UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - DEMAT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
(PROFMAT)

DISSERTAÇÃO

Modelagem Matemática como Metodologia no Ensino Regular: Estratégias e Possibilidades

Tatiana Soares Cipriano

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICE
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - DEMAT
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
(PROFMAT)

MODELAGEM MATEMÁTICA COMO METODOLOGIA NO ENSINO REGULAR: ESTRATÉGIAS E POSSIBILIDADES

TATIANA SOARES CIPRIANO

Sob a orientação do Professor
Wanderson Lambert

Dissertação de Mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de **Mestre em Matemática.**

Seropédica, RJ
Maio de 2013

511.8

C577m

T

Cipriano, Tatiana Soares, 1982-
Modelagem matemática como metodologia no ensino regular: estratégias e possibilidades / Tatiana Soares Cipriano. – 2013.
viii, 47 f.: il.

Orientador: Wanderson Lambert.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2013.
Bibliografia: f. 46-47.

1. Modelos matemáticos – Teses. 2. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 3. Matemática – Problemas, questões, exercícios – Teses. 4. Ensino - Metodologia – Teses. I. Lambert, Wanderson José, 1977-. II. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

TATIANA SOARES CIPRIANO

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre** , no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 15/04/2013

Wanderson José Lambert

Wanderson José Lambert – Doutor em Matemática – IMPA

(Orientador)

Duilio Tadeu da Conceição Jr

Duilio Tadeu da Conceição Junior – Doutor em Matemática – IMPA

Ronaldo Busse

Ronaldo da Silva Busse – Doutor em Matemática – UFRJ

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por estar comigo em todos os momentos e conceder a graça da conclusão de mais esta etapa.

A minha mãe e meu pai [in memoriam] que com todo o seu amor e dedicação contribuíram para uma criação fincada em valores priorizando sempre a educação.

Ao Professor Wanderson Lambert, pelo excelente trabalho de orientação ao longo desta dissertação, dedicação, disponibilidade e pelas contribuições como participante pesquisa. Minha gratidão pela amizade, por esse tempo de aprendizado e convivência principalmente pela paciência.

Aos professores do PROFMAT pelos conhecimentos transmitidos, carinho e dedicação em todo esse processo acadêmico.

Aos colegas do curso, pelos momentos de convivência, pelos conhecimentos compartilhados e pela amizade. Em particular a Vitor Lyra, Carlos Vitor e Jorge Fagundes pela preocupação e ajuda.

RESUMO

CIPRIANO, Tatiana Soares. **Modelagem Matemática como Metodologia no Ensino Regular: Estratégias e Possibilidades.** 2013. 55p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT). Instituto de ciências exatas – ICE, Departamento de Matemática - DEMAT, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2013.

Este trabalho tem por finalidade apresentar a Modelagem Matemática como uma alternativa importante no resgate de uma matemática significativa para os alunos, capacitando e valorizando os mesmos a construírem seus próprios conhecimentos, relacionando os conteúdos às diversidades do cotidiano. Para tal apresentamos alguns problemas e situações que deverão servir de norteadores para professores e alunos que desconhecem a utilização dos mesmos. Neles valorizamos a criatividade e a construção do conhecimento pelo próprio discente além de desenvolvermos alguns conteúdos presentes no currículo mínimo do ensino regular. Num âmbito atual, onde tais recursos são tão pouco utilizados ainda por nós professores de matemática, estes problemas são expostos com o intuito de proporcionar diferentes possibilidades de integração de atividades de modelagem matemática em sala de aula com a expectativa de que os leitores criem perspectivas otimistas a seu uso na prática do ensino de matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Cotidiano, Problemas, Ensino de Matemática.

ABSTRACT

CIPRIANO, Tatiana Soares. **Mathematical Modeling used for Regular Teaching: Strategies and Possibilities**. 2013. 55p. Thesis (MA in National Network - PROFMAT). Institute of Sciences, Department of Mathematics, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ, RJ, 2013.

This work aims at presenting the mathematical modeling as a important alternative in recovering a significant mathematics for students valuing and empowering them to construct their own knowledge, relating the content to the diversity of everyday life. In order to deal with this problem, we present some problems and situations that should serve as guides for teachers and students which unaware of the use thereof. In them, we value creativity and construction knowledge by the student as well as develop some content present in the minimum curriculum of mainstream education. In the current context, where such resources are as yet little used by us math teachers, these problems are exposed in order to provide different possibilities of integrating mathematical modeling activities in the classroom with the expectation that readers create optimistic outlook to its use in the practice of teaching mathematics.

Key words: Mathematical Modelling, Everyday life problems, Mathematical Modeling.

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino de matemática, já há algum tempo, é alvo da preocupação de professores, alunos, pais e de estudiosos cujas investigações são dedicadas às questões inerentes à aplicação de metodologias no ensino da matemática. Tal preocupação se dá, em grande parte pelo baixo rendimento escolar que é apresentado nessa disciplina no ensino fundamental e médio. Segundo reportagem divulgada no portal R7 http://noticias.r7.com/educacao / noticias / mais - de - 85 - dos - estudantes- brasileiros-sao-reprovados-em-matematica-diz-pesquisa-20111130.html, mais de 85% dos estudantes do nono ano do ensino fundamental em todo o país foram "reprovados" em álgebra, geometria e outras áreas da matemática no ano de 2009. Nesse mesmo ano o INEP divulgou que os participantes do Enem tiveram pior desempenho em matemática do que nas outras matérias avaliadas. Mais da metade (57,7%) ficaram abaixo da média de 500 pontos.

De acordo com Bassanezi:

> "... na própria atividade de ensino, elementar e médio, o porquê de se ensinar matemática deve ser questionado" (Bassanezi, 2011).

Este trabalho tem como principal finalidade apresentar a modelagem matemática como uma metodologia alternativa a ser trabalhada no ensino regular. A busca por métodos que atraiam o interesse dos alunos e melhorem a qualidade do ensino, deve ser uma constante na vida dos professores de matemática. Uma boa conceituação que servirá de justificativa para a aplicação dessa metodologia em sala de aula pode ser dada através da definição de modelagem matemática segundo D'Ambrosio. De acordo com ele modelagem matemática é:

> "... um processo muito rico de encarar situações e culmina como a solução efetiva do problema real e não com a simples resolução formal de um problema artificial" (D'Ambrosio1986).

A modelagem é uma alternativa que contribui para a reversão do quadro existente, uma vez que trabalha os conteúdos matemáticos a partir de fatos reais, com assuntos de interesses dos alunos. Nesse sentido, o aluno se envolve com o processo de fazer matemática e esse processo de envolvimento talvez seja o maior objetivo de toda a busca através de atividades em classe, mas que, de alguma forma, flexibilizam o modo de ensinar matemática. Nesse processo, o aluno encontra, mesmo que minimamente, passos importantes para aprender a "fazer" ao invés apenas de ser um mero coadjuvante na arte de reproduzir.

Tais perspectivas estão em consonância com os Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática que indicam como um dos objetivos do ensino fundamental que os alunos sejam capazes de:

> "questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação" (PCN, 1997).

A Modelagem Matemática valoriza a pesquisa extraclasse levando o aluno à procura de informações para solucionar os problemas levantados, diferenciando-se das demais metodologias, pois vai além da resolução de um problema matemático. E é nesse processo de busca que acontece o aprendizado, pois desenvolve no educando a vontade de criar, de construir seu próprio conhecimento matemático, desenvolvendo a criatividade, a liberdade de ação, a tomada de decisão e a confiança, possibilitando assim, um resgate no prazer em aprender matemática. Neste contexto destacamos um dos princípios onde estão pautados os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática no ensino fundamental:

> “A atividade matemática escolar não é “olhar para coisas prontas e definitivas”, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade” (PCN, 1997).

Assim, a utilização de metodologias que envolvam os alunos ativamente no processo ensino-aprendizagem contribuirá para a formação de um ambiente educativo em que a ciência matemática deixe de ser algo distante e desvinculado da realidade do educando passando a ter um papel atuante, inclusive, no aprendizado e na motivação do interesse do aluno a áreas e atividades correlatas ao saber matemático, tais como aquelas que envolvam diretamente a experimentação.

Ressaltamos ainda, que na maioria das escolas brasileiras, a prática laboratorial é quase que inexistente devido ao alto custo da montagem de um laboratório ou ao despreparo dos professores em produzir seu próprio material. Dessa forma, acreditamos que a modelagem matemática possa servir como uma ferramenta barata e possível para que o professor desperte no aluno o prazer da experimentação e, consequentemente, forme cidadãos atuantes e críticos.

O nosso envolvimento com a presente temática produziu uma dissertação a qual foi organizada em três capítulos.

No Capítulo 1 **Modelagem Matemática**, apresentamos um contexto histórico da modelagem, onde fica claro que a modelagem é tão antiga quanto à própria matemática (Biembengut, 2009), porém sua utilização no contexto educacional é muito recente. Em particular no Brasil, seu surgimento se deu através de importantes pesquisadores, dentre eles destacamos Aristides Camargos Barreto, Ubiratan D’Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi. Embora não tenha sido uma das precursoras destacamos também a educadora Maria Sallett Biembengut que com diversos trabalhos na área colaborou e colabora para imersão da modelagem matemática no âmbito da educação básica.

Neste capítulo apresentamos ainda as principais definições de Modelo e Modelagem encontradas na literatura brasileira. Em seguida expomos as etapas do processo de modelagem segundo Rodney Carlos Bassanezi e as etapas desse processo segundo Maria Salett Biembengut e Nelson Hein. Posteriormente discutimos a modelagem na educação matemática, como um método de ensino e sua utilização em sala de aula.

No Capítulo 2 **Modelagem Lúdica**, é apresentada a modelagem em um outro contexto, sem grandes expectativas, a qual classificamos como Modelagem Matemática Lúdica. Nele introduzimos alguns problemas que podem ser aplicados em sala de aula de uma maneira mais lúdica e enfatizamos uma etapa primordial, que muitas vezes é subestimada ou suprimida em textos de modelagem, que é a etapa que chamamos de "estimativa".

Em tal etapa, o aluno é convidado a imaginar meios e modos para resolver um problema aparentemente insolúvel e às vezes, a princípio absurdo, mas que após uma análise mais criteriosa e uma série de tentativas conseguem fazer com que o aluno e o professor produzam mecanismos de solução para o problema e/ou situações propostas. Por estimativa, entendemos que o aluno será capaz de mensurar, de definir ordens de grandeza, de apresentar, em certo sentido, um conhecimento coerente em relação a um determinado assunto.

A modelagem lúdica, a qual ressaltamos, é uma etapa bastante interessante e fundamental do processo. Nela o aluno é convidado através de seus próprios meios a desenvolver ferramentas para resolver determinadas situações. Aqui, prescindimos a orientação do professor através de fórmulas ou mecanismos pré-concebidos. Deixamos claro que o importante em tal etapa é o processo criador do indivíduo, no qual a imaginação será a principal ferramenta. Acreditamos que essa etapa fará com que o aluno desperte da sua indolência e talvez o motive a se interessar em resolver o problema de modo mais sistemático, desenvolvendo, de modo não forçoso as etapas da experimentação.

A partir dessa metodologia lúdica que esperamos instigar os alunos a talvez desejar aprender mais sobre o problema que ele desenvolveu. Nesse intuito de expor encaminhamentos metodológicos e estabelecer algumas etapas para o trabalho com a modelagem em sala de aula foi elaborado o terceiro capítulo.

No Capítulo 3 **Problemas e soluções**, exibimos alguns problemas formalizados matematicamente através da modelagem que podem servir como possibilidades para professores e alunos no ensino de matemática. Dentre tais problemas destacamos "Será que meu salário dá?" que apresenta a modelagem dentro de um contexto social. Nele discutimos brevemente a problemática da construção civil, seus altos custos e o aumento do salário mínimo no estado do Rio de janeiro. É possível que nesse contexto os alunos sejam instigados a realizarem pesquisas acerca do tema (salário mínimo e preço da construção do m^2) e coloquem os dados obtidos em um sistema de eixos coordenados de modo a verificarem sua evolução no passar dos anos e, a partir daí, percebam que os pontos descritos no sistema parecem um tipo de função conhecida e, portanto, se sintam motivados a calcular o modelo dessa função a fim de realizar previsões futuras. Nele fazemos o uso de noções de funções afim e, além disso, apresentamos uma aproximação de função afim por meio de ajuste linear.

Os assuntos tratados nos problemas podem ser abordados em diferentes séries do ensino regular, porém, ainda que tenham sido apresentadas possibilidades para este estudo, o professor tem plena liberdade de exercer com originalidade novas possibilidades para a aplicação destes problemas e suas soluções. Esse trabalho não encerra, por si só, as possibilidades. O processo criador do professor e do aluno darão novas possibilidades e expectativas para que novas metodologias surjam e enriqueçam essa área tão pouco explorada, mas que apresenta inúmeras e infindáveis possibilidades.

Deixaremos claro que os problemas apresentados foram elaborados através de pesquisas e não foram aplicados ainda em sala de aula devido à falta de tempo necessária para recolher os dados, ficando assim em aberto a possibilidade do surgimento de um trabalho que faça essa continuidade tão necessária e importante.

Concluímos que em nossa busca foi possível fomentar em nós mesmos a necessidade de se fazer algo, mesmo que simples, de modo a transformar a realidade de nossas turmas. Parece algo tão pequeno e insignificante pensando em um país tão grande, porém, se tais processos forem propagados talvez possamos reverter a situação do ensino de matemática no nosso pais. Esperamos que o leitor/professor reacenda em si a necessidade de modificar também a sua realidade e, a partir dela, formar cidadãos criativos capazes de construir seus pensamentos e suas opiniões.

1. MODELAGEM MATEMÁTICA

A Modelagem Matemática no contexto educacional é uma metodologia instigante que traz à tona a discussão do fazer matemática. Nela o aluno pode ver a sua realidade em problemas e através de discussões usar a matemática para compreendê-los e resolvê-los. Este capítulo tem como finalidade fazer uma abordagem histórica acerca do tema e mostrar sua evolução no contexto educacional brasileiro nos últimos anos. Apresenta, também, definições de Modelagem Matemática e Modelo Matemático realizadas pelos principais estudiosos brasileiros na área, bem como, sua aplicação em sala de aula no contexto da educação básica.

1.1. Modelagem – Um contexto histórico

A Modelagem Matemática, considerada hoje um ramo da matemática que busca traduzir situações reais para uma linguagem matemática, esteve presente desde os tempos mais remotos. Há muito tempo o homem procura resolver os problemas de seu cotidiano tendo como ferramenta os recursos do meio em que vive tendo então de explorá-lo e entendê-lo. Segundo Biembengut (2009) a modelagem é tão antiga quanto a própria matemática, surgindo de aplicações nas rotinas diárias de povos antigos.

Desde os primórdios a matemática deixou de ser apenas uma forma inconsciente de sentir a natureza. Com o tempo, o homem sentiu a necessidade de quantificar, contar seus objetos, mensurar o tamanho de suas posses, dividir a terra, fazer o comércio, as trocas, o que culminou nos sistemas de contagem. Este foi o primeiro modelo utilizado pelo homem para quantificar o mundo no qual ele vivia.

Com as necessidades do homem a matemática foi evoluindo. Sabe-se que os gregos tinham um avançado sistema de fazer medições do universo e possuíam modelos avançados para fazer medições e previsões, como, por exemplo, de eclipses solares. Esses modelos planetários eram extremamente avançados para a época e serviram como base para que os cientistas modernos deduzissem os modelos que hoje são considerados corretos.

Na Idade Média, o período negro para as ciências, a matemática ficou estagnada. O modelo aceito como sendo único era o geocentrismo no qual a terra era o centro do universo. Foi a partir do século XV que surgiram grandes cientistas, dentre eles Galileu, que é considerado o primeiro cientista a, de uma forma simples, introduzir o método científico que consistia nos passos da: observação, idealização, experimentação, validação e reavaliação do modelo.

Na educação a abordagem da modelagem matemática é mais recente. No cenário internacional o debate sobre modelagem e aplicações na Educação Matemática ocorre, em especial, na década de 1960, com um movimento chamado “utilitarista”, definido como aplicação prática dos conhecimentos matemáticos para a ciência e a sociedade, que impulsionou a formação de grupos de pesquisadores sobre o tema. Dentre os eventos encontra-se:

Lausanne Symposium, em 1968 na Suíça, que tinha por tema *como ensinar matemática de modo que seja útil*. Na Europa, projetos liderados por Hans Freudenthall, denominado IOWO (Holanda), e outro, coordenado por Bernhelm Booss e Mogens Niss na Dinamarca, atuavam neste sentido, tal que em 1978, em Roskilde, foi realizado um congresso sobre *Matemática e Realidade* que contribuiu para a consolidação, em 1983, do Grupo Internacional de Modelagem Matemática e Aplicações – ICTMA.

Esses movimentos educacionais que tratavam sobre a modelagem matemática na educação influenciaram o Brasil praticamente ao mesmo tempo em que ocorriam devido à colaboração dos professores representantes brasileiros na comunidade internacional de Educação Matemática.

No Brasil um dos primeiros trabalhos de modelagem no ensino foi do professor Aristides Camargo Barretos, da PUC-RJ, na década de 1970 e, nesta mesma década, a proposta da modelagem com fins educacionais emergiu (Biembengut, 1990, 2009). Dentre tais estudiosos destacamos três que podem ser citados como primordiais para imersão da Modelagem Matemática no ensino de Matemática no contexto brasileiro: Aristides Camargos Barreto, Ubiratan D'Ambrósio e Rodney Carlos Bassanezi. Graças a esses precursores, discussões desde como se faz um modelo matemático e como se ensina matemática ao mesmo tempo permitiram emergir a linha de pesquisa de modelagem matemática no ensino brasileiro (Biembengut, 2009). Biembengut diz ainda que, embora Barreto e Bassanezi tenham focado seus trabalhos com modelagem matemática voltados para a graduação e pós-graduação, ao divulgarem suas experiências e propostas em eventos instigaram em vários participantes novos entendimentos concepções e tendências de modelagem (Biembengut, 2009).

Falaremos brevemente desses precursores que julgamos serem os grandes motivadores para que hoje o Brasil tenha reconhecidas pesquisas e trabalhos na área de modelagem matemática.

Aristides Camargos Barreto

De acordo com Biembengut (2009), Barreto talvez tenha sido o primeiro a realizar experiências de modelagem na educação brasileira e, ainda, a representar o Brasil em congressos internacionais apresentando trabalhos sobre o tema, além de divulgar seus trabalhos em cursos de pós-graduação, artigos em revistas e anais de congressos. Seu interesse na área se deu quando cursou engenharia na década de 1960, porém foi quando passou a atuar como professor na PUC – RJ, em meados de 1970, que passou a fazer uso dessa prática em disciplinas como fundamentos da matemática, prática de ensino e cálculo diferencial integral. Junto com estudantes, elaborou vários modelos em áreas específicas como Linguística, Ecologia, Biologia.

As experiências e estudos realizados com e/ou por meio de estudantes sob sua orientação levaram Barreto a defender sua proposta em diversos eventos de Educação Matemática, nacionais e internacionais. Sua proposta implicava apresentar uma situação problema capaz de motivar os estudantes a aprender a teoria matemática; ensinar a teoria, e então retornar à situação problema para matematizá-la (modelar) e respondê-la (Biembengut, 2009). Devido a sua vasta coleção de modelos matemáticos de diversas áreas realizados por ele ou pelos seus estudantes, suas exposições conquistaram muitos adeptos; um deles, Rodney Bassanezi, num Seminário sobre “Modelos Matemáticos” que Barreto ministrou na UNICAMP, em 1979, a convite do professor D'Ambrosio.

Ubiratan D'Ambrósio

Em 1960 ocorria um movimento nos Estados Unidos em relação ao ensino e a aprendizagem de matemática. Nessa mesma época foi formado o Undergraduate Mathematics Application Program – UMAP que objetivava preparar módulos de aprendizagem de matemática por temas. Nele escolhia-se um tema matemático e preparava-se um material pedagógico de apoio, com aplicações em diversas áreas, voltado para melhoria da aprendizagem de alunos do ensino superior. A partir daí, D'Ambrosio, que já era professor e pesquisador na Brown University, em Providence, Rhode Island; na University of Rhode Island, em Kingston - Rhode Island e na State University of New York, em Búfalo - New York, tomou ciência desse movimento. Os módulos apresentavam a abordagem de modelos matemáticos, muito embora, esse nome ainda não fosse usado e só tenha aparecido algum tempo depois.

Seu retorno ao Brasil para atuar na UNICAMP se deu em 1972. Com o apoio da Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura (UNESCO) e da Organização dos Estados Americanos (OEA), D'Ambrosio implantou propostas de educação matemática no Brasil semelhantes às que ocorriam em alguns países da Europa e Estados Unidos. Dentre as propostas implantadas nesse período, destacam-se duas: a produção de materiais de apoio didático na forma de módulos e a criação do primeiro Mestrado em Ensino de Ciência e Matemática na UNICAMP. Foram produzidos novos materiais de apoio didático sobre vários temas matemáticos, todos voltados ao Ensino Fundamental. O modelo adotado nesse Mestrado deu origem a trabalhos em Modelagem e Etnomatemática (Biembengut, 2009).

Rodney Carlos Bassanezi

Coordenou o curso de cálculo diferencial integral por volta de 1980 promovido na IMECC-UNICAMP, onde propôs a seus alunos que criassem um problema que envolvesse cálculo diferencial integral. A maioria dos problemas obtidos era igual aos que se apresentavam nos livros texto e, portanto, sem criatividade. Nesse momento houve a proposta de incluir a modelagem matemática em particular na resolução de problemas de biologia aplicados ao cálculo diferencial integral.

A partir de 1982, ele coordenou um curso de pós-graduação na Universidade Estadual de Guarapuava - PR em que propôs uma mudança no programa do Curso, logo aceita pelos participantes, que consistia em visitar empresas da cidade e, a partir dai, criar problemas para serem investigados. Dessa maneira iniciou-se o primeiro Curso de pós-graduação em modelagem que impulsionou a formação de vários outros cursos nesta área sob a coordenação de Bassanezi, nas mais diversas instituições de Educação Superior. Hoje em dia Bassanezi tem em seu currículo inúmeros cursos de pós-graduação e de formação continuada e palestras, em várias cidades de todas as regiões brasileiras, promovidos por Instituições de Ensino ou Secretarias Estaduais e Municipais de Educação (Biembengut, 2009).

De acordo com Biembengut (2009) sua proposta nos cursos que ministrou para professores era levar os estudantes a se inteirarem das atividades de uma região à qual pertenciam, e, a partir desse contato com as questões da realidade, levantar problemas de interesse para serem investigados.

1.2 Modelo/Modelagem

Segundo Biembengut e Hein (2009), "a ideia de modelagem suscita a imagem de um escultor trabalhando com argila produzindo um objeto". Na concepção dos autores, esse objeto que representa sua ideia é um **Modelo**, e o processo de obtenção desse modelo é a **Modelagem**.

1.2.1 Modelo matemático

De acordo com o dicionário da língua portuguesa, modelo é uma representação de algo (uma maquete, por exemplo), um padrão ou ideal a ser alcançado (uma pessoa, por exemplo) ou um tipo particular dentro de uma série (modelo de um carro, por exemplo). Na matemática podemos definir modelo como representações que são capazes de explicar e interpretar fenômenos em estudo, um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam uma situação, um fenômeno ou um objeto real a ser estudado. Os modelos matemáticos podem ser expressos através de gráficos, tabelas, equações, sistemas de equações, etc.

Como podemos perceber, o termo modelo é bastante impreciso, nessa perspectiva, a ideia de modelo ganha uma nova "cara" quando é relacionado à matemática e passa a ser denominado **Modelo Matemático**. Vejamos alguns conceitos encontrados na literatura:

- "Qualquer representação matemática da situação em estudo" (Barbosa, 2007).
- "Modelo matemático de um fenômeno, é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado" (Bassanezi, 2011).
- "Um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduz, de alguma forma, um fenômeno em questão ou um problema de situação real, é denominado de Modelo Matemático" (Biembengut e Hein, 2009).
- "A matemática com suas expressões, equações, funções, fórmulas, tabelas, formas e teorias, é um conjunto de modelos" (Chaves, 2005).

Em relação à forma de utilização de um Modelo Matemático Biembengut e Hein (2009), frisam que:

> "Um modelo matemático só é um modelo, se servir de referência ou se permitir ser reproduzido para a resolução de problemas semelhantes que originaram o modelo, além de ser mola propulsora para o desenvolvimento de outros conhecimentos."

Para Bassanezi (2011), a importância do modelo matemático "consiste em ter uma linguagem concisa que expresse nossas ideias de maneira clara e sem ambiguidade..."

Segundo D'Ambrosio, "Para se chegar ao modelo é necessário que o indivíduo faça uma análise global da realidade na qual tem sua ação, onde define estratégias para criar o mesmo, sendo esse processo caracterizado de modelagem". (D'Ambrosio, 1986)

Para este autor o processo de modelagem é baseado em estratégias para resolver alguma situação que está inserida no meio em que se vive através da observação deste meio. Com a modelagem é possível influenciar a experimentação, promovendo a compreensão de conceitos, contribuindo para uma melhor formação do estudante.

1.2.2 Modelagem Matemática

De acordo com o dicionário da língua portuguesa modelagem significa "molde", sendo assim, podemos dizer que modelagem matemática significa moldar alguma situação que está inserida em outro contexto, a fim de explicar matematicamente situações que ocorrem no nosso cotidiano.

A modelagem matemática é um método alternativo que pode ser representado por meio de imagem, gráfico, projeto, lei matemática. Com esse método, parte-se de conceitos gerais focando a importância da matemática no meio em que vivemos.

Apresentaremos a seguir definições de modelagem matemática pelos principais estudiosos dessa área. Segundo eles, Modelagem Matemática é:

- Bassanezi (2011), "a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real".
- Barbosa (2003), "todo o processo de abordagem de um problema não matemático, envolvendo a construção do modelo [matemático], partindo de uma situação real

até a construção de um modelo através da utilização de ferramentas e entes matemáticos, como gráficos, equações, inequações, para representar certos aspectos de uma situação real".

- Biembengut e Hein (2009), "uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que valham não apenas para uma situação particular, mas que também sirvam, posteriormente para outras aplicações".
- Blum (1995) "um processo de construção de modelos que transforma uma situação real em uma situação matemática".
- Burak (1992), "constitui-se em um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões".
- D'Ambrosio (1986), "um processo muito rico de encarar situações e culmina com a solução efetiva do problema real e não com a simples resolução formal de um problema artificial".

Segundo Mirian Buss Gonçalves a modelagem matemática permite a realização de previsões e tendências e é eficiente a partir do momento que tomamos consciência de que estamos trabalhando sobre representações de um sistema ou parte dele. É um processo dinâmico, onde, partindo-se de um problema real, associado a um conjunto de hipóteses, é obtido um modelo que forneça possíveis soluções para o problema.

Como método de pesquisa, tem uma orientação metodológica a ser seguida. Neste sentido, foram elaborados diferentes esquemas visando descrever as etapas pertinentes a um processo de Modelagem Matemática. De acordo com Bassanezi (2011) essas etapas de modelagem são: experimentação, abstração, resolução dos modelos validação e motivação.

1. Experimentação: obtenção de informações acerca do fenômeno estudado. Este estágio normalmente demanda a colaboração de um cientista para direcionar a pesquisa no sentido de facilitar, posteriormente, o cálculo dos parâmetros envolvidos no modelo matemático.

Na educação básica, apresentamos o processo de experimentação como sendo o grupo de tentativas realizadas pelo aluno (ou professor) com o objetivo de compreender a problemática envolvida na situação a ser resolvida.

Salientamos que este processo, por vezes repetitivo, instiga o aluno a desenvolver por ele mesmo formas, muitas vezes possíveis e criativas de vislumbrar o "fazer científico". Com o tempo, o discente passará a compreender melhor o processo e as situações problemas a ele apresentado e, a partir disso, passar para o segundo passo que é o da generalização ou abstração.

2. Abstração: Esta fase deve contemplar quatro ações: seleção das variáveis, problematização ou formulação do problema teórico numa linguagem própria da área trabalhada, formulação de hipóteses e simplificação.

Na *seleção de variáveis*, o matemático (professor ou aluno), deve distinguir quais são as grandezas de importância para o modelo, bem como os parâmetros que têm influência em sua formulação; na *problematização*, deve ser tornado claro, a partir de uma questão com terminologia científica, o objetivo do modelo. No caso do ensino, espera - se que o discente seja capaz de identificar o objetivo do seu modelo e como ele poderá utilizar o mesmo para responder a questão proposta; a *formulação de hipóteses* se apresenta como a interpretação dos relacionamentos entre as grandezas variáveis envolvidas no processo podendo fazer uso de modelos clássicos já definidos ou analogias com outros ramos da ciência e, a simplificação busca eliminar do modelo as variáveis que forem consideradas de "menor" importância, baseada na observação do cientista ou do aluno. O modelo obtido dessa forma deve reproduzir com a melhor qualidade possível as informações já existentes e ser capaz de estimar, com razoável certeza, dados ainda não obtidos.

3. Resolução do modelo: a partir das hipóteses formuladas, a solução do modelo fica atrelada ao seu grau de complexidade, podendo ser resolvido através de um método analítico de modo exato e quando este não for possível, em uma aproximação por métodos numéricos. No sentido da educação básica, espera-se que os modelos produzidos possam ser resolvidos utilizando-se de ferramentas simples de cálculo, e que estejam, se possível, no currículo mínimo estabelecido pelo sistema de ensino;

4. Validação: etapa de extrema importância define se o modelo obtido até o momento será aceito ou não, seja em virtude dos resultados que consegue oferecer em comparação com os já obtidos, ou mesmo em relação à concordância dos resultados obtidos com características específicas do fenômeno. Nesta etapa espera-se que a solução fornecida pelo modelo concorde com um grau de erro aceitável com o fenômeno modelado inicialmente;

5. Modificação: Por vários motivos um modelo pode ser modificado:

- Dados experimentais falsos ou obtidos de forma errônea;
- Há variáveis que influenciam a situação real e não foram consideradas no modelo;
- Erro matemático cometido na resolução;
- Existe outra teoria matemática que pode resultar num modelo melhor;
- Interpretação inadequada do fenômeno;

O seguinte texto, extraído de um manuscrito do Professor Wanderson Lambert, descreve, de modo simplificado, as etapas do fazer científico e como, de modo bastante rústico se cria um modelo.

> "Um menino estava perdido na floresta, era um tempo em que as noites eram frias, ele sabia disso. Era urgente, imprescindível, mandatório que se fizesse uma fogueira para aplacar o horror do frio que se iria apoderar do dia, quando a noite adentrasse o horizonte. O menino tinha apenas uma caixa de fósforo e uma certeza, de que nunca houvera feito uma fogueira.
>
> E ele saiu procurando objetos para que pudesse fazer um belo fogo. Como ele não sabia o que poderia ser utilizado, ele foi pegando tudo: gravetos, pedras, pedaços de metal, bastão de beisebol... tudo que ele achava.
>
> O menino amontoou tudo. E acendeu a fogueira. Ele percebia que algumas coisas queimavam e outras não. E assim, foi-se a noite. E ele caiu adormecido.
>
> No outro dia, ele pôde tranquilamente olhar para as cinzas que ficaram. Sobraram as pedras, os pedaços de metal, os montes de terra. Nada disso foi queimado.
>
> Neste dia, o menino ainda tinha que fazer a fogueira. Pois ainda continuava perdido. Só que agora ele já sabia mais sobre a fogueira. Ele sabia que nem tudo queimava. E ele tentou entender e adivinhar quais coisas queimavam. Ele percebeu que os gravetos queimavam, que o taco de beisebol queimou, mas a pedra não queimava, nem os montes de terra, nem os pedaços de metais irregulares que ele encontrou. Então sua primeira hipótese foi: "Tudo que tem o formato parecido com um cilindro, queima".
>
> E durante vários dias ele pegava as mesmas coisas cilíndricas ou quase cilíndricas que ele pegara no primeiro dia: os gravetos, os bastões de beisebol, as toras de madeira. Era o ápice. Ele sentia-se maravilhado com sua teoria. E foi assim, durante vários tempos. Tudo

que ele pegava queimava, e esse fogo ia realimentando a ideia do menino de que: tudo que era cilíndrico queimava.

Ele acreditava que já sabia tudo sobre fogueiras....

Com o tempo foram minguando os gravetos, foram minguando os bastões de beisebol... foram minguando seus argumentos...

Então ele decidiu ousar.

Como ele sabia que bastava ser cilíndrico. Então ele iria pegar tudo que fosse cilíndrico: pegou alguns gravetos, alguns bastões de beisebol... mas como esses estavam escassos, ele levou latas de alumínio, copos de vidro... e juntou tudo isto, tentou, e fez a fogueira. E observou. Silenciosamente. Até que adormeceu.

No outro dia, ele percebeu que ele estava errado. O mundo caiu-lhe por terra. De fato, o que ele havia idealizado não estava correto.

Ele precisava de mais. Precisava de repensar suas ideias, reformular seus questionamentos e suposições. Pois suas suposições haviam falhado. Suas hipóteses estavam incorretas. E agora só restavam duas coisas: simplesmente desistir, ou repensar. O menino, envolto de sua curiosidade de olhar o mundo e imerso na sua necessidade de não morrer de frio, olhou em frente. Agora o seu modelo deveria ser outro. Não bastava que tudo fosse cilíndrico para queimar. Pior, agora ele desconfiava inclusive de que apenas o que era cilíndrico iria queimar... ele precisava ir em frente. Precisava desistir dos seus velhos conceitos. Abrir mão dos seus preconceitos. Destruir seus antigos ícones... Ele precisava reavaliar seu modelo. Pois ele já não sabia de tudo... Agora ele sabia que não sabia de nada... pois afinal, ele era apenas um menino perdido na floresta..."

Utilizando a ideia transmitida pelo texto podemos dizer que o processo de *modificação* muita das vezes se faz necessário, porém, devemos perceber que um modelo pode sempre ser melhorado e isso não faz que todos os passos realizados até aquele momento tenham sido inúteis, pelo contrário, isso mostra que devemos tentar encontrar uma matemática mais adequada ao problema, instigando os alunos a desejarem aprender mais para aperfeiçoar o seu modelo.

As etapas de modelagem constituem uma sequencia de procedimentos norteadores que podem proporcionar maior êxito no estudo de problemas por meio da Modelagem Matemática (vide figura 1.1).

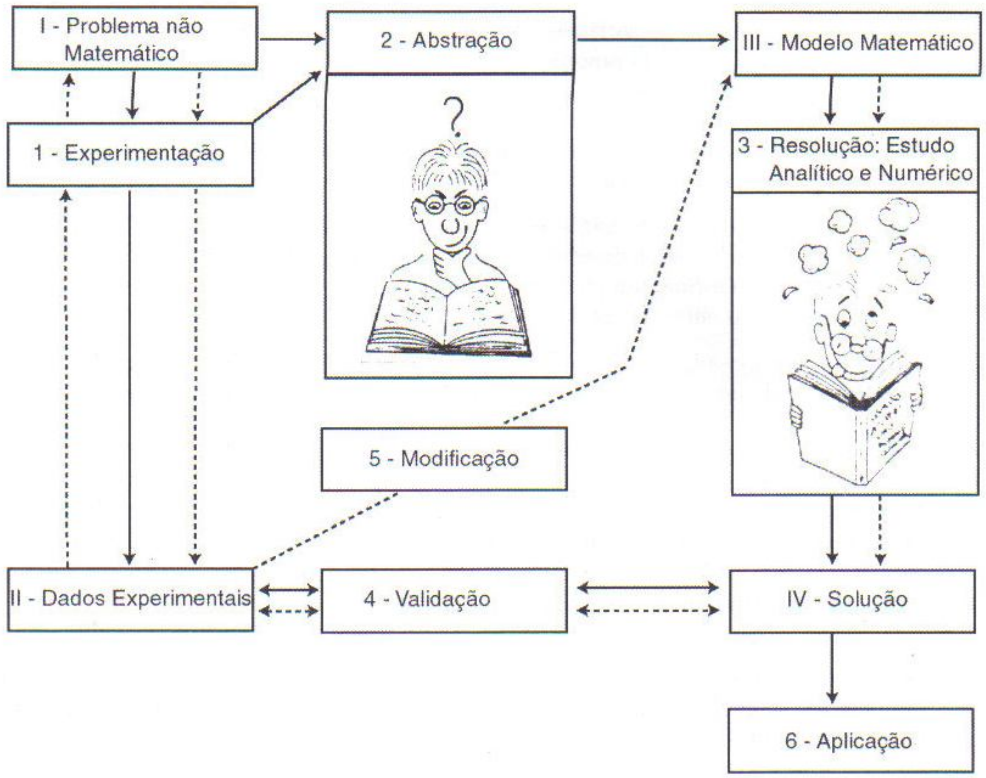


Figura 1.1: *Esquema de modelagem (Bassanezi, 2011).*

Na figura 1.1 as setas contínuas indicam a primeira aproximação. A busca de um modelo matemático que melhor descreva o problema estudado torna o processo dinâmico, indicado pelas setas pontilhadas (Bassanezi, 2011).

Genericamente, Biembengut e Hein (2009), apresentam o modelo de Modelagem Matemática abaixo, no qual matemática e realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é o meio de fazê-los interagir.

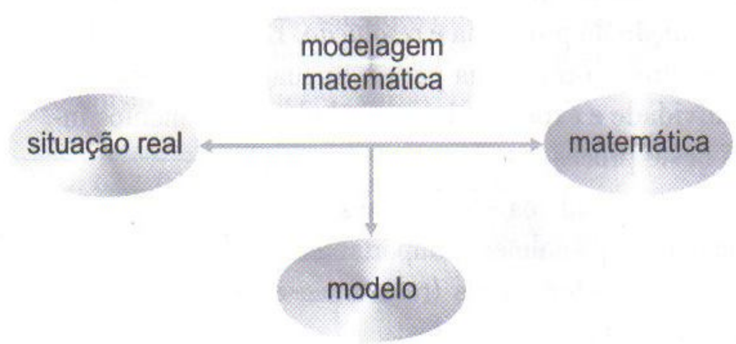


Figura 1.2: *Esquema do processo de modelagem (Biembengut e Hein)*

Essa interação, que permite representar um fenômeno através da linguagem matemática (modelo matemático), envolve uma série de procedimentos, que podem ser agrupados em etapas. Biembengut e Hein (2009) destacam as seguintes:

1. **Interação –** onde ocorre o envolvimento com o tema (realidade) a ser estudado/problematizado, através de um estudo indireto (por meio de jornais, livros e/ou revistas) ou direto (por meio de experiências em campo).

2. **Matematização** – onde ocorre a "tradução" da situação-problema para a linguagem matemática. É aqui que se formula um problema e escreve-o segundo um modelo matemático que leve à solução.

3. **Modelo Matemático** – onde ocorre a validação do modelo obtido, através da análise das respostas que o modelo oferece quando aplicado à situação que o originou, no sentido de verificar o quanto são adequadas ou não. Se o modelo não atender às necessidades que o geraram, o processo deve ser retomado na segunda etapa – Matematização – mudando-se ou ajustando hipóteses, variáveis, etc. (Biembengut, 2009).

Figura 1.3: ***Dinâmica da modelagem matemática (Biembengut e Hein, 2009)***

De acordo com Biembengut é importante ao concluir o modelo, a elaboração de um relatório que registre todas as fases do desenvolvimento, a fim de propiciar seu uso de forma adequada (Biembengut, 1999).

1.3 Modelagem na Educação Matemática

Segundo Araújo (2002), no campo da Modelagem Matemática podem-se distinguir dois grandes grupos: "os que veem a Modelagem Matemática apenas como um método de trabalho para o matemático e os que veem tal processo também como um caminho para o ensino e aprendizagem de matemática".

De acordo com Barbosa (2001), a Matemática Aplicada é "um dos berços de inspiração para o movimento de Modelagem na Educação Matemática". A partir das ideias e concepções da Matemática Aplicada emergiu a Modelagem Matemática no cenário brasileiro (Barbosa, 2001; Biembengut, 2009). O final da década de 1970 marca o início da trajetória da Modelagem Matemática na educação matemática brasileira. Segundo Bean (2001), procedimentos da Matemática Aplicada foram transferidos para a Matemática Escolar em resposta às preocupações socioculturais e ao baixo desempenho de alunos em Matemática.

No contexto da Educação Matemática, a modelagem matemática pode ser compreendida como um caminho para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática ou para o fazer Matemática na escola, tendo como norteadores a observação da realidade, discussões e investigações que modificam não só as ações que usualmente têm lugar na sala de aula, mas também as formas como se observa o mundo. Segundo Bassanezi (2006), trabalhar com modelagem no ensino vai além da questão de ampliar conhecimento matemático, sobretudo, demanda estruturar a maneira de pensar e agir do aluno.

A modelagem no ensino é uma estratégia de aprendizagem, em que "o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas nas quais o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado" (Bassanezi, 2011). Ao explorar as aplicações matemáticas no dia-a-dia, a construção de modelos e o relacionamento entre a matemática utilizada na modelagem e o conteúdo programático, o professor oferece ao aluno a oportunidade de conviver com conteúdos vivos, práticos, úteis com bastante significado (Jacobini e Wodewotzki, 2006). Espera-se que, durante o processo de modelagem, professor e alunos adquiram e desenvolvam o senso crítico, ou seja, uma forma de cidadania baseada no entendimento comum. É importante que o processo de pesquisa no ensino e aprendizagem seja formulado para dar experiência aos modeladores. De acordo com Bassanezi (2011), o aspecto do aprendizado é relevante, pois valoriza diversas maneiras de resolver problemas, que é uma das mais altas formas do desenvolvimento intelectual para todos os indivíduos.

Segundo Jacobini e Wodewotzki (2006), a ação de ensinar e de aprender deve ser vista como sendo apenas uma das possibilidades oferecidas pela modelagem na sala de aula e não a única. Ao restringi-la a pretensões pedagógicas, o professor mantém seu olhar exclusivamente em conceitos matemáticos e "deixa de considerar outras oportunidades tanto para o crescimento intelectual do estudante como para a sua formação crítica enquanto cidadão presente em uma sociedade altamente tecnológica, globalizada e com forte presença da matemática". Dentre as oportunidades enfatizadas pelos autores destacam-se ações sociais e políticas possibilitadas pelo trabalho investigativo inerente à modelagem, com a expectativa de que despontem, em todos os atores participantes, novos olhares, quer sobre a matemática e o fato investigado quer sobre a realidade social que se encontra ao redor do ambiente educacional.

1.3.1. Modelagem como um método de ensino na educação básica

O ensino da Matemática sempre foi alvo das atenções sociais e atualmente, ocupa lugar de destaque, sobressaindo-se dentre as outras disciplinas, pois tem provocado preocupações a professores, alunos, pais e à sociedade, diante do baixo rendimento escolar. Segundo Bassanezi na própria atividade de ensino, elementar e médio, o porquê de se ensinar matemática deve ser questionado (Bassanezi, 2011).

É fácil concluir que, medidas urgentes no campo da Educação Matemática devem ser tomadas no sentido de minimizar esse imenso descompasso entre: o que é trabalhado em sala de aula e o que a sociedade impõe à formação do homem moderno. Dessa maneira, criar novos ambientes de aprendizagem em que a participação do professor seja de orientador/colaborador das atividades e não detentor do conhecimento e os alunos com a liberdade de propor, desenvolver, criar, elaborar, modelar as ideias na construção dos conhecimentos não sejam meros receptores de informação é o que se espera das novas tendências de ensino (Machado Júnior, 2005).

Nesse sentido, apresentar uma proposta que atenda as novas demandas de ensino, que ajude a transformar o aluno em corresponsável pelo desenvolvimento das atividades curriculares, engajado no processo de ensino e de aprendizagem, motivado a aprender e transformar-se em cidadão é um desafio que se impõe à escola hoje.

Neste contexto a modelagem matemática no ensino surge como um caminho para despertar no aluno o interesse em aprender matemática. Segundo Bassanezi os professores devem valorizar o que ensinam de modo que o conhecimento seja interessante, por seu útil, e estimulante por ser fonte de prazer. Ele afirma que nessa nova forma de encarar a matemática, a modelagem – como uma estratégia de ensino-aprendizagem - tem se mostrado muito eficaz.

De acordo com este autor no setor educacional, a aprendizagem realizada por meio de modelagem facilita a combinação dos aspectos lúdicos da matemática com seu potencial de aplicações. E mais, com este material, o estudante vislumbra alternativas no direcionamento de suas aptidões ou formação acadêmica (Bassanezi, 2011), além de redefinir o "papel do professor no momento em que perde o caráter de detentor e transmissor de saber para ser entendido como aquele que está na condução das atividades, numa posição de partícipe" (Barbosa, 1999).

Veja alguns dos argumentos selecionados por Bassanezi (2011) para a inclusão da modelagem matemática no ensino de matemática:

- Argumento de competência crítica – focaliza a preparação de estudantes para a vida real como cidadãos atuantes na sociedade, competentes para ver e formar juízos próprios, reconhecer e entender exemplos representativos de aplicações de conceitos matemáticos.
- Argumento de aprendizagem – garante que os processos aplicativos facilitam ao estudante compreender melhor os argumentos matemáticos, guardar os conceitos e os resultados, e valorizar a própria matemática.

De acordo com ele, muitos estudiosos colocam obstáculos ao uso da modelagem, principalmente quando aplicada em cursos regulares. Veja alguns desses obstáculos (Bassanezi, 2011):

- Obstáculos para os estudantes – O uso da modelagem foge da rotina do ensino tradicional e os estudantes, não acostumados ao processo, podem se perder e se tornar apáticos nas aulas.

> "A formação heterogênea de uma classe pode ser também um obstáculo para que alguns relacionem os conhecimentos teóricos adquiridos com a situação prática em estudo. Também o tema escolhido para modelagem pode não ser motivador para uma parte dos alunos provocando desinteresse" (Bassanezi, 2011).

- Obstáculos para os professores – Muitos professores não se sentem habilitados a desenvolver modelagem em seus cursos, por falta de conhecimento do processo ou por medo de se encontrarem em situações embaraçosas quanto às aplicações de matemática em áreas que desconhecem. Acreditam que perderão muito tempo preparando as aulas e também não terão tempo para cumprir todo o programa do curso.

Nos cursos regulares sabemos que, na maioria dos casos, existe por meio do sistema educacional uma cobrança em relação aos professores a respeito do cumprimento de um programa pré-estabelecido por um modelo educacional tradicional. Diante disso, o processo da modelagem precisa passar por modificações levando em conta, por exemplo, o grau de escolaridade dos alunos, seus conhecimentos matemáticos e o tempo disponível para trabalhos extraclasse.

1.3.2 Como utilizar a Modelagem Matemática em sala de aula

A modelagem matemática como uma estratégia a ser usada para o ensino e aprendizagem matemática em cursos regulares, recebe o nome de *Modelação Matemática*.

Biembengut e Hein (2009) sugerem que para por em prática a modelação matemática o professor use cinco passos. São eles:

- Diagnóstico

O professor deverá fazer um levantamento da realidade da turma. Neste levantamento levará em conta:

- A realidade socioeconômica dos alunos bem como seus interesses e metas;

- O grau de conhecimento matemático dos alunos que permitirá ao educador estabelecer os conteúdos matemáticos que serão trabalhados;
- O horário da disciplina que determinará a dinâmica da aula;
- O número de alunos que conduzirá a formação de grupos de trabalho;
- A disponibilidade dos alunos para o trabalho extraclasse.

- Escolha do tema ou modelo matemático

A partir do momento que o tema foi escolhido mediante a observação do diagnóstico cabe ao professor interar-se dele e preparar a condução do processo para que o conteúdo programático seja desenvolvido.

- Desenvolvimento do conteúdo programático

Neste estágio o professor segue as mesmas etapas do processo de modelagem. Interação – reconhecimento da situação problema e familiarização; Matematização – formulação e resolução do problema; e Modelo Matemático - interpretação e validação.

- Orientação de modelagem

Nesta etapa ver-se-á que o objetivo da modelagem é criar condições para que os alunos aprendam a fazer modelos matemáticos aprimorando seus conhecimentos.

- Avaliação do processo

O professor poderá adotar uma teoria de avaliação que leve em conta dois aspectos:
- Avaliação como fator de redirecionamento do trabalho do professor.
- Avaliação para avaliar o grau de aprendizado adquirido pelo aluno.

Espera-se que, através de uma sistematização de tal processo, o aluno seja levado a desenvolver um espírito e pensamento críticos e que a matemática torne-se atrativa e instigante.

2. MODELAGEM LÚDICA

Através das pesquisas realizadas para a confecção deste trabalho, foi possível perceber que a grande maioria dos livros, teses e artigos que tratam da Modelagem Matemática em um contexto educacional apresentam excelentes problemas, mas, para possivelmente realizá-los é necessário que o aluno faça uso de conteúdos previamente trabalhados. Neste capítulo temos a intenção de mostrar que a modelagem aplicada, principalmente em séries iniciais, pode ser apresentada de maneira lúdica, sem rigor, sem grandes pretensões, no sentido de não ter a necessidade de trabalhar um ou mais conteúdos específicos. Bassanezi relata que no setor educacional, a aprendizagem realizada por meio da modelagem facilita a combinação dos aspectos lúdicos da matemática com seu potencial de aplicações. E mais, com este material, o estudante vislumbra alternativas no direcionamento de suas aptidões ou formação acadêmica (Bassanezi, 2011).

Neste processo valorizamos principalmente as etapas da investigação e da estimativa, apoiados em Barbosa que afirma que, na sala de aula, o importante nas atividades de Modelagem Matemática não é chegar a um modelo matemático, mas sim ao processo de investigação por meio da Matemática (Barbosa, 2007).

2.1. Estimativa

Como já foi discutido no capítulo anterior, os problemas que ocorrem no processo de ensino e aprendizado de matemática, devem-se principalmente ao fato dos alunos terem mudado e as metodologias de ensino terem continuado as mesmas de anos atrás. Muitos professores se recusam a sair daquela tal "zona de conforto" preferindo situações em que quase tudo é conhecido ou previsível e há pouco ou nenhum espaço para a criatividade. Nesse contexto, a Modelagem Matemática aparece como um processo eficaz que, além de valorizar a criatividade do aluno, transporta sua realidade para dentro da sala de aula.

Nossa intenção neste trabalho é, além de tudo, proporcionar aos professores oportunidades de acesso às diferentes possibilidades de integração de atividades de modelagem Matemática às aulas, com a expectativa de que eles criem perspectivas otimistas em relação ao uso da modelagem em sua prática docente.

A modelagem matemática não tem como objetivo a criação de cientistas, sua finalidade é a de proporcionar ao aluno a formação de um espírito crítico e a capacidade de fazer estimativas sobre determinadas situações problema.

Problemas envolvendo estimativas rotineiramente aparecem como situação problema por diversas vezes em vestibulares em todo Brasil. Citaremos a seguir três delas em vestibulares da UNICAMP, no qual é pedido aos alunos que façam certas estimativas, sem as quais ele será incapaz de resolver o problema.

- Problema 1:

8. Esta questão procura avaliar sua capacidade de propor dados numéricos baseados em sua própria vivência e com eles fazer alguns cálculos estimativos.

a) Faça uma estimativa do volume máximo de ar que seus pulmões podem conter. numa inspiração profunda.

b) Considerando 0,08 atm.ℓ/(K.mol) como o valor aproximado da constante universal dos gases ideais e 30 g a massa molar média do ar no interior dos pulmões, faça um cálculo estimativo da massa de ar neles contida, numa inspiração profunda.

Figura 2.1: *Questão retirada do vestibular da UNICAMP-1989*

Neste problema o candidato deveria ser capaz de dar uma resposta satisfatória dentro do contexto do razoável e possível.

Perceba que não há nenhuma "dica" ou "indução" para que o candidato responda à pergunta. Ele tem total liberdade para dar o "chute" e partir dele resolver o que se pede.

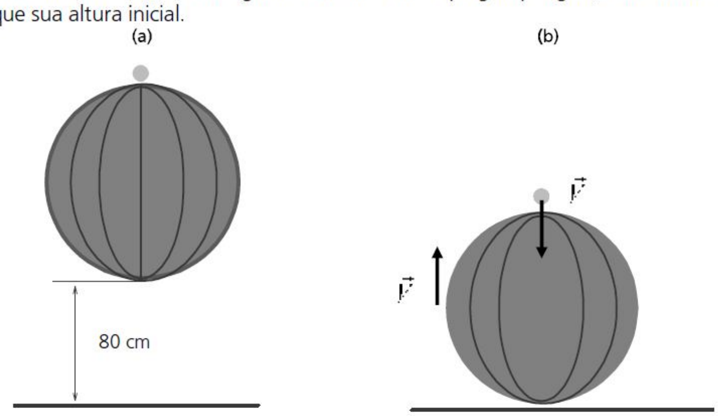
Uma maneira de pensar na resolução desse problema é imaginar, por exemplo, em uma bexiga de ar cheia. O seu formato assemelha-se ao de um pulmão no momento da inspiração, e por meio disso, fazer um palpite. Ou seja, estimar quantos litros de água cabem naquela bexiga até ter o tamanho esperado. Enfim, aproximar o volume do pulmão ao de um objeto similar que tenha um volume conhecido ou possível de mais facilmente ser estimado.

Dentro do mesmo contexto e mais recentemente, essa mesma instituição trouxe mais dois problemas de anos distintos que exigem do aluno esse raciocínio criativo muita das vezes desprezado no nosso sistema de ensino de matemática.

- Problema 2:

2.

Um experimento interessante pode ser realizado abandonando-se de certa altura uma bola de basquete com uma bola de pingue-pongue (tênis de mesa) em repouso sobre ela, conforme mostra a figura (a). Após o choque da bola de basquete com o solo, e em seguida com a bola de pingue-pongue, esta última atinge uma altura muito maior do que sua altura inicial.



a)

Para h = 80 cm, calcule a velocidade com que a bola de basquete atinge o solo. Despreze a resistência do ar.

b)

Abandonadas de uma altura diferente, a bola de basquete, de massa M, reflete no solo e sobe com uma velocidade de módulo V = 5,0 m/s. Ao subir, ela colide com a bola de pingue-pongue que está caindo também com V = 5,0 m/s, conforme a situação representada na figura (b). Considere que, na colisão entre as bolas, a energia cinética do sistema não se conserva e que, imediatamente após o choque, as bolas de basquete e pingue-pongue sobem com velocidades de V'_b = 4,95 m/s e V'_p = 7,0 m/s, respectivamente. A partir da sua própria experiência cotidiana, faça uma estimativa para a massa da bola de pingue-pongue, e, usando esse valor e os dados acima, calcule a massa da bola de basquete.

Figura 2.2: *Questão retirada do vestibular da UNICAMP em 2008*

Verifica-se que novamente o aluno é convidado a fazer estimativas acerca do problema, dessa vez concebendo relações com o cotidiano. O problema mostra justamente a importância de se perceber o que ocorre no dia a dia e certamente valoriza o aluno que compreende o que ocorre ao seu redor. Um candidato ao vestibular que já tenha se aventurado na arte de modelar provavelmente não apresentaria grandes dificuldades em realizar esta etapa da questão. De modo contrário, um aluno que conhecesse apenas a parte teórica e não tivesse tal conhecimento lúdico, e como já dissemos, muitas vezes desvalorizado pelos sistemas de ensino, certamente não a concluiria com êxito.

- Problema 3:

Questão 18

Várias leis da Física são facilmente verificadas em brinquedos encontrados em parques de diversões. Suponha que em certo parque de diversões uma criança está brincando em uma roda gigante e outra em um carrossel.

a) A roda gigante de raio $R = 20\ \mathrm{m}$ gira com velocidade angular constante e executa uma volta completa em $T = 240\ \mathrm{s}$. No gráfico **a)** abaixo, marque claramente com um ponto a altura h da criança em relação à base da roda gigante nos instantes $t = 60\ \mathrm{s}$, $t = 120\ \mathrm{s}$, $t = 180\ \mathrm{s}$ **e** $t = 240\ \mathrm{s}$, e, em seguida, esboce o comportamento de h em função tempo. Considere que, para $t = 0$, a criança se encontra na base da roda gigante, onde $h = 0$.

b) No carrossel, a criança se mantém a uma distância $r = 4\ \mathrm{m}$ do centro do carrossel e gira com velocidade angular constante ω_0. Baseado em sua experiência cotidiana, estime o valor de ω_0 para o carrossel e, a partir dele, calcule o módulo da aceleração centrípeta a_c da criança nos instantes $t = 10\ \mathrm{s}$, $t = 20\ \mathrm{s}$, $t = 30\ \mathrm{s}$ e $t = 40\ \mathrm{s}$. Em seguida, esboce o comportamento de a_c em função do tempo no gráfico **b)** abaixo, marcando claramente com um ponto os valores de a_c para cada um dos instantes acima. Considere que, para $t = 0$, o carrossel já se encontra em movimento.

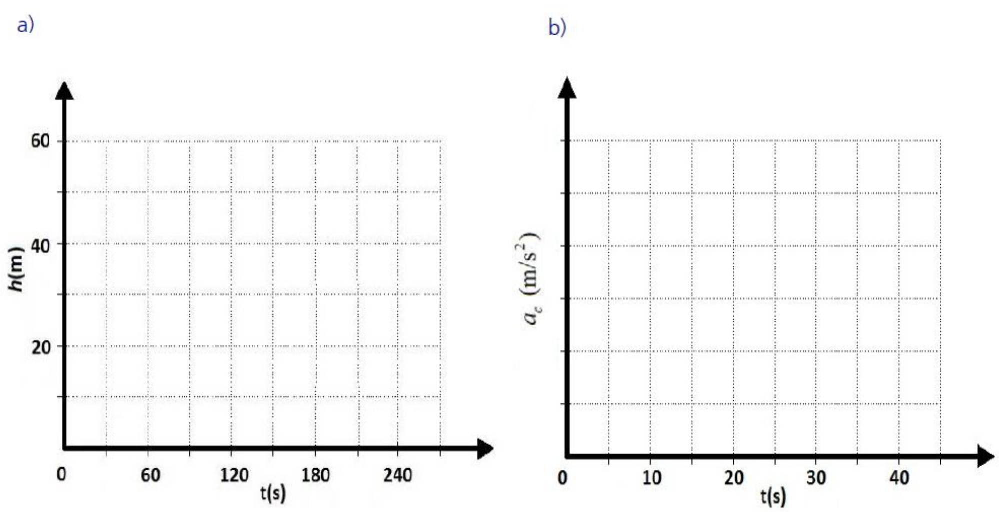


Figura 2.3: Questão retirada do vestibular da UNICAMP em 2011

Observe que um aluno com pouca experiência na “arte” de fazer estimativas teria muitas dificuldades para solucionar estas questões. No problema 1, por exemplo, o aluno poderia inicialmente determinar a capacidade (em litros) de um pulmão humano o que a primeira vista parece um tanto quanto esdrúxulo.

Este não é um fato isolado, nem um problema isolado. Um bom modelo, muitas vezes, passa por uma etapa inicial que é a da “boa estimativa”. Por isso é imprescindível que o aluno seja capaz de, frente a um problema, dar um “chute” bastante adequado e que seja capaz de ter um alcance suficientemente bom. Essa etapa da “estimativa” muita das vezes é pouco estimulada nos textos de modelagem, porém é de extrema importância para a construção do conhecimento. É imprescindível que os alunos por si só façam suas estimativas, formulem suas ideias que por sinal podem ser muito boas e convincentes no âmbito da ciência. É claro que o professor deverá interferir, mas não com a intenção apenas de dizer que está errado, mas sim, aparecer como colaborador na passagem da estimativa feita para uma formulação do problema.

Para isso podemos introduzir ao aluno vários pequenos problemas, que a principio parecem bastante ilógicos, complicados, impossíveis de serem respondidos, mas se olhados com um prisma da modelagem fornecem resquícios de um princípio básico de todo processo de modelar: "olhar e identificar o problema é a melhor forma de resolvê-lo". Abaixo apresentaremos algumas possíveis questões que podem ser aplicadas em sala de aula para despertar no aluno essa criatividade.

- Quantos litros de ar cabem no seu pulmão?
- Quantas vezes você respira por dia?
- Quantos gatos seriam necessários para dar a volta ao mundo?
- Quantas listras tem uma zebra?
- Quantas folhas possui uma árvore?
- Quantas folhas possui um metro de papel?
- Quantos segundos você já viveu?
- Quantas gotas de água tem em um litro?
- Quantos grãos de feijões possui um quilo?
- Quantos grãos de arroz há em um quilo?
- Quantos passos têm em um quilômetro?
- Quantos passos você deve dar para percorrer o mundo. Quanto tempo você levaria se pudesse ir andando?
- Quanto pesa um grão de arroz?
- Quanto pesa um grão de feijão?
- Quanto pesa uma pena?
- Quantas horas você gastaria para ler um livro de 100 páginas?
- Quanto tempo uma torneira levaria para encher um balde?
- Quanto você gastaria no mês com esta torneira pingando?
- Quantas horas você já tomou banho na sua vida?

Com as questões apresentadas acima o professor introduz ao aluno a primeira ideia do que é fazer modelagem. Essa modelagem inicial é de extrema importância para fomentar a criatividade muitas vezes já adormecida dentro do educando. Enfatizamos que essa criatividade é fundamental para formarmos cidadãos que pensem e não aceitem situações prontas como verdadeiras pura e simplesmente, construindo seu conhecimento e interessados em entender as etapas de uma formulação. Nesse contexto, apresentaremos uma contextualização dessa primeira amostra de modelagem na vida escolar do aluno que pode ocorrer em qualquer ano de ensino.

2.2. A modelagem Lúdica

A modelagem pode se revestir de um caráter bastante lúdico na tentativa de promover ao aluno tanto o gosto quanto à curiosidade pela matemática e, neste contexto, fomentar o desenvolvimento da capacidade de percepção e de fazer estimativas adequadas para diversas situações.

Nesse sentido podemos introduzir o que definimos como “Modelagem Matemática Lúdica”. Nesta modelagem não precisamos criar um grupo de fórmulas ou um conjunto de situações problemas, estamos interessados apenas que o aluno, de modo bastante intuitivo, siga os passos dentro da modelagem e crie, por si mesmo, as etapas da modelação matemática. De acordo com Barbosa (2011), no caso da modelagem, com fins de ensino e aprendizagem, ocorre em ritmos diferentes e a importância maior está no processo em vez do modelo matemático final.

Aqui valoriza-se a imaginação, a observação e a criatividade. Os chutes e os cálculos extremamente simples são valorizados. O fato do modelo não ser rigoroso e apresentar uma margem de erro não satisfatória deve servir de motivação para que o aluno perceba a importância de melhorá-lo e posteriormente encontrar maneiras de torná-lo mais eficaz através de uma matemática mais rígida. Se o modelo apresentar uma margem de erro interessante e for bem simples ele se torna excelente afinal um modelo deve ser uma representação simplificada da realidade.

Traçaremos a seguir algumas situações as quais podemos introduzir essa modelagem sem rigor no universo escolar. Vamos trabalhar basicamente com situações hipotéticas que poderiam ser aplicadas em sala de aula para discentes de qualquer nível escolar, introduzindo possíveis estratégias de solução dessas situações e o que o aluno iria assimilar de tais situações.

Situação 1 – Pegue um rolo de barbante de uma metragem conhecida (há rolos vendidos com várias metragens, escolha um que mais seja adequado). Enrole tal barbante de modo a formar um elipsoide, ou algum outro sólido geométrico o qual o aluno seja capaz de identificar e, se possível, fazer aproximações e dessa forma, através de um modelo matemático identificar qual a metragem do fio de barbante.

O professor deverá construir tal situação, identificando com o aluno quais as possíveis maneiras que ele deve proceder. Os alunos devem se sentir livres de modo a encontrarem esta melhor forma de agir. O fato é que eles darão uma possível solução e, mesmo sem grandes formalidades podem chegar a valores bem interessantes. No término da atividade é importante que os alunos meçam este barbante e percebam as margens de erros. É interessante que o professor juntamente com os alunos, façam estimativas de erros como, por exemplo: Qual a margem de erro obtida em cada grupo? Qual grupo melhor se aproximou do resultado? Como foi o processo realizado pelo grupo que obteve melhor resultado?

Este seria um problema interessante para introduzir a alunos de qualquer nível de escolaridade. No capítulo 3 apresentaremos a formalização deste problema através do processo de modelagem. É bem verdade que esta formalização deva ser apresentada apenas se os conceitos ali apresentados já tenham sido trabalhados em sala.

Espera-se com este exercício que o aluno rompa paradigmas estabelecidos por décadas de ensino, onde ele é um mero coadjuvante no processo de construção do conhecimento. Que ele tenha liberdade para fugir dos “grilhões” das fórmulas matemáticas ou da exatidão, e que o choque na tentativa de fazê-lo desperte-o da inércia de aprender apenas por meio de um processo repetitivo.

Situação 2 – Pegue um número arbitrário de feijões (conte antes de iniciar a construção de tal situação). Coloque tais feijões dentro de um saquinho, e feche-os bem. Peça ao grupo de alunos que encontre uma forma de identificar de modo o mais preciso possível quantos feijões existem nesse saquinho. O saquinho pode ser disposto em qualquer forma geométrica.

Note que os alunos não poderão abrir o saquinho para contar, mas poderão fazer qualquer tipo de medidas com o mesmo. O saquinho pode ser disposto em qualquer forma geométrica. Após uma série de tentativas instigue no aluno uma maneira geral de encontrar quantos feijões há num quilo ou numa outra quantidade qualquer definida.

Instigue-o a trabalhar com outros tipos de materiais e que consiga construir diversas resposta para diversos problemas.

No final da atividade, também, abra o saquinho e conte quantos feijões existe. Lembre ao aluno que não há uma maneira única de tentar responder. Existe apenas possibilidades.

Situação 3 – Pegue um número arbitrário (mas conhecido por você) de folhas de papel. Arranje tais folhas empilhadas umas sobre as outras e peça aos alunos que desenvolvam uma forma de identificar quantas folhas de papéis existem no amontoado de folhas. Proceda como anteriormente.

Conduza o aluno a tentar, como nos passos anteriores, descobrir quantas folhas seriam necessárias para dar a sua altura, do colega, de uma casa.

Há também outras situações problemas que podem ser identificadas aqui, como por exemplo, após uma pesquisa quantas árvores seriam necessárias para se obter uma quantidade qualquer de folhas.

Instigue o aluno também a desenvolver seu conhecimento transversal e que a matemática funcione como um motivador.

Como na atividade anterior, no final do processo conte quantas folhas existe no monte.

Situação 4 – Peça ao aluno para identificar como ele poderia fazer o cálculo do volume do seu corpo. Inicialmente o aluno poderia ter imensa dificuldade ou até mesmo dizer que seria impossível, entretanto, faça o aluno pensar que ele tem meios para fazê-lo.

Inicialmente, mostre ao aluno que ele pode aproximar o corpo utilizando alguns sólidos geométricos conhecidos. Caso tenha sólidos geométricos à mão, seria bastante útil. Agora mostre que através desses sólidos geométricos você será capaz de encontrar uma aproximação bastante boa. Por exemplo, a cabeça pode ser representada por uma esfera, ou um cone; o dorso por um cone, ou por um prisma; os braços por cones ou troncos de cones; as pernas por cones ou troncos de cones.

Esta é uma atividade bastante interessante.

Note que não será possível validar a resposta correta, mas esta atividade será bastante motivadora no sentido que envolverá o próprio aluno como estudioso e objeto de estudo dentro deste problema.

Uma questão que deve ser levantada para discussões posteriores é: como poderíamos proceder para identificar o volume correto?

Situação 5 – Utilize, formule hipóteses de como você poderia calcular o volume de:

- Um ovo.
- Uma batata.
- Uma maçã.
- Uma manga.
- Uma laranja.
- Uma banana.

Como você poderia verificar se o volume de cada um desses objetos estaria correto? Construa um sistema de medida de volume utilizando objetos simples de modo que seja capaz de verificar tais hipóteses.

A partir de suas hipóteses iniciais obtenha fórmulas explícitas para o cálculo do volume de cada um dos objetos acima. Pense em objetos mais gerais. Como seria o caso?

Note que é possível verificar o volume de cada um dos objetos através de uma medida direta.

Com uma vasilha completamente cheia de água (uma bacia, por exemplo).

Mergulhe completamente cada um dos objetos o qual deseja calcular o volume.

Ao imergir, uma quantidade de água transbordará do recipiente. Recolha essa água. A quantidade representa EXATAMENTE o volume de cada objeto.

Ainda é possível construir um meio de medir o volume construindo-se um sistema de medida. Para tanto podem ser usados, por exemplo, latas de óleo, caixinhas de leite no qual é possível calcular a área da base de cada objeto e, colocando a água que vazou de cada recipiente, através da altura será capaz de medir este volume.

Na matemática lúdica o fato do modelo não ser muito bom é um tanto quanto irrelevante, pois tudo que ocorreu até este momento já foi de extrema importância para o crescimento do aluno. Essa modelagem não deixará de mostrar ao aluno que é importante melhorar o modelo, torná-lo mais eficaz, mas a priori valorizará a sua criatividade e o seu modelo mesmo que seja muito simples e pouco eficaz. Posteriormente, no devido momento estas melhorias serão feitas com o uso de uma matemática mais rigorosa.

33. PROBLEMAS E SOLUÇÕES

Apresentaremos nesse capítulo seis propostas – modelos para o ensino de matemática - com o intuito de serem trabalhos norteadores para o uso em sala de aula. Cada modelo será desenvolvido seguindo as três etapas fundamentais que são: interação, matematização e modelo (Biembengut, 2009).

Biembengut sugere que cada atividade seja iniciada com um "bate – papo" sobre o tema da questão (Biembengut, 2009). Nessa conversa o professor deverá avaliar o que e quanto os alunos conhecem a respeito do conteúdo e o grau de interesse deles em relação ao tema abordado. Além disso, o professor poderá acrescentar ou excluir tópicos matemáticos de acordo com os objetivos e a série em que ele deseja implantar o problema.

3.1 Problema 1: Com esse salário dá?

Séries em que pode ser aplicado:	9º ano do ensino fundamental e 1º ano do Ensino Médio
Conteúdos Matemáticos necessários como pré requisito:	Função afim
Objetivos:	• Discutir a característica social do problema. • Realizar pesquisas acerca do tema. • Comparar o aumento salarial e o aumento do custo do metro quadrado da construção de uma casa. • Aplicar as ideias de funções afim para encontrar o modelo desejado. • Desenvolver a criatividade do educando por meio de uma situação real.

Pessoas que visitam os bairros mais populares do estado do Rio de Janeiro podem se incomodar e até mesmo não compreender bem o motivo pelo qual boa parte das residências são inacabadas ou mesmo se encontram em situações precárias de aparente abandono. Muitos podem pensar: *como uma pessoa pode viver assim?* Em sua maioria os proprietários não gostam de viver nessa situação e embora sejam trabalhadores, o custo da construção civil é alto, seja pelo preço da mão de obra ou pelo material em si.

Neste exemplo queremos discutir a problemática de um trabalhador construir uma casa levando em conta o valor do salário mínimo regional.

Para tal discussão faremos uso da tabela 3.1 cujos dados referentes ao salário mínimo do estado do Rio de Janeiro e ao custo médio do metro quadrado de uma casa popular foram retirados de pesquisas feitas pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística).

	Tempo (t) em anos	Salário mínimo regional S(t)	Custo do m² em reais
Dez/2000	0	220,00	356,15
Dez/2001	1	220,00	384,20
Dez/2002	2	240,00	429,84
Dez/2003	3	276,00	501,75
Dez/2004	4	305,00	559,38
Dez/2005	5	326,00	602,69
Dez/2006	6	369,45	636,64
Dez/2007	7	424,88	670,78
Dez/2008	8	470,34	745,83
Dez/2009	9	512,67	793,34
Dez/2010	10	581,88	845,31
Dez/2011	11	639,26	905,51
Dez/2012	12	729,58	965,60

Tabela 3.1: *Demonstrativo do salário mínimo e custo do metro quadrado da construção civil nos durante o período de Dez/ 2000 a Dez/2012*

Com tais dados somos instigados a dispô-los de modo a construir uma representação gráfica que possa estabelecer a relação entre tempo e salário e a relação tempo custo do metro quadrado.

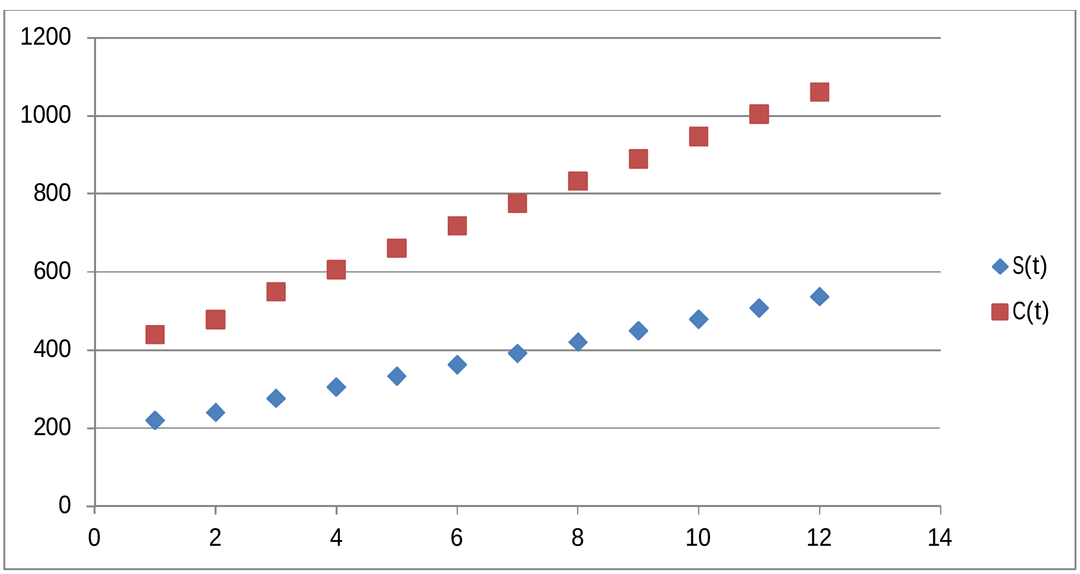


Figura 3.1: *Pares ordenados (tempo , salário) e (tempo , custo do m²)*

Os dados podem ser interpretados de modo que a evolução do salário mínimo e a evolução do custo do m² sejam simbolizadas por meio de uma *função afim*. Lembramos aqui que num prazo mais longo espera-se que o comportamento seja exponencial ou próximo a uma exponencial, entretanto, pela nossa observação, a representação afim é uma excelente aproximação. Os dados mostram comportamento crescente, portanto, o coeficiente angular da reta é positivo.

Nesse momento é interessante que o professor revise o tema (funções polinomiais do 1º grau) que será trabalhado.

Função Salário mínimo

Vemos que os dados dispostos na figura 3.1 nos lembra uma função afim. Nesse caso, podemos fazer uso desse conteúdo para expressar um modelo que dê uma estimativa do problema. Deixamos claro que essa não é a forma mais adequada para se encontrar a reta, pois esta será apenas a reta passando por dois dos pontos. Faremos uso de tal conteúdo, pois, a nossa intenção é a construção de um modelo aproximado de modo atender os conteúdos trabalhados no ensino regular. Porém, posteriormente será apresentada uma melhor função afim determinada pelo ajuste de curvas.

A expressão geral de uma função afim é $S(t) = at + b$. Sendo assim, tomaremos dois pontos quaisquer da reta construindo um sistema de equações lineares de modo a encontrar os valores de a e b.

Considere os pontos $(4\,;\,305)$ e $(8\,;\,470{,}34)$ substituindo seus valores em S(x) teremos:

$$\begin{cases} 4a + b = 305 \\ 8a + b = 470{,}34 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema encontraremos:
$a = 41{,}34$
$b = 139{,}66$
e portanto,

$$\boxed{S(t) = 41{,}34t + 139{,}66} \quad (1)$$

Onde S representa o salário mínimo (em reais) e t o tempo (em anos).

Função custo do metro quadrado

Nesse caso também consideramos uma função polinomial do 1º grau para representar $C(t)$ e os pontos $(4\,;559{,}38)$ e $(12\,;965{,}60)$ e substituindo seus valores em $C(t) = ct + d$ construiremos o sistema:

$$\begin{cases} 4c + d = 559{,}38 \\ 12c + d = 965{,}60 \end{cases}$$

cuja solução nos dá:
$c \cong 50{,}78$
$d \cong 356{,}27$
e portanto,

$$\boxed{C(t) = 50{,}78t + 356{,}27} \quad (2)$$

Onde C representa o custo do metro quadrado (em reais) e t o tempo (em anos).

Analisando as expressões algébricas (1) e (2) e os gráficos (figura 3.2) pode-se concluir que os coeficientes angulares (41,34 e 50,78) representam, nesse caso, o aumento anual aproximado, em reais, que acontece no salário e no custo do metro quadrado desde o ano 2001. Isso significa que a cada ano o salário aumenta cerca de R$ 41,34 enquanto o custo do metro quadrado aumenta em média R$ 50,78. O professor deverá deixar claro que o modelo é válido para esse período de 10 anos e questionar os alunos sobre o fato do crescimento do salário e do custo não poder ser basicamente linear para sempre, pois, daqui a

50 anos R$ 41,34 será um valor muito pequeno para a média do aumento de salário anual. Nesta discussão os alunos também deverão ser questionados sobre como melhorar esse modelo e aí entraria o passo da melhoria do modelo.

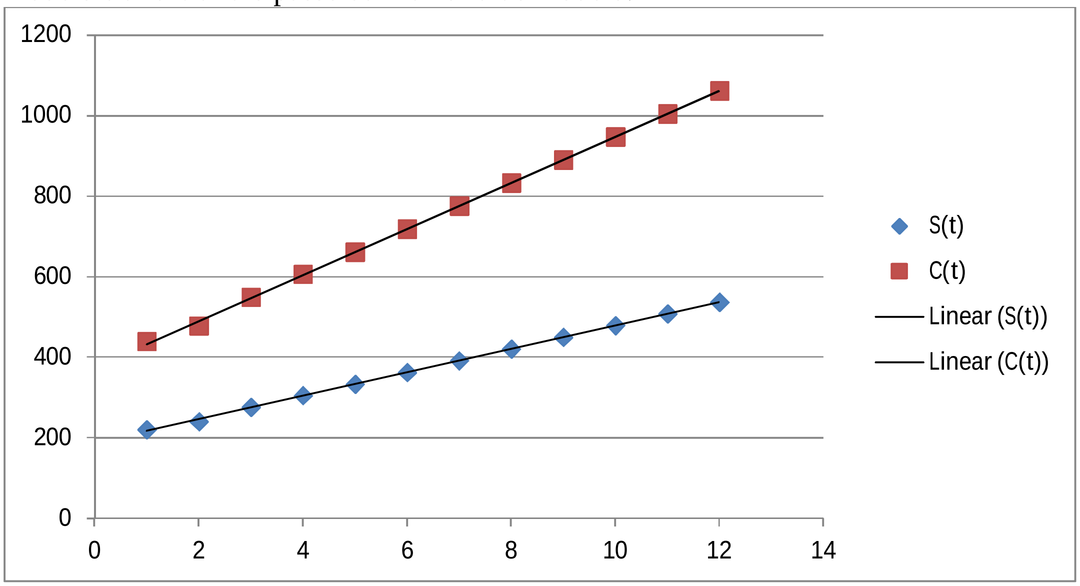


Figura 3.2: *Representação gráfica das funções $S(t)$ e $C(t)$.*

Uma conclusão que podemos ter é que o aumento do salário é sempre menor que o aumento do custo do metro quadrado, e sendo assim, cada vez maior a dificuldade de se iniciar uma construção, dado que o salário tem um poder de compra cada vez menor a cada ano frente aos materiais de construção.

Se considerarmos o salário mínimo como único componente que implica a tomada de decisão desse investimento na construção civil, conclui-se que fica mais difícil construir devido ao orçamento do salário mínimo.

Com base nas funções $S(t)$ e $C(t)$ é possível que o aluno determine um valor estimado para o salário mínimo ou para o custo do metro quadrado nos anos futuros, por exemplo, 2014.

É muito interessante propor aos alunos que façam uma tabela comparando os valores reais e os estimados. Isso faz com que eles percebam melhor que estamos trabalhando com estimativas e elas por sua vez são muito importantes para fazermos cálculos futuros (veja tabela 3.2).

Salário mínimo regional em reais OBSERVADO	Salário mínimo regional em reais MODELADO	Percentual de erro entre o valor observado e o valor modelado	Custo do m² em reais OBSERVADO	Custo do m² em reais MODELADO	Percentual de erro entre o valor observado e o valor modelado
220,00	181,00	17,73%	384,20	407,05	5,95%
240,00	222,34	7,36%	429,84	457,83	6,51%
276,00	263,68	4,46%	501,75	508,61	1,37%
305,00	305	0%	559,38	559,38	0%
326,00	346,36	6,25%	602,69	610,17	1,24%
369,45	387,70	4,94%	636,64	660,95	3,81%
424,88	429,04	0,98%	670,78	711,73	6,11%
470,34	470,34	0%	745,83	762,51	2,24%
512,67	511,72	0,19%	793,34	813,29	2,51%
581,88	553,06	4,95%	845,31	864,07	2,22%
639,26	594,4	7,02%	905,51	914,85	1,03%
729,58	635,74	12,86%	965,60	965,60	0%

Tabela 3.2: *Comparativo entre valores observados e modelados*

Nesse problema podemos observar uma característica crítica da modelagem matemática, no sentido de que o estudante a partir dela pode discutir as condições de se realizar a construção ou a reforma da casa própria por meio da análise e da reflexão que fazem sobre a relação do preço do metro quadrado da construção civil e o preço do salário mínimo carioca. Discutir esse assunto é fazer cidadania por meio da matemática.

Existem outras maneiras de determinar uma função que aproxime esses pontos por meio de uma reta. Uma delas é a regressão linear que é um método para se estimar a condicional (valor esperado) de uma variável y, dados os valores de algumas outras variáveis x.

Regressão Linear

Uma melhor função para S(t), por exemplo, poderia ser obtida usando o ajuste de curvas que nesse caso é o linear.

Uma regressão ou ajuste de curvas é o ajuste formal para representar uma certa tendência da variável dependente y quando relacionada com a variável dependente x.

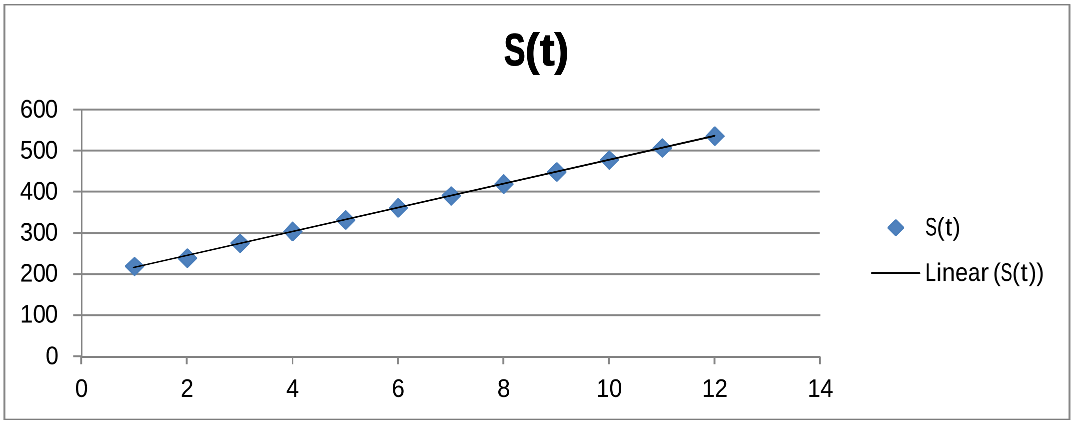


Figura 3.3: *Ajuste linear*

Um ajuste é linear se for da forma:

$$y = ax + b$$

Neste caso deveremos determinar os valores dos parâmetros a e b que minimizem a soma dos quadrados dos desvios,

$$S = S(a, b) = \sum_{i=1}^{12} \left(y_i - (ax_i + b)\right)^2$$

Com o intuito de determinarmos os valores de a e b que minimizam S faremos:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = \sum_{i=1}^{12} -2\left(y_i - (ax_i + b)\right)x_i = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{12} \left(y_i - (ax_i + b)\right)x_i = 0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{12} y_i x_i - ax_i^2 - bx_i = 0\ (i)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{i=1}^{12} 2\left(y_i - (ax_i + b)\right) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{12} \left(y_i - (ax_i + b)\right) = 0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{12} y_i - ax_i - b = 0\ \ (ii)$$

De (i) temos que:

$$⟦(y⟧_1 x_1 - ax_1^2 - bx_1) + ⟦(y⟧_2 x_2 - ax_2^2 - bx_2) + \cdots + ⟦(y⟧_{12} x_{12} - ax_{12}^2 - bx_{12}) = 0$$

Colocando a e b em evidência teremos:

$$a(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{12}^2) + b(x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}) = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_{12}x_{12}$$

Daí

$$650a + 78b = 39551{,}23$$

De (ii) temos que:

$$⟦(y⟧_1 - ax_1 - b) + ⟦(y⟧_2 - ax_2 - b) + \cdots + (y_{12} - ax_{12} - b) = 0$$

Colocando a e b em evidência teremos:

$$a(x_1 + x_2 + \cdots + x_{12}) + 12b = y_1 + y_2 + \cdots + y_{12}$$

Segue que:

$$78a + 12b = 5095{,}065$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} 650a + 78b = 39551{,}23 \\ 78a + 12b = 5095{,}065 \end{cases}$ $b = 132{,}17$ e $a = 44{,}99$.

Função obtida pelo processo de modelagem (usando dois pontos da função):

$\boxed{S(t) = 41{,}34t + 139{,}66}$

Função obtida pelo processo de ajuste linear:

$\boxed{S'^{(t)} = 44{,}99t + 132{,}17}$

Observe a tabela 3.3 abaixo, nela expomos os valores das duas funções obtidas anteriormente:

Salário mínimo regional em reais OBSERVADO	Salário mínimo regional modelado usando dois pontos	Salário regional modelado usando ajuste linear
220,00	181,00	177,16
240,00	222,34	222,15
276,00	263,68	267,14
305,00	305	312,13
326,00	346,36	357,12
369,45	387,70	402,11
424,88	429,04	447,1
470,34	470,34	492,09
512,67	511,72	537,08
581,88	553,06	582,07
639,26	594,4	627,06
729,58	635,74	672,05

Tabela 3.3: *Comparativo das modelagens*

3.2 Problema 2: Determinar o número de diagonais de um polígono convexo de 20 lados.

Séries em que pode ser aplicado:	Qualquer ano do Ensino Fundamental
Conteúdos Matemáticos necessários como pré requisito:	Noções de polígonos convexos. Definição e
Objetivos:	• Promover a construção de um modelo através dos alunos, para determinar o número de diagonais de um polígono convexo. • Desenvolver a criatividade do educando por meio de uma situação real.

Esse problema é muito simples, porém, para resolvê-lo muitos professores colocam a fórmula no quadro (como uma verdade absoluta) dizem que na fórmula, o n vale 20 e obtém-se assim a solução. Esse é um dos muitos exemplos que mostram como tornar a matemática ainda mais obscura aos olhos do aluno.

Embora seja prático para o professor dizer: decorem a fórmula! E depois: resolvam essas dezenas de questões similares (quase idênticas)! É inadmissível que um processo tão simples de ser compreendido deva ser trabalhado dessa maneira. É por esse e por outros motivos que muitos alunos desistem de entender a matemática e se fecham de modo a não se permitirem mais, ocorrendo então um bloqueio com tudo que diz respeito a números e matemática. A charge abaixo mostra de forma irreverente a relação de muitos alunos com a matemática.

Figura 3.4: *Ilustração extraída de http://scienceblogs.com.br/synbiobrasil/tag/modelagem-matematica/.*

Nossa proposta é de por meio de um processo exaustivo os alunos sejam capazes de determinar um modelo capaz determinar o número de diagonais de um polígono convexo qualquer. Com a observação do problema os alunos rapidamente serão capazes de perceber que quanto maior for o número de lados do polígono maior será seu número de diagonais, portanto essas variáveis são relevantes e possivelmente o modelo que se espera determinar será em função das duas.

Num segundo momento o professor poderá propor que os alunos, confeccionem suas próprias figuras de polígonos convexos e nelas tracem suas diagonais, extraindo as informações necessárias. Nesta etapa é bastante natural usar a ideia de indução sobre o natural n que estará representando o número de lados do polígono (nesse caso $n \geq 3$, pois é o menor número de lados de um polígono) e se perguntem: O que acontece quando o número de lados é três? E se for quatro? E assim sucessivamente de modo a ser possível a determinação de um modelo que calcule para um número de lados qualquer que depois será examinado e validado com a ajuda do professor.

Com base nas variáveis obtidas o professor irá propor que o aluno preencha a seguinte tabela para cada figura:

Número de lados	Número de diagonais que saem de cada vértice x número de vértices	Número de diagonais desse polígono
n	d	D

Tabela 3.4: Determinação das diagonais de um polígono em função de seu número de lados (n).

Variáveis observadas:
Número de lados (n)
Número de diagonais de cada um dos vértices (d)
Número de diagonais (D)

- Triângulo

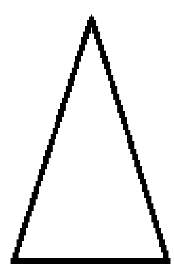


Figura 3.5: *Triângulo*

Número de lados (n)	Número de diagonais que saem de cada vértice x número de vértices	Número de diagonais desse polígono
3	0 x 3 = 0	0

Tabela 3.5: Determinação das diagonais de um triângulo em função de seu número de lados (3).

- Quadrilátero

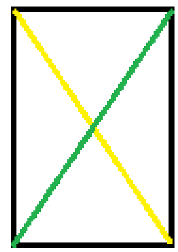


Figura 3.6: *Quadrilátero*

Número de lados	Número de diagonais que saem de cada vértice x número de vértices	Número de diagonais desse polígono
4	1 x 4 = 4	2

Tabela 3.6: Determinação das diagonais de um quadrilátero em função de seu número de lados (4).

- Pentágono

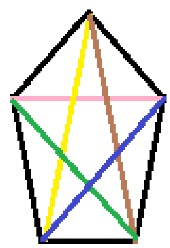


Figura 3.7: *Pentágono*

Número de lados	Número de diagonais que saem de cada vértice x Número de vértices	Número de diagonais desse polígono
5	2 x 5 = 10	5

Tabela 3.7: Determinação das diagonais de um pentágono em função de seu número de lados (5).

- Hexágono

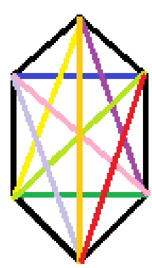


Figura 3.8: *Hexágono*

Número de lados	Número de diagonais que saem de cada vértice x Número de vértices	Número de diagonais desse polígono
6	3 x 6 = 18	9

Tabela 3.8: Determinação das diagonais de um hexágono em função de seu número de lados (6).

- Heptágono

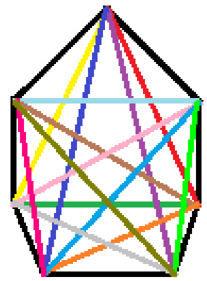


Figura 3.9: *Heptágono*

Número de lados	Número de diagonais que saem de cada vértice x Número de vértices	Número de diagonais desse polígono
7	4 x 7 = 28	14

Tabela 3.9: Determinação das diagonais de um heptágono em função de seu número de lados (7).

A partir daí, ou até mesmo anteriormente, espera-se que os alunos já estejam aptos a resolver o problema preenchendo a tabela sem a necessidade de construção do icoságono, já que tal construção não é cabível visto que seria improvável traçar tantas diagonais.

Número de lados	Número de diagonais que saem de cada vértice x Número de vértices	Número de diagonais desse polígono
20	17 x 20 = 340	170

Tabela 3.10: Determinação das diagonais de um icoságono em função de seu número de lados (20).

O modelo para o caso geral é extremamente importante, e os alunos veem essa importância, pois percebem que é trabalhoso traçar as diagonais para n > 6. A construção da fórmula por alunos com a instrução do professor é fundamental para que eles passem a ver a matemática com novos olhos desnudos do preconceito.

Um polígono de n lados possui n vértices, de cada vértice sai (n - 3) diagonais, visto que, não contamos as ligações do vértice com ele mesmo e do vértice com seus vértices adjacentes. Repare que o número de diagonais será sempre a metade de (n - 3) x n, o motivo se dá pelo fato de que cada diagonal liga dois vértices não adjacentes e, portanto foram contadas duas vezes. Daí conclui-se que:

$$D = \frac{(n \times (n-3))}{2}$$

3.3 Problema 3: Quantas ripas eu uso?

Séries em que pode ser aplicado:	Qualquer ano do Ensino Fundamental
Conteúdos Matemáticos necessários como pré requisito:	Noções de álgebra.
Objetivos:	• Promover a construção de um modelo através dos alunos, para determinar o número de ripas necessárias para construir uma determinada cerca. • Desenvolver a criatividade do educando por meio de uma situação real.

O problema consiste em determinar uma fórmula, um modelo, útil para determinar o número de ripas necessárias para construir uma determinada cerca (ver figura 3.10).

Num primeiro momento (antes de introduzir o problema em si) o professor pode usar um problema bem mais simples com representações numéricas e instruir o aluno a confeccionar a cerca usando palitos de picolé de modo que o aluno realize medições em escalas menores trabalhando assim a mudança escalar.

Observe o desenho de parte de uma cerca de 1m de comprimento.

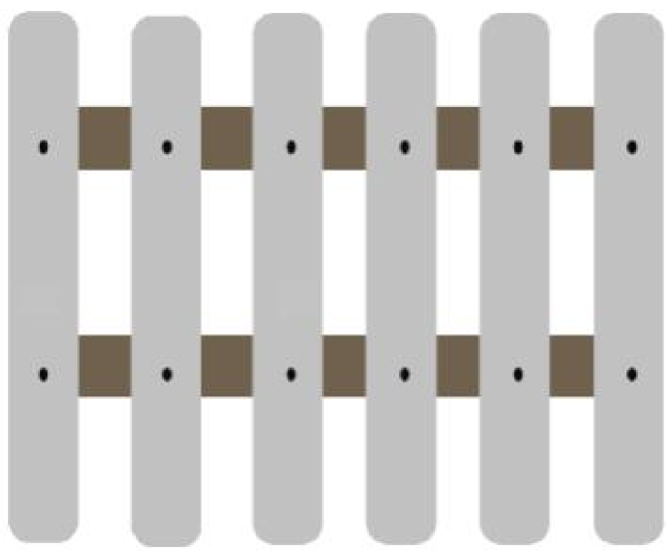


Figura 3.10: *Ilustração da cerca de uma casa.*

Considere que:

- Nesse 1m, são colocadas ripas de 10 cm de largura;
- A largura do intervalo é igual à largura da ripa.

Espera-se que os alunos dividam os segmentos em partes iguais (de 10 cm) e determinem o número de ripas.

Num segundo momento, é construído com o auxílio do professor um modelo genérico onde: d é a largura de cada ripa, x é a distância entre duas ripas consecutivas, ou distância do intervalo. Passamos então, ao processo de construção do modelo.

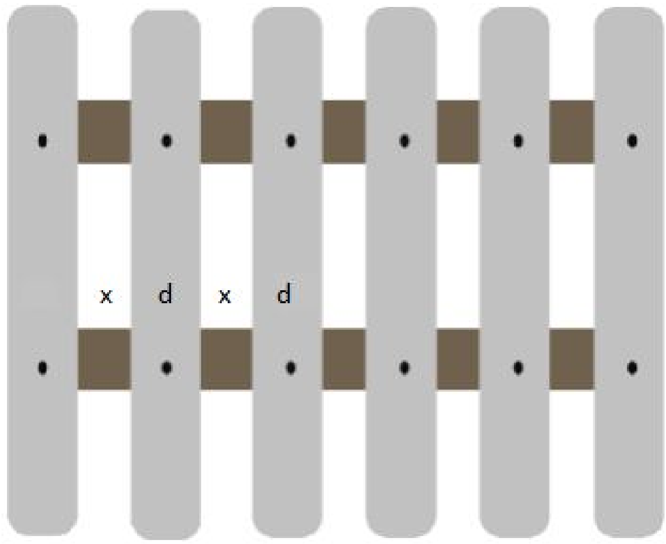


Figura 3.11: *Ilustração da cerca usando as variáveis x e d.*

A etapa de *interação* ocorre a partir do momento em que os alunos leem o problema, observam e fazem seus questionamentos, que podem ser: duas ripas consecutivas devem ter sempre a mesma distância? As ripas possuem a mesma largura?
Em outro momento ocorre o processo de *matematização* onde o professor pode dar a ideia (caso os alunos não a tenham sozinhos) de fazer uma tabela que deverá preferencialmente ser preenchida pelos alunos.

Nº de ripas	Nº de intervalos
1	0
2	1
3	2
4	3
.	.
.	.
n	n - 1

Tabela 3.11: *Concepção do número de intervalos em relação ao número de ripas*

Desse modo se a cerca tiver n ripas terá n - 1 intervalos.

Resolução: Para estabelecer o comprimento qualquer da cerca, obteremos a linguagem natural do problema que poderá vir da discussão dos alunos com o auxilio do professor:

Comprimento da cerca = número ripas × largura de cada ripa + número de intervalos × a distância entre os intervalos. Assim para o cálculo de um comprimento qualquer C, temos:

$$C = n \times d + (n-1) \times x$$
$$C = n \times d + n \times x - x$$

$$\boxed{C = n \times (d + x) - x}$$

Desse modo $n = \frac{C+x}{d+x}$.
Daí o problema gerou um modelo onde dado as medidas do comprimento da cerca, a largura das ripas e a medida dos intervalos que se deseja usar entre elas é possível determinar a quantidade de ripas que serão utilizadas.

Validação:

Podem-se levantar novas hipóteses com relação à situação que envolverá a elaboração de novos modelos. Como fica o modelo quando a largura da ripa for igual à largura do intervalo?

O professor poderá também instigar o aluno a construir uma cerca concreta. Tal cerca poderia ser feita, obviamente, em tamanho reduzido, com palitos de picolé. Surgiriam vários questionamentos aos alunos, por exemplo:

- Quero construir uma "cerca" de um determinada largura T e vou usar palitos de largura L, qual deve ser a largura entre esses palitos para que possa se obter a cerca?
- Quero construir uma cerca de largura T e palitos de largura L, quantas cercas posso construir com esses palitos e qual será o vão entre eles?

Tais questionamentos sucessivos fariam que os alunos validassem a sua fórmula.

A validação do modelo permite seu uso para outras situações análogas.

3.4 Problema 4: Tem gente demais!

Séries em que pode ser aplicado:	Qualquer ano do Ensino Fundamental
Conteúdos Matemáticos necessários como pré requisito:	Função exponencial. Função Quadrática.
Objetivos:	• Realizar pesquisas acerca do tema. • Discutir a característica social do problema. • Promover a construção de um modelo que permita estimar a população mundial no passar dos anos. • Utilizar a ideia de gráficos de funções exponenciais e quadráticas para realizar a análise do problema. • Desenvolver a criatividade do educando por meio de uma situação real.

A população mundial é o número total de humanos vivos no planeta Terra a um dado momento. Neste problema usaremos modelagem matemática para criarmos um modelo que possa determinar o crescimento da população mundial. O intuito além de aplicarmos matemática em si é discutirmos questões do tipo: Como nos tornamos tão numerosos? Qual a quantidade de pessoas que a Terra pode sustentar? O que posso fazer para melhorar o mundo em que vivemos? Como podemos transformar nossas cidades em constante crescimento em forças a favor da sustentabilidade?

Para iniciar o trabalho o professor pode pedir que os alunos façam uma pesquisa sobre o crescimento populacional mundial nas últimas décadas com o intuito de responder e discutir as questões colocadas anteriormente. Após a pesquisa e o debate feito em sala os alunos, com o auxilio do docente, construirão a tabela e o gráfico (tabela 3.2 e figura 3.12) que serão usados para a modelação do problema.

Ano	Número natural associado ao ano	População mundial (em bilhões)
1950	1	2,256
1960	2	3,039
1970	3	3,706
1980	4	4,453
1990	5	5,278
2000	6	6,082
2010	7	6,908

Tabela 3.12: *População mundial (em bilhões) nas últimas décadas*

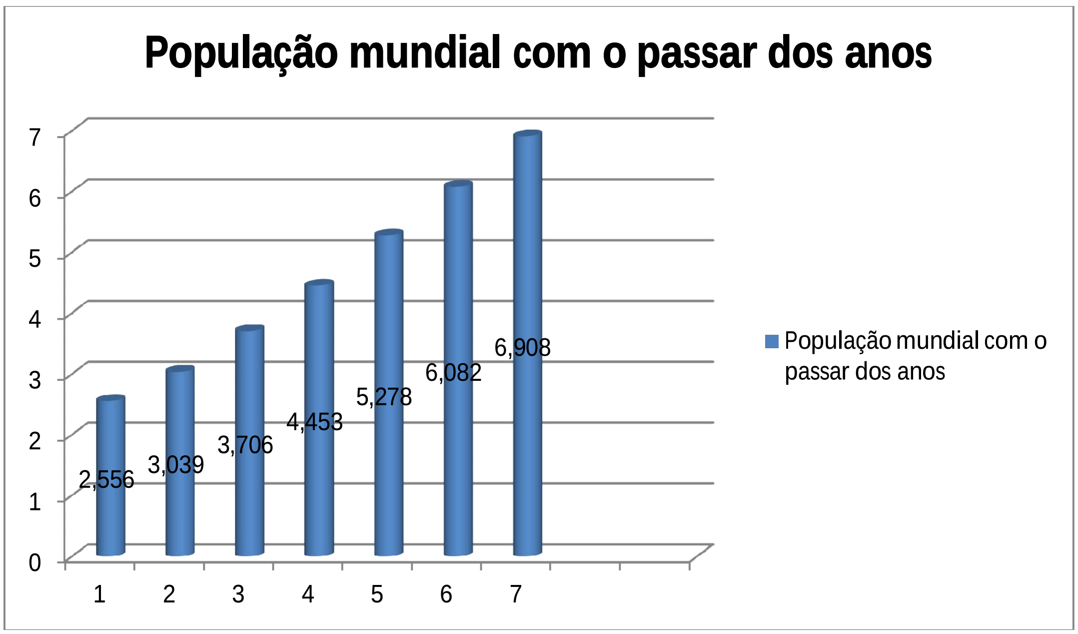


Figura 3.12: *Gráfico de barras - população mundial nas últimas décadas*

Com a visualização do gráfico podemos propor a construção de um modelo exponencial do tipo $f(n) = ab^n$, onde n corresponde à variável auxiliar associada ao ano e $f(n)$ é o número anual (em bilhões) referente à população mundial. Usando dois pares ordenados da tabela, por exemplo, (1 ; 2,556) e (7 ; 6,908) formamos o sistema:

$$\begin{cases} ab = 2{,}556 \\ ab^7 = 6{,}908 \end{cases}$$

cuja solução é $a = 2{,}17$ e $b = 1{,}18$. Com essas informações geramos o modelo:

$$f(n) = 2{,}166(1{,}18)^n$$

Como $n = 1$ corresponde ao ano de 1950, para usar o ano t no modelo obtido, podemos escrever

$$f(t) = 2{,}17(1{,}18)^{\left(\frac{t-1950}{10}+1\right)}$$

Com esse modelo é possível estimar a população mundial e daí discutirmos problemas como: Da maneira que tratamos o nosso planeta será que existirá água potável e alimento para futuras gerações? O que devemos fazer hoje para que nossos filhos e netos ainda possam desfrutar de uma vida agradável?
É bem verdade que esse modelo não é rigoroso, mas a aplicação desse problema além de aplicar conceitos de funções exponenciais se justifica bem mais pela discussão e as reflexões a respeito do tema.

Uma outra maneira que poderia ser utilizada para resolver este problema é perceber a disposição gráfica do problema como uma função quadrática. Neste caso, poderíamos propor aos alunos que utilizando três pontos determinem essa função.

Escolhendo os pontos $(1\,;\,2{,}556)$, $(2\,;\,3{,}039)$ e $(3\,;3{,}706)$, por exemplo, e substituindo-os em uma equação quadrática da forma $y = ax^2 + bx + c$, encontraremos o sistema:

$$\begin{cases} 2{,}556 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 3{,}039 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\ 3{,}706 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \end{cases}$$

Resolvendo o problema obtemos:

$$y = 0{,}092x^2 + 0{,}207x + 2{,}257$$

A partir daí o professor poderá propor aos alunos que façam uma tabela comparando valor real e valor modelado das formas exponencial e quadrática, obtendo a tabela 3.13.

Ano	Nº natural associado ao ano	População mundial (em bilhões) OBSERVADO	População mundial (em bilhões) OBSERVADO (Exponencial)	População mundial (em bilhões) OBSERVADO (Quadrática)
1950	1	2,556	2,556	2,256
1960	2	3,039	3,016	3,039
1970	3	3,706	3,559	3,706
1980	4	4,453	4,199	4,557
1990	5	5,278	4,955	5,592
2000	6	6,082	5,847	6,811
2010	7	6,908	6,908	6,909

Tabela 3.13: *Comparativo entre valores observados e modelados*

Os alunos podem por meio da tabela verificar qual foi o melhor modelo e portanto, usá-lo para realizar previsões futuras.

3.5 Problema 5: Quantos feijões têm no pote?

Ano de escolaridade:	Qualquer ano do Ensino Fundamental e Médio
Conteúdos Matemáticos necessários como pré requisito:	• Definição de Elipsoide • Volume do Elipsoide
Objetivos:	• Promover a construção de um modelo para determinar a quantidade de feijões em um recipiente. • Desenvolver a criatividade do educando por meio de uma situação real.

Um problema parecido foi sugerido no capítulo 2 e neste capítulo será formalizado.

O professor distribui a cada grupo de alunos uma lata com uma quantidade de feijões e em seguida pergunta: quantos feijões há nessa lata? Os alunos deverão ser capazes de estimar a quantidade de feijões sem abrir a lata, apenas observando, mexendo.

A princípio é bem provável que surjam muitas brincadeiras e palpites aleatórios, o professor deve apresentar algumas possibilidades aos alunos. É bem provável que os alunos desenvolvam um tipo de contagem usando apenas a observação.

As questões levantadas abaixo serão usadas em séries mais avançadas mas não impedem que o professor apresente, por exemplo, o nome da quádrica que é parecida com o grão do feijão e a forma de calcular seu volume. O professor deve perceber até que ponto pode chegar dependendo da série em que está trabalhando.

Questões relevantes acerca do problema:

O grão do feijão se parece com uma quádrica conhecida, o elipsoide, mais especificamente um esferoide que é um elipsoide que possui dois semi-eixos iguais. Tal definição deve ser comentada e o professor pode perguntar aos alunos se eles conhecem outros objetos que apresentam imagem semelhante a um elipsoide.

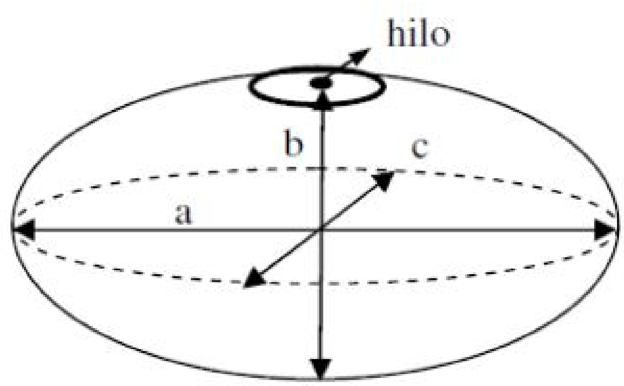


Figura 3.13: *Elipsoide*

O aluno será capaz de calcular a esfericidade do grão usando a fórmula abaixo.

$$E_S = \left[\frac{(a \cdot b \cdot c)^{\frac{1}{3}}}{a}\right] \cdot 100$$

Onde:
a = maior eixo do grão
b = eixo médio do grão
c =menor eixo do grão

Esfericidade é definida como o grau em que a forma de uma partícula se aproxima da forma esférica. A multiplicação por cem se dá devido ao fato da esfericidade ser uma porcentagem. O aluno também será levado a observar que se $a = b = c$, ou seja, quando a quádrica é uma esfera sua esfericidade é de 100%, $E_S = 100\%$.

Para conseguirmos descobrir a quantidade de feijões devemos propor a descoberta do volume de cada grão, e para tal, usaremos a fórmula:

$$V_g = \frac{\pi \cdot a \cdot b \cdot c}{6}$$

Novamente o professor poderia instigar aos alunos a verificarem a relação de V_g com a fórmula do volume de uma esfera de raio r, onde $a = b = c = 2r$, onde obterão:

$$V_s = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$

Para realizar os cálculos usaremos os valores abaixo retirados de um artigo da revista brasileira de produtos agroindustriais.

Consideraremos as medidas de a, b e c de um grão de feijão no Brasil sendo:
$a = 11{,}24$ mm
$b = 7{,}26$ mm
$c = 5{,}58$ mm

A partir daí teremos:

$$V_g = \frac{\pi \cdot 11{,}24 \cdot 7{,}26 \cdot 5{,}58}{6} = 238{,}4162\, mm^3$$

Fazendo uma conversão de medidas tem-se $238{,}4162\, mm^3 = 238{,}4162 \cdot 10^{-6}\, dm^3 = 238{,}4162 \cdot 10^{-6}\, l$

Sendo assim, uma garrafa de 1 litro teria $\frac{10^6}{238{,}4162 \cdot 10^{-6}}$ que corresponde aproximadamente a 4194 feijões. O aluno poderá calcular o volume da lata pela fórmula do volume do cilindro e determinar a quantidade aproximada de feijões. A partir daí os alunos podem levar garrafas pet de 2 l e 1,5 l encher de feijões e calcular a quantidade de feijões apenas usando proporção e depois verificar se chegaram próximo ao resultado verdadeiro. É bem verdade que esse modelo pode ser melhorado pois o cálculo da quantidade de feijões foi feito desconsiderando os espaços vazios. Uma forma de fazê-lo é fazendo algumas contagens com garrafas menores para determinar um valor aproximado de feijões a ser retirado dos 4194 que tinhamos encontrado por meio das fórmulas de volume. Os cálculos a seguir foram feitos com uma garrafa de 500 ml que até a boca tem um volume total de 550 ml. Como é mais fácil enchê-la até a boca para chegar em melhores aproximações usaremos a quantidade de feijões em 550 ml.

Na garrafa couberam 2233 feijões, e fazendo uma regra de três simples estima-se que em 1l tenha 4060 feijões. O valor encontrado no cálculo do volume foi de 4194 feijões. Esse erro ou parte dele se dá devido ao fator de vazios, ou seja, no momento em que fizemos a divisão de 1 litro pelo volume do grão desconsideramos o fato de ter espaços vazios entre os grãos. Uma forma de verificar esse fator de erros é encher a garrafa de feijões e depois adicionar água ate preencher todos os espaços vazios. Este volume de água dividido pelo volume do grão nos dará aproximadamente a quantidade de feijões que excedeu o valor real de grão que tem em 1 litro.

3.6 Problema 6: Quantos metros de barbante têm no rolo?

Séries em que pode ser aplicado:	8º e 9º ano do ensino fundamental
Conteúdos Matemáticos necessários como pré requisito:	• Volume da esfera • Volume do Cilindro
Objetivos:	• Promover a construção de um modelo através dos alunos, para determinar o número de ripas necessárias para construir uma determinada cerca. • Desenvolver a criatividade do educando por meio de uma situação real.

O professor dará a cada grupo de alunos uma bola de barbante, em seguida irá propor duas etapas a serem realizadas:

Etapa 1. Usando apenas o chute, quantos metros de barbante foram necessários para obter essa bola de barbante? Esta etapa foi discutida no capítulo 2.

Nesse momento o aluno irá se divertir e sem nenhum compromisso, observando, manuseando, usando réguas irá fazer algum tipo de palpite. Esse tipo de observação é de extrema importância. A princípio pode parecer uma simples brincadeira, mas é desta forma que podem aparecer grandes ideias acerca do problema.

Etapa 2. Fazendo cálculos matemáticos que você achar possível deduza com mais exatidão quantos metros de fio existe na bola.

O aluno perceberá que a bola se aproxima de uma esfera, e o barbante de um cilindro. Eles poderão supor que a bola de barbante seja perfeitamente esférica e que tenha raio R e que o barbante tenha um raio r. Uma forma aproximada de resolver esse problema é supor que não há espaços entre o barbante enrolado de modo que podemos associar o volume da esfera ($\frac{4}{3}\pi R^3$) com o volume de um cilindro ($\pi r^2 h$), que neste caso será o barbante, sendo assim, h representa o comprimento do barbante, ou seja:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi r^2 h \rightarrow h = \frac{4R^3}{3r^2}$$

Usando essa fórmula segue o cálculo do comprimento do barbante determinando os valores de R e r por meio de réguas ou aproximações visuais.

Nesse momento os alunos poderão determinar a diferença do valor modelado para o valor dado no palpite inicial. Eles irão verificar qual grupo melhor se aproximou do valor real, e o grupo irá expor como chegou a tal palpite. Esse momento é importante pois, o professor deve valorizar as ideias dos alunos mesmo que não tenham nenhum rigor matemático, pois valoriza-se aí a criatividade e as grandes ideias que eles possam vir a ter. É bem possível que os professores se surpreendam com tais ideias, e que elas possam levantar grandes discussões sobre o assunto.

Posteriormente o professor deverá instigar os alunos a desenrolar as bolas e medir o barbante usando réguas. Pode ser feito uma tabela comparando o valor real e o valor modelado.

Caso o rolo de barbante tenha o formato cilíndrico, basta resolver o problema usando apenas as noções de cilindros, observando que neste formato existe uma região cilíndrica interna que não possui barbante e por isso, essa quantidade de barbante excedente deverá ser calculada e retirada do volume total.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A modelagem matemática é uma metodologia ainda pouco aplicada pelos professores, seja devido ao pouco tempo que se tem contato com o aluno, seja pela falta de conhecimento de tal alternativa, e não podemos descartar a ideia do pouco conhecimento que o docente tem muitas vezes a respeito do conteúdo trabalhado.

Essa pesquisa foi motivada inicialmente pelo desejo de formalizar o conceito e o processo de modelagem matemática e sua aplicação em sala de aula com o intuito de que o leitor não familiarizado com o tema pudesse se sentir motivado a utilizá-lo como um recurso pedagógico.

Nessa busca nos deparamos com algumas dificuldades, principalmente em sua aplicação num âmbito mais simplista na sala de aula afinal, é imprescindível que tenhamos problemas que sejam simples, factíveis e representativos tanto para o professor quanto para o aluno dentro desse contexto. Foi estranho percebermos que a modelagem que é apresentada por meio dos problemas pesquisados em sua grande parte se limita ao uso de conteúdos rigorosos de matemática. Valorizamos tais questões, porém, o que não compreendemos é a falta de problemas simples, que façam uso do recurso da lógica, ou mesmo do pensamento puro e criativo. Por esse motivo, elaboramos algumas situações que podem servir de norteadores para o uso dessa modelagem inicial que denominamos *modelagem lúdica*. Essa forma de fazer modelagem não descarta a forma tradicional, pelo contrário, em nosso ponto de vista, ela apenas completa a ideia e nos motiva ainda mais a fazer uso desse recurso tão rico.

Com isso, passamos a buscar ou mesmo criar problemas que sanassem essas necessidades. Nesses problemas e situações tivemos a finalidade de mostrar possíveis aplicações que podem ser realizadas no ensino regular. Neles tentamos transmitir a característica principal da modelagem matemática que é orientar os alunos na inclusão de conceitos matemáticos em seu cotidiano, trazendo assim situações concretas para sala de aula. Nossa expectativa é que tais problemas sirvam de norteadores para que professores se sintam motivados a usá-los e alterá-los conforme as peculiaridades das turmas e dos alunos. Observando tais problemas esperamos ainda que o professor, usando a criatividade, crie seus próprios modelos de modo a atenderem suas expectativas diante das necessidades de seus alunos.

Acreditamos que aventurar-se nessa metodologia de ensino trará inúmeros benefícios a todos os envolvidos. Esperamos que esses benefícios se reflitam na formação de cidadãos críticos capazes de questionar a realidade a sua volta.

Deste modo, esperamos que os leitores/professores se sintam motivados e busquem implantar em sala de aula as atividades aqui propostas e à medida que sentirem necessidade melhorá-las de acordo com as expectativas e características de seus alunos. Desejamos que este trabalho tenha colaborado, mesmo que minimamente, para implantação da Modelagem Matemática em sala de aula de ensino regular, e com essa expectativa, através dessa busca, melhoremos o ensino de matemática em nosso país.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E.; *Modelagem Matemática na Educação Básica*. São Paulo: Contexto, 2012. 157 p.;

ARAÚJO, J. L.; *Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: as discussões dos alunos.* **(**Tese de Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002;

BARBOSA, J. C.; *O que pensam os professores sobre a modelagem matemática?* Zetetiké, Campinas, v. 7, n. 11, p. 67-85, 1999. Disponível em http://www.inf.unioeste.br/~rogerio/Professores-sobre-Mod-Mat.pdf. Acesso em 03/01/2013.

BARBOSA, J. C.; *Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação.* Bolema - Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 15, p. 5-23, 2001;

BARBOSA, J. C.; *Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como?* Veritati, n. 4, p. 73-80, 2004;

BASSANEZI, R. C.; *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.* 3. ed. São Paulo: Contexto, 2011. 389 p.;

BEAN, D. W.; *O que é modelagem matemática?* In: Educação matemática em Revista. São Paulo, ano 8, n. 9/10, p. 49-57, abr, 2001.

BIEMBENGUT, M. S.; *Mapeamento da Modelagem Matemática no Ensino Brasileiro. Projeto de Iniciação Científica* – Conselho Nacional de Desenvolvimento Tecnológico Científico – CNPq, 2007;

BIEMBENGUT, M. S.; *30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais.* Alexandria - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p.7-32, jul. 2009. Disponível em: http://alexandria.ppgect.ufsc.br/files/2012/03/mariasalett.pdf. Acesso em: 20/11/2012;

BIEMBENGUT, M. S. ; HEIN, N.; *Modelagem matemática no ensino.* 5. ed. São Paulo: Contexto, 2009. 127 p.;

BRASIL; *Parâmetros Curriculares Nacionais - Matemática.* Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf. Acesso em 10/03/2013;

BURAK, D.; *Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem.* Campinas-SP, 1992. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

BURAK, D.; *Modelagem Matemática e a sala de aula.* In: Encontro Paranaense de Modelagem Matemática. Londrina: UEL, 2004. Disponível em: http://dionisioburak.com.br/documents/IEPMEM.pdf. Acesso em 03/01/2013;

CHAVES, M. I. A. *Modelando matematicamente questões ambientais relacionadas com a água a propósito do ensino – aprendizagem de funções na 1ª série do ensino médio*. Tese de mestrado – Universidade Federal do Pará, Belém, 2005;

D'AMBROSIO, U.; *Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática*. São Paulo: SUMMUS/UNICAMP, 1986. Disponível em http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/673/600. Acesso em 03/01/2013;

DOTTO A. E. M.; *O uso da modelagem Matemática em sala de aula*. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1661-8.pdf. Acesso em 03/01/2013.

JACOBINI, O. R.; WODEWOTZKI, M. L. L. *Uma Reflexão sobre a Modelagem Matemática no Contexto da Educação Matemática Crítica***.** In: Bolema. Boletim de Educação Matemática, Vol. 199, n 25 (2006)**.** Disponível em: http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1876/1653.Acesso em 20/12/2012;

MACHADO JÚNIOR, A. G.*; Modelagem Matemática no Ensino-Aprendizagem: Ação e Resultados.* Belém, 2005. Disponível em: http://www.ufpa.br/npadc/gemm/ documentos/docs/Doc_12.pdf. Acesso em 03/12/2012;

OLIVEIRA, L. C; BARBOSA, J. C.; *Modelagem Matemática: O Processo de Construção dos Modelos pelos alunos.* Disponível em: http://www.fae.ufmg.br/ebrapem/resumos/09-04res.pdf. Acesso em 15/12/2012;

RESENDE, O.; CORRÊA, P. C.; GONELI, A. L. D.; CECON, P. R.; *Forma, tamanho e contração volumétrica do feijão (Phaseolus vulgaris L.) durante a secagem.* Revista Brasileira de Produtos Agroindustriais, Campina Grande, v.7, n.1, p.15-24, 2005;

SUKOW, J. A.; *Relato de uma experiência: Resolução de problemas e modelagem matemática no ensino médio.* Disponível em: http://www.diaadiaeducacao. pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1662-8.pdf?PHPSESSID= 2 010010708155290. Acesso em 04/12/2012;

Links utilizados:

http: // noticias.r7.com / educacao / noticias / mais-de-85-dos-estudantes – brasileiros – são - reprovados - em-matematica-diz-pesquisa-20111130.html. Acesso em 04/01/2013.

http: // www 1.folha.uol.com.br / educacao / 1255223 - rendimento – dos – alunos – de - matematica-piora-entre-o-5-e-o-9-ano.shtml. Acesso em 12/02/2013.