begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-5\end{pmatrix}$
$T \longrightarrow \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$	$T \longrightarrow \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$	$T \longrightarrow \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$
$T \longrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix}$	$T \longrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\-y\end{pmatrix}$	$T \longrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$

Cisalhamento

Nesta transformação definimos através do slide abaixo.

CISALHAMENTO

A transformação geométrica que chamamos de cisalhamento corresponde a um efeito de deslizamento, pode ser em relação ao eixo x ou ao eixo y

A transformação de cisalhamento na direção x tem um efeito semelhante ao de deslizarmos um baralho de cartas em uma mesa, transformando um retângulo, por exemplo, num paralelogramo.

Vamos ver como fica essa transformação com o auxílio do Geogebra.

Figura 36

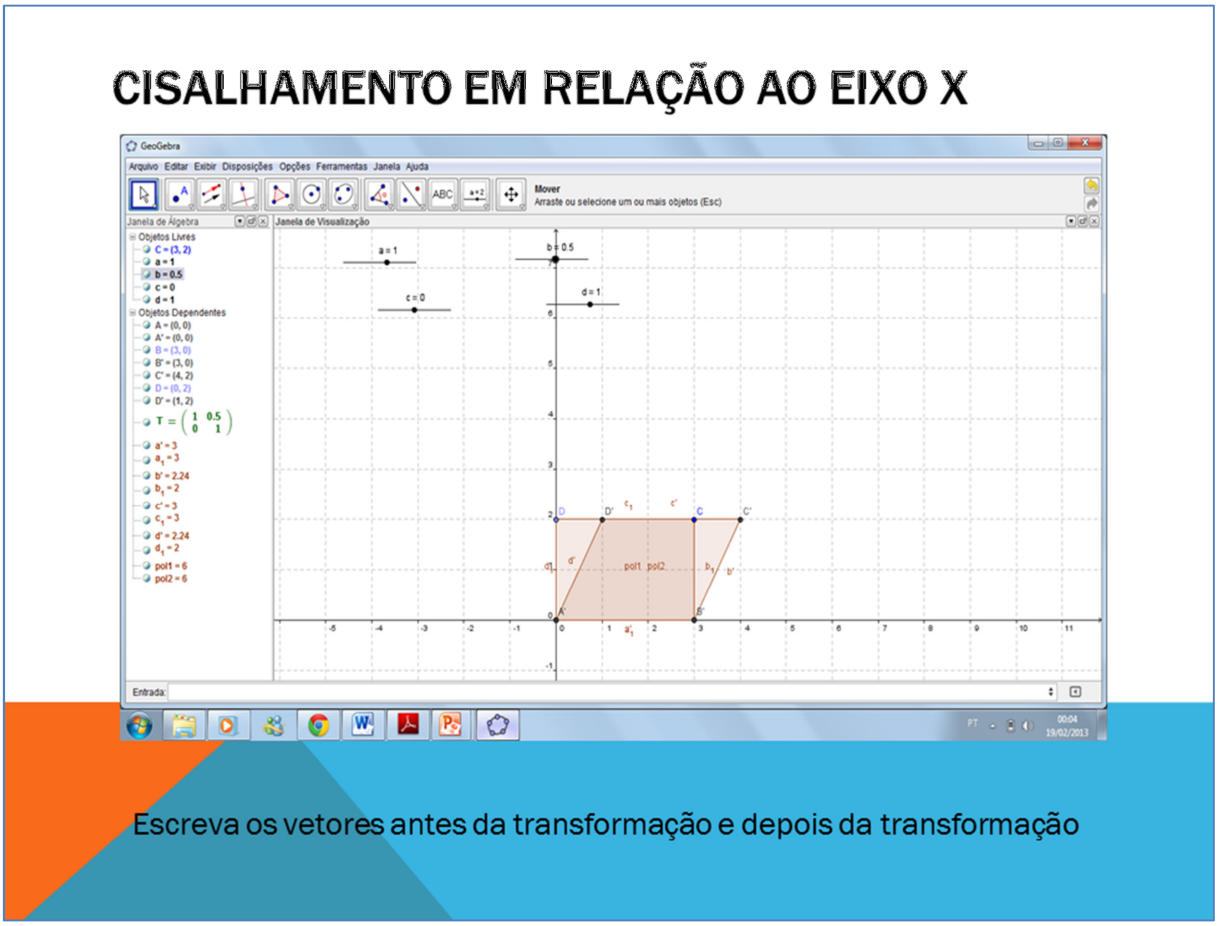


Figura 37

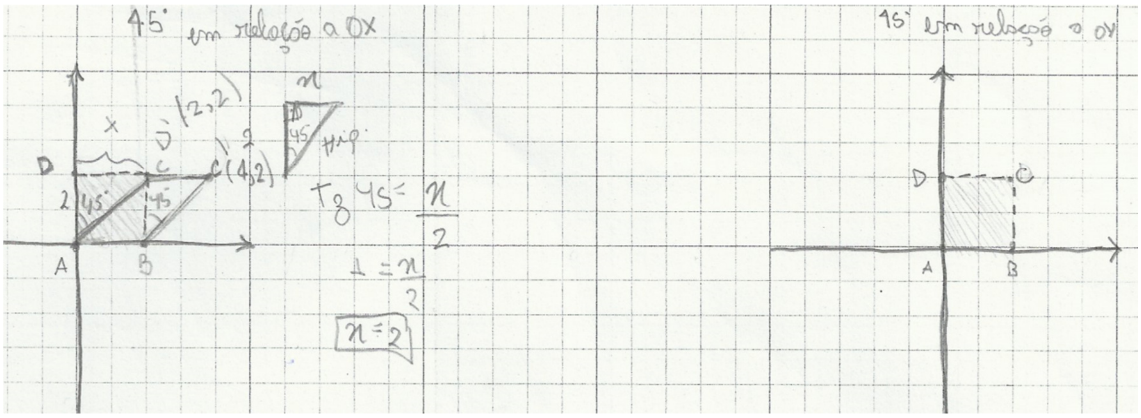


Figura 38: Aluno determinando vértices do paralelogramo

obtido após a transformação de cisalhamento.

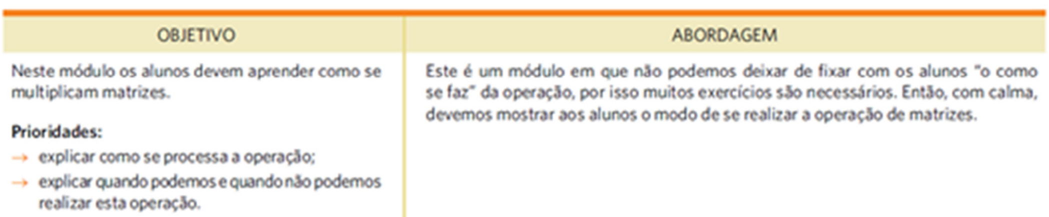
Multiplicação de matrizes (2x2) x (2x1)= (2x1)

Para verificar a operação de multiplicação de matrizes, utilizamos as transformações de Reflexão, Projeção Ortogonal, Rotação e Cisalhamento, onde fizemos uma dessas operações e observamos qual eram as novas coordenadas do vetor ou do polígono transformado, descobrindo quais eram valores das entradas ***a***, ***b***, ***c*** e ***d***, responsáveis pela transformação, e logo após aplicando esses coeficientes em outro vetor. Fizemos essas observações em todas as transformações acima, utilizando o tempo de quatro aulas de 70 minutos cada uma, separada em duas semanas distintas, onde foi dividido em Homotetia, Reflexões e Projeções em uma semana e Rotação, Cisalhamento em outra.

3.4- Quarta semana

Composição de transformações e Multiplicação de Matrizes

A maior dificuldade dos alunos na aprendizagem da álgebra matricial costuma ser quando se introduz a multiplicação de duas matrizes, pois esta operação não é tão intuitiva como a soma. Abaixo, destacamos um trecho contendo a orientação metodológica sugerida pela escola aonde a pesquisa foi desenvolvida:



OBJETIVO	ABORDAGEM
Neste módulo os alunos devem aprender como se multiplicam matrizes. **Prioridades:** → explicar como se processa a operação; → explicar quando podemos e quando não podemos realizar esta operação.	Este é um módulo em que não podemos deixar de fixar com os alunos "o como se faz" da operação, por isso muitos exercícios são necessários. Então, com calma, devemos mostrar aos alunos o modo de se realizar a operação de matrizes.

Figura 39

A sugestão dessa escola ao professor, no que tange o ensino de produto de matrizes, é que se façam inúmeros exercícios com os alunos. Exercícios de repetição que não ensinam, mas doutrina o aluno a executar um algoritmo em cada situação apresentada, um indício da "educação bancária", descrita no Capítulo 1.

Na quarta semana, foi solicitado aos alunos para que fizessem duas transformações seguidas e, depois, fizessem em ordem contrária, para verificar se o resultado seria o mesmo. Mostrou-se o *slide* a seguir propondo essa atividade:

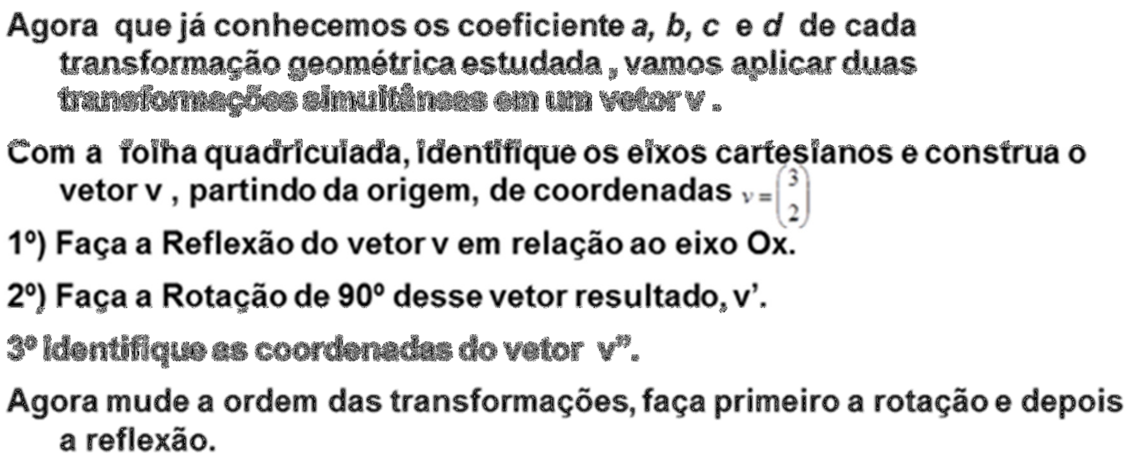


Figura 40

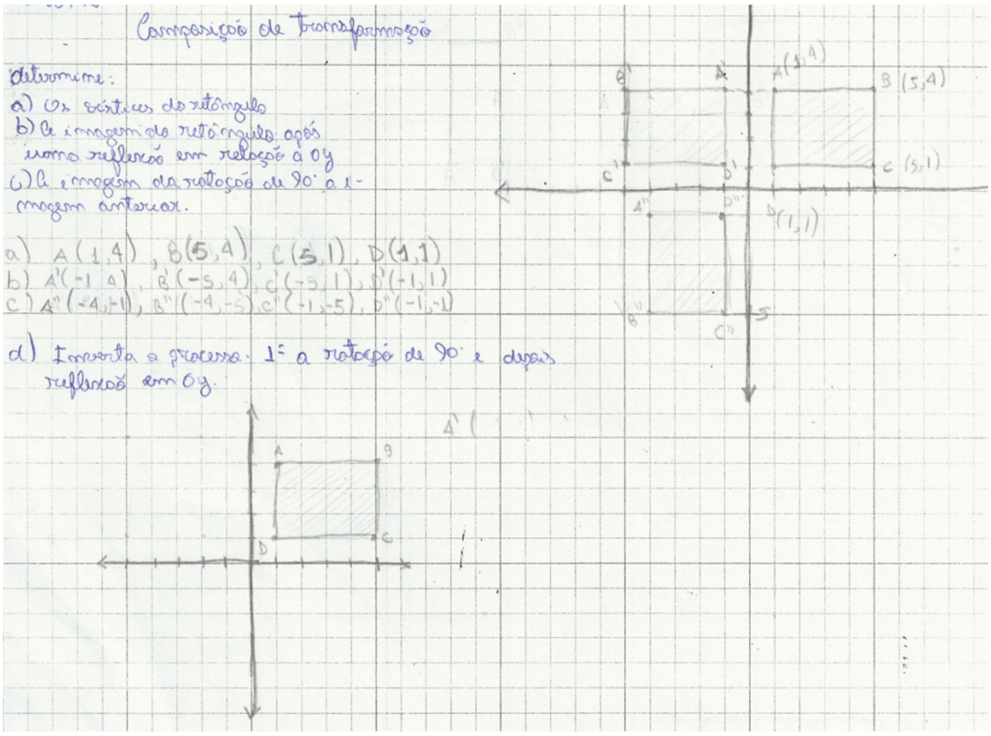


Figura 41: Aluno realizando aplicando em um retângulo

a composta de uma reflexão por uma rotação.

Foi utilizado também o *slide* abaixo para perceber como seria o processo de compor duas transformações, para que os alunos percebessem qual seria a matriz dada por essa composta.

Vamos agora tentar juntar duas operações em uma, ou seja, vamos fazer a composição das duas operações, como nas funções. Vamos usar a reflexão e depois a rotação.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}, onde \begin{cases} -y = Ax + By \\ -x = Cx + Dy \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Figura 42

Essa abordagem também permitiu chamar a atenção do aluno para uma importante característica da operação de multiplicação: o produto de matrizes em geral, não é comutativo.

Para mostrar tal fato, foram usadas duas transformações geométrica. Aplicando sucessivamente as transformações, ora teríamos o mesmo resultado e ora não teríamos.

A comutatividade foi verificada ao fazer uma Reflexão em relação ao eixo OX e uma Reflexão em relação à OY. E para mostrar a não comutatividade fizemos uma Rotação em relação à origem de 90º, no sentido anti-horário, e depois uma Reflexão em relação à OY.

Após a visualização da não comutatividade, através das transformações de Rotação e Reflexão em relação ao eixo OY aplicadas em um vetor, foram feitas as verificações algébricas, através da composição dessas duas transformações. Primeiro a composição da Rotação com a Reflexão e depois, da Reflexão com a Rotação, para que eles percebessem que a matrizes dessas duas compostas eram diferentes, concluindo então que a importa com que ordem se faz o produto de matrizes.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho teve como objetivo, propor uma metodologia alternativa para o ensino de matrizes e suas operações, explorando elementos da Geometria Analítica como os vetores e as transformações lineares no plano. Paralelamente, utilizou-se uma ferramenta computacional, o *software* Geogebra, visando tornar menos passiva a aprendizagem desses conceitos por parte do aluno.

Foi escolhido esse programa por ser gratuito e de fácil utilização, além de ser rápido de ser instalado em qualquer sala de informática.

Essa metodologia também tornou possível resgatar o tema das Transformações Geométricas, que deveria ser amplamente trabalhado no Ensino Fundamental, conforme constam nas orientações dos PCN.

Há uma grande necessidade nos dias de hoje de se fazer uma aula mais dinâmica, com o uso da informática, que é uma ferramenta amplamente difundida entre os jovens. Pode-se perceber, nas aulas dessas quatro semanas da pesquisa, que os alunos demonstraram bastante interesse pelo tema e se mostraram muito participativos.

Ao introduzir o tema "Determinantes", as aulas retornaram ao "estilo tradicional", com o uso da lousa e do giz. Os alunos, então, indagaram se não seria utilizada, em algum momento, a mesma dinâmica de aula no laboratório de informática. Esse comportamento pode ser considerado um ponto positivo para a aplicação da metodologia sugerida nessa pesquisa.

Não foi possível verificar se a qualidade do aprendizado foi superior, comparado com aquele advindo a metodologia tradicional, pois o autor só atuou em uma única turma de 2º ano nos meses da pesquisa.

Uma dificuldade que já era esperada de se ocorrer, foi que, com as atividades realizadas sobre o tema das transformações geométricas, pouco se pode explorar sobre outras definições e propriedades matriciais, como transpostas de matrizes, matrizes simétricas e antissimétricas.

Apesar de ter-se conectado a álgebra das matrizes à outra área da matemática, no caso a Geometria, a contextualização desses elementos no decorrer das aulas precisa ser pensada. Em trabalhos futuros, pretende-se enriquecer mais o ensino das transformações lineares com exemplos de simetrias existentes no cotidiano. O ensino dos determinantes também poderia ser trabalhado com o auxílio do GeoGebra. Por exemplo, as matrizes de ordem 2 com determinante nulo serão exatamente aquelas que transformam polígonos do plano em um ponto ou em um segmentos de reta.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIAR, E. V. B. **As novas tecnologias e o ensino de matemática**. Disponível em: <http://www.essentiaeditora.iff.edu.br/index.php/vertices/article/viewFile/34/26 > Acesso em: 15/03/2013.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental na Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BRASIL. Matriz de Referência para o Exame Nacional do Ensino Médio. Brasília: MEC/SEF, 2009.

D'AMBRÓSIO,U. **Educação matemática: da teoria á prática**. 16ª Edição. Papirus: São Paulo, 2008.

D'AMBRÓSIO, U. **Etnomatemática: Arte ou Técnica de explicar e conhecer**. 5ªEd. Ática: São Paulo, 1998.

DELGADO, J; FRENSEL, K; CRISSAFF, L. **Notas do Curso de Geometria Analítica.** Material Didático do PROFMAT, 2012.

EVES, H. 1992. **Introdução à História da Matemática.** Editora UNICAMP, 1992.

FREIRE, P. **Pedagogia do Oprimido.** Editora Paz e Terra, 1970.

MATHIAS, C.E. **Novas Tecnologias no Ensino da Matemática: Repensando Práticas**. CECIERJ/CAPES/UAB/MEC: Rio de Janeiro, 2008

OLIVEIRA,L.K.M.;REZENDE,W.S. **Prova Brasil e Pisa: exemplos da importância da avaliação educacional em larga escala**. São Paulo: Instituto Arte na Escola, 2012.Disponível em: <http://artenaescola.org.br/sala-de-leitura/artigos/artigo.php? id=69418& > Acesso em: 14/04/2013.

ONUCHIC,L.R. **Uma história da Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo**. UNESP: 2008. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos_completos/ completo3.pdf>. Acesso em: 10/01/13.

PITOMBEIRA, J. B. **Revisitando uma Velha Conhecida.** Departamento de Matemática, PUC-Rio, p. 1-41, 2004.

RIBEIRO, L. O. M. *et al*. **Modificações em jogos digitais e seu uso potencial como tecnologia educacional para o ensino de engenharia.** Revista Novas Tecnologias na Educação, v. 4, n. 1. UFRGS: Porto Alegre, 2006.

STORMOWSKI, V. **Estudando Matrizes a partir de transformações geométricas**. UFRGS: 2008 Papirus: Campinas, 1996.

VENTURI, J. J. **Álgebra vetorial e geometria analítica.** 9ª edição. Editora Unificado: Curitiba, 1949.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BOYER, Carl. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. Edgard Blucher/EDUSP: São Paulo, 1974.

BRASIL **PDE : Plano de Desenvolvimento da Educação : SAEB : ensino médio : matrizes de referência, tópicos e descritores.** MEC, Disponível em <http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/saeb_matriz2.pdf> SEB; Inep: Brasília, 2008.

FAINGUELERNT, E.K.; NUNES,K. A., **Matemática: Práticas Pedagógicas para o Ensino Médio.** Penso: Porto Alegre, 2012.

MIGUEL, A.; et al. **História da Matemática em atividade didáticas.** 2ª edição. EDUFRN: São Paulo, 2009.

MOTTA,C.E.M. **O Uso de Softwares de Geometria Dinâmica no Ensino de Números Complexos**. Unidade 5. Universidade Aberta do Brasil. Curso de Especialização em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática.

MOTTA,C.E.M. **Um Olhar Humanista sobre os Números Complexos.** UFF

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: Um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo**. Introdução à Álgebra Linear**. 1ª edição. Makron Books :São Paulo, 1997