UFRRJ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

DISSERTAÇÃO

CONSTRUÇÃO DE UM TRILHO DE AR COM O USO DO ARDUINO: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO AFIM E QUADRÁTICA

Vinicius da Cunha Santos

Agosto de 2019

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

CONSTRUÇÃO DE UM TRILHO DE AR COM O USO DO ARDUINO: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO AFIM E QUADRÁTICA

Vinicius da Cunha Santos

Sob a Orientação do Professor
Edivaldo Figueiredo Fontes Junior

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ
Agosto de 2019

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S237c

Santos, Vinicius da Cunha, 1988-
Construção de um trilho de ar com o uso do arduino: uma proposta para o ensino de função afim e quadrática / Vinicius da Cunha Santos. - Rio de Janeiro, 2019.
65 f.: il.

Orientador: Edivaldo Figueiredo Fontes Junior.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Mestrado profissional em matemática em rede nacional – PROFMAT, 2019.

1. Trilho de ar. 2. Tecnologia.. 3. Arduino . 4. Função afim. 5. Função quadrática. I. Fontes Junior, Edivaldo Figueiredo , 1983-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Mestrado profissional em matemática em rede nacional – PROFMAT III. Título.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

VINICIUS DA CUNHA SANTOS

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 30/08/2019.

Edivaldo Figueiredo Fontes Junior. Dr. UFRRJ
(Orientador)

Orlando dos Santos Pereira. Dr. UFRRJ

Wilian Jeronimo dos Santos. Dr. UFRRJ

André Guimarães Valente. Dr. IFRJ

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por caminhar do meu lado me dando forças e sabedoria para superar as dificuldades encontradas ao longo do caminho.

À minha esposa, Fabiana, por estar sempre comigo, me incentivando aos estudos, e por me possibilitar ao longo do curso os meios necessários para que eu pudesse me dedicar.

À minha Família por entender por várias vezes a minha ausência e pelas palavras de incentivo.

Ao meu filho, Arthur, que ainda entenderá com mais maturidade o porquê não pude brincar todas as vezes que queria. Agradeço por ele entender a necessidade do pai estudar.

Aos amigos da Escola Municipal Fernando de Azevedo, que me ajudaram com ideias e dicas. De forma particular, agradeço a diretora Andreia e a professora Diane que me ajudaram ao longo de todo o curso a dar conta do desafio de estudar e trabalhar, sem vocês não teria conseguido.

Ao Professor Dr. Edivaldo pela orientação e pelo incentivo fundamental, obrigado sem você essa dissertação seria apenas uma ideia.

Ao professor Dr. Orlando pelas conversas ao longo do caminho que me ajudaram a manter a calma e prosseguir nos estudos.

À Coordenação e professores em geral do PROFMAT da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro pelo apoio, dedicação e ensinamentos.

Aos Colegas da turma 2017 que ao longo do curso me ajudaram a superar dificuldades que encontrei no caminho.

Ao PROFMAT e a UFRRJ pela oportunidade proporcionada.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001.

RESUMO

Santos, Vinicius da Cunha. **CONSTRUÇÃO DE UM TRILHO DE AR COM O USO DO ARDUINO: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO AFIM E QUADRÁTICA**. 2019. 65p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2019.

O presente trabalho tem como proposta a construção de um trilho de ar de baixo custo desenvolvido com o uso do micro-controlador arduino que pode ser uma ferramenta pedagógica para auxiliar o estudo de funções afins e quadráticas. Esta pesquisa foi desenvolvida em uma escola da zona oeste do município do Rio de Janeiro onde duas turmas do nono ano participaram da pesquisa. Ao todo este trabalho contou com 6 tempos de 50 minutos no qual os estudantes puderam interagir com o recurso pedagógico elaborado neste trabalho. Foram propostos cinco experimentos diferentes, sendo três de movimento retilíneo uniforme e dois de movimento retilíneo uniformemente variado. Os alunos foram submetidos a um pré-teste e um pós-teste com o objetivo de verificar qualitativamente a melhora no aprendizado que o trilho de ar pode oferecer. Por fim, os estudantes realizaram um teste motivacional no qual se buscava compreender o quanto o trilho de ar contribui na motivação do corpo discente em aprender matemática e de um modo mais específico os conteúdos de função afim e quadrática. Analisando os resultados, verificamos que 77% dos alunos observados gostaram de realizar experimentos no trilho de ar e que 82% destes alunos concordam que atividades que relacionam teoria e aplicação os ajudam a entender a matemática.

Palavras-Chave: Trilho de ar, Tecnologia, Arduino, Função afim e quadrática.

ABSTRACT

Santos, Vinicius da Cunha. **BUILDING OF AN AIR TRACK USING THE ARDUINO BOARD: A PROPOSAL FOR TEACHING AFFINE AND QUADRATIC FUNCTIONS**. 2019. 65 Pages. Dissertation (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2019.

The present work proposes the construction of a low cost air track designed to developed with the use of the arduino microcontroller which can be a pedagogical tool to assist the study of related and quadratic functions. This research was developed in a school in the west of the city of Rio de Janeiro where two ninth grade classes participated in the research. In all this work had 6 times of 50 minutes in which The students were able to interact with the pedagogical resource elaborated in this work. Were five different experiments were proposed, three of which were of uniform rectilinear motion and two of uniformly varied rectilinear motion. Students underwent a pretest and a post-test with the objective of qualitatively verifying the improvement in learning that the Air rail can offer. Finally, the students took a motivational test in which The aim was to understand how much the air rail contributes to the motivation of the student body. learning mathematics and in a more specific way the contents of related function and drastic. Analyzing the results, we found that 77% of the students observed liked perform experiments on the air track and that 82% of these students agree that activities that relate theory and application help them understand math.

Keywords: Air Track, Technology, Arduino, Affine and Quadratic Function.

Sumário

1 REFERENCIAL TEÓRICO **11**

1.1 Introdução 11

1.2 A experiência como ponto de partida para conjecturar propriedades 12

1.3 A experiência como forma de comprovar modelos teóricos 13

1.4 Arduino 14

1.5 O método experimental e a motivação social e política 16

2 ESTUDO DE FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA **17**

2.1 Propriedades da função afim 17

2.2 Propriedades da Função Quadrática 22

2.3 O movimento retilíneo uniforme e o uniformemente variado 26

3 METODOLOGIA **29**

3.1 Modelos de trilho de ar 29

3.2 Construindo o trilho de ar de baixo custo 30

3.3 Testando o trilho 33

3.4 Metodologia da pesquisa 34

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES **43**

4.1 Resultados preliminares 43

4.1.1 Pré-teste 43

4.1.2 Teste Motivacional 44

4.1.3 Pós-teste 46

4.2 Considerações Finais 47

Referências **48**

A Pré-Teste **51**

B Pós-Teste **55**

C Teste Motivacional **59**

D Experimento 1 **61**

E Experimento 2 **62**

F Experimento 3 **63**

G Experimento 4 **64**

H Experimento 5 **65**

*

Lista de Figuras

1.1 Gráfico de Oresme 13
1.2 Gráfico de Galileu 14
1.3 Placa Uno 15
1.4 Sensor Ultrassônico 15

2.1 Demonstração da proposição 3 19
2.2 Exemplo 2 20

3.1 Modelo de funcionamento do Sensor Ultrassônico 30
3.2 Trilho de ar construído 30
3.3 Trilho de ar desmontado 31
3.4 Carrinho 32
3.5 Programação do sensor ultrassônico 32
3.6 Relatório do experimento 1 35
3.7 Experimento 2 36
3.8 Relatório 2 36
3.9 Relatório 3 37
3.10 Experimento 4 37
3.11 Relatório 4 38
3.12 Experimento 5 38
3.13 Relatório 5 39
3.14 Monitor Serial 39
3.15 Planilha do Geogebra 40
3.16 Projetando o gráfico no quadro 40
3.17 Funções quadráticas 40
3.18 Experimento 1 41
3.19 Experimento 2 41
3.20 Experimento 3 42

3.21 Experimento 4 42
3.22 Experimento 5 42

4.1 Atividade prática de matemática 45
4.2 Gosto em realizar os experimentos no trilho de ar 46
4.3 Acerto parcial / Acerto integral 47

Lista de Tabelas

3.1 Tabela identificando aceleração no trilho 34

4.1 Pré-teste 43
4.2 Motivação intrínseca 44
4.3 Motivação extrínseca 44
4.4 Média, erro e moda da intrínseca 45
4.5 Média, erro e moda da motivação extrínseca 46
4.6 Pós-Teste 47

Capítulo 1

REFERENCIAL TEÓRICO

1.1 Introdução

É cada vez mais comum os estudantes perguntarem aos professores para que a Matemática serve e de um modo mais específico porque estudar aquele conteúdo determinado e onde ele será empregado. Nos livros didáticos atuais temos visto que sempre que possível os autores iniciam o conteúdo a ser estudado com uma aplicação, mas só este fato não trás aos alunos uma experiência concreta da manipulação das variáveis envolvidas no processo.

Essa experiência, da manipulação de objetos envolvidos no conteúdo a ser estudado, se faz importante para que o discente possa conjecturar propriedades sobre o tema. Acredita-se que dessa forma os alunos se sintam mais motivados a estudar matemática obtendo melhores resultados nas provas sobre o conteúdo.

Muitos estudantes não conseguem fazer uma transição da teoria que está sendo ensinada, função afim e quadrática, e sua utilização no seu cotidiano, junto com o fracasso escolar vem à desmotivação em aprender. Dessa forma é uma necessidade do professor conhecer várias técnicas de ensino que possam ressurgir e amplificar o prazer em estudar.

Este trabalho tem como objetivo analisar a influência de experimentos cinemáticos no trilho de ar na aprendizagem das funções afim e quadrática em duas turmas do 9º ano do ensino fundamental do município do Rio de Janeiro. Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Construir um trilho de ar de baixo custo;
- Identificar através de um pré-teste as dificuldades que o grupo de estudantes possa ter dos conteúdos de função afim e quadrática;
- Apresentar os experimentos aos alunos;

- Motivar os alunos a realizarem seus próprios experimentos em grupo;
- Identificar através de um teste se os alunos conseguiram de alguma forma superar suas dificuldades encontradas no pré-teste;
- Examinar através de um questionário a motivação dos estudantes em aprender matemática através de experimentos práticos.

O trabalho foi dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo é apresentada a importância dos experimentos no estudo de uma matéria e a mudança de aplicação desses experimentos. Neste capítulo também se encontram a apresentação da tecnologia arduino, um estudo sobre o método experimental e motivação. No segundo capítulo estão presentes definições e propriedades importantes para compreender o estudo de funções afins e quadráticas bem como suas aplicações no estudo teórico de movimento retilíneo uniforme e uniformemente variado. No terceiro capítulo explica-se como construir o trilho de ar e a metodologia aqui adotada. Finalmente no quarto capítulo, encontra-se os resultados e discussões da aplicação do trilho de ar na sala como um recurso pedagógico.

1.2 A experiência como ponto de partida para conjecturar propriedades

Uma das formas mais antigas de estudar os fenômenos da natureza é através da experimentação. Aristóteles um dos grandes defensores desse método científico dizia por volta de 23 séculos atrás “quem possua a noção sem a experiência, e conheça o universal ignorando o particular nele contido enganar-se-á muitas vezes no tratamento” (ARISTOTELES, 1979 apud GIORDAN, 1999)

Dessa forma fica claro o poder que a experimentação tem, maximizando a possibilidade de se conjecturar propriedades adequadas sobre o item estudado.

Durante toda a Idade Média esse pensamento empírico embasou os estudos sobre os fenômenos da natureza (GIORDAN, 1999) . No séc. XIV os estudos sobre mudança e movimento era um tema muito explorado nas universidades (CAMPOS, 2000, p. 23)

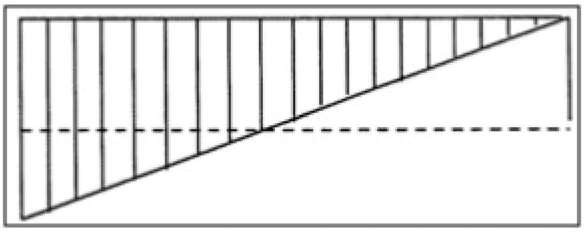
Nicole Oresme um importante matemático do séc. XIV publicou um trabalho conhecido como latitude das formas no qual representa uma correlação entre as grandezas do tempo e da velocidade de um corpo em aceleração constante, em um único gráfico (OLIVEIRA; ROSA; VIANA, 2014, p. 53)

Nesse trabalho, Oresme relaciona a velocidade do corpo a pequenos acréscimos do tempo, da seguinte maneira, ao:

"Longo de uma reta horizontal na qual marcou pontos representando instantes de tempo (ou longitudes), sendo que para cada instante, traçou perpendicularmente à reta de longitudes, um segmento de reta (latitude), cujo comprimento representava a velocidade"(BOYER, 1996 apud OLIVEIRA; ROSA; VIANA, 2014, p. 53-54).

A figura 1.1 mostra a representação gráfica construída por Oresme.

Figura 1.1: Gráfico de Oresme



Fonte: (OLIVEIRA; ROSA; VIANA, 2014).

Aprofundando sobre o trabalho de Oresme encontramos que ele com seu trabalho conseguiu provar que quaisquer três pontos, obtidos do encontro dos segmentos de retas horizontais e verticais pertencem a mesma reta (TASCHOW, 2003)oliveira. Outro fato interessante apontado por OLIVEIRA, Rosa e Viana (2014) é de que Oresme afirmava, mas sem provar que a área do triângulo retângulo era equivalente a distância percorrida pelo objeto com aceleração constante.

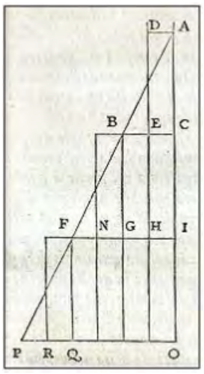
1.3 A experiência como forma de comprovar modelos teóricos

Passados aproximadamente 250 anos da técnica elaborada por Oresme, foi publicado por Galileu Galilei um diagrama donde se observa a influência de Oresme em seu trabalho (OLIVEIRA; ROSA; VIANA, 2014) , a figura 1.2 representa o gráfico construído por Galileu.

Oresme já havia percebido que a razão da área da primeira metade do intervalo de tempo com a segunda metade era na proporção de 1 para 3 onde essa área representa a distância percorrida pelo corpo, coube a Galileu uma generalização desse fato. Se subdividirmos o intervalo de tempo em um número n de partes iguais então as distâncias estão entre si como a soma dos n primeiros números ímpares, e por outro lado a soma dos números ímpares consecutivos é o quadrado da quantidade de números somados. Portanto a distância total percorrida por um corpo varia com o quadrado do tempo (CAMPOS, 2000)

Segundo NASCIMENTO (2011), Galileu ao apresentar o experimento com o plano inclinado com o objetivo de mostrar que o espaço percorrido por um corpo com aceleração

Figura 1.2: Gráfico de Galileu



Fonte: (OLIVEIRA; ROSA; VIANA, 2014).

constante, queda livre, era proporcional ao quadrado do tempo de queda menciona entre outras coisas o papel da experiência no estabelecimento de princípios. Galileu não foi o primeiro a refletir sobre o método de Aristóteles, mas ajudou a consolidar uma visão mais aguçada do papel da experimentação para justificar a aquisição de novos conhecimentos sobre movimento, de forma mais específica. Sobre isso NASCIMENTO (2011) diz:

> "O esquema justificativo de Galileu parece consistir num primeiro passo no qual certas propriedades do movimento naturalmente acelerado são observadas; supõe-se que tais propriedades se explicam por uma certa definição do movimento em questão. Esta suposição torna-se certeza, na medida em que as propriedades, que podem ser deduzidas da definição, concordam com as observadas."

A tecnologia na época de Galileu era limitada e realizar experimentos isolando algumas variáveis envolvidas no problema do qual se desejava estudar o movimento eram ou impossível ou sem uma precisão apurada. Por exemplo, Galileu afirmava que uma bola de canhão e uma pena lançada ao mesmo tempo e na mesma altura cairiam ao mesmo tempo no solo se o experimento fosse realizado no vácuo, mas ele não conseguia o vácuo para provar sua afirmação, tão pouco conseguia um relógio para medir de forma adequada ao experimento os tempos de queda do corpo estudado. Com isso Galileu valoriza a matemática para provar suas teorias (CAMPOS, 2000, p 34).

1.4 Arduino

Não há dúvidas que a tecnologia nos tempos atuais é muito superior a do tempo de Galileu. Segundo MARTINAZZO et al. (2014) o primeiro microcontrolador foi lançado na década de 80 e iniciou uma revolução na eletrônica. Ainda segundo esses autores uma das placas de microcontrolador mais conhecida no mercado atualmente é a Arduino, que tem código aberto e linguagem de programação baseada em C/C++ e também têm softwares e hardwares livres o que permite seu uso como dispositivo de aquisição de dados de sensores de entrada e de saída. Mais detalhes sobre o arduino e algumas propostas de seu uso para o ensino podem ser vistos nos trabalhos de (CAVALCANTI, 2016) e (MARTINAZZO et al., 2014).

As figuras 1.3 e 1.4 mostram respectivamente a placa Arduino modelo Uno e o sensor ultrassônico modelo HCSR04, que é utilizado para medir distâncias até 4 metros.

Figura 1.3: Placa Uno

Fonte: o autor.

Figura 1.4: Sensor Ultrassônico

Fonte: o autor.

Sobre o arduino, (MARTINAZZO et al., 2014) afirmam que há grande aplicabilidade no ensino de física, e que já consta o movimento uniformemente variado como um dos temas estudados com essa tecnologia. Para fazer a ligação eletrônica entre os sensores e a placa do arduino utiliza-se o software arduino 1.8.5 que pode ser baixado diretamente do site *https://www.arduino.cc/* de forma gratuita.

1.5 O método experimental e a motivação social e política

Sobre a importância da experimentação na sala de aula Cavalcanti diz:

> "A experimentação apresenta um papel importante no ensino de ciências, ou seja, ela exemplifica e reproduz o conhecimento teórico, de maneira atraente e muitas vezes de forma custo beneficio interessante. Através do uso de experimentos, as aulas podem se tornar mais dinâmicas, atraentes e aprazíveis." (CAVALCANTI, 2016, p. 18).

Os experimentos na sala de aula colocam os alunos numa situação concreta sobre o tema estudado, "Os estudantes adquirem muito mais conhecimento através de situações concretas, e as experimentações constituem um grande instrumento de aprendizagem, pois através delas os alunos observam, pensam e agem." (PIAGET, 1972 apud CAVALCANTI, 2016, p. 23).

O método experimental segundo Castilho (2015) é dividido em três etapas: hipótese prévia, experimentação e generalização de resultados. Todas estas etapas guiadas por uma atividade experimental. Motivar os alunos ao estudo não é uma tarefa simples, a motivação é um dos problemas centrais na educação segundo (BZUNECK, 2009 apud WROBEL et al., 2018). Ainda segundo WROBEL et al. (2018) , o estudante desmotivado gasta pouquíssimo tempo para o estudo ou simplesmente não estuda.

Para WROBEL et al. (2018) as teorias sociocognitivas de motivação tem apontado pelo menos a existência de duas razões para a motivação denominadas de intrínsecas e extrínsecas, onde a primeira reflete quando o aluno por si só manifesta interesse em realizar tarefas, e a última reflete uma imposição externa à realização da atividade no intuito de obter recompensas ou a atender a pressão de outros, porém para esses autores as duas formas de motivação possuem vantagens no contexto escolar, sobre a motivação extrínseca diz "trata-se de um cenário melhor do que aquilo que acontece com alunos desmotivados".

Contudo, segundo (GUIMARAES, 2003 apud WROBEL et al., 2018), quando o aluno está motivado ele se dedica e se esforça em tarefas desafiadoras, utilizando estratégias adequadas e desenvolvendo novas habilidades na execução das tarefas fazendo isso com entusiasmo e orgulho.

Capítulo 2

ESTUDO DE FUNÇÕES AFIM E QUADRÁTICA

Faremos um breve resumo do estudo de função afim e quadrática com o objetivo de garantir as condições necessárias para o desenvolvimento da pesquisa.

2.1 Propriedades da função afim

Definição 1. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim, quando existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$.*

Proposição 1. *A função afim é bijetora quando $a \neq 0$.*

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que a função é injetora, sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $x_1 \neq x_2$, multiplicando ambos os lados da desigualdade por $a \in \mathbb{R}$ onde $a \neq 0$, temos que $ax_1 \neq ax_2$, agora somando ambos os lados da desigualdade por $b \in \mathbb{R}$ temos que $ax_1 + b \neq ax_2 + b$, isto é, $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Agora, mostraremos que a função é sobrejetora, suponha por absurdo que $y \in \mathbb{R} - f(X)$ então $\forall x \in \mathbb{R}$ temos que $ax + b \neq y$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, dessa forma temos que $x \neq \frac{y-b}{a}$, mas $\frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$ logo pertence ao domínio de f, dessa forma temos que:

$$f\left(\frac{y-b}{a}\right) = a\left(\frac{y-b}{a}\right) + b = y,$$

portanto $y \in f(X)$, absurdo. $\square$

Proposição 2. *Existe uma e somente uma função afim que passa nos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), onde $x_2 - x_1 \neq 0$.*

Demonstração. Para provar que existe tal função, mostraremos que a função afim f dada de forma que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ passa pelos dois pontos dados, isto é:

$$\begin{cases} y_1 & = & ax_1 + b \\ y_2 & = & ax_2 + b \end{cases} \tag{2.1}$$

resolvendo o sistema (2.1), encontramos que

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad e \qquad b = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1}.$$

Logo a função $f(x) = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) x + \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1}$ é afim e passa pelos dois pontos dados pois:

$$f(x_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 x_1 - y_1 x_1 + x_2 y_1 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} = y_1$$

e

$$f(x_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_2 + \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 x_2 - y_1 x_2 + x_2 y_1 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} = y_2.$$

Agora, provaremos que ela é a única função afim que passa por esses dois pontos, suponhamos por absurdo que há duas funções afim passando por esses pontos, digamos que $f(x) = a_1 x + b_1$ e $g(x) = a_2 x + b_2$ sejam tais que $y_1 = f(x_1) = g(x_1)$ e $y_2 = f(x_2) = g(x_2)$, dessa forma

$$\begin{cases} f(x_1) = a_1 x_1 + b_1 \\ f(x_2) = a_1 x_2 + b_1 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} g(x_1) = a_2 x_1 + b_2 \\ g(x_2) = a_2 x_2 + b_2 \end{cases}$$

resolvendo os sistemas encontramos que

$$a_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} = a_2$$

e

$$b_1 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 g(x_1) - x_1 g(x_2)}{x_2 - x_1} = b_2$$

portanto $f(x) = g(x)$, absurdo. $\square$

Exemplo 1. *Dados os pontos* $(1,2)$ *e* $(3,4)$*, determine a função afim que passe por esses* *dois pontos:*

Pela proposição 2 sabemos que existe a função afim e se ela for dada por $f(x) = ax+b$ *então o valor de* $a = \frac{4-2}{3-1} = 1$ *e* $b = \frac{3.2-1.4}{3-1} = \frac{2}{2} = 1$, *logo a função procurada é dada por* $f(x) = x+1$

Proposição 3. *O gráfico da função afim é uma reta não paralela ao eixo OY.*

Demonstração. Sejam $A = (x_1, f(x_1)), B = (x_2, f(x_2))$ e $C = (x_3, f(x_3))$, onde $x_1 < x_2 < x_3$, como a função passa nos pontos A e B temos de acordo com a proposição anterior que

$$f(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)}x + \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_2 - x_1},$$

e como a função passa nos pontos B e C temos que

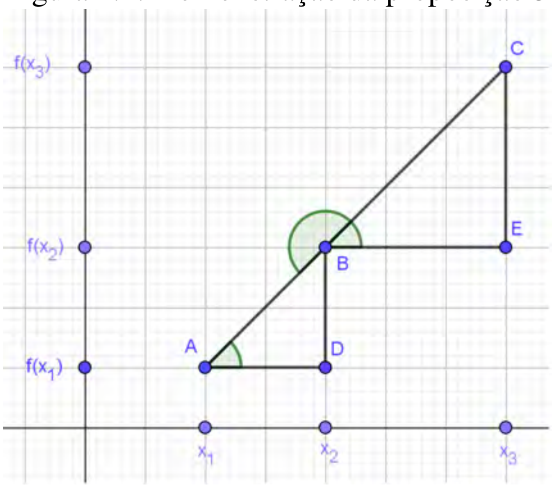
$$f(x) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{(x_3 - x_2)}x + \frac{x_2 f(x_3) - x_3 f(x_2)}{x_3 - x_2},$$

mas como a função afim é única temos que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{(x_3 - x_2)}.$$

Sejam $D = (x_2, f(x_1))$ e $E = (x_3, f(x_2))$ com isto temos que $BD \parallel EC \parallel OY$ e $AD \parallel BE \parallel OX$ e daí obtemos $AD = x_2 - x_1$, $DB = f(x_2) - f(x_1)$, $BE = x_3 - x_2$ e $EC = f(x_3) - f(x_2)$, logo os triângulos ADB e BCE são semelhantes e por isso o $\angle EBC \equiv \angle DAB$, por outro lado como o triângulo ADB é retângulo temos $\angle DAB + \angle ABD = 90^o$. Observe a figura 2.1:

Figura 2.1: Demonstração da proposição 3



Fonte: o autor.

Portanto o ângulo $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBE + \angle EBC = \angle ABD + \angle DBE + \angle DAB =$

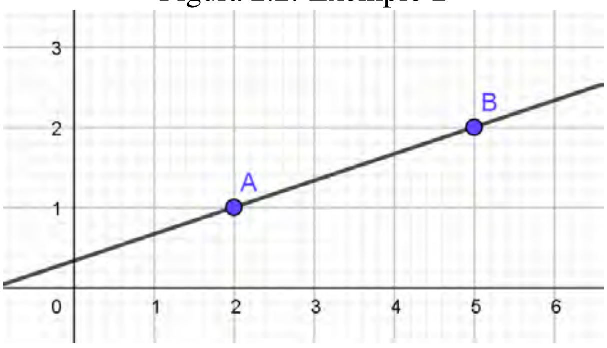
$\angle ABD + \angle DAB + \angle DBE = 90^o + 90^o = 180^o$, o que prova que A, B e C estão na mesma reta pois formam um ângulo de meia volta, isto é,180^o. $\square$

Proposição 4. *Uma reta não paralela ao eixo OY é uma função afim.*

Demonstração. Uma reta é determinada por dois pontos distintos, logo dados (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tais que $x_2 - x_1 \neq 0$ temos que existe uma única função afim que passa por esses dois pontos e como o gráfico da função afim é uma reta temos que o gráfico da função afim e da reta são coincidentes. $\square$

Exemplo 2. *Observe a figura 2.2 e encontre a função afim que representa esse gráfico:*

Figura 2.2: Exemplo 2



Fonte: o autor.

Observa-se que o gráfico da função passa pelos pontos $(2,1)$ *e* $(5,2)$*, logo pela proposição 2 a função é dada por* $f(x) = \frac{2-1}{5-2}x + \frac{5.1-2.2}{5-2} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

Definição 2. *Dizemos que uma função é crescente (respectivamente decrescente) se para todo* $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ *(respectivamente* $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$*).*

Proposição 5. *Seja* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*,* $f(x) = ax + b$*, se* $a > 0$ *então* f *é crescente, respectivamente se* $a < 0$ *então* f *é decrescente.*

$$x_1 > x_2 \Rightarrow \begin{cases} ax_1 > ax_2, se\ a > 0 \\ ax_1 < ax_2, se\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_1 + b > ax_2 + b, se\ a > 0 \\ ax_1 + b < ax_2 + b, se\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x_1) > f(x_2), se\ a > 0 \\ f(x_1 < f(x_2), se\ a < 0 \end{cases}$$

Proposição 6. *Seja* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *crescente ou decrescente. Se*
$f(x+h) - f(x) = k$*, pra todo* $x \in \mathbb{R}$*, onde h e k são valores constantes pertencentes aos reais e diferentes de zero, então* f *é uma função afim de inclinação* $\frac{k}{h}$*.*

Demonstração. Seja $t \in \mathbb{R}$, dados os três pontos abaixo:

$$\begin{cases} (x_1 + th, f(x_1 + th)) = (a,b) \\ (x_1 + (t+1)h, f(x_1 + (t+1)h)) = (c,d) \\ (x_1 + (t-1)h, f(x_1 + (t-1)h)) = (e,f) \end{cases}$$

Temos pela proposição 2 que existe uma função afim que passa pelos pontos (a,b) e (c,d) dada por

$$\phi(x) = \left(\frac{d-b}{c-a}\right)x + \frac{cb-ad}{c-a}$$

e existe uma função afim que passa pelos pontos
(e,f) e (a,b) dada por

$$\psi(x) = \left(\frac{b-f}{a-e}\right)x + \frac{af-eb}{a-e},$$

mas pela hipótese temos que

$$\frac{d-b}{c-a} = \frac{k}{h} = \frac{b-f}{a-e},$$

e como

$$\begin{aligned} cb - ad &= (x_1 + (t+1)h)f(x_1 + th) - (x_1 + th)f(x_1 + (t+1)h) = \\ &= (x_1 + th)f(x_1 + th) + hf(x_1 + th) - (x_1 + th)f(x_1 + (t+1)h) = \\ &= -(x_1 + th)(f(x_1 + (t+1)h) - f(x_1 + th)) + hf(x_1 + th) = \\ &= -(x_1 + th)(f(x_1 + th) - f(x_1 + (t-1)h)) + hf(x_1 + th) = \\ &= (x_1 + th)f(x_1 + (t-1)h) - (x_1 + th)f(x_1 + th) + hf(x_1 + th) = \\ &= (x_1 + th)f(x_1 + (t-1)h) - (x_1 + (t-1)hf(x_1 + th) = af - eb \\ &= af - eb \end{aligned}$$

obtemos que

$$\frac{cb-ad}{c-a} = \frac{af-eb}{a-e},$$

como a função afim é única temos que $\phi(x) = \psi(x)$. Dessa forma provamos que $f(x) = \phi(x)$ sempre que $(x = x_1 + th), \forall t \in \mathbb{R}$.
Agora suponha por absurdo que exista um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0) = \phi(x_0) + q, q \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Fazendo $t = \frac{x_0 - x_1 + \frac{q}{p}}{h}$ onde $p = \frac{k}{h}$, temos que

$$\begin{aligned} f(x_1 + th) &= f\left(x_0 + \frac{q}{p}\right) = \phi\left(x_0 + \frac{q}{p}\right) = \\ &= \left(\frac{d-b}{c-a}\right)\left(x_0 + \frac{q}{p}\right) + \frac{cb-ad}{c-a} = \\ &= \left(\frac{d-b}{c-a}\right)x_0 + \left(\frac{d-b}{c-a}\right)\frac{q}{p} + \frac{cb-ad}{c-a} = \\ &= \left(\frac{d-b}{c-a}\right)x_0 + \frac{cb-ad}{c-a} + q = \phi(x_0) + q = f(x_0), \end{aligned}$$

portanto temos que $x_0 \neq x_0 + q \rightarrow f(x_0) = f(x_0 + q)$, absurdo, pois a função é crescente ou decrescente. $\square$

Exemplo 3. *Uma partícula a cada 2 segundos se move 3 cm, sempre na mesma direção, do ponto A para o ponto B, se no momento da observação a partícula se encontrava a 10 cm de distância do ponto A, então a função que melhor representa a distância da partícula em relação ao tempo é dada por:*

De acordo com a proposição 6 esta função é uma reta de inclinação $\frac{3}{2}$, e como no momento da observação a partícula se encontra a 10 cm de distância do ponto A temos que $f(0) = 10$. Logo a função que descreve melhor esse movimento é dada por $f(x) = \frac{3}{2}x + 10$, onde x representa o tempo e $f(x)$ representa a distância da particula em relação ao ponto A.

2.2 Propriedades da Função Quadrática

Definição 3. *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita quadrática quando existir números reais a, b e c com $a \neq 0$, de tal forma que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para qualquer número real x.*

Proposição 7. *Sejam $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ tais que $x_1 < x_2 < x_3$ e $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ tais que os pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ são não-colineares em $\mathbb{R}^2$. Existe uma, e somente uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que não exista tal função, isto é, se

$$\begin{cases} ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \\ ax_3^2 + bx_1 + c = y_3 \end{cases}$$

então $a \notin \mathbb{R}$ ou $a = 0$. Resolvendo o sistema de equações na variável a encontramos que $a = (\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1})(\frac{1}{x_3-x_2})$. Logo $a \in \mathbb{R}$, pois é uma multiplicação de dois números reais. Por outro lado a=0 se, e somente se $\frac{1}{x_3-x_2} = 0$ ou $\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = 0$, como $x_2 < x_3$ temos que $\frac{1}{x_3-x_2} \neq 0$, pensando de forma análoga à demonstração da proposição 3 se fizermos uma função afim que passa nos pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2) e outra função afim que passe nos pontos (x_1,y_1) e (x_3,y_3) teremos que $\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ se, e somente se as duas funções são iguais já que possuem um ponto em comum, nesse caso os pontos $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ são colineares, absurdo. $\square$

Exemplo 4. *Determine a função quadrática que passa nos pontos* $(1,2)$*,*$(3,4)$ *e* $(5,5)$*:*
Vimos que a função afim que passa nos pontos $(1,2)$*,*$(3,4)$ *é dada por* $f(x) = x+1$*, logo* $f(5) = 5+1 = 6$*, esse fato ilustra que os pontos dados não são colineares e portanto existe uma função quadrática que passa nesses pontos.*

$$\begin{cases} a1^2 + b1 + c = 2 \\ a3^2 + b3 + c = 4 \\ a5^2 + b5 + c = 5 \end{cases}$$

Temos que $a = (\frac{5-2}{5-1} - \frac{4-2}{3-1})(\frac{1}{5-3}) = (\frac{3}{4} - \frac{2}{2})\frac{1}{2} = \frac{-1}{8}$*, fazendo a substituição nas equações e resolvendo o sistema 2 por 2, encontramos que* $b = \frac{3}{2}$ *e que* $c = \frac{5}{8}$*. Logo a função dada por* $f(x) = \frac{-1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{8}$ *passa pelos pontos* $(1,2)$*,*$(3,4)$ *e* $(5,5)$*.*

Proposição 8. *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função, tal que* $f(x) = ax^2 + bx + c$*, com* $a \neq 0$ *então podemos escrever* f *como* $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$*.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = \\ &= a\left(\frac{x^2 + bx + c}{a}\right) = \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right). \end{aligned}$$

$\square$

Definição 4. *Dados A e B, dois pontos distintos no plano cartesiano, dizemos que a menor distância entre esses pontos é dado por $D = (A, B)$*

Proposição 9. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ então o ponto $P = \left(\frac{-b}{2a}, d\right)$ é tal que $D\left(\left(\left(\frac{-b}{2a} - q\right), f\left(\frac{-b}{2a} - q\right)\right), P\right) = D\left(\left(\left(\frac{-b}{2a} + q\right), f\left(\frac{-b}{2a} + q\right)\right), P\right)$, $\forall d, q \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Pela proposição 8 temos que $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)$ logo se $x = \frac{-b}{2a} - q$. Temos que

$$f\left(\frac{-b}{2a} - q\right) = a\left(\left(\frac{-b}{2a} - q + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left((-q)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right)$$

e se $x = \frac{-b}{2a} + q$ temos que

$$f\left(\frac{-b}{2a} + q\right) = a\left(\left(\frac{-b}{2a} + q + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(q^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right),$$

isto é, $f(\frac{-b}{2a} - q) = f(\frac{-b}{2a} + q)$. Portanto

$$\begin{aligned}
D\left(\left(\left(\frac{-b}{2a} - q\right), f\left(\frac{-b}{2a} - q\right)\right), P\right) &= \sqrt{\left(\frac{-b}{2a} - q - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right)^2 + \left(f\left(\frac{-b}{2a} - q\right) - d\right)^2} = \\
&= \sqrt{(-q)^2 + \left(f\left(\frac{-b}{2a} - q\right) - d\right)^2} = \\
&= \sqrt{\left(\frac{-b}{2a} + q - \left(\frac{-b}{2a}\right)\right)^2 + \left(f\left(\frac{-b}{2a} + q\right) - d\right)^2} = \\
&= D\left(\left(\left(\frac{-b}{2a} + q\right), f\left(\frac{-b}{2a} + q\right)\right), P\right).
\end{aligned}$$

□

Definição 5. *Dados um ponto F e uma reta d que não o contém, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto de pontos do plano que distam igualmente de F e de d, isto é,$D(P,F) = D(P,d)$, onde P é um ponto que pertence a parábola.*

Proposição 10. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, então existe um ponto $P = \left(\frac{-b}{2a}, y\right), y \in \mathbb{R}$, e uma reta $r(x) = \beta, \beta \in \mathbb{R}$,tal que $D((x, f(x)), P) = D((x, f(x)), r), \forall x \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Faremos o caso em que $a > 0$, para $a < 0$ o resultado é análogo. Suponha por absurdo que para qualquer ponto P exista $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que
$D((x_1, f(x_1)), P) \neq D((x_1, f(x_1)), r)$. Seja $d = D\left(\left(\left(\frac{-b}{2a}\right), f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right), P\right)$, então podemos encontrar uma reta $r(x) = \beta$ de forma que

$$\beta = f\left(\frac{-b}{2a}\right) - d$$

além disso para todo $d \in \mathbb{R}$ temos que existe um $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$D((x_1, f(x_1)), P) \neq D((x_1, f(x_1)), r).$$

Seja $x_1 = \frac{-b}{2a} + q, q \in \mathbb{R}$, então temos que

$$D(x_1, f(x_1), P) \neq D(x_1, f(x_1), r) \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{(\frac{-b}{2a} + q - (\frac{-b}{2a}))^2 + (f(\frac{-b}{2a} + q) - \frac{-b^2 + 4ac}{4a} + d)^2} \neq$$

$$\sqrt{(\frac{-b}{2a} + q - (\frac{-b}{2a} + q))^2 + (f(\frac{-b}{2a} + q) - \frac{-b^2 + 4ac}{4a} - d)^2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{q^2 + (aq^2 - d)^2} \neq \sqrt{(aq^2 + d)^2} \Leftrightarrow d \neq \frac{1}{4a}.$$

se $q \neq 0$ Logo se $d = \frac{1}{4a}$ temos que $D((x_1, f(x_1)), P) = D((x_1, f(x_1)), r)$, para todo $q \neq 0 \in \mathbb{R}$, mas isto é um absurdo. □

Esta proposição nos garante que o grafico da função quadrática é uma parábola.

Exemplo 5. *Dada a função* $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 5$, *determine o ponto P e a reta r tal que a* $D(x, P) = D(x, r)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
Observemos que $\frac{-b}{2a} = -2$, $f(-2) = 4$ *e que* $d = 1$. *Logo* $r(x) = 4 - 1 = 3$ *e* $P = (-2, 4+1) = (-2, 5)$

Exemplo 6. *Dada a função* $f(x) = \frac{-1}{8}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{5}{8}$. *Determine o ponto P e a reta r tal que* $D(x, P) = D(x, r)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$.
Observemos que $\frac{-b}{2a} = 6$, $f(6) = \frac{41}{8}$ *e que* $d = 1.\frac{8}{4} = 2$. *Logo* $r(x) = \frac{41}{8} + 2 = \frac{57}{8}$ *e* $P = (6, \frac{41}{8} - 2) = (6, \frac{25}{8})$

2.3 O movimento retilíneo uniforme e o uniformemente variado

Agora, iremos estudar a velocidade e aceleração de um corpo de dimensões desprezíveis ao longo do tempo.

Definição 6. *Seja d_0 a posição do corpo no tempo t_0 e d_n a posição do corpo no tempo t_n, definimos a velocidade média do corpo como sendo $v_m = \frac{d_n - d_0}{t_n - t_0}$.*

Dessa forma se a velocidade média de um corpo for constante ao longo do tempo, então numa sequência de pontos $(t_0, d_0), (t_1, d_1), \ldots, (t_n, d_n)$ temos que $\frac{d_1 - d_0}{t_1 - t_0} = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} = \cdots = \frac{d_n - d_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} = v_m$.

Definição 7. *Seja v_0 a velocidade do corpo no instante t_0 e v_n a velocidade do corpo no instante t_n, definimos a aceleração média do corpo como sendo $a_m = \frac{v_n - v_0}{t_n - t_0}$.*

Dessa forma se aceleração média for constante ao longo do tempo, então para uma sequência de pontos $(t_0, v_0), (t_1, v_1), \ldots, (t_n, v_n)$ temos que $\frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \cdots = \frac{v_n - v_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} = a_m$
Portanto, relembrando a construção da proposição 3 verificamos que se a velocidade for constante e diferente de zero os pontos $(t_0, d_0), (t_1, d_1), \ldots, (t_n, d_n)$ representam uma reta, não paralela ao eixo OY, no plano, e da mesma forma se a aceleração for constante e diferente de zero os pontos $(t_0, v_0), (t_1, v_1), \ldots, (t_n, v_n)$ representam uma reta no plano.
Agora, estamos interessados em estudar o movimento dos corpos em aceleração constante, já vimos que $d_n - d_0 = v_m(t_n - t_0)$, como o corpo está modificando sua velocidade ao longo do tempo temos que encontrar a velocidade média do corpo com relação aos tempos t_0 e t_n, admitindo que $v_0, v_1, \ldots, v_n$ é o valor da velocidade média nos instantes $t_0, t_1, \ldots, t_n$ respectivamente, temos que $v_m = \frac{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}{n+1}$, dessa forma temos que

$$d_n - d_0 = \left(\frac{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}{n+1} \right) (t_n - t_0)$$

pela definição de aceleração temos que $v_n = v_0 + a(t_n - t_0)$, logo reescrevendo $v_1, \ldots, v_n$ em termos de aceleração e do tempo, temos que

$$d_n - d_0 = \left(\frac{v_0 + v_0 + a(t_1 - t_0) + v_0 + a(t_2 - t_0) + \cdots + v_0 + a(t_n - t_0)}{n+1} \right) (t_n - t_0)$$

assim utilizando a propriedade distributiva dos números podemos escrever a equação acima como

$$d_n - d_0 = \left(\frac{(n+1)v_0 + a(t_1 - t_0 + t_2 - t_0 + \cdots + t_n - t_0)}{n+1} \right) (t_n - t_0)$$

admitindo que os tempos são marcados em intervalos iguais, digamos que cada intervalo tenha tempo t, logo

$$d_n - d_0 = \left(\frac{(n+1)v_0 + a(t + 2t + \cdots + nt)}{n+1}\right)(nt)$$

somando todos os intervalos de tempo temos que

$$d_n - d_0 = \left(\frac{(n+1)v_0 + a\frac{(1+n)nt}{2}}{(n+1)}\right)(nt)$$

logo

$$d_n - d_0 = v_0(t_n - t_0) + \frac{a}{2}(t_n - t_0)^2.$$

Exemplo 7. *Uma bola foi solta de uma altura de 100 metros. Toda a trajetória da bola foi fotografada de forma automática de 1 em 1 segundo. Qual a altura dessa bola passados 4 segundos, considerando a gravidade igual a $10\frac{m}{s^2}$ e desprezível a resistência do ar ?*

Observe que há 4 dados por conta do aparelho, se a nossa tecnologia permitisse ter 20 dados, isto é, cada dado tivesse como intervalo de tempo $\frac{1}{5}$segundos o tempo total do movimento seria o mesmo. Quero evidenciar com isso que não é a quantidade de dados que vai influênciar na equação, mas sim se o intervalo de tempo entre cada dado e a aceleração são constantes.
Dessa forma, como a gravidade é dada em segundos quadrados usaremos para facilitar o tempo em segundos, logo: $d = 100 + 0.4 - \frac{10}{2}.4^2 = 100 - 80 = 20$ metros.

Exemplo 8. *Uma partícula se move com uma aceleração constante de tal modo que em 2, 4 e 5 segundos a partícula se encontrava a 4, 7 e 6 cm de um referencial. Determine a função que relacione o tempo com a distância que a partícula atinge desse referencial; Determine sua velocidade inicial e sua aceleração.*

Observemos primeiro que os pontos $(2,4),(4,7)$ e $(5,6)$ não são colineares, logo existe uma função quadrática que passa nessses pontos, dada da seguinte forma:

$$\begin{cases} a2^2 + b2 + c = 4 \\ a4^2 + b4 + c = 7 \\ a5^2 + b5 + c = 6 \end{cases}$$

resolvendo o sistema encontramos que $a = \frac{-5}{6}$, $b = \frac{13}{2}$ e que $c = \frac{-17}{3}$, logo a função procurada é $f(x) = \frac{-5}{6}x^2 + \frac{13}{2}x - \frac{17}{3}$. Comparando com a função do movimento que discutimos acima temos que velocidade inicial é $\frac{13}{2}$ cm por segundo, e a aceleração é $\frac{-10}{6}$ cm por segundo ao quadrado.

Capítulo 3

METODOLOGIA

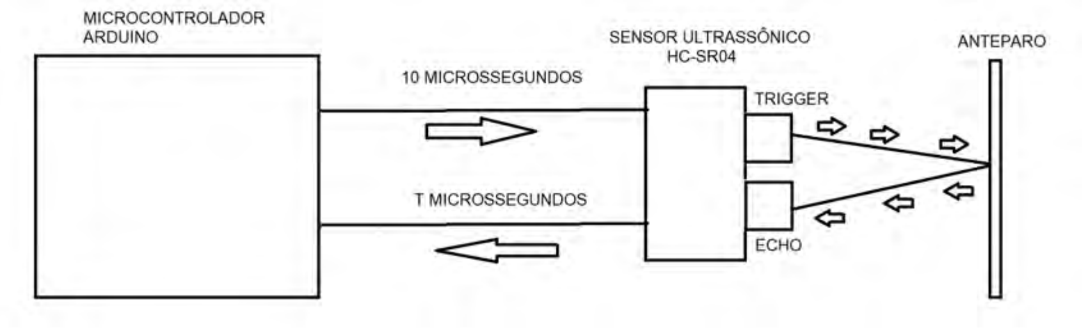
3.1 Modelos de trilho de ar

Tivemos como inspiração à construção do trilho de ar o modelo proposto por Silva et al. (2009). Neste modelo os autores propõem que os alunos façam marcações no trilho e anotem, com a ajuda de um cronômetro, o tempo que o carrinho passa de uma marcação para outra. Na busca de tornar esse processo mais dinâmico encontramos outras construções como a de Cavalcanti (2016) que usa o sensor Light Dependent Resistor (LDR) ligado na placa arduino com o objetivo de marcar o tempo em que o carrinho passa pelos sensores, dessa forma o sistema inicia a contagem quando o carrinho passa por um sensor e desliga a contagem quando passa pelo segundo sensor. Na construção do trilho de ar, Cavalcanti usou 4 sensores LDR fazendo 2 marcações de tempo diferentes, estes sensores foram posicionados a uma distância fixa um do outro.

Na nossa construção, usamos a placa arduino uno e o sensor ultrassônico HC-SR04 muito inspirado no modelo proposto por DWORAKOWSKI et al. (2016), onde se utilizam de um anteparo em movimento para que o sensor forneça a sua posição conforme o modelo apresentado na figura 3.1.

O sensor ultrassônico precisa de apenas 10 microssegundos para ativar o envio de 8 pulsos de 40 KHZ. Considerando a velocidade do som no ar de 340 m/s, isto é 0,034 cm/(microssegundo) e desprezível o tempo gasto para que o sistema ative o sensor podemos modelar a distância do anteparo (objeto) em função do tempo que o sensor leva para escutar a onda sonora enviada por ele, logo pela fórmula da velocidade média temos que $0{,}034=2d/t$, temos que considerar a distância dobrada, pois a onda sonora bate no anteparo e volta, percorrendo a distância que queremos medir duas vezes, conforme ilustra a figura 3.1, com isso de forma aproximada temos que $d=t/58{,}82$.

Figura 3.1: Modelo de funcionamento do Sensor Ultrassônico

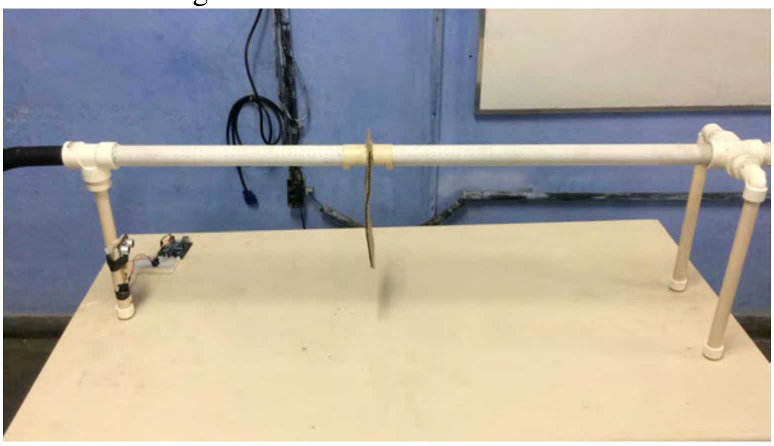


Fonte: o autor.

O sensor ultrassônico possui 4 pinos que devem ser conectados na placa arduino, o pino "trigger" é responsável por fazer o sensor enviar os 8 pulsos ultrassônicos e o sensor "echo" é responsável por capturar esses pulsos, os outros pinos são o positivo e o negativo responsáveis por ligar o sensor.

Nosso trilho de ar foi projetado para que o carrinho pudesse carregar o anteparo, e o sensor posicionado no centro para medir a distância do carrinho em movimento, o anteparo é necessário para dar estabilidade ao carrinho quando o ar comprimido é ligado, e também para que o sensor possa fazer a leitura do seu movimento, conforme se pode observar na figura 3.2.

Figura 3.2: Trilho de ar construído



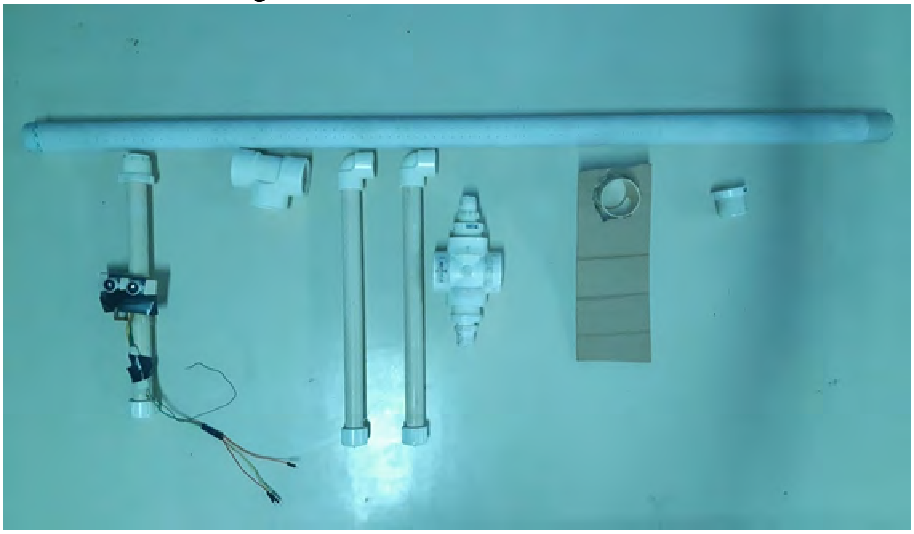
Fonte: o autor.

3.2 Construindo o trilho de ar de baixo custo

Para a construção deste trilho de ar são necessários 1 tubo de 1 polegada com comprimento de 100 cm, 1 cruz de 1 polegada, 1 'T' de 1 polegada, 2 joelhos de $\frac{1}{2}$ polegada, 4 redutores de

1 polegada para $\frac{1}{2}$ polegada, 3 pedaços de 30 cm de comprimento de $\frac{1}{2}$ polegada, 3 tampões de $\frac{1}{2}$ polegada, 2 união de $\frac{1}{2}$ polegada, um pedaço com aproximadamente 10 cm de tubo de 40mm e um pedaço de papelão, como mostra a figura 3.3.

Figura 3.3: Trilho de ar desmontado



Fonte: o autor.

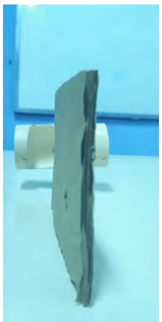
O pedaço de tubo de 100 cm de comprimento foi furado em 5 fileiras com uma distância de 1 cm entre elas com uma broca de 1mm de aço, foram feitas roscas nas duas pontas do tubo de 1 polegada como também nas duas pontas dos três tubos de $\frac{1}{2}$ polegada. Nos tubos de 30 cm de comprimento encaixar os 3 tampões de $\frac{1}{2}$ polegada, em seguida encaixar os dois joelhos em dois tubos e no terceiro colocar o redutor de 1 polegada para $\frac{1}{2}$ polegada.

Encaixar a cruzeta de 1 polegada no tubo que tem 100 cm de comprimento, nesta cruzeta adicionar os dois redutores de 1 polegada para $\frac{1}{2}$ polegada e as uniões em cada redutor, nessa união juntamos os pedaços de 30 cm que já havíamos colocado os joelhos de $\frac{1}{2}$ polegada . Agora, encaixar o terceiro pedaço de $\frac{1}{2}$ polegada no 'T' de 1 polegada e juntar no tubo de 1 polegada.

O carrinho foi confeccionado com um tubo de 40mm com aproximadamente 10 cm de comprimento, ele teve sua parte inferior cortada preservando suas pontas, e de forma aproximada foi colada no centro do carrinho um papelão que serviu tanto de anteparo para o sensor de ultrassom como para dar estabilidade ao carrinho, como mostra a figura 3.4

O sensor ultrassom foi colado na metade do tubo de 30 cm como sugere a figura 3.2, para o seu funcionamento foram usados uma placa arduino uno, uma mini placa photoborad com o objetivo de facilitar a ligação entre a placa do arduino e o sensor ultrassônico, e fios para conectar o sensor na placa e a placa no sensor, o funcionamento do sensor foi escrito com a sintaxe apresentada na figura 3.5.

Figura 3.4: Carrinho



Fonte: o autor.

Figura 3.5: Programação do sensor ultrassônico

```
float duracao;
float distancia;

void setup(){
  #define trigPin 8
  #define echoPin 7

  // put your setup code here, to run once:
  Serial.begin(9600);
  pinMode(trigPin, OUTPUT);
  pinMode(echoPin, INPUT);
  digitalWrite(trigPin, LOW);
}

void loop() {
  // Put your main code here, to run repeatedly:
  digitalWrite(trigPin, HIGH);
  delayMicroseconds(10);
  digitalWrite(trigPin, LOW);
   diracao = pulseIn(echoPin, HIGH);
   distancia = duracao/58.82;

   if (distancia < 14){
      Serial.print("PRONTO PARA COMEÇAR");
      delay(50);
   }

   if (distancia > 70 ){
      Serial.print("Y");
      delay(50);
   }
   else {
      Serial.println(distancia);
      delay(50);
   }
}
```

Fonte: o autor.

Utilizamos o aparelho de aspirador de água e pó Electrolux A10N1 de 1200W com a função sopro para jogarmos ar dentro do tubo de 1 polegada e dessa forma diminuir o atrito entre o carrinho e o trilho.

3.3 Testando o trilho

Fizemos um teste com objetivo de verificar sua funcionalidade, identificamos que quando o trilho está na horizontal o carrinho possui uma pequena aceleração no sentido de se afastar do sensor ultrassônico. Para verificarmos a precisão do trilho de ar recorremos ao método dos mínimos quadrados com o objetivo de identificar à reta ou a parábola que melhor representa a leitura dos dados e com isso estimar o erro que os dados fornecem a partir do modelo teórico.

O método dos mínimos quadrados apresentado por Silva (2014) nos diz que

$$X = (A^t.A)^{-1}.A^t.B$$

fornece os coeficientes que minimizam o erro, identificando assim a melhor curva sobre os dados coletados, onde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}$$

no caso da curva ser uma função afim e

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix}$$

no caso da curva ser uma parábola, em qualquer caso temos que

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Dessa forma então o erro sobre cada ponto obtido é dado por $B - AX$.

Com o objetivo de identificar a aceleração que o trilho possui na posição horizontal fizemos um experimento dando velocidade inicial ao carrinho no sentido de se aproximar do sensor, fizemos isso com uma velocidade inicial baixa, em pouco tempo vemos que o carrinho muda a sua direção, os dados coletados e os erros de cada ponto sobre a função obtida com o método dos mínimos quadrados estão ilustrados na tabela 3.1 . Nesta tabela também está contida a velocidade e a aceleração do trilho calculado de acordo com o estudo de movimento retilíneo uniformemente variado.

Tabela 3.1: Tabela identificando aceleração no trilho

Pontos obtiddos com o experimento teste									
X	Y	X	Y	X	Y	Erro do experimento com a função			Média de erro de cada Ponto
0	69.99	24	32.81	47	39.36	1.645	2.302	1.682	0.032
1	65.1	25	32.66	48	40.33	1.128	1.863	1.777	Dado F(x) = Ax^2 +Bx +C
2	66.92	26	32.4	49	40.84	2.745	1.598	1.348	Coeficiente A
3	65.59	27	32.45	50	42.08	3.405	1.087	1.585	0.032
4	62.92	28	32.76	51	42.59	2.661	0.379	1.028	Coeficiente B
5	61.22	29	32.15	52	44	2.823	0.655	1.308	2.149
6	58.69	30	32.2	53	44.61	2.091	0.334	0.724	Coeficiente C
7	55.71	31	31.74	54	46.14	0.846	0.587	0.996	68.345
8	53.74	32	31.54	55	47.59	0.548	0.644	1.125	Aceleração do trilho
9	51.97	33	32.05	56	48.38	0.385	0.055	0.530	0.064
10	49.06	34	31.94	57	49.61	0.981	0.149	0.311	Velocidade inicial do Carrinho
11	47.3	35	32.56	58	50.92	1.261	0.423	0.109	2.149
12	46.62	36	32.56	59	53.15	0.524	0.312	0.763	Posição Inicial
13	45	37	32.86	60	54.15	0.791	0.436	0.124	68.345
14	43.96	38	33.66	61	55.1	0.542	0.998	0.630	
15	41.84	39	34.12	62	56.73	1.437	1.155	0.767	
16	40.12	40	34.67	63	58.33	1.995	1.339	0.997	
17	38.56	41	35.92	64	61.1	2.457	2.159	0.122	
18	37.56	42	36.23	65	61.92	2.422	1.975	1.260	
19	36.18	43	37.25	66	63.28	2.831	2.438	1.921	
20	35.28	44	37.95	67	65.2	2.824	2.517	2.087	
21	34.53	45	39.07	68	66.87	2.731	2.953	2.566	
22	33.82	46	38.49	69	69.91	2.661	1.624	1.738	
23	33.2					2.565			

Fonte: o autor.

É bom esclarecer que o tempo entre os pontos da abscissa é de 50 microssegundos, conforme o programa que escrevemos no arduino. Essa aceleração que o trilho possui por ser tão baixa não prejudicou o experimento com os alunos, isto é, os gráficos obtidos nos experimentos ficaram muito próximos do modelo teórico.

3.4 Metodologia da pesquisa

A metodologia adotada neste trabalho será qualitativa quanto à abordagem e quanto aos procedimentos será uma pesquisa experimental, onde os estudantes do 9º ano do ensino fundamental da Escola Municipal Fernando de Azevedo localizada no município do Rio de Janeiro serão motivados a realizar cinco experimentos no trilho de ar, ao todo essa pesquisa será aplicada em 6 tempos de 50 minutos.

A escolha deste grupo de alunos se deve ao fato de o conteúdo função afim e quadrática ser ensinado nesta série escolar, como mais uma motivação para essa escolha o autor da pesquisa leciona para as duas turmas de 9º ano desta escola.

No primeiro tempo de aplicação dessa pesquisa os alunos fizeram um pré-teste (apêndice A) baseada na prova bimestral externa fornecida pela secretaria municipal de educação com o objetivo de identificar suas habilidades iniciais com relação à função afim e função quadrática.

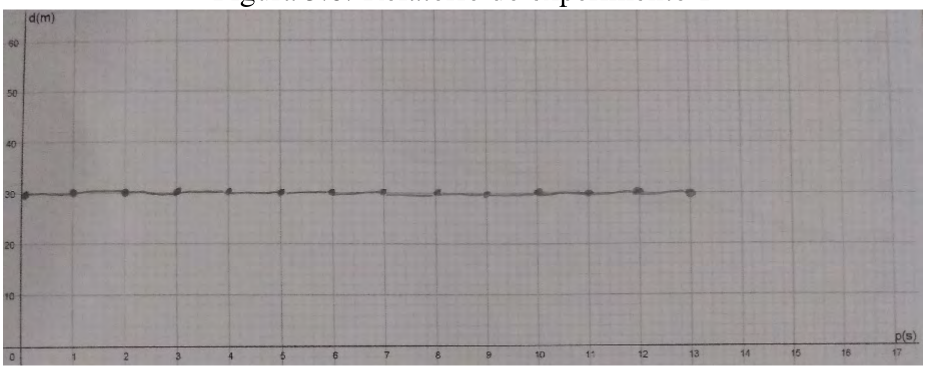
No segundo tempo, os alunos foram informados quanto aos procedimentos do experimento, a manipulação do carrinho no trilho e a construção do algoritmo para que o sensor ultrassônico fizesse a leitura dos dados, dessa forma os alunos foram instruídos em como separar os dados do experimento corretamente, em cada experimento os alunos recebiam uma ficha (apêndices D,E,F,G,H) para armazenarem os dados do experimento, o objetivo destas fichas era leva-los a conjecturar propriedades e ao mesmo tempo treinar a leitura e a construção de gráficos no plano cartesiano.

Em todos os gráficos produzidos nesta pesquisa junto com os alunos o eixo das abscissas se refere ao tempo e o eixo das ordenadas se refere à distância que o carrinho possui do sensor ultrassônico.

Ainda neste segundo tempo de aplicação da pesquisa foi realizado o primeiro experimento, denominado experimento 1, este experimento consiste em posicionar o carrinho em uma parte do trilho posicionado de forma horizontal com velocidade inicial igual a zero, uma ilustração para esse experimento é a imagem da figura 3.2.

O objetivo deste experimento foi apresentar a função constante e a leitura do seu gráfico. Utilizando a ficha do apêndice D os alunos puderam construir o gráfico da distância do carrinho em função do tempo, a figura 3.6 mostra o relatório preenchido por um aluno.

Figura 3.6: Relatório do experimento 1

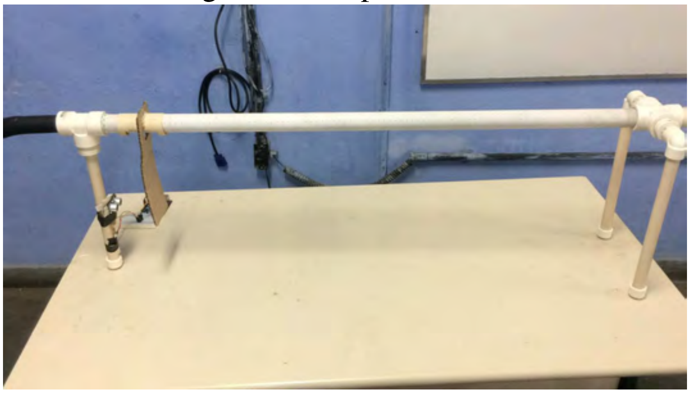


Fonte: o autor.

No terceiro tempo, os estudantes receberam instruções para realizarem dois experimentos sobre movimento retilíneo uniforme, denominados experimento 2 e experimento 3, o experimento 2 compõe-se com o trilho de ar na forma horizontal em relação ao solo e o carrinho parte com uma velocidade inicial diferente de zero com o sentido de afastamento do sensor. Observe a figura 3.7

Neste experimento o objetivo era de apresentar a função afim crescente, os alunos puderam observar que à medida que o tempo passa o carrinho aumenta a distância em relação

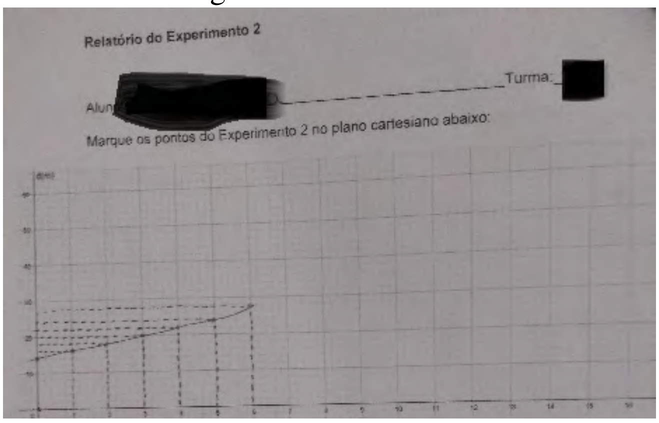
Figura 3.7: Experimento 2



Fonte: o autor.

ao sensor, quanto a esse experimento os alunos conjecturaram que se tratava de uma reta, a figura 3.8 representa uma ficha utilizada por um aluno.

Figura 3.8: Relatório 2



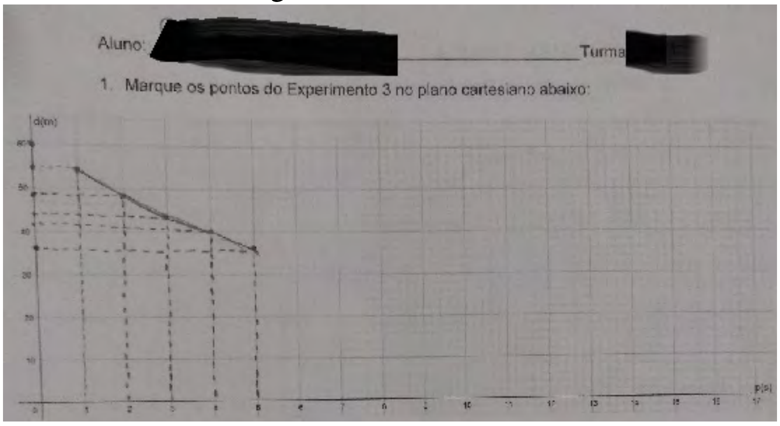
Fonte: o autor.

O experimento 3 é parecido com o experimento 2 porém o sentido do carrinho é de encontro com o sensor, observe a figura 3.2 O objetivo deste experimento era de apresentar a função afim decrescente, utilizando a ficha F os alunos puderam observar que a medida que o tempo passa a distância entre o carrinho e o sensor diminui, ainda conjecturar que o gráfico se tratava de uma reta, como mostra a figura 3.9.

No quarto tempo, novamente, o corpo discente foi instruído a realizar os experimentos, mas agora de movimento retilíneo uniforme variado (MRUV), denominados de experimento 4 e experimento 5. O experimento 4 consiste em posicionar o trilho de ar de forma concorrente em relação ao solo, de forma que a parte do trilho mais próxima do sensor ultrassônico fique abaixo da outra parte, observe a figura 3.10, neste experimento o carrinho parte com certa velocidade no sentido de se afastar do sensor.

Esse experimento possui como objetivo apresentar ao corpo discente o gráfico da função

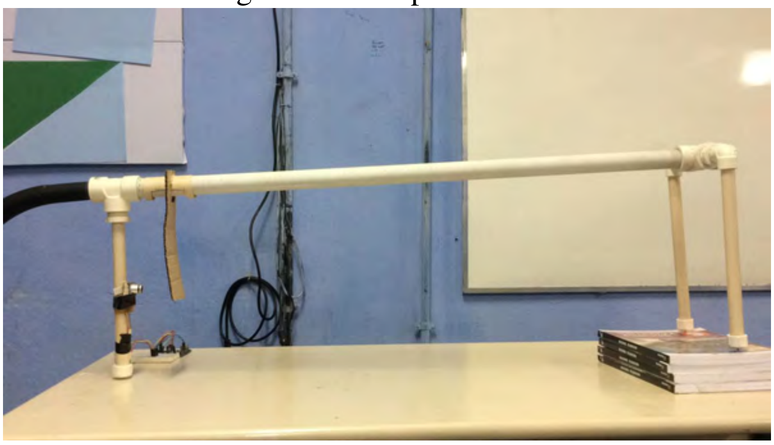
Figura 3.9: Relatório 3


Aluno: [redacted] Turma [redacted]

1. Marque os pontos do Experimento 3 no plano cartesiano abaixo:

Fonte: o autor.

Figura 3.10: Experimento 4



Fonte: o autor.

quadrática com a concavidade da parábola voltada para baixo, a figura 3.11 representa o apêndice G preenchida por um aluno.

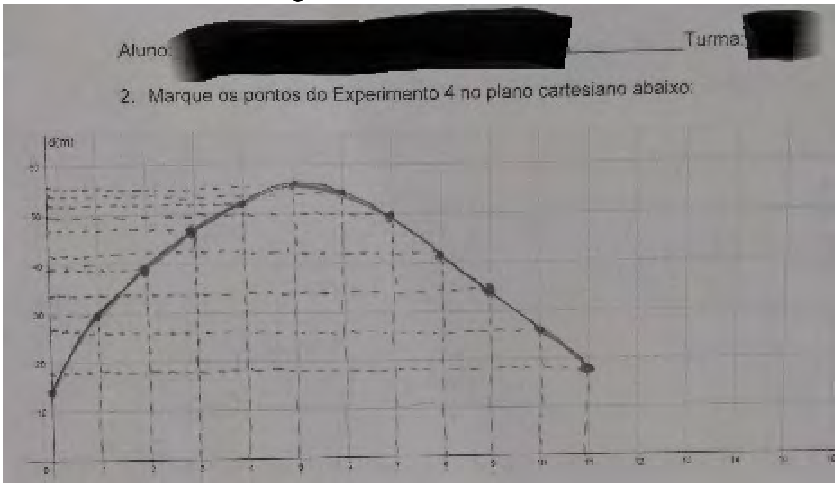
O experimento 5 possui as mesmas características do experimento 4, porem neste experimento a parte do trilho que possui o sensor fica acima da outra parte e o carrinho parte do ponto mais afastado do trilho em direção ao sensor. Observe a figura 3.12

O objetivo desse experimento é apresentar aos alunos o gráfico da parábola com a concavidade voltada para cima, eles puderam observar que o gráfico lembrava uma parábola e também conjecturar a velocidade do carrinho quando este atingia o ponto mínimo. Abaixo uma ficha preenchida por um aluno.

Os dados de todos os experimentos foram coletados através da função Monitor serial no programa do arduino, que deve ser aberto antes de se realizar o experimento, é neste lugar que o programa registra todos os dados coletados.

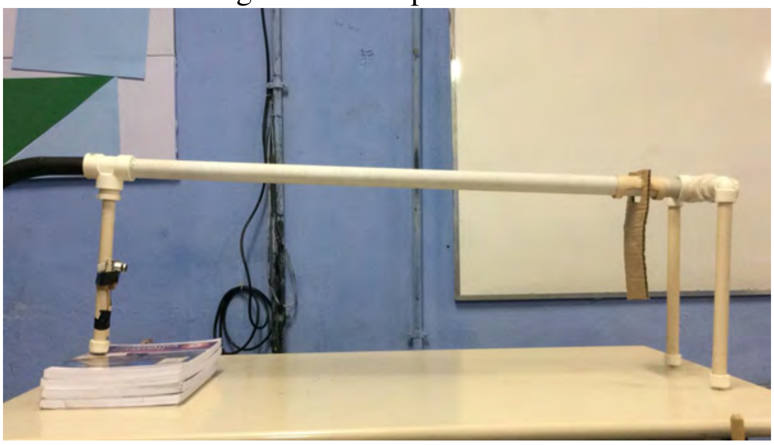
Depois de coletados os dados, através da função copiar e colar, os dados eram exportados

Figura 3.11: Relatório 4



Fonte: o autor.

Figura 3.12: Experimento 5



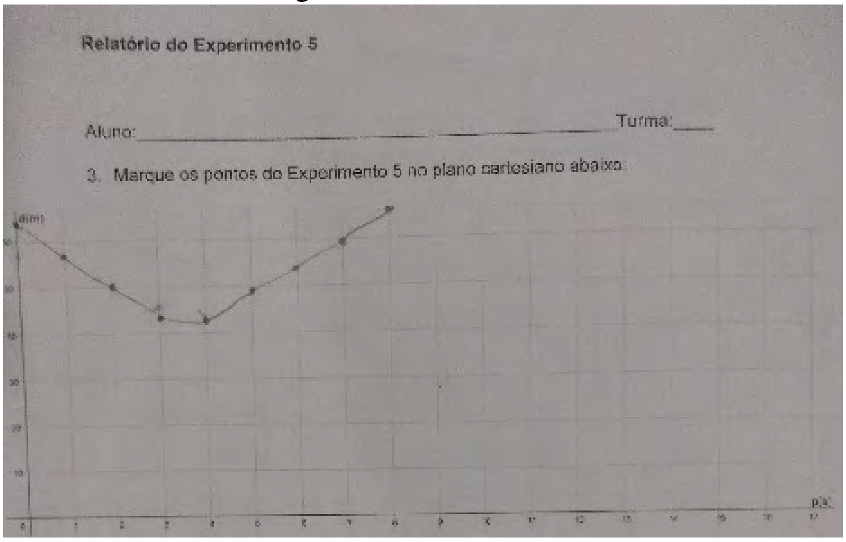
Fonte: o autor.

para a planilha do Geogebra onde a coluna A era a marcação do tempo e a coluna B era a marcação da distância do carrinho, ainda sobre a coluna A fizemos sempre que o zero fosse a primeira marcação e fomos aumentando a marcação referente ao tempo sempre em números naturais, isto é, criamos uma unidade de medida para o tempo onde podemos chamar de passos, cada passo se refere a 50 milissegundos. Observe a figura 3.15

Depois que os alunos preenchiam a ficha de experimento o professor projetava no quadro o gráfico do experimento elaborado pelo Geogebra, como mostra a figura 3.16.

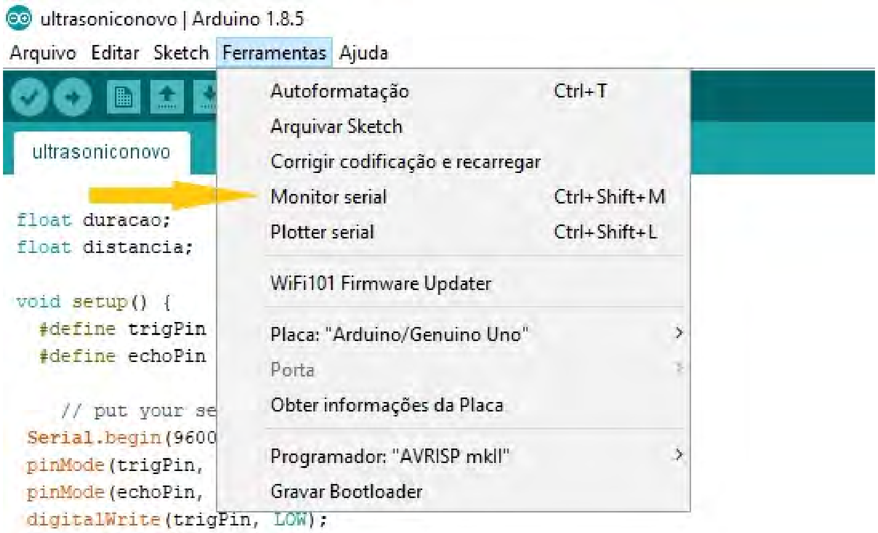
Sobre os experimentos referentes à função quadrática, foi percebido durante a aplicação a necessidade de descartar algumas marcações para que o gráfico dos alunos produzidos nas fichas de relatório pudessem leva-los a reconhecer que se tratavam de uma parábola. Na prática utilizávamos a primeira marcação e segunda marcação passava ser a quinta, a terceira marcação passava ser a nona, isto é, íamos mudando a marcação do tempo sempre

Figura 3.13: Relatório 5



Fonte: o autor.

Figura 3.14: Monitor Serial

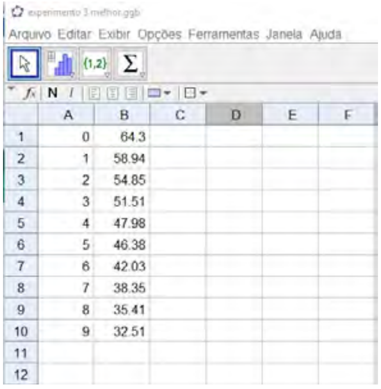


Fonte: o autor.

descartando de três em três marcações. Isso na prática pode melhorar a percepção dos alunos quanto ao gráfico produzido pelo experimento, a figura 3.17 mostra o gráfico construido por um aluno sobre o mesmo experimento onde de um lado não fizemos essa transformação do tempo e do outro lado onde fizemos.

No quinto tempo os alunos realizaram um teste motivacional (apêndice C), onde foram instruídos a marcarem apenas uma única reposta para cada pergunta. O objetivo desse questionário era de verificar a aceitação desse público com relação ao trilho de ar e quantificar a sua motivação intrínseca e extrínseca. Os experimentos foram denominados de Atividade

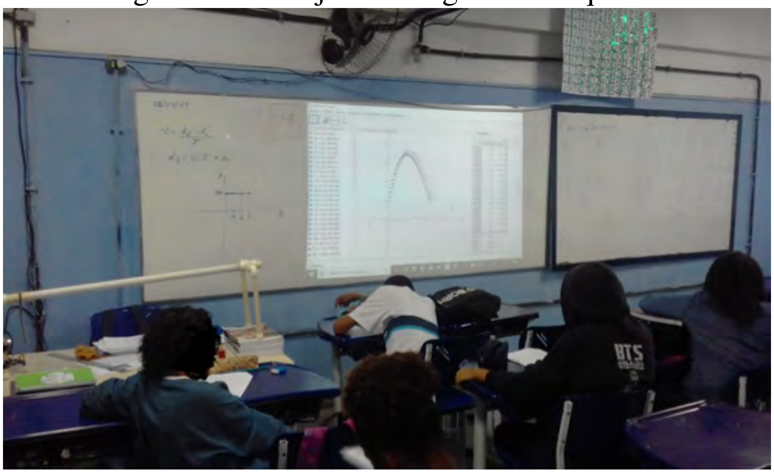
Figura 3.15: Planilha do Geogebra



	A	B	C	D	E	F
1	0	64.3				
2	1	58.94				
3	2	54.85				
4	3	51.51				
5	4	47.98				
6	5	46.38				
7	6	42.03				
8	7	38.35				
9	8	35.41				
10	9	32.51				
11						
12						

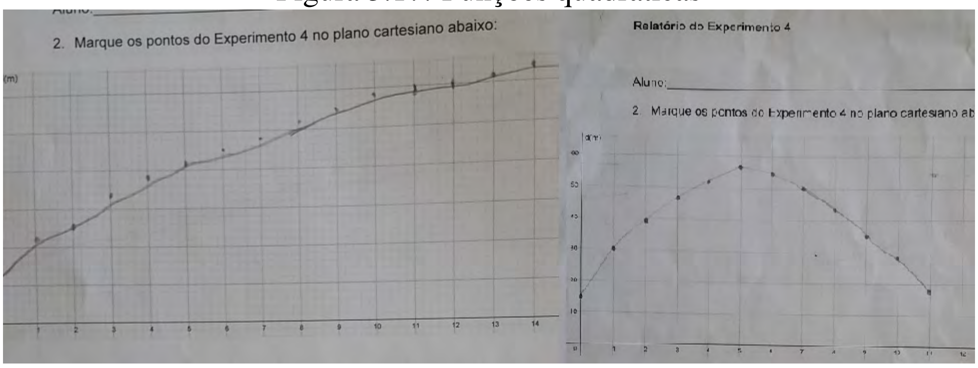
Fonte: o autor.

Figura 3.16: Projetando o gráfico no quadro



Fonte: o autor.

Figura 3.17: Funções quadráticas



Fonte: o autor.

Prática de Matemática (APM) e as questões foram adaptadas de WROBEL et al. (2018).

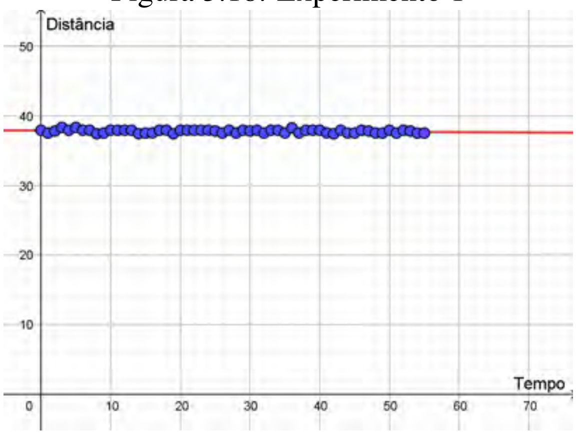
O questionário motivacional produzido por este autor possui 16 itens, apresentados em forma de escala do tipo Likert de 3 pontos. As questões ímpares procuram avaliar a motivação intrínseca e as questões pares à motivação extrínseca, onde a alternativa <concordo>

vale 3 pontos, <não concordo nem discordo> vale 2 pontos e <discordo> vale 1 ponto, portanto dessa forma os valores máximos e mínimos para cada questionário é de 48 e 16 pontos respectivamente.

Por fim no sexto tempo os alunos realizaram um pós-teste (apêndice B) similar ao pré-teste com o objetivo de verificar qualitativamente o impacto dos experimentos sobre a aprendizagem desses estudantes.

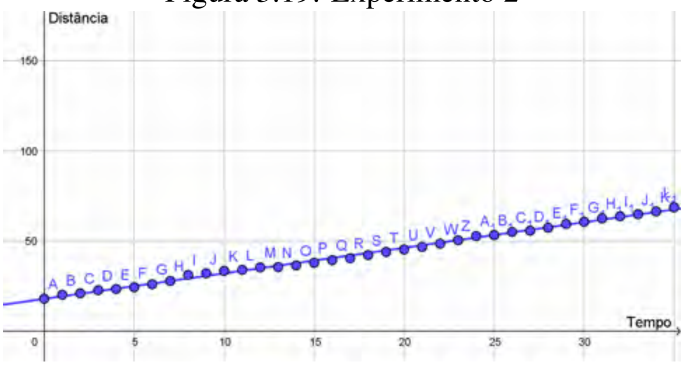
A seguir apresentarei os gráficos obtidos como teste sobre cada experimento estipulado na metodologia bem como a melhor função que traduz os pontos obtidos via o método dos mínimos quadrados.

Figura 3.18: Experimento 1



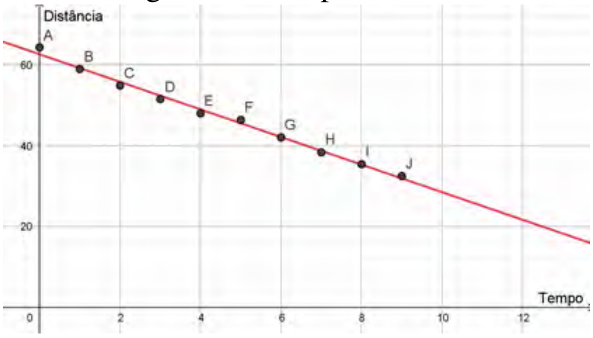
Fonte: o autor.

Figura 3.19: Experimento 2



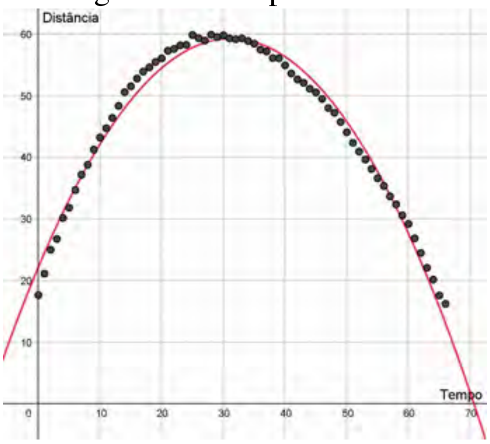
Fonte: o autor.

Figura 3.20: Experimento 3



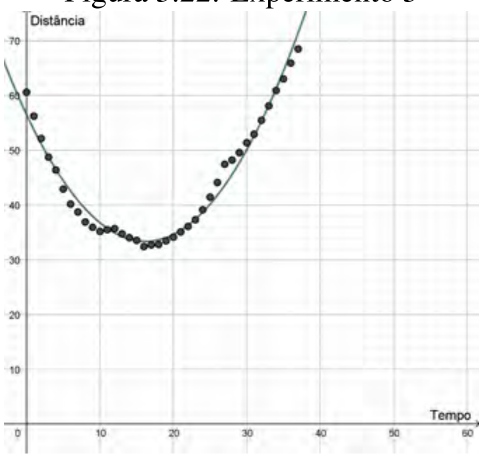
Fonte: o autor.

Figura 3.21: Experimento 4



Fonte: o autor.

Figura 3.22: Experimento 5



Fonte: o autor.

Capítulo 4

RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Resultados preliminares

4.1.1 Pré-teste

Cada questão foi analisada sob a luz de quatro classificações para a correção, (Certo) quando o aluno acertou a questão inteira, (Parcial) quando o aluno acertou algum item da questão ou quando errou o calculo mostrando que aprendeu a teoria do conteúdo estudado, (Errado) quando o aluno tentou fazer a questão não aplicando a teoria de forma correta, e (Branco) quando o aluno deixou a questão em branco. Ao todo participaram do pré-teste 46 alunos, a tabela abaixo indica as porcentagens de acerto, acerto parcial, erro e de questões deixadas em branco.

Tabela 4.1: Pré-teste

	Acerto	Parcial	Errado	Branco
Questão 1	6	50	22	22
Questão 2	4	37	28	31
Questão 3	0	13	28	59
Questão 4	0	7	37	56
Questão 5	2	22	28	48
Questão 6	2	17	22	59
Questão 7	0	32	9	59
Questão 8	0	2	28	70
Questão 9	0	0	28	72
Questão 10	0	0	7	93

Fonte: o autor.

4.1.2 Teste Motivacional

Para analisar o teste foi usado o programa IBM SPSS statistics para calcular o coeficiente alpha de Cronbach, em geral, diz-se que quando esse valor é maior que 0,7 e menor que 0,9 a amostra possui uma consistência interna aceitável (ALMEIDA; SANTOS; COSTA, 2010). Trinta e oito estudantes responderam o questionário, e a probabilidade de erro foi mantida em 5%.

A motivação intrínseca apresentou um Alfa de Cronbach igual a 0,775, e como a retirada de algum item representaria uma diminuição nesse valor concluímos não excluir nenhum item, como sugere a tabela 4.2.

Tabela 4.2: Motivação intrínseca

Motivação intrínseca	Média de escala se o item for excluído	Variância de escala se o item for excluído	Correlação de item total corrigida	Correlação múltipla ao quadrado	Alfa de Cronbach se o item for excluído
Eu realizei a APM porque é importante para mim	17.816	10.965	0.461	0.349	0.760
As APM me ajudam a entender a matemática	17.921	9.156	0.611	0.545	0.726
Eu fiz a APM porque gosto de adquirir novos conhecimentos	17.974	10.351	0.378	0.349	0.767
Eu me esforçaria bastante em produzir experimentos em matemática mesmo que não valesse ponto	18.184	9.614	0.426	0.248	0.762
Eu gostei de realizar experimentos no trilho de ar	17.974	9.270	0.572	0.507	0.734
Eu realizei a APM com o objetivo de entender uma aplicação da matemática e sua importância	17.947	9.727	0.592	0.410	0.734
Eu só realizei a APM porque gosto de aprender matemática com experimentos práticos	18.105	9.826	0.402	0.261	0.766
Eu fico interessado quando o professor relaciona um exemplo do cotidiano com a teoria	18.132	9.901	0.448	0.311	0.756

Fonte: o autor.

O coeficiente Alfa de Crombach na escala de motivação extrínseca foi de 0,776, também não há sugestão de retirada de nenhum item, como apresenta a tabela 4.3 .

Tabela 4.3: Motivação extrínseca

Motivação Extrínseca	Média de escala se o item for excluído	Variância de escala se o item for excluído	Correlação de item total corrigida	Correlação múltipla ao quadrado	Alfa de Cronbach se o item for excluído
Eu só fiz a APM porque o professor disse que vale nota	10.658	10.123	0.378	0.351	0.776
Eu só fiz a APM porque quero tirar notas altas	10.211	9.198	0.586	0.444	0.729
Eu fiz a APM porque o professor acha importante	10.316	9.952	0.461	0.345	0.756
Eu fiz a APM porque meus pais prometem me dar presentes se as minhas notas forem boas	11.000	10.486	0.487	0.408	0.751
Eu fiz por obrigação	10.947	9.835	0.565	0.434	0.735
Eu só fiz a APM porque meus amigos fizeram	11.184	10.965	0.503	0.500	0.753
Eu estudo somente o que o professor fala que vai cair na prova	10.368	9.428	0.568	0.373	0.733

Fonte: o autor.

O resultado do teste quando se trata de motivação intrínseca mostrou que o produto educacional, trilho de ar, é um fator importante para a melhora da motivação dos estudantes com o ensino, a tabela 4.4 mostra a média das respostas, o erro do desvio e a moda.

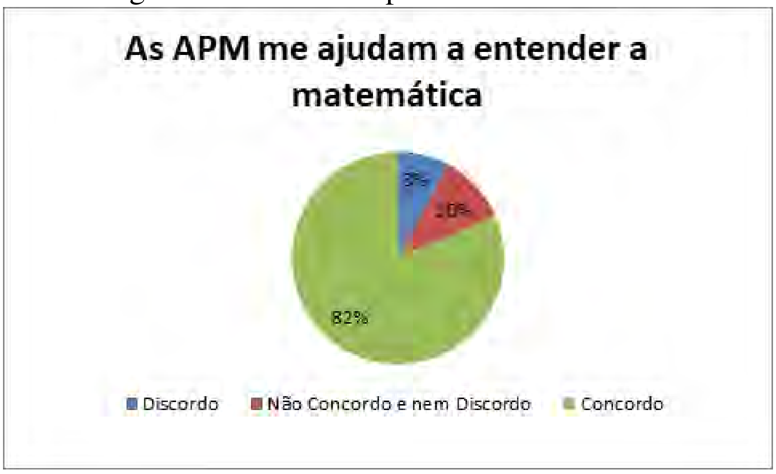
Tabela 4.4: Média, erro e moda da intrínseca

Motivação Intrínseca	Média	Erro Desvio	Moda
Eu realizei a APM porque é importante para mim	2.763	0.4309	Concordo
As APM me ajudam a entender a matemática	2.658	0.7453	Concordo
Eu fiz a APM porque gosto de adquirir novos conhecimentos	2.605	0.6794	Concordo
Eu me esforçaria bastante em produzir experimentos em matemática mesmo que não valesse ponto	2.395	0.8233	Concordo
Eu gostei de realizar experimentos no trilho de ar	2.605	0.7548	Concordo
Eu realizei a APM com o objetivo de entender uma aplicação da matemática e sua importância	2.632	0.6334	Concordo
Eu só realizei a APM porque gosto de aprender matemática com experimentos práticos	2.474	0.7965	Concordo
Eu fico interessado quando o professor relaciona um exemplo do cotidiano com a teoria	2.447	0.7240	Concordo

Fonte: o autor.

Destaca-se dentre esses itens o quanto o trilho de ar influência na motivação dos alunos, o trilho de ar entra no contexto da atividade prática de matemática (APM). A maioria dos alunos concordam que as APM ajudam a entender a matemática e também que gostaram de realizar experimentos no trilho de ar, o gráfico da figura 4.1 nos diz o quanto é essa maioria.

Figura 4.1: Atividade prática de matemática

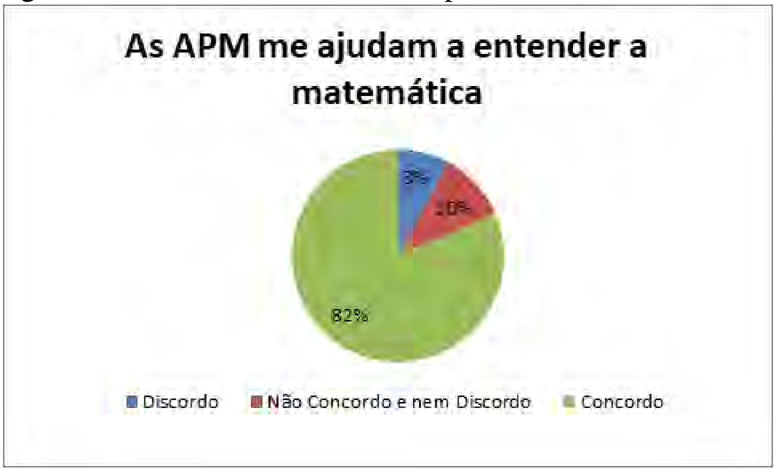


Fonte: o autor.

A figura 4.2 apresenta a porcentagem com relação à satisfação em realizar experimentos com o trilho de ar.

Quanto à motivação extrínseca podemos destacar positivamente o interesse que os alunos têm em obter notas altas conforme vemos na tabela 4.5 onde é apresentado à média, o erro do desvio e a moda.

Figura 4.2: Gosto em realizar os experimentos no trilho de ar



Fonte: o autor.

Tabela 4.5: Média, erro e moda da motivação extrínseca

Motivação Extrínseca	Média	Erro Desvio	Moda
Eu só fiz a APM porque o professor disse que vale nota	1.789	0.9052	Discordo
Eu só fiz a APM porque quero tirar notas altas	2.237	0.8833	Concordo
Eu fiz a APM porque o professor acha importante	2.132	0.8438	Concordo
Eu fiz a APM porque meus pais prometem me dar presentes se as minhas notas forem boas	1.447	0.6857	Discordo
Eu fiz por obrigação	1.5	0.7623	Discordo
Eu só fiz a APM porque meus amigos fizeram	1.263	0.5543	Discordo
Eu estudo somente o que o professor fala que vai cair na prova	2.079	0.8505	Não Concordo e nem discordo

Fonte: o autor.

4.1.3 Pós-teste

O pós-teste foi realizado por 51 alunos, a tabela 4.6 indica as porcentagens de acerto, acerto parcial, erro e de questões deixadas em branco.

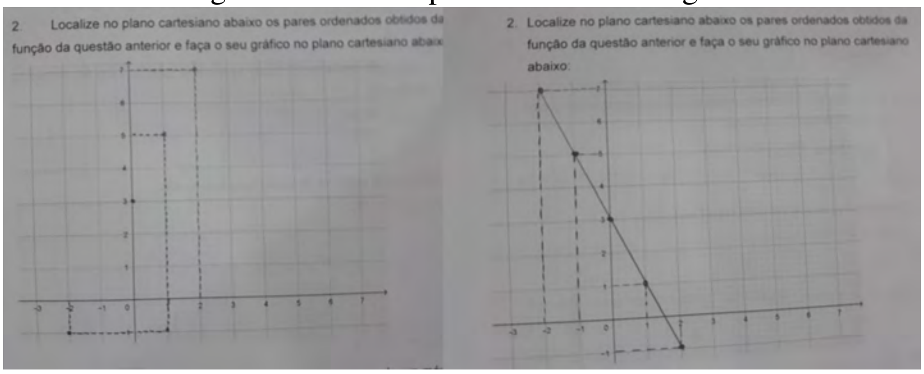
Analisando o pré-teste e o pós-teste podemos ver que houve uma melhora quanto à absorção dos conteúdos que tratam as questões 1, 2, 4, 5, 6 e 8. Exemplificando essa melhora, na figura a seguir está a resolução do pré-teste a esquerda e do pós-teste a direita feita por um aluno que obteve acerto parcial no pré-teste e acerto integral no pós-teste.

Tabela 4.6: Pós-Teste

	Acerto	Parcial	Errado	Branco
Questão 1	12	41	37	10
Questão 2	12	43	20	25
Questão 3	0	8	59	33
Questão 4	2	2	45	51
Questão 5	18	29	22	31
Questão 6	10	22	31	37
Questão 7	0	26	31	43
Questão 8	2	6	37	55
Questão 9	0	6	29	65
Questão 10	0	0	22	78

Fonte: o autor.

Figura 4.3: Acerto parcial / Acerto integral



Fonte: o autor.

4.2 Considerações Finais

A tecnologia está enraizada em nossa cultura, cada vez mais aparecem alunos com aparatos tecnológicos na sala de aula. Utilizar desses meios tecnológicos para o ensino é uma forma que o professor tem para atrair a atenção dos alunos e também uma forma de motivá-los aos estudos.

É importante para o ensino de forma geral que se desenvolva novos aparatos tecnológicos com fins educacionais e também técnicas em como utilizar essas ferramentas na sala com o objetivo de levar os estudantes a uma aprendizagem que os faça tomar sentido e refletir sobre o porquê estudar o conteúdo e em como utiliza-lo.

Nesta pesquisa tivemos como um objetivo específico a construção de um trilho de ar de baixo custo do qual pudéssemos utiliza-lo para ensinar função afim e função quadrática e isto foi alcançado, os resultados gráficos dos experimentos ficaram muito próximos do modelo teórico e também pela questão de o software arduino usado para fazer a programação do sensor ultrassônico ser gratuito e o material da construção do trilho feita em PVC, pois isto evidencia o baixo custo dessa feitura podendo facilmente ser implantado em um grande número de escolas.

Sobre este trabalho podemos concluir que o uso da tecnologia utilizada no trilho de ar tem um impacto forte quanto à motivação intrínseca dos estudantes em aprender, essa motivação fez com que os estudantes observassem mais as explicações e os experimentos resultando numa melhora na absorção do conteúdo. Contudo, mesmo alcançando os objetivos estipulados neste trabalho, muitos alunos não conseguiram transformar essa motivação em aprendizado do conteúdo.

A grande quantidade de questões deixadas em branco e feitas de maneira incorreta mostrou que esses alunos possuem dúvidas anteriores ao estudo de função afim e função quadrática necessitando de uma intervenção mais específica, e dessa forma mesmo o estudante ficando interessado e motivado na matéria não conseguiu melhorar seu resultado medido pelo pré-teste e pós-teste o que pode gerar desmotivação e insegurança.

Tendo em vista de que uma técnica de ensino pode não funcionar para grupos diferentes é necessário mais estudos em como utilizar o trilho de ar na sala de aula de forma que essa utilização gere no corpo discente uma aprendizagem efetiva.

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, D.; SANTOS, M. A. R. dos; COSTA, A. F. B. AplicaÇÃo do coeficiente alfa de cronbach nos resultados de um questionÁrio para avaliaÇÃo de desempenho da saÚde pÚblica. In: *XXX ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO Maturidade e desafios da Engenharia de Produção: competitividade das empresas, condições de trabalho, meio ambiente*. Sao Carlos, SP, Brasil: [s.n.], 2010.

ARISTOTELES. Metafisica. In: *Livro A - Cap I*. São Paulo: Editora Abril, 1979. Orig. Seculo IV a. c.

BOYER, C. B. *Historia da Matematica*. Sao Paulo, SP: Edgard Blucher, 1996.

BZUNECK, J. A. A motivação do aluno: aspectos introdutórios. In: *A motivação do aluno: contribuições da psicologia contemporânea*. 4rd. ed. Petropolis: Vozes, 2009. v. 3, p. 9–36.

CAMPOS, C. R. *O ensino da matematica e da fisica numa perspectiva integracionista*. Dissertação (Mestrado em educação Matemática) — PUC, Sao Paulo, 2000.

CASTILHO, R. C. *O estudo da funcao afim atraves de experimentos na cinematica: uma experiencia interdisciplinar*. Dissertação (Mestrado Nacional Profissional em Matemática) — UFRRJ, Seropedica, 2015.

CAVALCANTI, D. R. C. *Analise do movimento do movel usando o trilho de ar e a placa arduino como aquisicao de dados*. Dissertação (Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Fisica) — UFA, Alagoas, 2016.

DWORAKOWSKI, L. A. et al. Uso da plataforma arduino e do software plx-daq para construcao de graficos de movimento em tempo real. *Revista Brasileira de ensino de física*, v. 38, n. 3, 2016.

GIORDAN, M. O papel da experimentacao no ensino de ciencias. In: *II Encontro Nacional de Pesquisa em educacao em ciencias*. Sao paulo: [s.n.], 1999.

GUIMARAES, S. E. R. *Avaliação do estilo motivacional do professor: adaptação e validação de um instrumento*. Tese (Doutorado) — Programa de Pos-graduacao em Educacao, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

MARTINAZZO, C. A. et al. Arduino: Uma tecnologia no ensino de fisica. *Perspectiva*, Erechim, v. 38, n. 143, p. 21–30, 2014.

NASCIMENTO, C. A. R. Um pouco mais sobre galileu e as ciencias mistas. *Revista Brasileira de Historia da Matematica*, v. 11, n. 23, p. 15–26, 2011.

OLIVEIRA, D. P. A.; ROSA, M.; VIANA, M. da C. V. De oresme a direchlet: Um breve historico do desenvolvimento das funcoes. *Revista Brasileira de Historia da Matematica*, v. 14, n. 28, p. 47–61, 2014.

PIAGET, J. *Psicologia e Pedagogia*. Rio de Janeiro: Forense, 1972.

SILVA, F. *O metodo dos minimos quadrados: uma proposta ao ensino medio para o ajuste por parabolas*. Dissertação (Mestrado Nacional Profissional em Matematica) — UNIRIO, Rio de Janeiro, 2014.

SILVA, J. C. X. et al. Trilho de ar de pvc para o estudo dos movimentos retilineo e retilineo uniformemente variado. In: *XVIII Simposio Nacional de Ensino de Fisica*. [S.l.: s.n.], 2009.

TASCHOW, U. *Nicole Oresme und der frühling der moderne: die ursprünge unserer modernen quantitativ-metrischen weltaneignungsstrategien und neuzeitlichen bewusstseins- und wissenschaftskultur*. Halle, Deustschland: Avox Medien-Verlag, 2003.

WROBEL, J. S. et al. Motivacao e perfomances matematicas digitais: analise da escala de motivacao em aprender. *Educacao Matematica em Revista*, v. 58, n. 23, p. 103–117, 2018.

Apêndice A

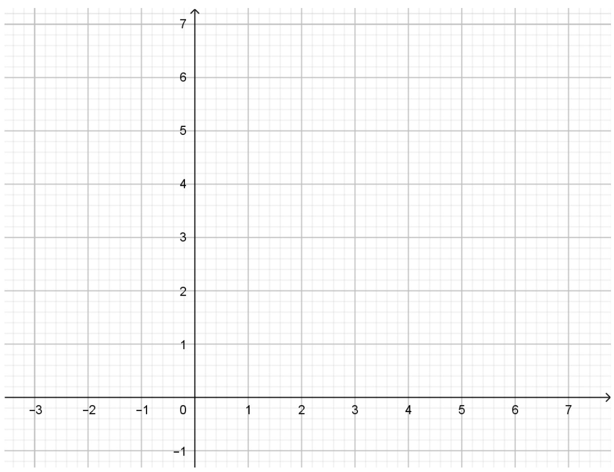
Pré-Teste

Aluno: ______________________________________ Turma:_______

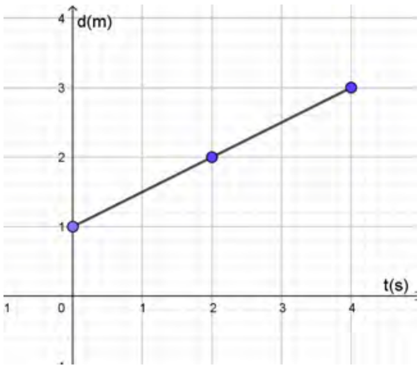
1. Complete a tabela:

x	y = 2x +3	y	(x,y)
-2	y = 2(-2) +3	-1	(-2,-1)
-1			
0			
1			
2			

2. Localize no plano cartesiano abaixo os pares ordenados obtidos da função da questão anterior e faça o seu gráfico no plano cartesiano abaixo:



3. O gráfico abaixo indica a posição em função do tempo de um móvel em trajetória retilínea:



a) Qual a posição do móvel Quando tempo é igual a 2 segundos?

b) Qual a velocidade média desse móvel quando o tempo é igual a 4 segundos?

c) A velocidade média desse móvel se mantém igual ou varia em função do tempo? (justifique!)

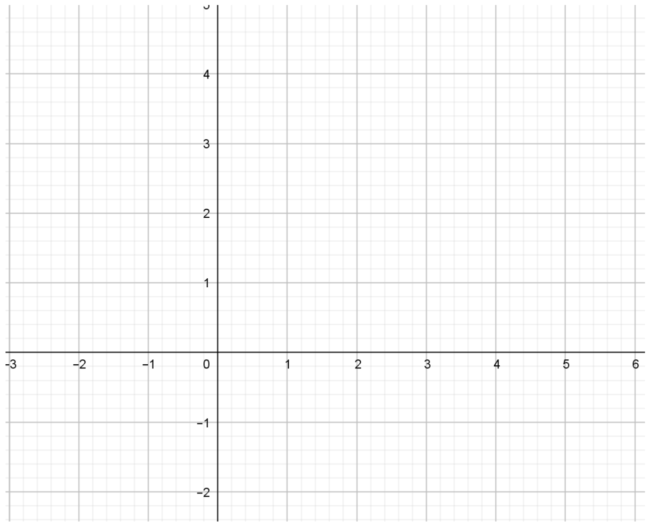
4. Determine o valor dos zeros de cada função afim:
   a) $f(x) = 2x - 30$

   b) f$(x) = -3x + 2$

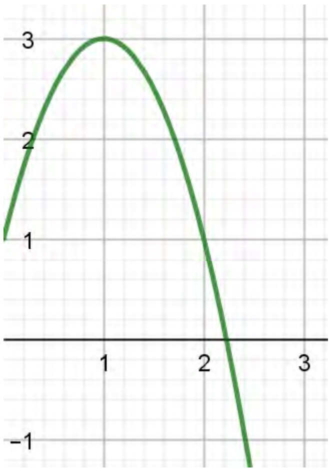
5. Complete a tabela:

x	$y = 2x^2 - 3x - 1$	y	(x,y)
-1	y = 2(-1)(-1) - 3(-1) -1	4	(-1,4)
0			
1			
2			

6. Localize no plano cartesiano abaixo os pares ordenados obtidos da função da questão anterior e faça o seu gráfico no plano cartesiano abaixo:



7. O gráfico abaixo indica a posição em função do tempo de um móvel a) Qual a maior



distância que o móvel alcança?

b) Qual a velocidade do móvel quando o tempo é igual a 1 segundos ?

c) A velocidade média desse móvel se mantém igual ou varia em função do tempo? (justifique!)

8. Determine o valor dos zeros de cada função quadrática abaixo:
a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = x^2 + 4x - 5$

9. Determine o ponto de máximo ou de mínimo da função quadrática abaixo:
   a) $f(x) = 2x^2 - 8x + 12$

   b) $f(x) = -5x^2 + 220x - 10$

10. Uma pedra foi lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 10 m/s a 1 m de distância do solo, sabendo que a aceleração da gravidade é igual a 10 m/s*s calcule a maior distância que a pedra atingiu do solo e também o tempo que a pedra levou para atingir essa altura máxima. (Nesta situação a função $f(x) = -5x^2 + 10x + 1$ fornece a distância da pedra em relação ao tempo x)

Apêndice B

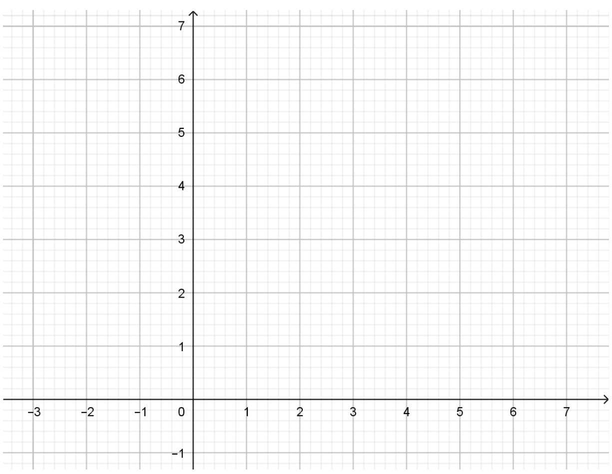
Pós-Teste

Aluno: ______________________________________ Turma:_______

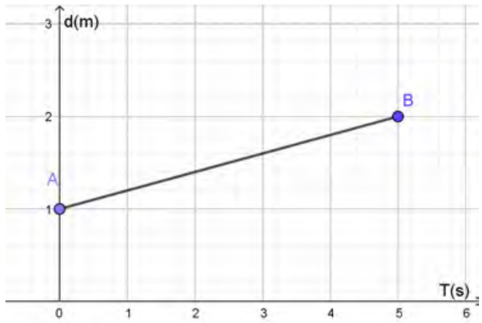
1. Complete a tabela:

x	y = -2x +3	y	(x,y)
-2	y = -2(-2) +3	7	(-2,7)
-1			
0			
1			
2			

2. Localize no plano cartesiano abaixo os pares ordenados obtidos da função da questão anterior e faça o seu gráfico no plano cartesiano abaixo:



3. O gráfico abaixo indica a posição em função do tempo de um móvel em trajetória retilínea:



a) Qual a posição do móvel Quando tempo é igual a 2 segundos?

b) Qual a velocidade média desse móvel quando o tempo é igual a 4 segundos?

c) A velocidade média desse móvel se mantém igual ou varia em função do tempo? (justifique!)

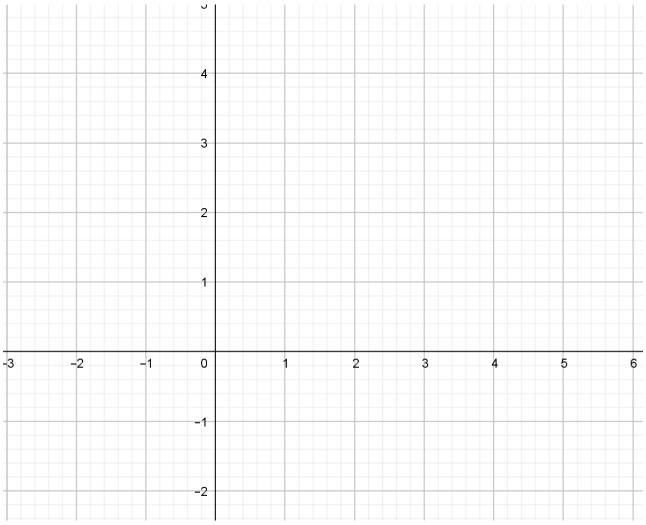
4. Determine o valor dos zeros de cada função afim:
a) $f(x) = 3x - 27$

b) f$(x) = -5x + 2$

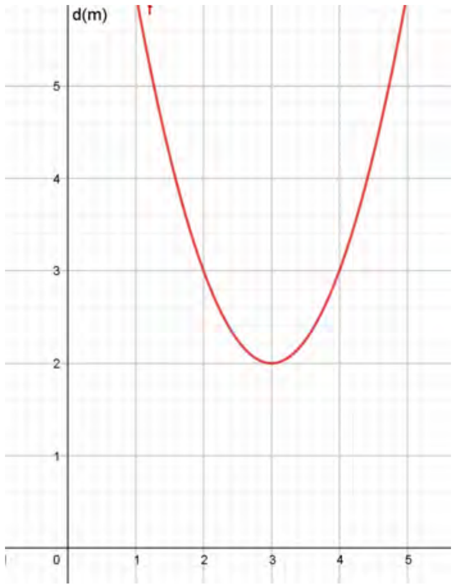
5. Complete a tabela:

x	$y = x^2 - x - 2$	y	(x,y)
-1	$y = (-1)(-1) - (-1) - 2$	0	(-1,0)
0			
1			
2			

6. Localize no plano cartesiano abaixo os pares ordenados obtidos da função da questão anterior e faça o seu gráfico no plano cartesiano abaixo:



7. O gráfico abaixo indica a posição em função do tempo de um móvel a) Qual a maior



distância que o móvel alcança?

b) Qual a velocidade do móvel quando o tempo é igual a 1 segundos ?

c) A velocidade média desse móvel se mantém igual ou varia em função do tempo? (justifique!)

8. Determine o valor dos zeros de cada função quadrática abaixo:
   a) $f(x) = x^2 - 3x - 10$

   b) $f(x) = x^2 + x - 2$

9. Determine o ponto de máximo ou de mínimo da função quadrática abaixo:
   a) $f(x) = 2x^2 - 8x + 20$

   b) $f(x) = -5x^2 + 220x - 15$

10. Uma pedra foi lançada verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 15 m/s a 1 m de distância do solo, sabendo que a aceleração da gravidade é igual a 10 m/s*s calcule a maior distância que a pedra atingiu do solo e também o tempo que a pedra levou para atingir essa altura máxima. (Nesta situação a função $f(x) = -5x^2 + 15x + 1$ fornece a distância da pedra em relação ao tempo x)

Apêndice C

Teste Motivacional

Perguntas	Concordo	Não Concordo e nem Discordo	Discordo
Eu realizei a APM porque é importante para mim?			
Eu só fiz a APM porque o professor disse que vale nota?			
As APM me ajudaram a entender a matemática?			
Eu só fiz a APM porque quero tirar notas altas?			
Eu fiz a APM porque gosto de adquirir novos conhecimentos?			
Eu fiz a APM porque o professor acha importante?			
Eu me esforçaria bastante em produzir experimentos em matemática mesmo que não valesse ponto?			
Eu fiz a APM porque meus pais prometem me dar presentes se as minhas notas forem boas?			

Eu gostei de realizar experimentos no trilho de ar?			
Eu fiz por obrigação?			
Eu realizei a APM com o objetivo de entender uma aplicação da matemática e sua importância?			
Eu só fiz a APM porque meus amigos fizeram?			
Eu estudo somente o que o professor fala que vai cair na prova?			

Apêndice D

Experimento 1

Aluno: _____________________________________ Turma:_______

Marque os pontos do Experimento 1 no plano cartesiano abaixo:

i) Com base no gráfico obtido responda, à medida que o tempo passa o que acontece com o carrinho?

ii) O gráfico desse experimento te lembra de alguma função estudada? Justifique sua resposta!

iii) A velocidade do Carrinho muda ao longo do tempo?

Apêndice E

Experimento 2

Aluno: ______________________________________ Turma:_______

Marque os pontos do Experimento 2 no plano cartesiano abaixo:

i) Com base no gráfico obtido responda, à medida que o tempo passa o que acontece com o carrinho?

ii) O gráfico desse experimento te lembra de alguma função estudada? Justifique sua resposta!

iii) A velocidade do Carrinho muda ao longo do tempo?

Apêndice F

Experimento 3

Aluno: ______________________________________ Turma:_______

Marque os pontos do Experimento 3 no plano cartesiano abaixo:

i) Com base no gráfico obtido responda, à medida que o tempo passa o que acontece com o carrinho?

ii) O gráfico desse experimento te lembra de alguma função estudada? Justifique sua resposta!

iii) A velocidade do Carrinho muda ao longo do tempo?

Apêndice G

Experimento 4

Aluno: ______________________________________ Turma:_______

Marque os pontos do Experimento 4 no plano cartesiano abaixo:

i) Com base no gráfico obtido responda, à medida que o tempo passa o que acontece com o carrinho?

ii) O gráfico desse experimento te lembra de alguma função estudada? Justifique sua resposta!

iii) A velocidade do Carrinho muda ao longo do tempo?

Apêndice H

Experimento 5

Aluno: ______________________________________ Turma:_______

Marque os pontos do Experimento 5 no plano cartesiano abaixo:

i) Com base no gráfico obtido responda, à medida que o tempo passa o que acontece com o carrinho?

ii) O gráfico desse experimento te lembra de alguma função estudada? Justifique sua resposta!

iii) A velocidade do Carrinho muda ao longo do tempo?