

**UFRRJ**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**  
**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE**  
**NACIONAL – PROFMAT**

**DISSERTAÇÃO**

**Coloração em Grafos: Uma experiência no Ensino**  
**Fundamental.**

**Fábio da Rocha Costa**

**2017**



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL – PROFMAT**

**COLORAÇÃO EM GRAFOS: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO  
FUNDAMENTAL.**

**Fábio da Rocha Costa**

*Sob a Orientação do Professor*

**Montauban Moreira de Oliveira Júnior**

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ

Maio de 2017

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C837c Costa, Fábio da Rocha, 1983-  
Coloração em Grafos: uma experiência no Ensino  
Fundamental / Fábio da Rocha Costa. - 2017.  
129 f.: il.

Orientador: Montauban Moreira de Oliveira Júnior.  
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural  
do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional  
PROFMAT, 2017.

1. Coloração em Grafos. 2. Ensino Fundamental. 3.  
Matemática. I. Oliveira Júnior, Montauban Moreira de,  
1981-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio  
de Janeiro. Programa de Pós-Graduação em Mestrado  
Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT  
III. Título.

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM  
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

**Fábio da Rocha Costa**

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre**, no Curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 29/05/2017

---

Montauban Moreira de Oliveira Júnior. Dr. UFRRJ  
(Orientador)

---

André Luiz Martins Pereira. Dr. UFRRJ

---

José Roberto Linhares de Mattos. Dr. UFF

Dedico à mulher mais incrível que passou na minha vida, que foi a fonte de inspiração e uma mãe muito atenciosa. Sinto muito a sua falta: Márcia Maria da Rocha Costa.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente gostaria de iniciar agradecendo a duas pessoas fundamentais para que esse trabalho fosse realizado: minha esposa Lorena Leal e meu pai José Fernando. Sem sobra de dúvidas foram as pessoas que mais estiveram ao meu lado e me incentivaram a todo tempo, mesmo quando passei por momentos difíceis ao longo desses dois anos de estudo. Acreditem, se cheguei até o fim, com certeza a culpa é de vocês dois, por isso, muito obrigado por tudo!

Gostaria também de agradecer aos meus companheiros desta jornada, pessoas iluminadas, e com toda certeza levarei cada um em meu coração. Agradeço aos professores do PROFMAT-UFRRJ, pela dedicação e empenho.

Agradeço ao meu orientador, professor Dr. Montauban Moreira de Oliveira Júnior pela atenção, dedicação e empenho para que esta dissertação se transformasse em um trabalho agradável e prazeroso.

Lembro também das duas instituições de Ensino Básico que me deram todo o suporte e estrutura para que, durante esta caminhada, meus passos fossem dados com todo apoio e ajuda possível; refiro-me ao Educandário Monteiro Lobato, onde pude desenvolver esta pesquisa, e ao Colégio e Curso Intelecto, pelo espaço cedido para que eu, Wellington e Alexandre pudéssemos estudar e nos preparar para cada avaliação.

Agradeço especialmente aos companheiros: Alexandre, Wellington e Sérgio, pelos momentos agradáveis e indispensáveis que pudemos compartilhar durante esse tempo de estudo.

Agradeço à minha irmã por ter me ajudado com a correção do texto.

Agradeço ao meu amigo Jones de Souza por traduzir e colaborar com a correção do texto.

Agradeço ao meu grande amigo Emanuel Lessa que filmou e fotografou todas as aulas, e por fim editou todo o material de forma impecável.

À CAPES, pela bolsa de mestrado, fundamental para que eu pudesse ter mais tempo livre para os estudos.

E por último agradeço à minha Mãe que faleceu em 2007 e infelizmente não teve a oportunidade de ver seu filho ser graduado e recebendo o título de mestre, mas tenho certeza de que, onde ela estiver, vai estar muito orgulhosa e feliz pela minha conquista.

## RESUMO

Costa, Fábio da Rocha. **Coloração em Grafos: Uma experiência no Ensino Fundamental**. 2017. 129 páginas. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2017.

O principal objetivo deste trabalho é analisar, através de um estudo de caso, uma experiência com problemas de Coloração de Vértices em Grafos envolvendo 40 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental do Educandário Monteiro Lobato, em Campo Grande/RJ, da rede particular de ensino. Para realizar a experiência foram utilizadas 8 aulas de Matemática (Teoria dos Grafos – Coloração) de 50 minutos. Nas primeiras aulas foram aplicados um questionário motivacional inicial (adaptado do Questionário adaptado de Gontijo) e um teste envolvendo questões de raciocínio lógico (Teste 1), que os alunos conseguem resolver com base no currículo regular. Tais questões são resolvidas através de técnicas de Coloração em Grafos, mas os alunos obviamente ainda não as conhecem nesta etapa. Após os testes, algumas aulas foram dedicadas ao ensino de conceitos básicos de Grafos e técnicas simples de resolução de problemas por Coloração. Nas aulas finais foram aplicados o Teste 2 (nos moldes do Teste 1), onde os alunos já podem optar por usar técnicas de Coloração para resolver as questões, e em seguida um Questionário Final, para avaliar o que eles acharam das aulas. Com o estudo elaborado e aplicado, foram alcançados resultados que mostraram uma melhora significativa no desenvolvimento das atividades que se utilizam da ideia de Teoria dos Grafos – Coloração, por parte dos alunos. A participação e a motivação deles foi um dos pontos positivos desta pesquisa, bem como as diversas soluções encontradas para resolver as atividades propostas durante o estudo.

Palavras-chave: Coloração em Grafos, Ensino Fundamental, Matemática.

## ABSTRACT

Costa, Fábio da Rocha. **Graph Coloring: An experience in Elementary School**. 2017. 129pages. Dissertation (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2017.

The main goal of this work is to analyze, within a Case Study, an experiment with Graph Coloring problems that involves 40 students of the 9th grade of Elementary School from the Educandário Monteiro Lobato, in Campo Grande/RJ. To carry out the experiment we did 8 lessons of 50 minutes. In the first classes, a motivational questionnaire (adapted from Questionnaire of Gontijo) and a test involving questions of logical reasoning (Test 1) was applied, which students can solve with the regular curriculum. Such questions are solved easily with techniques from Graph Coloring, but at this stage the students obviously still do not know them. After the tests, some classes were dedicated to teaching basic concepts of graphs and simple coloring techniques. In the final classes was applied Test 2 (in the form of Test 1), where students can already choose to use techniques of Coloring to solve the questions, and then a Final Questionnaire, to evaluate what they found in the classes. After the study, results showed a significant improvement in the development of the activities that use the idea of Graph Theory - Coloring, by the students. Their participation and motivation was one of the positive aspects of this research, as well as the different solutions found to solve the activities proposed during the study.

Keywords: Graph Coloring, Elementary School, Mathematics.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Para qual casinha cada cachorro irá?.....	16
Figura 2: Mapa do Brasil.....	17
Figura 3: Exemplos de Multigrafos.....	21
Figura 4: Exemplos de Grafos.....	22
Figura 5: Tipos de Grafos.....	23
Figura 6: Exemplos de Grafos Isomorfos.....	24
Figura 7: Exemplos de Grafos Bipartidos.....	24
Figura 8: Exemplos de Coloração.....	26
Figura 9: Exemplos de Coloração por Região.....	27
Figura 10: Grafo sobre Conflito dos peixes.....	30
Figura 11: Coloração do Grafo dos peixes.....	31
Figura 12: Grafo sobre o problema dos cachorros.....	32
Figura 13: Coloração sobre o problema dos cachorros.....	33
Figura 14: Grafo sobre Produtos Químicos.....	34
Figura 15: Coloração sobre o problema dos Produtos Químicos.....	36
Figura 16: Mapa do Brasil com as regiões.....	36
Figura 17: Grafo identificando cada região do mapa do Brasil.....	37
Figura 18: Coloração dos vértices do Mapa do Brasil.....	38
Figura 19: Exemplo de Grafo para Coloração.....	39
Figura 20: Identificando os Vértices do Grafo.....	39
Figura 21: Colorindo os Vértices.....	40
Figura 22: Exemplo de Grafo de Árvore.....	41
Figura 23: Identificando os Vértices no Grafo de Árvore.....	41
Figura 24: Coloração em Grafo de Árvore.....	43
Figura 25: Construindo Grafo de Horários.....	45
Figura 26: Coloração no Grafo de Horário.....	46
Figura 27: Grafo do Zoológico.....	47
Figura 28: Coloração no Grafo do Zoológico.....	48
Figura 29: Mapa de uma região.....	49

Figura 30: Ligando os vértices do Grafo das Regiões.....	50
Figura 31: Coloração no Grafo das Regiões.....	51
Figura 32: Coloração das Regiões.....	51
Figura 33: Foto do Arquiteto Howard Garns.....	52
Figura 34: Exemplo de Sudoku.....	54
Figura 35: Exemplo de Sudoku.....	55
Figura 36: Regras de Sudoku.....	55
Figura 37: Regras de Sudoku.....	56
Figura 38: Regras de Sudoku.....	56
Figura 39: Exemplo de Sudoku 4x4.....	57
Figura 40: Identificando os vértices.....	57
Figura 41: Grafo do Quadrado Mágico.....	58
Figura 42: Coloração em Grafo.....	60
Figura 43: Resolvendo o Sudoku.....	60
Figura 44: Mapa do Brasil dividido por Regiões.....	68
Figura 45: Exemplos de Grafos para encontrar o número cromático.....	71
Figura 46: Mapa de uma Região.....	74
Figura 47: Foto dos Alunos respondendo ao Questionário de Gontijo.....	78
Figura 48: Gráfico com os conceitos do Teste 1.....	84
Figura 49: Gráfico discriminando o número de acertos e erros de cada item do Teste 1.....	85
Figura 50: Solução proposta por aluno sobre a questão do aquário.....	86
Figura 51: Solução proposta por um aluno sobre a questão dos cachorros.....	87
Figura 52: Solução proposta por um aluno sobre a questão dos elementos químicos.....	88
Figura 53: Solução proposta por um aluno sobre o mapa do Brasil.....	89
Figura 54: Introduzindo a Teoria dos Grafos.....	90
Figura 55: Foto sobre a utilização da Teoria dos Grafos.....	91
Figura 56: Foto sobre o objetivo do estudo da Teoria do Grafo.....	91
Figura 57: Exemplificando a construção de um Grafo (Coloração).....	92
Figura 58: Foto sobre a explicação da aula prática.....	93
Figura 59: Construindo grafos.....	94

Figura 60: Praticando a Teoria das 4 Cores.....	94
Figura 61: Auxiliando na construção das arestas de um grafo.....	95
Figura 62: Grafos diferentes com o mesmo resultado.....	95
Figura 63: Soluções apresentadas pelos alunos.....	96
Figura 64: Gráfico com os conceitos do Teste 2.....	97
Figura 65: Gráfico discriminando o número de acertos e erro de cada item do Teste 1.....	98
Figura 66: Solução apresentada por um aluno para encontrar o número cromático de um grafo, item (A).....	99
Figura 67: Solução apresentada por um aluno para encontrar o número cromático de um grafo, item (B).....	100
Figura 68: Solução proposta por um aluno explicando como foi feita a coloração do grafo.....	100
Figura 69: Solução apresentada por um aluno sobre a questão do Horário das provas.....	101
Figura 70: Solução apresentada por um aluno sobre a questão do Zoológico....	102
Figura 71: Solução apresentada por um aluno para colorir um mapa.....	103
Figura 72: Outra solução para coloração em mapas, apresentada por um aluno.....	104
Figura 73: Gráfico sobre o interesse e gosto pela Matemática.....	106
Figura 74: Gráfico sobre a facilidade do estudo sobre Grafos.....	107
Figura 75: Gráfico sobre a facilidade de estudar Coloração.....	108
Figura 76: Gráfico sobre a variedade das situações onde podemos aplicar a Técnica de Coloração.....	109
Figura 77: Gráfico sobre o interesse em utilizar Grafos.....	110
Figura 78: Gráfico sobre a facilidade de estudar os conteúdos sobre Grafos.....	111
Figura 79: Gráfico sobre a motivação para estudar Matemática.....	112
Figura 80: Gráfico sobre a aula prática.....	113
Figura 81: Gráfico com a porcentagem referente a questão preferido do Teste 2.....	114

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Peixes e conflitos.....	29
Tabela 2 - Satisfação pela Matemática.....	63
Tabela 3 – Jogos e desafios.....	63
Tabela 4 – Resolução de problemas.....	64
Tabela 5 – Aplicações no cotidiano.....	64
Tabela 6 – Hábitos de estudo.....	65
Tabela 7 – Interação na sala de aula.....	65
Tabela 8: Conflito de peixes.....	66
Tabela 9: Quadro de Horário.....	72
Tabela 10: Animais do Zoológico.....	73
Tabela 11 – Satisfação pela Matemática.....	79
Tabela 12 – Jogos e desafios.....	80
Tabela 13 – Resolução de problemas.....	81
Tabela 14 – Aplicações no cotidiano.....	82
Tabela 15 – Hábitos de estudo.....	83
Tabela 16 – Interação na sala de aula.....	83

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	15
<b>1. REVISÃO DE LITERATURA</b> .....	21
1.1. Definições Iniciais.....	21
1.2. Grau de um Vértice.....	22
1.3. Caminhos e Ciclos.....	23
1.4. Isomorfismo.....	24
1.5. Grafo Bipartido.....	24
1.6. Coloração de Vértice.....	25
1.7. Coloração de Regiões.....	27
1.8. Teorema das 4 Cores.....	28
<b>2. TESTES</b> .....	29
2.1. Teste I.....	29
2.2. Teste II.....	39
<b>3. SUDOKU E COLORAÇÃO</b> .....	52
3.1. Regras do Sudoku.....	54
3.2. Resolvendo Sudoku usando Coloração.....	57
<b>4. METODOLOGIA</b> .....	61
4.1. Sujeito da Pesquisa.....	61
4.2. Metodologia da Pesquisa.....	61
4.3. Descrição das Aulas.....	62
4.3.1. Aula1 :Questionário Inicial.....	62
4.3.2. Aula 2: Teste 1.....	66
4.3.3. Aulas 3, 4 e 5: Embasamento Teórico, Prático sobre a Teoria dos Grafos e Resolução dos Testes.....	70
4.3.4. Aula 6: Construindo um Grafo dos elementos químicos.....	70
4.3.5. Aulas 7 e 8: Aplicação do Teste 2 e Questionário Final.....	77
<b>5. RESULTADOS E ANÁLISES</b> .....	78
5.1. Considerações sobre o Questionário de Gontijo.....	78
5.2. Considerações sobre o Teste I.....	84
5.3. Considerações sobre as aulas 3, 4 e5.....	90
5.4. Considerações sobre a aula6.....	92
5.5. Considerações sobre o teste 2.....	97
5.6. Considerações sobre o Questionário Final.....	105
5.7. Resolução de cada item aplicado nos Testes.....	114
<b>6. CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	115

<b>REFERÊNCIAS</b> .....	117
<b>BIBLIOGRAFIA CONSULTADA</b> .....	118
<b>APÊNDICES</b> .....	119
Apêndice A: Teste I usado na aula 2.....	119
Apêndice B: Teste II usado na aula 7.....	121
Apêndice C: Questionário Final usado na aula 8.....	124
<b>ANEXOS</b> .....	127
ANEXO A: Questionário de Gontijo usado na aula 1.....	127

## INTRODUÇÃO

Algumas questões matemáticas são estimulantes para o desenvolvimento do interesse do aluno no estudo da Matemática. Muitas vezes isto ocorre quando há aplicação direta no universo do aluno, quando as técnicas aprendidas por ele servem para resolver problemas que ele compreende bem. Tais situações-problema são solucionadas através de investigação ou por meio de tentativas. No entanto, as técnicas que resolvem problemas interessantes podem ser pouco intuitivas, ou podem exigir uma bagagem grande de pré-requisitos, o que pode acabar destruindo a motivação inicial.

[...] Muitos têm a sensação de que a Matemática é uma matéria difícil e que seu estudo se resume em decorar uma série de fatos matemáticos, sem compreendê-los e sem perceber suas aplicações e que isso lhes será de pouca utilidade. Tal constatação os leva a assumir atitudes bastante negativas, que se manifestam no desinteresse, na falta de empenho e mesmo na pouca preocupação diante de resultados insatisfatórios ou nos sentimentos de insegurança, bloqueio e até em certa convicção de que são incompetentes para aprendê-la, o que os leva a se afastar da Matemática em situações na vida futura. (BRASIL, 1998. p 79)

Uma ferramenta que pode ser utilizada e possui um raro equilíbrio entre dificuldade e quantidade de aplicações é a Teoria dos Grafos, em nível básico. Seus conceitos são muito intuitivos e praticamente não exigem nenhum pré-requisito. No entanto, possui técnicas que resolvem uma grande quantidade de problemas que estão presentes no cotidiano dos alunos. Neste estudo daremos ênfase à parte que trata de Coloração de Vértices em Grafos.

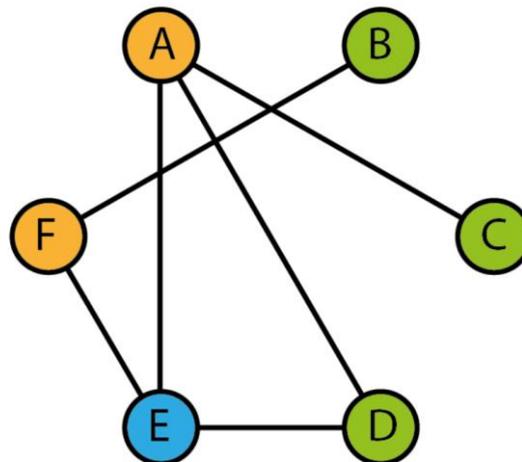
Veremos neste trabalho que a utilização da Coloração pode ser um facilitador para o entendimento de questões de variados níveis de complexidade, envolvendo principalmente problemas de incompatibilidade.

Fazendo uma pesquisa nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), podemos encontrar alguns pontos que se encaixam nas atividades práticas e contextualizadas que são aplicadas no Ensino Básico.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais indicam como objetivos do ensino fundamental que os alunos sejam capazes de:

- utilizar as diferentes linguagens. verbal, musical, Matemática, gráfica, plástica e corporal como meio para produzir, expressar e comunicar suas ideias, interpretar e usufruir das produções culturais, em contextos públicos e privados, atendendo a diferentes intenções e situações de comunicação;
- saber utilizar diferentes fontes de informação e recursos tecnológicos para adquirir e construir conhecimentos; (BRASIL, 1998. P.7-8)

Vejamos um exemplo de um problema de incompatibilidade de fácil compreensão que pode ser resolvido através de técnicas simples de Coloração em Grafos: imagine um canil de reabilitação de cães abandonados; a equipe acabou de receber 6 cachorros encontrados, e precisa colocá-los em diferentes casinhas para passar a primeira noite. Foram constatados que alguns desses cães ficam extremamente agressivos na presença de outros do mesmo grupo, logo, terão que alocá-los em casinhas diferentes. O cachorro A não pode ficar com os cachorros C, D ou E. Os cachorros B e F não podem ficar juntos. O cachorro E não pode ficar com os cachorros D nem F. Quantas casinhas serão necessárias para acomodar os 6 cachorros?



**Figura 1: Para qual casinha cada cachorro irá?**

**Fonte: Autor**

A estrutura que modela o exemplo denomina-se **Grafo**, assunto que estrutura todo esse trabalho. Um Grafo é composto por um conjunto de

**vértices**, que representam na Figura os cachorros A, B, C, D, E e F, e de **arestas**, que são as ligações entre os vértices. Dois cachorros são ligados caso eles não possam ficar juntos (são incompatíveis). Para resolver problemas por coloração de vértices, geralmente ligamos os vértices incompatíveis. Vértices vizinhos não pode receber a mesma cor. O número mínimo de cores utilizado para realizar a coloração de todos os vértices é a solução. No caso do problema dos cachorros, é o números de casas necessárias: 3.

Dado um Grafo qualquer, realizar uma coloração nada mais é do que atribuir rótulos a elementos de um Grafo (vértices ou arestas), os quais chamamos de “cores”. Tal processo é efetuado com base em algumas restrições e é chamado de uma *coloração de vértices (ou arestas)*. No caso de uma coloração de vértices, dois vértices adjacentes não devem receber a mesma cor e, no caso de uma coloração de arestas, atribuímos uma cor para cada aresta de modo que duas arestas adjacentes não possuam a mesma cor.(PIACENTE, 2015, p.39)

Outro exemplo de problema envolvendo coloração, mas desta vez em regiões, é facilmente compreendido pelos alunos, e apresenta um resultado pouco conhecido: com apenas 4 cores podemos colorir as regiões de um mapa qualquer, de modo que regiões vizinhas não apresentem a mesma cor. Este é o chamado Teorema das 4 Cores. É um resultado forte, que ficou muito tempo em aberto, mas que possui uma valiosa simplicidade.



**Figura 2: Mapa do Brasil**  
**Fonte: Autor**

Embora tratemos também a Coloração de Regiões, que deriva da Coloração de Vértices, não será tratada a Coloração de Arestas.

Trabalhar com a Coloração tem uma relação muito estreita com motivar os alunos para o estudo da Matemática. Outra forma de aplicar este assunto é através de atividades lúdicas, como, por exemplo, o Sudoku. Por se tratar de um jogo de raciocínio lógico, temos que agregar a prática dos jogos à teoria proposta; como afirma Dias, L., em *Proposta de atividade para o desenvolvimento do raciocínio lógico utilizando o Sudoku*, os jogos auxiliam o desenvolvimento do aluno, seja na questão da estratégia, ou na questão da investigação, ou ainda na exploração das diversas formas de buscar seu objetivo. Neste trabalho, será apresentada uma forma de resolver um problema de Sudoku através de Coloração de Vértices.

O objetivo geral deste trabalho é analisar uma experiência realizada utilizando problemas relacionados a Coloração em Grafos através de um Estudo de Caso com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental do Educandário Monteiro Lobato, da rede particular de ensino, localizado em Campo Grande, Rio de Janeiro, durante os meses de outubro e novembro de 2016, utilizando um público de 40 alunos, com faixa etária entre 12 e 14 anos.

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Apresentar aos discentes do grupo analisado uma Matemática que fuja do “padrão”, uma Matemática lúdica e que esteja ao alcance de todos.
- Propor a eles algumas situações-problema que muitas vezes são classificadas como “Questões de Raciocínio Lógico”.
- Mostrar que tais questões podem ser resolvidas por Teoria dos Grafos. Isto inclui resolver problemas de Sudoku através de Coloração, e realizar uma aula externa.
- Verificar a evolução do conhecimento dos alunos, comparando um teste antes das aulas sobre Grafos com um depois das aulas.
- Comparar a evolução da motivação dos alunos, com um questionário antes e outro depois das aulas.

Com o presente trabalho esperamos acrescentar um conteúdo novo, dinâmico, e principalmente estimular os alunos dos anos iniciais a estudarem e se interessarem pelo estudo da Matemática. As expectativas descritas abaixo, que podem ser encontradas no PCN, vão ao encontro do que este presente trabalho pretende contribuir.

Espera-se que o aluno no 9º ano tenha:

- Predisposição para usar os conhecimentos matemáticos como recursos para interpretar, analisar e resolver problemas em contextos diversos.
- Desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultados.
- Predisposição para encontrar exemplos e contraexemplos, formular hipóteses e comprová-la.
- Interesse em comparar diferentes métodos e processos na resolução de um problema, analisando semelhanças e diferenças entre eles e justificando-os.
- Interesse por utilizar as diferentes representações Matemáticas que se adaptam com mais precisão e funcionalidade a cada situação-problema de maneira que facilite sua compreensão e análise
- Valorização do trabalho coletivo, colaborando na interpretação de situações-problema, na elaboração de estratégias de resolução e na sua validação. (BRASIL, 1998. p91)

Ainda segundo o PCN, alguns problemas podem relacionar conjuntos finitos com o intuito de serem desenvolvidos em sala de aula com objetivo de auxiliar nos estudos preliminares de combinatória. Tais problemas podem ser modelados através do estudo de Teoria dos Grafos. Estas atividades podem enriquecer a aula trazendo discussões que valorizam o estudo dos Grafos.

Outros tipos de problemas poderiam ser trabalhados na escola – são aqueles relativos a conjuntos finitos e com enunciados de simples entendimento relativo, mas não necessariamente fáceis de resolver.

Um exemplo clássico é o problema das pontes de Königsberg, tratado por Euler... Problemas dessa natureza podem ser utilizados para desenvolver uma série de habilidades importantes: modelar o problema, via estrutura de grafo como no exemplo, um diagrama em que cada ilha é representada por um ponto e cada ponte é um segmento conectando dois pontos; explorar o problema, identificando situações em que há ou não solução; convergir para a descoberta da condição geral de existência de tal solução... Muitos outros exemplos de problemas combinatórios podem ser tratados de modo semelhante, tais como determinar um eficiente trajeto para coleta de lixo de uma cidade. (BRASIL, 2006, p. 94).

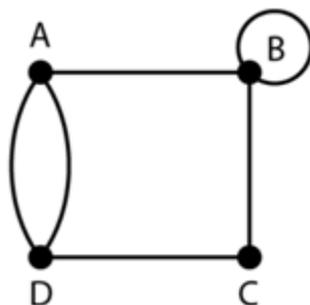
Esse trabalho se divide em 6 capítulos da seguinte maneira: O Capítulo 1 faz uma revisão da literatura sobre conceitos básicos de Teoria dos Grafos, afim de mostrar aos alunos algumas definições e exemplos de Grafos. Essas definições serão fundamentais para auxiliar o leitor durante toda a pesquisa, dando suporte para o entendimento da proposta. O capítulo 2 foi elaborado para a apresentação dos Testes e o desenvolvimento de cada item, procurando mostrar o passo-a-passo até chegar à solução. O capítulo 3 apresenta um pouco da história do jogo lúdico chamado Sudoku, e procura apresentar as regras exemplificando os movimentos possíveis dentro do quadrado, e com isso encontrar uma solução para o jogo. O capítulo 4 aborda todo o processo escolhido e desenvolvido para fazer o estudo de caso aplicado em uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola particular do estado do Rio de Janeiro. Neste capítulo é descrito o que será feito desde a aplicação do Questionário de Gontijo (adaptado), passando pela elaboração e aplicação das aulas teóricas, bem como a aplicação dos Testes e por fim o Questionário Final. O Capítulo 5 mostra os resultados e discussões das atividades desenvolvidas; nele foram analisados os resultados dos Testes, do Questionário de Gontijo e do Questionário Final. Essa análise foi feita através de gráficos. Por último, temos o capítulo 6, que é dedicado às considerações finais desta pesquisa.

## 1. REVISÃO DE LITERATURA

### 1.1. DEFINIÇÕES INICIAIS

Neste capítulo veremos os conceitos de Teoria de Grafos necessários para este trabalho. Tais conceitos podem ser encontrados em Jurkiewicz (2009) e Piacente (2015).

Grafos são entidades abstratas formadas por *vértices* e *arestas*. *Arestas* são pares não ordenados de vértices que representam as ligações entre os vértices. Considere um Grafo  $G$ , com um conjunto de vértices  $V(G)$  e com um conjunto de arestas  $E(G)$ . Dois vértices  $A$  e  $B$  ligados por uma aresta são ditos *adjacentes*.  $A$  e  $B$  são também chamados de *vizinhos*. Dizemos também que a tal aresta *incide* sobre  $A$  e sobre  $B$ . Uma aresta que liga um vértice  $A$  a um vértice  $B$  é comumente chamada de aresta  $AB$ . Um *laço* é uma aresta que liga um vértice a ele mesmo. Se dois vértices são ligados por duas ou mais arestas distintas, dizemos que há *arestas múltiplas*. Grafos com arestas múltiplas são chamados *multigrafos*. Grafos *simples* são Grafos sem laços e sem arestas múltiplas.



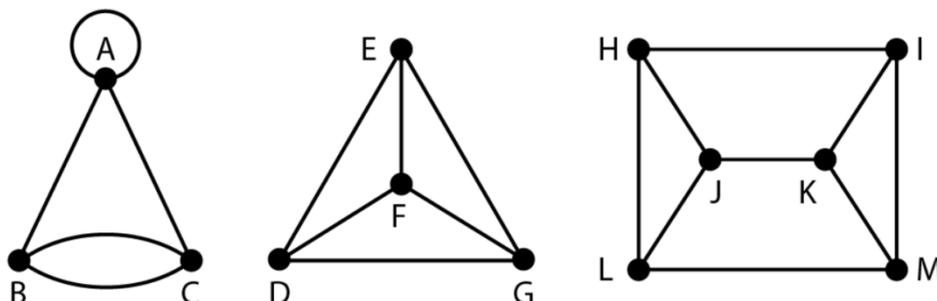
**Figura 3: Exemplo de Multigrafo**

**Fonte: Autor**

Na Figura 3, observamos que, no primeiro Grafo,  $A$  e  $B$  são adjacentes, ou seja, são vizinhos. Já  $A$  e  $C$  não são adjacentes. Veja também que a aresta  $CD$  incide sobre  $C$  e sobre  $D$ . Neste Grafo temos arestas múltiplas entre  $A$  e  $D$ , ou seja, ele é um multigrafo. Também temos um laço em  $B$ .

### 1.2. GRAU DE UM VÉRTICE

O *grau* de um vértice  $V$  é determinado pelo número de arestas que incidem sobre  $V$ , e denotado  $d(V)$ .



**Figura 4: Exemplos de Grafos**

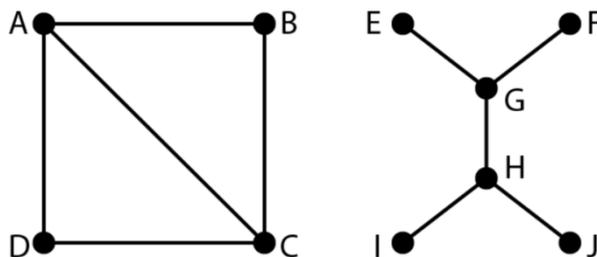
**Fonte: Autor**

Observe os Grafos da Figura 4. No primeiro Grafo, veja que temos  $d(A) = 4$ ,  $d(B) = 3$  e  $d(C) = 3$ . No segundo, todos os graus são iguais a 3, ou seja, ele é um Grafo regular. Observe também que o segundo Grafo é um Grafo simples em que cada vértice é ligado a todos os demais, ou seja, é um Grafo completo. Como tem 4 vértices, ele é o  $K_4$ . O terceiro Grafo é um Grafo regular (todos os vértices possuem grau 3) que não é completo (por exemplo, J não está ligado a I). Algo que também pode ser observado é que a soma dos graus de todos os vértices de um Grafo é igual a duas vezes o número de arestas deste Grafo. Por exemplo, no primeiro Grafo, os graus somados são  $4 + 3 + 3 = 10$  e há 5 arestas no total.

### 1.3. CAMINHOS E CICLOS

Um *passeio* entre  $A_0$  e  $A_n$  é uma sequência de arestas  $A_0A_1$ ,  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ , ...,  $A_{n-1}A_n$ , onde o vértice final de uma é o inicial da seguinte. Ele também pode ser representado usando apenas os vértices, na forma  $A_0A_1A_2A_3A_4...A_n$ . O *comprimento* do passeio é igual ao número de arestas percorridas pelo passeio. Se todas as arestas do passeio são distintas (os vértices podem

eventualmente repetir), chamamos o passeio de *trilha*. Se todos os vértices do passeio são distintos, então chamamos o passeio de *caminho*. Quando o vértice final e o vértice inicial de um caminho coincidem, temos um *ciclo*. Um Grafo  $G$  é dito *conexo* se, dados quaisquer vértices  $A$  e  $B$  em  $V(G)$ , existe um caminho ligando  $A$  a  $B$ . Caso contrário, chamamos o Grafo de *desconexo*. Uma árvore é um Grafo conexo sem ciclos.



**Figura 5: Tipos de Grafos**

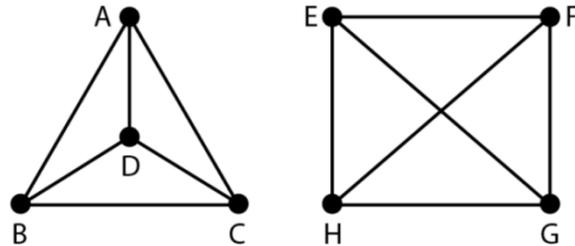
**Fonte: Autor**

Observe a Figura 5, no primeiro Grafo temos que ABCBAD é um passeio de A até D. Também temos que ABCAD é uma trilha de A até D (não há repetição de arestas, embora haja a repetição do vértice A). Veja que ABCD é um caminho, uma vez que nem vértices nem arestas se repetem. Observa-se também que ABCA é um ciclo. O segundo Grafo constitui uma árvore, pois é um Grafo conexo (sempre há um caminho ligando dois vértices quaisquer) e não possui ciclos.

#### 1.4. ISOMORFISMO

Dois Grafos  $G_1$  e  $G_2$  são ditos isomorfos se existe uma correspondência biunívoca entre seus conjuntos de vértices que preserva as adjacências. Isto significa que se  $A$  e  $B$  pertencem a  $V(G_1)$  e são vizinhos, então  $f(A)$  e  $f(B)$  pertencem a  $V(G_2)$  e são vizinhos. Se  $A$  e  $B$  pertencem a  $V(G_1)$  e não são vizinhos, então  $f(A)$  e  $f(B)$  pertencem a  $V(G_2)$  e não são vizinhos. Na realidade, Grafos não possuem uma única representação visual. Eles podem ser

desenhados de várias formas. Dois Grafos desenhados de duas formas diferentes podem ser essencialmente o mesmo Grafo. Neste sentido dizemos que os Grafos são isomorfos.



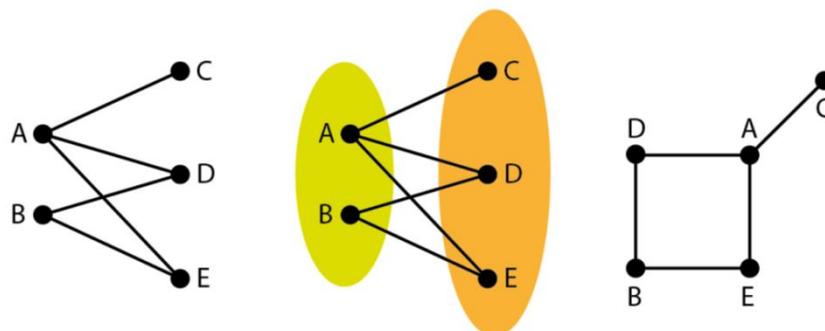
**Figura 6: Exemplos de Grafos Isomorfos**

**Fonte: Autor**

Exemplos de Grafos Isomorfos. Observe que os Grafos da Figura 6 são isomorfos, pois conseguimos uma correspondência biunívoca entre os vértices dos dois através da função  $f$  definida por:  $f(A) = E$ ,  $f(B) = F$ ,  $f(C) = G$  e  $f(D) = H$ . Veja, por exemplo, que, como  $A$  e  $B$  são vizinhos no primeiro, então  $f(A) = E$  e  $f(B) = F$  são vizinhos no segundo.

### 1.5. GRAFO BIPARTIDO

Um Grafo  $G$  é *bipartido* quando seu conjunto de vértices  $V(G)$  pode ser particionado em dois subconjuntos,  $V_1(G)$  e  $V_2(G)$ , de forma que dois vértices de  $V_1(G)$  nunca são ligados, e dois vértices de  $V_2(G)$  nunca são ligados. Resumindo, num Grafo bipartido, só pode haver arestas ligando um vértice de  $V_1(G)$  a um vértice de  $V_2(G)$ .



**Figura 7: Exemplos de Grafos Bipartidos**

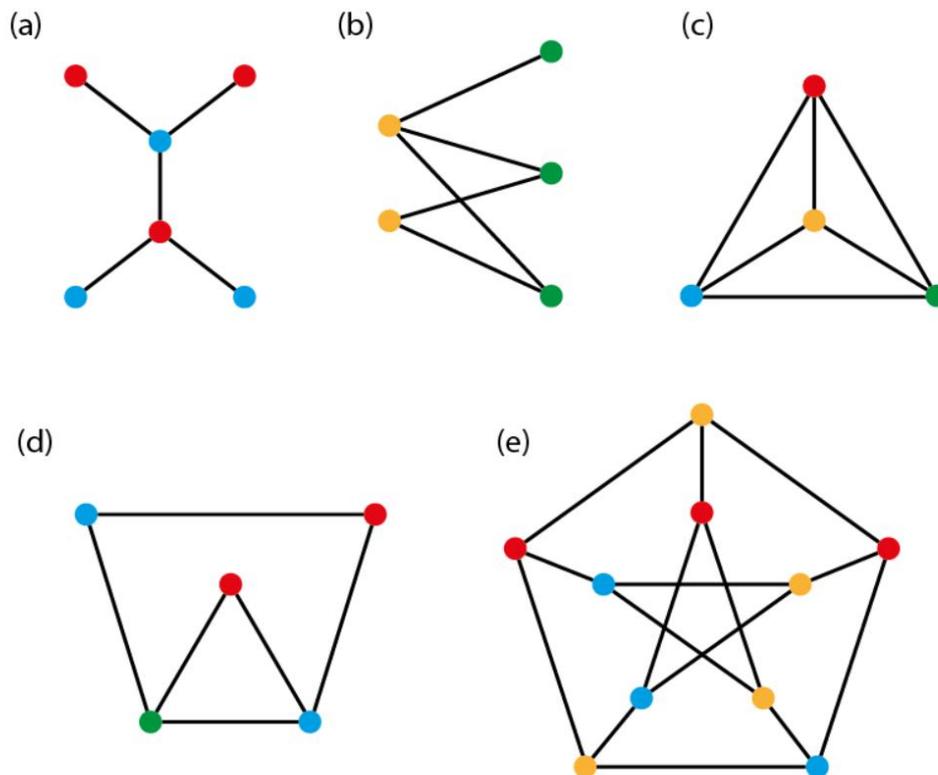
**Fonte: Autor**

Exemplos de Grafos Bipartidos. Observe o Grafo na Figura 7. Ele é um Grafo bipartido, com conjuntos  $V_1 = \{A, B\}$  e  $V_2 = \{C, D, E\}$ . Observe que não há arestas ligando dois elementos de  $V_1$ , e nem arestas ligando dois elementos de  $V_2$ . Tais conjuntos estão em destaque no segundo desenho. O terceiro Grafo é isomorfo ao primeiro, ou seja, é também um Grafo bipartido, mas está representado graficamente de forma diferente.

## 1.6. COLORAÇÃO DE VÉRTICES

Considere o seguinte problema: a cada vértice de um Grafo  $G$  devemos atribuir uma cor. No entanto, vértices vizinhos devem possuir cores distintas. Qual é o número mínimo de cores que podemos usar? O menor número de cores fornece o chamado *número cromático* do Grafo. Obviamente, as cores são apenas rótulos. Ao invés de cores podem ser usados números, ou símbolos quaisquer.

A coloração de Grafos é um caso especial de rotulagem de Grafos, atribuindo rótulos tradicionalmente chamados “cores”, sujeitas a certas restrições, a elementos de um Grafo, ou seja, é uma coloração dos vértices de um Grafo tal que não haja dois vértices adjacentes que compartilhem a mesma cor. Da mesma forma, em uma coloração de arestas atribuímos uma cor para cada aresta sem que haja duas arestas adjacentes da mesma cor. (PIACENTE, 2015, pg 24)



**Figura 8: Exemplos de Coloração**

**Fonte: Autor**

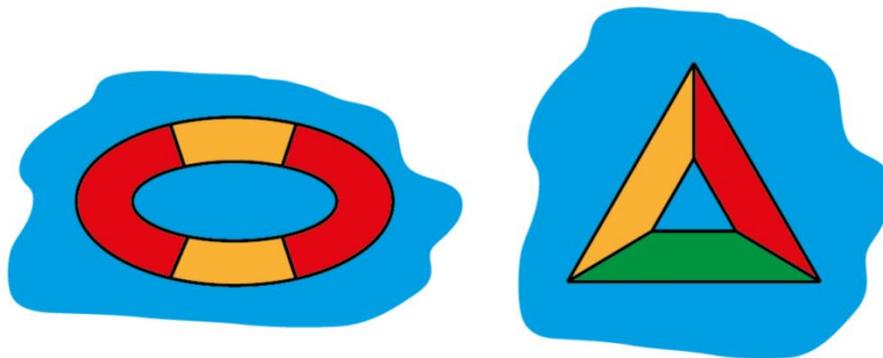
Exemplos de Coloração. Observe a Figura 8. Em (a) temos uma árvore. Uma árvore tem sempre número cromático 2, como podemos ver na figura. Em (b) temos um Grafo bipartido. Um Grafo bipartido também tem sempre número cromático 2, pois a cada subconjunto de vértices  $V_1$  e  $V_2$  podemos atribuir uma cor, já que nestes subconjuntos os vértices não são ligados. Em (c) temos um Grafo completo, o  $K_4$ . Se um Grafo é completo e tem  $n$  vértices, obrigatoriamente devemos usar  $n$  cores para colorir. No caso do  $K_4$ , então, o número cromático é igual a 4. A explicação para isto é simples: num Grafo completo, todos são vizinhos de todos. Logo, temos que usar uma cor para cada vértice. Em (d) temos como garantir, de antemão, que o número cromático é pelo menos 3. Isto ocorre porque tal Grafo contém um  $K_3$  (um triângulo), que já exige 3 cores. Observe na figura que o número cromático, na realidade, é exatamente 3. Em (e) temos o Grafo de Petersen, um exemplo famoso. Apesar de parecer complicado, o número cromático é apenas 3, como podemos ver na figura.

## 1.7. COLORAÇÃO DE REGIÕES

Um Grafo é dito *planar* quando ele possui alguma representação em que não há cruzamento de arestas. O Grafo tratado na Figura 6, por exemplo, é planar. Nesta Figura podemos ver duas representações para tal Grafo, e a da esquerda não apresenta cruzamentos de arestas. Isto é suficiente para caracterizá-lo como planar. O Grafo de Petersen, visto na Figura 8 e, não é planar, pois não há nenhuma representação para ele que não possua cruzamentos de arestas.

Quando um Grafo é planar, ele divide o plano em um número finito de regiões, como num mapa. Pode-se então perguntar qual é o número de cores necessário para colorir um mapa, de maneira que as regiões vizinhas não possuam a mesma cor. Este é o problema da coloração de regiões, que também será tratado na próxima seção.

É importante ressaltar que duas regiões são vizinhas se compartilham uma aresta. Se compartilham um único vértice, então não são vizinhas. Outro fator importante é que um Grafo sempre divide o plano em algumas regiões finitas e uma infinita.



**Figura 9: Exemplos de Coloração por Região**

**Fonte: Autor**

Exemplo de Coloração por Região. Considere a Figura 9. Repare que bastam 3 cores para colorir as regiões do Grafo da esquerda. Mas são necessárias 4 cores para colorir as regiões do Grafo da direita. Veremos na próxima seção que, em qualquer mapa, bastam 4 cores. Veja que em ambos os casos, uma região mais interna e a região infinita puderam ser coloridas com a mesma cor.

## 1.8. TEOREMA DAS 4 CORES

O Teorema das 4 cores apresenta uma grande simplicidade no seu enunciado. Contudo foram necessários mais de 100 anos de dedicação ao tema para obter a comprovação da teoria.

Em 1852, Francis Guthrie – Matemático, Botânico e Advogado – afirmou que eram necessárias apenas 4 cores distintas para colorir um mapa, de forma que os países contíguos não tivessem cores iguais. Foram muitos os matemáticos e estudiosos do século XX que se debruçaram sobre tal questão, atraídos pelo paradoxo estabelecido entre a simplicidade e complexidade existentes simultaneamente no Problema das 4 cores. A trajetória desses estudos foi marcada pelas diversas vertentes que se abriram, contribuindo enormemente no desenvolvimento da Teoria dos Grafos.

O Problema das 4 Cores é apresentado da seguinte forma: **É possível colorir as regiões de um mapa usando apenas 4 cores, de forma que regiões vizinhas não tenham a mesma cor.**

O problema das 4 cores foi alvo de várias metodologias desenvolvidas com a finalidade de sanar tais deficiências. Em 1976, em Urbana – Illinois – nos EUA, Kenneth Appel e Wolfgang Haken, auxiliados por um IBM 360, conseguiram apresentar uma demonstração do Teorema das 4 cores.

Esse novo fato ganhou projeção no meio da Matemática, causando um alvoroço na comunidade. Essa reação era consequência de uma longa espera por uma solução. Professores e estudiosos da área estavam desejando tal resposta. Entretanto, toda essa movimentação entrou em declínio ao se depararem com uma apresentação que durava mais de mil horas, mesmo utilizando computador de alta tecnologia para a época.

A verificação feita à mão é inviabilizada pela enorme demanda de cálculos. Apesar dos problemas e dificuldades, a prova é aceita pela comunidade científica. Aquilo que, de fato, validou sua demonstração foi justamente a possibilidade de realizar um volume muito grande de cálculos através de um computador, pois sua margem de erro é inexistente.

## 2. TESTES

Neste capítulo veremos problemas de incompatibilidade resolvidos via Coloração de Vértices, com a finalidade de apresentar ao leitor de forma clara os conceitos e as vantagens de tal método. As questões trabalhadas aqui serão exatamente as questões dos testes aplicados aos alunos durante a pesquisa.

### 2.1. TESTE I

#### Questão 1

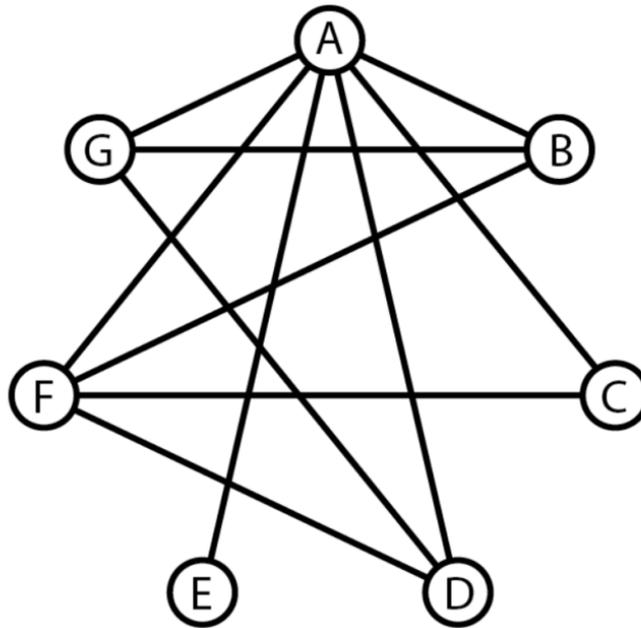
Em um pet shop, uma vendedora precisa expor 7 peixes exóticos em alguns aquários para venda. Alguns desses peixes não podem ficar com certos peixes, por risco de conflito. A tabela abaixo mostra quais peixes não podem ficar juntos, denotados por x. Qual é o número mínimo de aquários necessários para expor todos esses peixes?

**Tabela 1: Peixes e conflitos**

Peixe	A	B	C	D	E	F	G
A	-	X	X	X	X	X	X
B	X	-				X	X
C	X		-			X	
D	X			-		X	X
E	X				-		
F	X	X	X	X		-	
G	X	X		X			-

## GABARITO

Vamos considerar que os sete peixes formam o Grafo abaixo, onde cada vértice representa um peixe. Observe também que, quando dois peixes não puderem ficar no mesmo aquário, ligaremos esses peixes (vértices). Veja o Grafo a seguir:



**Figura 10: Grafo sobre Conflito dos peixes**

**Fonte: Autor**

Depois de construir o Grafo, começamos a pintar os vértices de cores que representam os aquários, ou seja, se forem necessárias 4 cores, por exemplo, significa que serão utilizados 4 aquários para colocar os peixes.

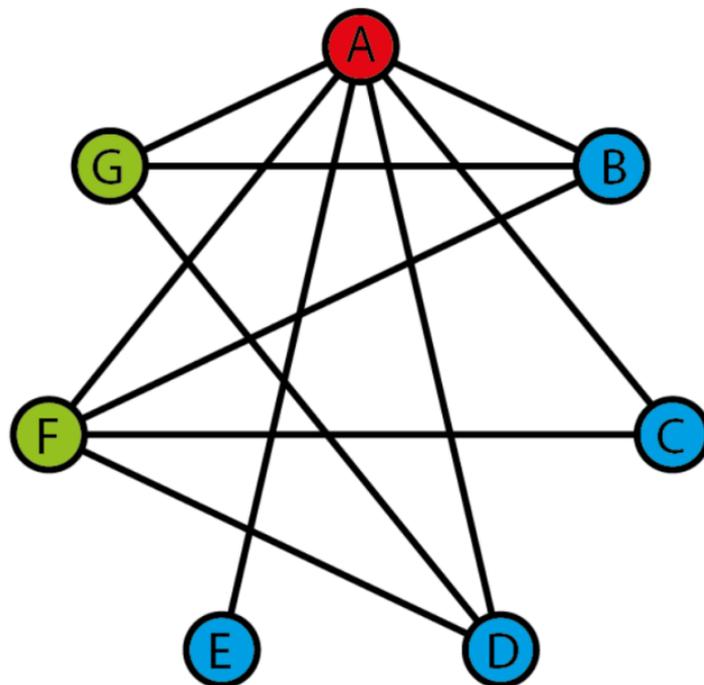
Posteriormente começaremos a pintar os vértices de tal forma que dois vértices adjacentes não sejam pintados com a mesma cor.

O primeiro passo é escolher um vértice qualquer (dentre os 7 disponíveis). Seja C este vértice. Depois:

- Pintamos o vértice escolhido (C) de azul;
- Agora podemos escolher entre os vértices (F) ou (A), vou escolher o vértice (F), que não pode ter a mesma cor de (C);
- Pintamos então o vértice (F) de verde;

- Agora podemos escolher entre os vértices (A), (B), (C) ou (D), mas observe que o vértice (C) já está pintado, então temos apenas as opções (A), (B) ou (D).
- Pintamos então o vértice (D) de azul, uma vez que o vértice (D) não tem ligação com o vértice (C);
- Agora teremos as opções (F), que já está pintada, (G) ou (A);
- Pintamos então o vértice (A) com a cor vermelha, já que as cores verde e azul fazem ligação com o vértice (A);
- A partir do vértice (A) temos as opções (G), (E) e (B), uma vez que (F) e (C) já possuem cores;
- Pintamos o vértice (G) de verde, uma vez que (G) e (F) não têm ligação;
- Agora, a partir de (G) temos apenas uma conexão que não está pintada, portanto iremos para o vértice (B), que pode ser pintado de azul;
- Agora observando o vértice que falta, ou seja, o vértice (E) ele pode ser pintado de verde ou azul.

Então concluímos que são necessárias 3 cores (3 aquários) para distribuir os 7 peixes.



**Figura 11: Coloração do Grafo dos peixes**

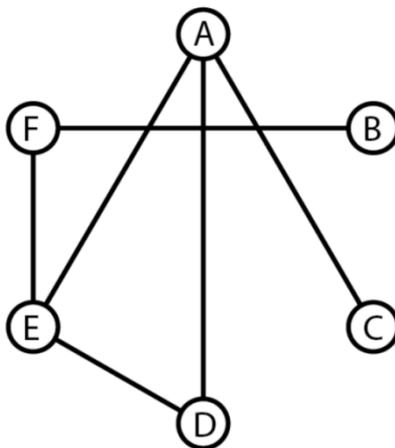
**Fonte: Autor**

## Questão 2 (Silva Jr, 2016)

Em um canil de reabilitação de cães abandonados, a equipe acabou de receber 6 novos cachorros encontrados, e precisa colocá-los em diferentes casinhas para passar a primeira noite. Constatou-se que alguns desses cães ficam extremamente agressivos na presença de alguns do mesmo grupo, logo, terão que alocá-los em casinhas diferentes. O cachorro A não pode ficar com os cachorros C, D ou E. Os cachorros B e F não podem ficar juntos. O cachorro E não pode ficar com os cachorros D nem F. Quantas casinhas serão necessárias para acomodar os 6 cachorros?

### GABARITO

Vamos considerar que os seis cachorros formem o Grafo abaixo, onde cada vértice representa um cachorro. Observe também que, quando dois cachorros não puderem ficar na mesma casinha, ligaremos esses cachorros (vértices). Veja o Grafo abaixo:



**Figura 12: Grafo sobre o problema dos cachorros**

**Fonte: Autor**

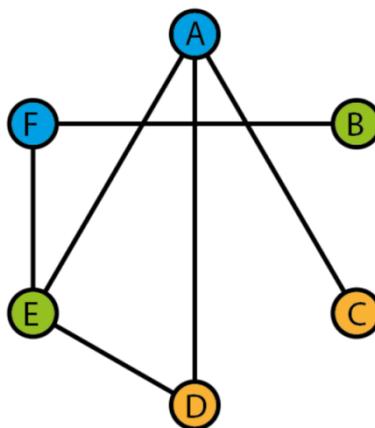
Depois de construir o Grafo começamos a pintar os vértices de cores que representam as casinhas, ou seja, se forem necessárias 4 cores, por exemplo, significa que serão utilizadas 4 casinhas para colocar os cachorros.

Posteriormente começamos a pintar os vértices de tal forma que dois vértices adjacentes não sejam pintados com a mesma cor.

O primeiro passo é escolher um vértice qualquer (dentre os 6 disponíveis), depois:

- Pintamos o vértice escolhido (A) de azul;
- Agora podemos escolher entre os vértices (E), (D) ou (C); vamos escolher o vértice (E), que não pode ter a mesma cor de (A);
- Pintamos então o vértice (E) de verde;
- Agora podemos escolher entre os vértices (F) ou (D), então vou escolher o vértice (F).
- Agora pintaremos o vértice (F) com a mesma cor que o vértice (A), uma vez que os vértices (A) e (F) não tem ligação, portanto o vértice (F) vai ser pintado na cor azul.
- Agora só temos uma opção, devemos ir para o vértice (B). Este pode ser pintado de verde, uma vez que (B) e (E) não têm ligação.
- Agora podemos optar entre os vértices (D) ou (C). Vamos optar pelo vértice (D). Este não pode ser pintado de verde, muito menos de azul, já que (D) tem ligação com os vértices (E) e (A). Então iremos escolher a cor amarela para o vértice (D);
- Sobrou apenas o vértice (C), este tem ligação apenas com o vértice (A), logo só não pode ser pintado de azul. Então escolheremos para o vértice (C) uma das duas cores restantes: amarelo ou verde. Vamos pintar então o vértice (C) de amarelo.

Então concluímos que são necessárias 3 cores (3 casinhas) para distribuir os 6 cachorros.



**Figura 13: Coloração sobre o problema dos cachorros**

**Fonte: Autor**

### Questão 3 (Silva Jr, 2016)

Um químico deseja embarcar os produtos A, B, C, D, E, F, G usando o menor número de containers. Alguns produtos não podem ser colocados num mesmo container porque reagem entre si. Quaisquer dos dois produtos entre A, B, C, G reagem entre si, A reage com F e D, e E também reage com F e D. Qual é o menor número de containers necessários para embarcar os produtos com segurança?

### GABARITO

Vamos considerar que os sete produtos químicos formem o Grafo abaixo, onde cada vértice representa um produto químico. Observe também que, quando dois produtos químicos não puderem ficar no mesmo container, ligaremos esses produtos (vértices). Veja o Grafo abaixo:

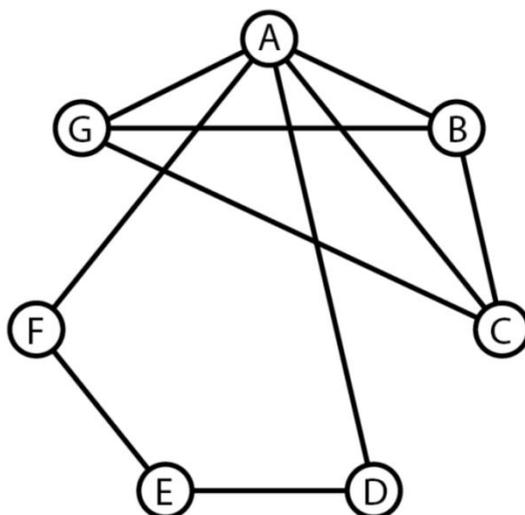


Figura 14: Grafo sobre Produtos Químicos

Fonte: Autor

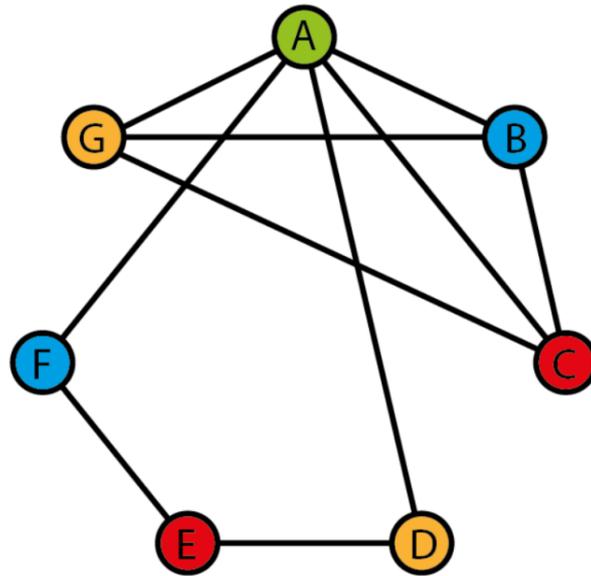
Depois de construir o Grafo, começamos a pintar os vértices de cores que representam os containers, ou seja, se forem necessárias 4 cores, por exemplo, significa que serão utilizadas 4 containers para colocar os elementos químicos.

Posteriormente, começaremos a pintar os vértices de tal forma que dois vértices adjacentes, ou seja, vértices que estejam ligados, não sejam pintados com a mesma cor.

O primeiro passo é escolher um vértice qualquer (dentre os 7 disponíveis), depois:

- Pintamos o vértice escolhido (B) de azul;
- Agora podemos escolher entre os vértices (A), (C) ou (G). Vamos escolher o vértice (A), que não pode ter a mesma cor de (B);
- Pintamos então o vértice (A) de verde;
- Agora podemos escolher entre os vértices (G), (F), (D) ou (C). Vamos escolher o vértice (G), que não pode ter a mesma cor de (B) e nem a mesma cor de (A), uma vez que estão ligados; então o vértice (G) terá a cor amarela;
- Agora devemos escolher o vértice (C), uma vez que os vértices (A) e (B) já foram escolhidos;
- O vértice (C) não pode ter nenhuma das cores já pintadas em vértices anteriores, uma vez que os vértices (A), (B) e (G) – de cores diferentes – estão ligados ao vértice (C). Portanto, vamos utilizar a cor vermelha para o vértice (C);
- Agora, devemos escolher entre os vértices (F), (E) ou (D); vamos optar pelo vértice (E). Este pode ser pintado com qualquer cor, então vamos utilizar a cor vermelha.
- Podemos agora, escolher entre os vértices (F) ou (D). Vamos ao vértice (F), que só não pode ser pintado de verde ou vermelho; logo, optaremos pela cor azul;
- Por último, sobrou o vértice (D), que pode ser pintado por amarelo ou azul; optaremos por pintar de amarelo.

Então, concluímos que são necessárias 4 cores (4 containers) para distribuir os 7 produtos químicos.



**Figura 15: Coloração sobre o problema dos Produtos Químicos**

Fonte: Autor

#### Questão 4

Quantas cores são necessárias para colorir o mapa do Brasil, sendo que regiões adjacentes não podem ter a mesma cor?

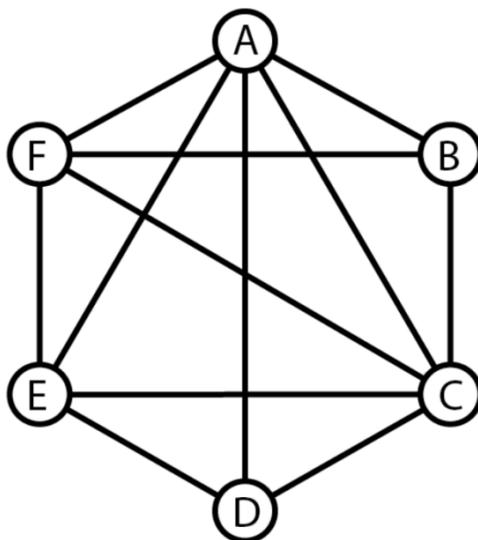


**Figura 16: Mapa do Brasil com as regiões**

Fonte: Autor

## GABARITO

Vamos considerar que as cinco regiões mais a região externa ao mapa do Brasil, perfazendo 6 regiões, formem o Grafo abaixo, onde cada vértice representa uma região. Observe também que quando duas regiões fizerem fronteira, ligaremos essas regiões (vértices). Veja o Grafo a seguir:



**Figura 17: Grafo identificando cada região do mapa do Brasil**

**Fonte: Autor**

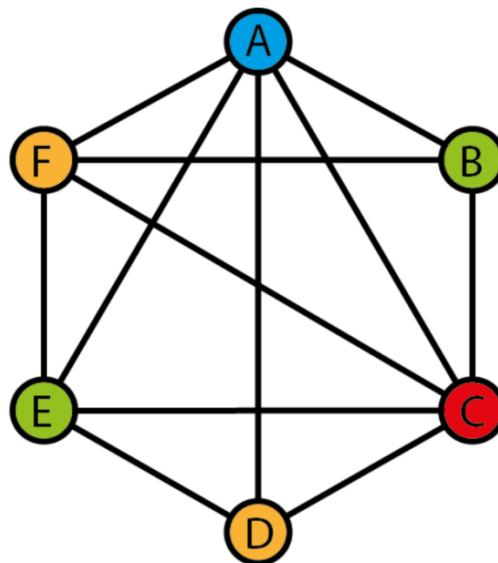
Neste Grafo acima, temos:

- (A) – Região externa
- (B) – Região Norte
- (C) – Região Centro-Oeste
- (D) – Região Sul
- (E) – Região Sudeste
- (F) – Região Nordeste

- Partindo de um vértice qualquer, escolhemos iniciar pelo vértice (A), pintando este vértice de azul;
- Agora temos cinco opções, uma vez que o vértice (A), que representa a região externa, tem ligação com todos os outros vértices. Portanto, escolhemos ir para o vértice (B);

- O vértice (B), pintaremos com um cor diferente da cor azul.Então pintaremos o vértice (B) de verde;
- Agora o vértice (B) tem ligação com os vértices (F) e (C); escolhemos ir para o vértice (F);
- O vértice (F) não pode ser pintado nem de azul, nem de verde.Então escolhemos para pintar o vértice (F) a cor amarela;
- Do vértice (F), podemos ir para o vértice (C) ou (E). Escolhemos o vértice (E);
- O vértice (E) não pode ser pintado nem de amarelo, nem de azul muito menos de vermelho, logo,escolhemos a cor verde.
- Agora, do vértice (E), podemos ir para o vértice (D) e este vértice só pode ser pintado de amarelo.

Com isso, concluímos que são necessárias quatro cores para pintar o mapa do Brasil com as condições impostas pelo enunciado. Observe o Grafo abaixo com as respectivas cores.



**Figura 18: Coloração dos vértices do Mapa do Brasil**

**Fonte: Autor**

## 2.2.TESTE II

### Questão 1

Determine o número cromático dos Grafos abaixo:

a)

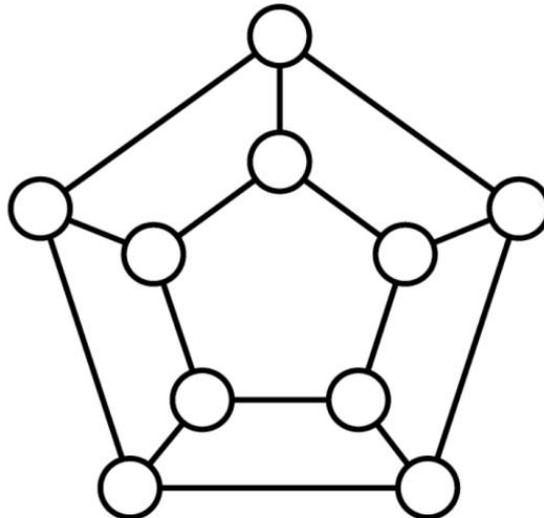


Figura 19: Exemplo de Grafo para Coloração

Fonte: Autor

### GABARITO

Para iniciar a resolução deste item, devemos escolher qualquer um dos 10 vértices disponíveis. Para isso, iremos identificar cada um dos vértices por uma letra; observe o Grafo abaixo:

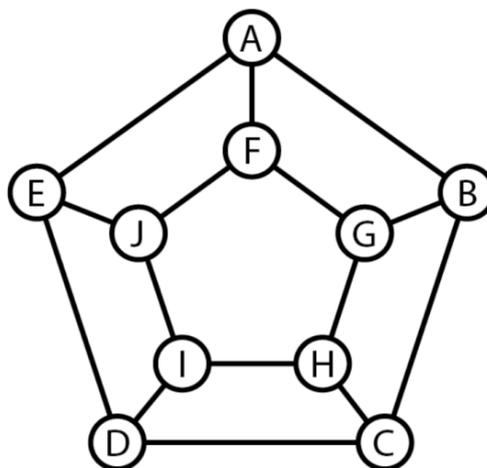
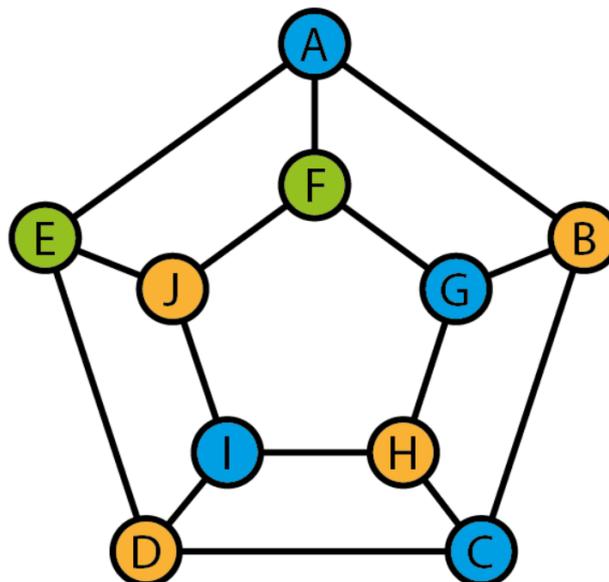


Figura 20: Identificando os Vértices do Grafo

Fonte: Autor

- Iniciaremos pelo vértice (A), nele colocaremos a cor azul;
  - Agora devemos optar entre os vértices (E), (F) ou (B), lembrando que o vértice escolhido não pode ser pintado de azul;
  - Iremos para o vértice (B), este sendo pintado de amarelo;
  - Agora temos as opções (G) ou (C), e escolheremos o vértice (G);
  - O vértice (G) pode ser pintado de azul;
  - Agora podemos ir para o vértice (F) ou (H), e escolheremos o vértice (H), sendo pintado de amarelo;
  - Agora podemos ir para (I) ou (C), e iremos optar por (C); este vértice pode ser pintado de azul;
  - Agora devemos ir para o vértice (D), pintando este vértice de amarelo;
  - A partir do vértice (D), podemos ir para (I) ou (E), iremos para (I), pintando ele de azul;
  - Agora só podemos ir para (J), podendo pintá-lo de amarelo;
  - A partir do vértice (J), podemos ir para (E) ou (F); iremos para (F), e devemos pintá-lo de verde.
  - Sobrou o vértice (E), que deve ser pintado de verde.
- Portanto o número cromático do Grafo proposto é 3.



**Figura 21: Colorindo os Vértices**

**Fonte: Autor**

b)

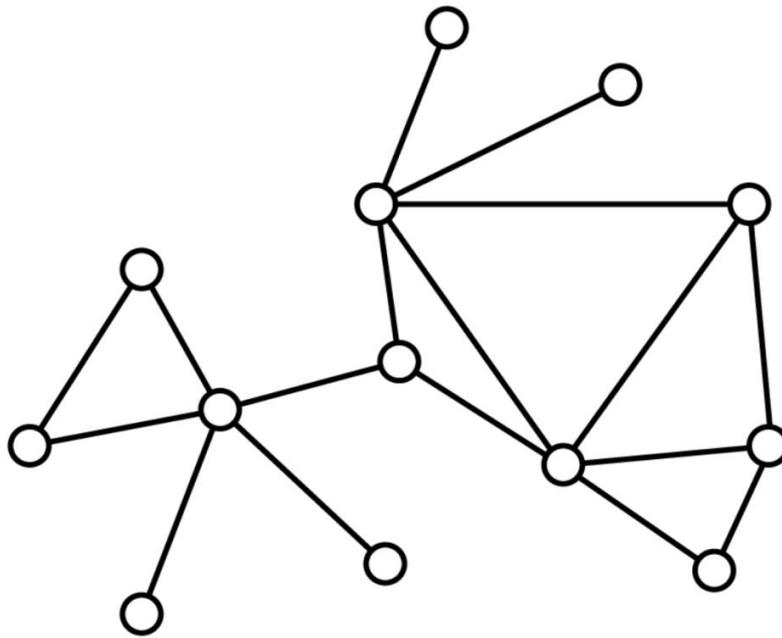


Figura 22: Exemplo de Grafo de Árvore

Fonte: Autor

**GABARITO**

Para iniciar a resolução do item, devemos identificar cada vértice:

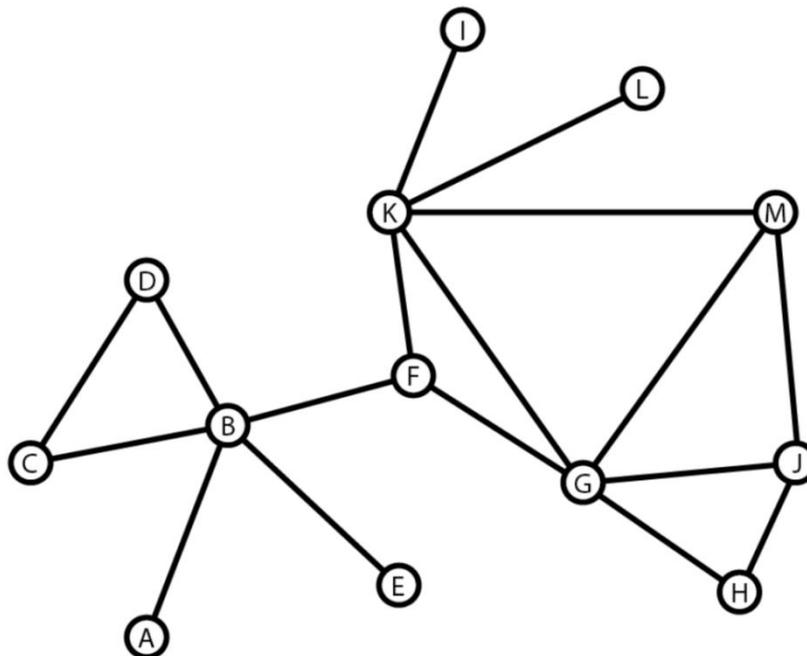


Figura 23: Identificando os Vértices no Grafo de Árvore

Fonte: Autor

- Agora iniciaremos por um vértice qualquer, por exemplo, o vértice (G). Este pintaremos de amarelo;
- Agora podemos ir para os vértices (F), (K), (M), (J) ou (H), e optaremos para o vértice (H), pintando-o de uma cor diferente do vértice (G).Então pintaremos (H) com a cor verde;
- Agora só podemos ir para o vértice (J), tendo de pintar tal vértice de outra cor diferente de amarelo ou verde.Optaremos por azul;
- Agora só podemos ir para o vértice (M), podendo pintá-lo de verde;
- Do vértice (M) só podemos ir para (K), e tal vértice deve ser pintado de azul;
- Do vértice (K), podemos ir para os vértices (I), (F) ou (L).Iremos para o vértice (I). Observe que este vértice pode ser pintado de amarelo ou verde. Optaremos por verde;
- O vértice (L) pode ser pintado também de verde;
- O vértice (F) só pode ser pintado de verde; e dele só podemos ir para o vértice (B), que pode ser pintado de amarelo ou azul. Optaremos por amarelo.
- Do vértice (B), temos 4 opções: os vértices (D), (C), (A) ou (E).Optaremos pelo vértice (D), e este vértice pode ser pintado de verde ou azul. Escolheremos azul;
- Deveremos seguir para o vértice (C) que deve ser pintado de verde;
- Já os vértices (A) e (E) podem ser pintados de verde ou azul, optaremos de pintá-los de azul.

Portanto o número cromático do Grafo proposto é igual a 3.



## Questão 2

Considere a tabela abaixo dos alunos que precisam fazer provas de recuperação, na mesma época, em uma escola do Ensino Fundamental:

Aluno	Disciplina
A	Matemática e Português
B	Matemática e Física
C	Física, Química e História
D	Português e Geografia
E	Matemática e Geografia
F	Português e Química
G	Geografia e História
H	Química e Artes

a) Monte um Grafo para a situação descrita acima, considerando:

- Os vértices representando as disciplinas;
- Uma aresta entre duas disciplinas indica que pelo menos um aluno estará fazendo as duas provas de recuperação.

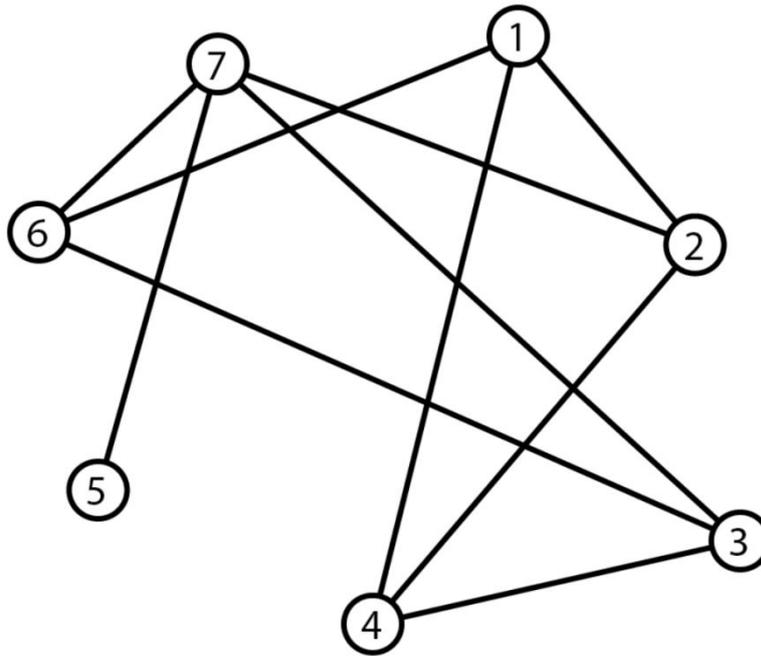
OBS.: As provas não podem acontecer no mesmo período.

b) Encontre o número mínimo de horários

### **GABARITO:**

a) Para cada vértice iremos denominar um valor:

- |                |               |
|----------------|---------------|
| 1 – Matemática | 2 – Português |
| 3 – História   | 4 – Geografia |
| 5 – Artes      | 6 – Física    |
| 7 – Química    |               |



**Figura 25: Construindo Grafo de Horários**

**Fonte: Autor**

b)

- Iniciaremos escolhendo um vértice. Escolheremos o vértice (1), e pintaremos ele de verde;
- Agora temos três opções para escolher: vértice (2), vértice (4) ou vértice (6). Iremos optar pelo vértice (2), pintando-o de azul;
- Agora podemos ir para o vértice (4) ou vértice (7); iremos para o vértice (4), pintando-o de amarelo;
- Agora iremos para o vértice (3), pintando-o de azul;
- Agora podemos ir para o vértice (7), pintando-o de verde;
- Agora podemos pintar os vértices (6), (5) e (4) de uma cor diferente das já utilizadas; iremos então pintar esses vértices de amarelo, observando que eles não são interligados, podendo ter a mesma cor.

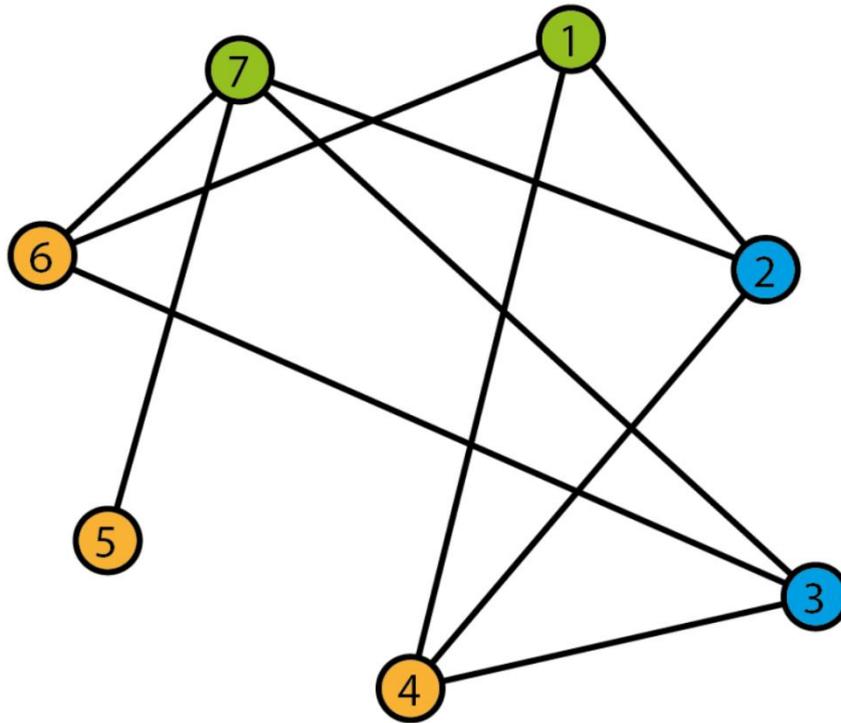


Figura 26: Coloração no Grafo de Horário

Fonte: Autor

Logo, o número mínimo de horários é igual a 3.

### Questão 3

Suponha que o Zoológico “VIDA SELVAGEM” tenha adquirido algumas novas espécies. Alguns destes novos elementos não podem partilhar a mesma jaula. A tabela abaixo mostra quais animais não podem ficar juntos, denotados por x.

	Tigre	Zebra	Girafa	Rinoceronte	Águia	Panda
Tigre		X				X
Zebra	X			X	X	
Girafa				X	X	
Rinoceronte		X	X		X	
Águia		X	X	X		
Panda	X					

Qual será o número de recintos em que podemos colocar os novos animais do Zoológico “VIDA SELVAGEM”?

### **GABARITO**

Denotaremos para cada animal uma letra:

Tigre – A

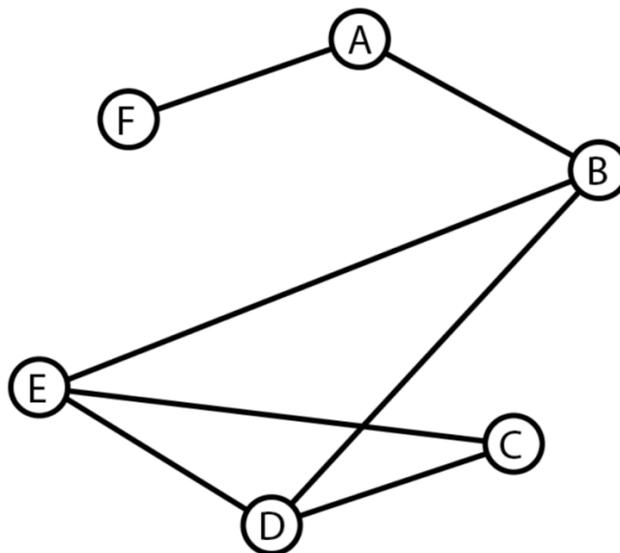
Zebra – B

Girafa – C

Rinoceronte – D

Águia – E

Panda - F



**Figura 27: Grafo do Zoológico**

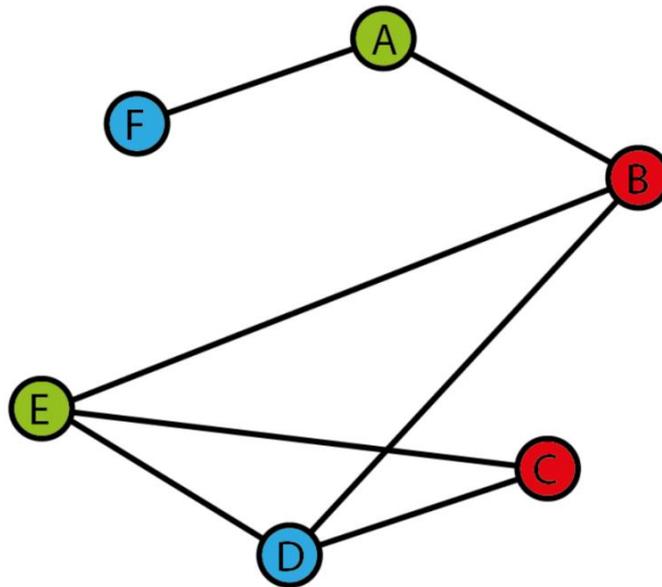
**Fonte: Autor**

Agora, iremos descobrir quantas cores são necessárias para colorir o Grafo acima, ou seja, encontrar o número de recintos necessários para alojar todos os 6 animais.

Iniciaremos escolhendo um vértice qualquer. Escolheremos o vértice (A), pintando-o de verde;

- Agora podemos ir para os vértices (B) ou (F). Optaremos pelo vértice (B), este deve ser pintado com uma cor diferente de verde.

- Pintaremos o vértice (B) de vermelho;
  - Agora podemos ir para o vértice (E) ou o vértice (D). Iremos para o vértice (E), que não pode ser pintado de vermelho.
  - Pintaremos o vértice (E) de verde;
  - Agora podemos ir para os vértices (D) ou (C). Iremos para o vértice (D), sendo que não podemos pintá-lo de verde nem de vermelho;
  - Então, pintaremos o vértice (D) de azul;
  - Agora devemos ir para o vértice (C), sendo que este vértice não pode ser pintado de azul, nem de verde; logo, deve ser pintado de vermelho;
  - Falta pintar o vértice (F), com a restrição na cor verde, ou seja, podemos optar pelas cores vermelho ou azul. Pintaremos, então, o vértice (F) de azul.
- Observe o Grafo abaixo



**Figura 28: Coloração no Grafo do Zoológico**

**Fonte: Autor**

Então foram necessárias 3 cores para colorir o Grafo, o que é equivalente a necessitar de 3 recintos para alojar os animais.

#### Questão 4

Quantas cores são necessárias para colorir o mapa, sendo que regiões adjacentes não podem ter a mesma cor?

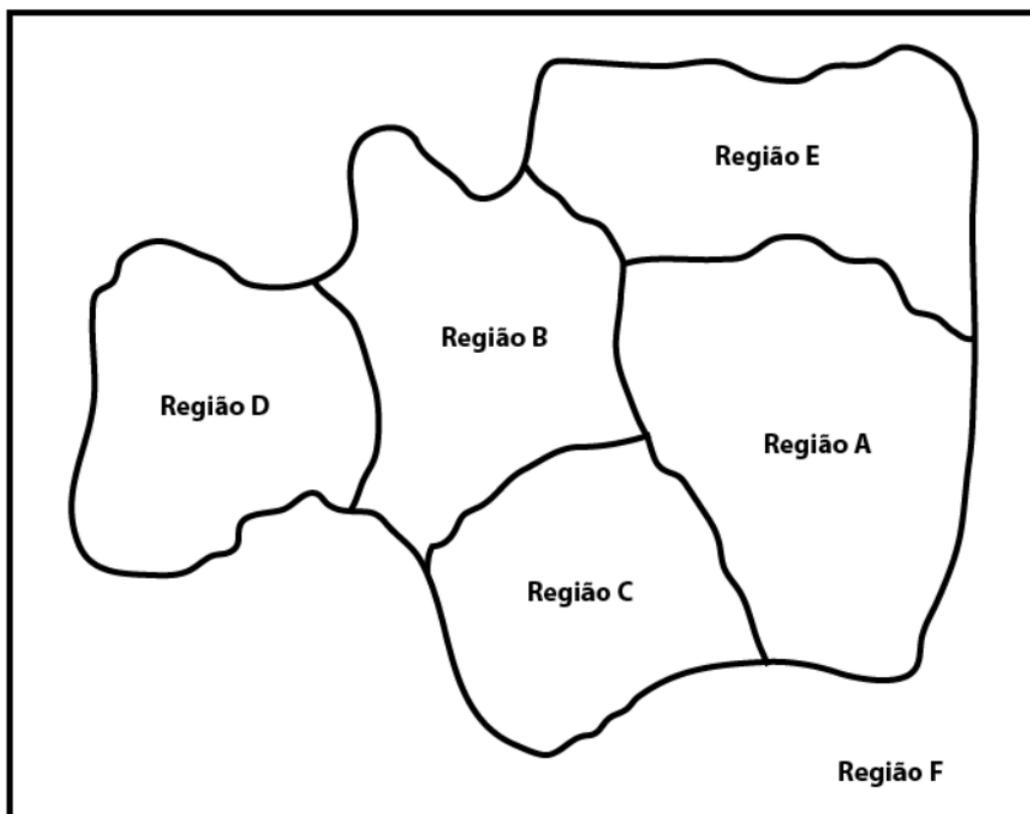
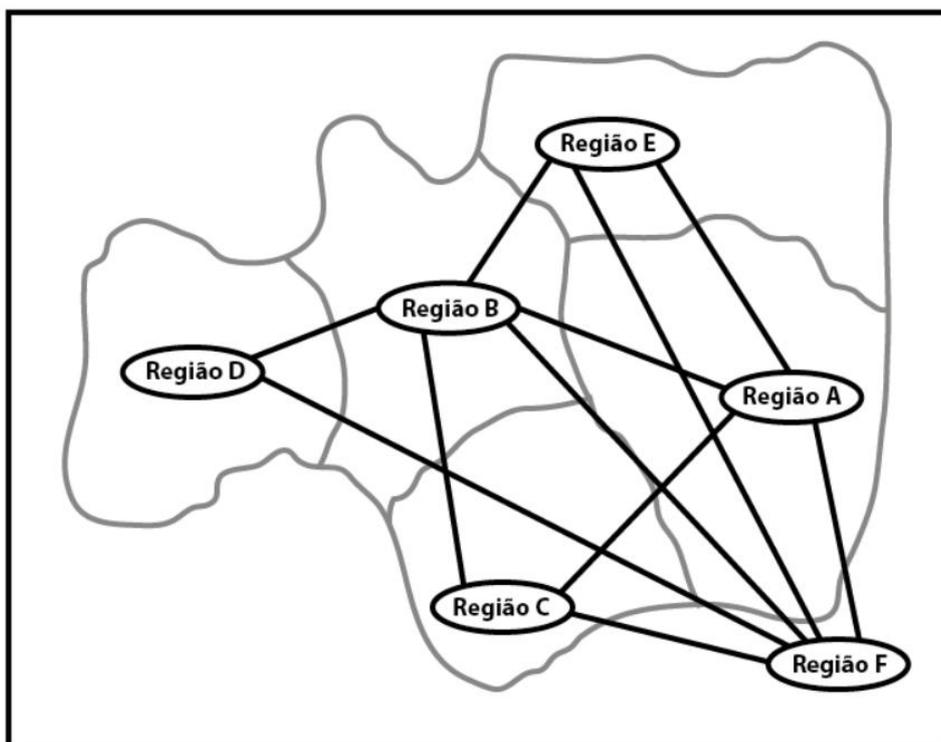


Figura 29: Mapa de uma região

Fonte: Autor

#### GABARITO:

Iremos iniciar a resolução deste item encontrando os vértices. Observe que, para encontrá-los, utilizamos o próprio mapa. Duas regiões adjacentes (com fronteira) não podem ser pintadas da mesma cor, portanto devemos ligá-las. Observe ainda que a região F é a parte externa do mapa, devendo ser considerado com um vértice e também seguindo os critérios para que se encontrem todas as arestas.



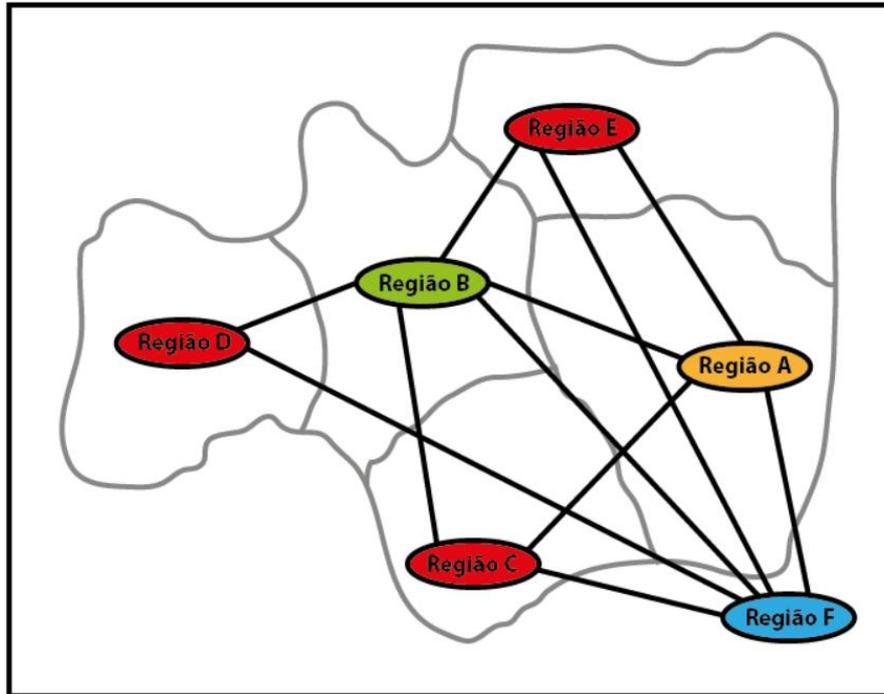
**Figura 30: Ligando os vértices do Grafo das Regiões**

**Fonte: Autor**

Depois de encontrar os vértices e as arestas, iniciaremos a coloração dos vértices:

- Escolheremos um vértice qualquer;
- Seja o vértice (E) escolhido, pintando-o de vermelho;
- Agora podemos ir para os vértices (B), (A) ou (F). Iremos para o vértice (F);
- Usaremos uma cor diferente de vermelho; então, pintaremos de azul;
- Agora podemos ir para os vértices (A), (B), (C) ou (D). Iremos para o vértice (D), pintando-o de vermelho;
- Do vértice (D), podemos ir para o vértice (B), este não podendo ser pintado nem de vermelho, nem de azul; então, pintaremos de verde;
- Agora podemos ir para o vértice (A) ou vértice (C). Iremos para o vértice (A), e este vértice não pode ser pintado com nenhuma das cores já utilizadas. Portanto deveremos pintá-lo de outra cor, e escolheremos amarelo.
- Sobrou apenas o vértice (C), e este vértice deve ser pintado de vermelho.

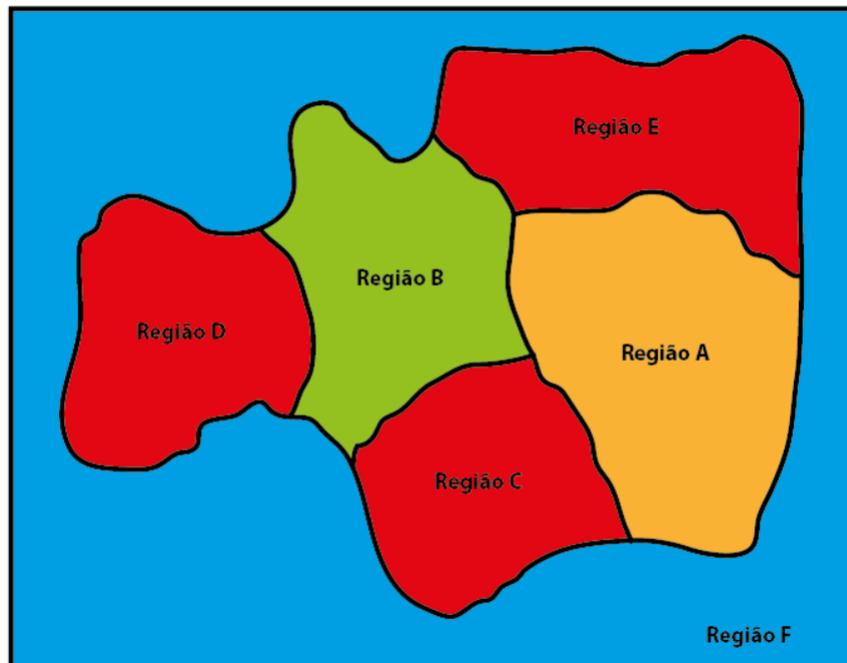
Observe o Grafo abaixo, com as suas respectivas cores:



**Figura 31: Coloração no Grafo das Regiões**

Fonte: Autor

Portanto, são necessárias 4 cores para colorir o Grafo proposto. Uma forma de pintar o Grafo segue abaixo:



**Figura 32: Coloração das Regiões**

Fonte: Autor

### 3. SUDOKU E COLORAÇÃO



<https://www.google.com.br/inventor+do+sudoku>

**Figura 33: Foto do Arquiteto Howard Garns**

Sudoku é um jogo de raciocínio e lógica que foi inventado pelo arquiteto Howard Garnsem, em 1979, este jogo foi publicado na revista Dell, especializada em raciocínio lógico.

[...] o jogo é uma oportunidade para que o aluno seja conduzido ao desenvolvimento de um pensamento matemático que o leve, quando exposto a uma determinada situação, possa ler, interpretar, organizar, criar estratégias que possibilite encontrar soluções possíveis para essa situação, bem como, de uma forma mais ampla, compreender o mundo que o rodeia, ser crítico e autônomo no pensar e no aprender. (DIAS, 2016, pg 17)

Segundo Guilherme Massa, a criação de tal jogo não foi imediata;o passatempo foi levado para o Japão em 1984 pela Nikoli (uma espécie de revista Coquetel oriental) e recebeu o nome de "suujiwadokushinnikagiru", que significa "o número que deve aparecer uma só vez". O presidente da companhia fez pequenas alterações e renomeou o jogo para Sudoku. Em japonês, "su" quer dizer "número" e "doku" corresponde a "único".

Em 1997, o Juiz Wayne Gould, aposentado em Hong Kong, estudou durante seis anos uma maneira de criar um programa de computador que gerasse novos jogos rapidamente. Com a invenção do programa, ele ofereceu em 12 de novembro de 2004 ao jornal The Times, fazendo com que se

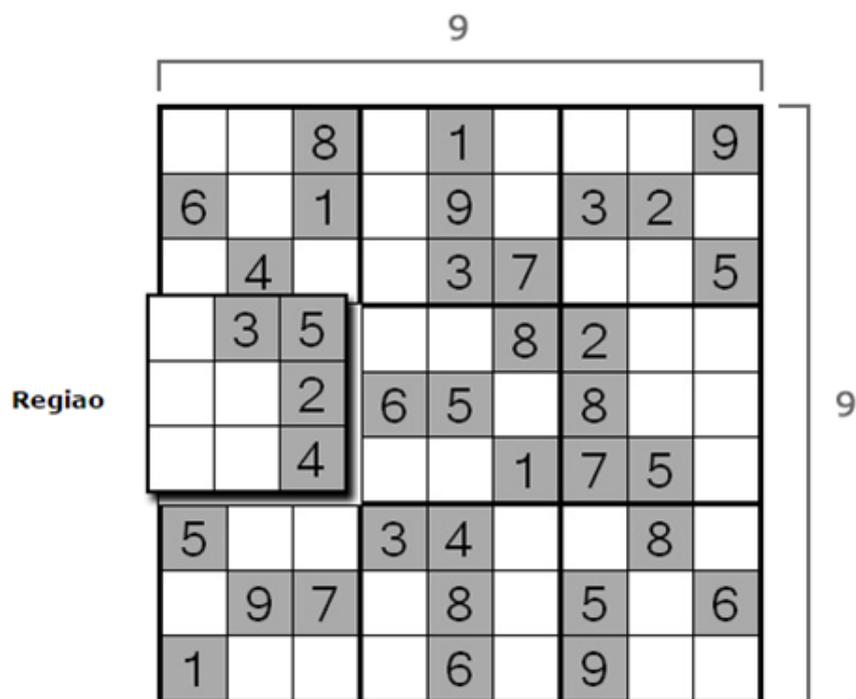
tornasse uma mania mundial. Em menos de um ano, vários jornais, como por exemplo The Guardian, entre outros, já utilizavam o novo passatempo. No Brasil, o Sudoku passou a ser divulgado pela revistinha Coquetel em 1994, mas o nome utilizado não era o tradicional Sudoku, e sim “de 1 a 9”. Com o passar do tempo e cada vez mais apreciado pelos brasileiros seu nome original entrou em vigor.

O Sudoku foi elaborado a partir de vários outros jogos e tinha como objetivo principal alcançar os idosos, como forma de distração e passatempo. Um dos jogos que precederam o Sudoku foi o Quadrado Latino, elaborado por Leonhard Euler no século XVIII. Tal jogo era uma espécie de matriz quadrada, ou seja, uma matriz onde o número de linhas tem que ser igual ao número de colunas, onde os elementos não se repetem nas linhas nem nas colunas. Este jogo foi elaborado para o estudo específico da álgebra. Vale ressaltar que outros jogos antecederam inclusive o Quadrado Latino feito por Leonhard Euler, sendo que o mais antigo Quadrado Mágico de que se tem informação é o LoShu Square, encontrado em manuscritos chineses de 2800 AC. Depois de saber um pouco da história da origem do Sudoku, serão definidas as regras desse jogo.

### 3.1 REGRAS DO SUDOKU

Para mostrar as regras, usaremos como exemplo o Sudoku na malha 9x9:

Dividimos a malha quadrada em sub-malhas de quadrados 3x3, chamando-as de **região**. Observe o exemplo abaixo:



<http://www.sudoku.name/rules/pt.>

**Figura 34: Exemplo de Sudoku**

O jogo é iniciado com algumas “casas” (quadrados) já preenchidas com números. Observe o exemplo abaixo:

		8		1				9
6		1		9		3	2	
	4			3	7			5
	3	5			8	2		
		2	6	5		8		
		4			1	7	5	
5			3	4			8	
	9	7		8		5		6
1				6		9		

<http://www.sudoku.name/rules/pt.>

**Figura 35: Exemplo de Sudoku**

O objetivo do Sudoku é preencher os quadrados vazios com números entre 1 e 9 (apenas um número em cada quadrado) de acordo com as seguintes regras:

- Um número pode aparecer apenas uma vez em cada linha. Observe o exemplo abaixo:

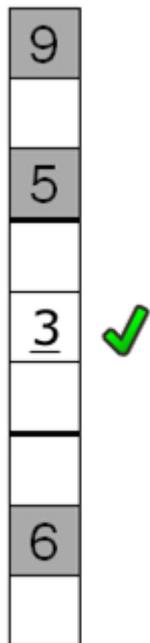
Permitido	<table border="1"><tr><td></td><td><u>2</u></td><td>8</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>9</td></tr></table>		<u>2</u>	8		1				9	✓
	<u>2</u>	8		1				9			
Nao permitido	<table border="1"><tr><td></td><td><u>1</u></td><td>8</td><td></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td>9</td></tr></table>		<u>1</u>	8		1				9	✗
	<u>1</u>	8		1				9			

<http://www.sudoku.name/rules/pt.>

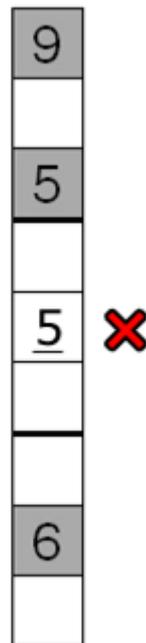
**Figura 36: Regras de Sudoku**

-Um número pode aparecer apenas uma vez em cada coluna. Observe o exemplo abaixo:

Permitido



Nao permitido

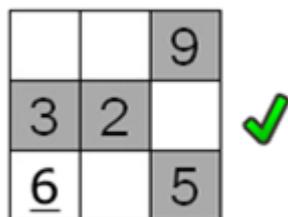


<http://www.sudoku.name/rules/pt.>

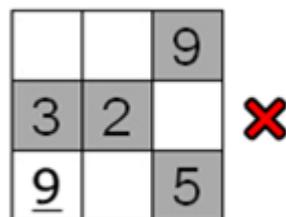
**Figura 37: Regras de Sudoku**

- Um número pode aparecer apenas uma vez em cada quadrante.  
Observe o exemplo abaixo:

Permitido



Nao permitido



<http://www.sudoku.name/rules/pt.>

**Figura 38: Regras de Sudoku**

### 3.2. RESOLVENDO SUDOKU USANDO COLORAÇÃO

O objetivo de falarmos do Sudoku é que este jogo pode ser resolvido utilizando coloração. Para tal, devemos pensar que cada quadrado representa um vértice do nosso Grafo e que um mesmo número não pode se repetir na mesma linha ou na mesma coluna, ou ainda na mesma região, ou seja, observando como um problema de incompatibilidade, as arestas serão exatamente as restrições que regem as regras do Sudoku. Com isso podemos formar os Grafos, e cada número será representado por uma cor. Portanto se o Sudoku for do tipo 9x9, teremos nove cores para colorir nosso Grafo, se o Sudoku for menor, como por exemplo 4x4, usaremos apenas quatro cores. A seguir faremos um exemplo de Sudoku utilizando Grafos. Por uma questão de tamanho, utilizaremos o Sudoku 4x4, que é de fácil entendimento e possibilitará uma dinâmica mais satisfatória. Iremos resolver um exemplo de Sudoku 4x4:

	4	1	
	2		
	1	2	3

**Figura 39: Exemplo de Sudoku 4x4**

**Fonte: Autor**

Para iniciar a resolução do Sudoku acima, devemos representar cada quadrado por um símbolo, já que eles serão os vértices do nosso Grafo.

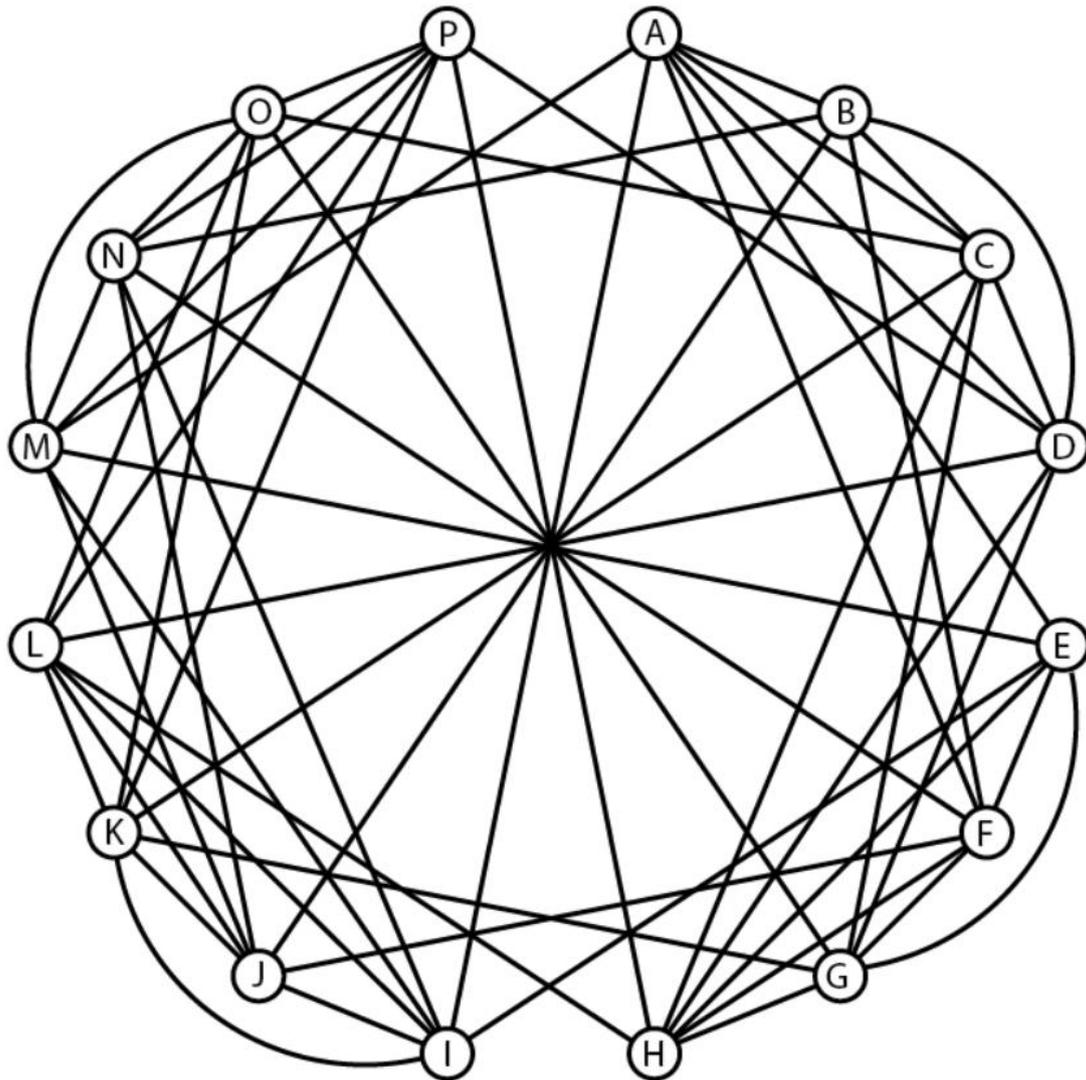
A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

**Figura 40: Identificando os vértices**

**Fonte: Autor**

Agora, construiremos o nosso Grafo com as seguintes características:

- Cada quadrado corresponde a um vértice;
- Cada aresta vai representar uma ligação entre dos vértices, de tal forma que quando dois vértices estiverem na mesma linha, ou na mesma coluna, ou na mesma região, então essa ligação será a nossa aresta.



**Figura 41: Grafo do Quadrado Mágico**

**Fonte: Autor**

Observe que mesmo resolvendo o Sudoku 4x4, que teoricamente seria pequeno, o Grafo ficou grande. Depois de construir o Grafo, temos que representar cada número, de 1 a 4, com uma cor afim de começarmos a determinar a Coloração do Grafo.

Colocaremos as seguintes cores:

Número 1 – Verde;

Número 2 – Vermelho;

Número 3 – Amarelo;

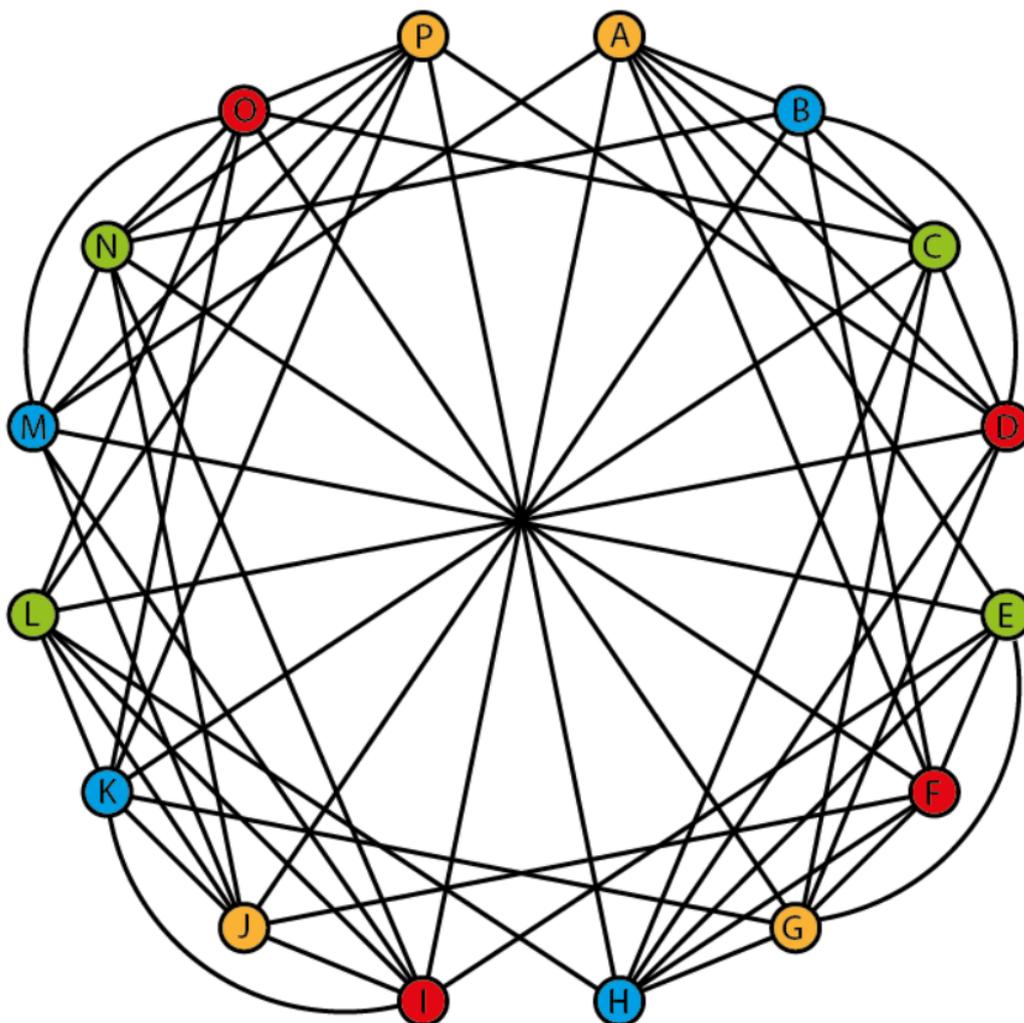
Número 4 – Azul.

Devemos lembrar que dois vértices que estejam ligados por uma aresta, nunca podem ter a mesma cor.

Já sabemos que alguns números foram colocados inicialmente no exercício proposto, logo, já podemos identificá-lo com as suas respectivas cores, vejamos:

- O vértice (B) será azul, já o vértice (C) será verde, o vértice (F) será vermelho, o vértice (K) será vermelho, o vértice (N) será verde e por fim o vértice (P) será amarelo.

Com essas informações construímos o seguinte Grafo:



**Figura 42: Coloração em Grafo**

Fonte: Autor

Ou ainda, usando Número 1 – Verde;

Número 2 – Vermelho;

Número 3 – Amarelo;

Número 4 – Azul.

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

3	4	1	2
1	2	3	4
2	3	4	1
4	1	2	3

**Figura 43: Resolvendo o Sudoku**

Fonte: Autor

## **4. METODOLOGIA**

Neste capítulo descrevemos a metodologia usada na realização dessa pesquisa: a escolha do público-alvo, o Questionário Inicial, o Teste 1, o relato da maneira como foram realizadas as aulas teóricas e práticas, o Teste 2, e o Questionário Final com os alunos.

### **4.1. SUJEITOS DA PESQUISA**

A pesquisa foi desenvolvida em uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental do Educandário Monteiro Lobato, da rede particular de ensino, localizado em Campo Grande, Rio de Janeiro, durante os meses de outubro e novembro de 2016, utilizando um público de 40 alunos, (com faixa etária entre 12 e 14 anos). Este grupo foi escolhido pelo fato de estarem no final do Ensino Fundamental e por terem os pré-requisitos necessários à realização das atividades relacionadas à pesquisa.

### **4.2. METODOLOGIA DE PESQUISA**

Este trabalho foi realizado adotando a metodologia de pesquisa de estudo de caso. Foi realizado um procedimento de pesquisa experimental num único grupo, e foram feitas comparações de resultados obtidos antes e depois do experimento (aulas) realizado. Primeiramente foi aplicado o questionário inicial (adaptado do questionário de Gontijo), com a intenção de obter informações prévias sobre a relação do aluno com a Matemática. Em seguida, foi aplicado o Teste 1, com a intenção de verificar como os alunos resolvem certas questões de raciocínio lógico com temas bastante familiares, tratando de problemas de incompatibilidade, ainda sem aprender técnicas de Coloração. Após o questionário e o Teste 1, foram abordadas aulas teóricas e práticas sobre Grafos (sendo dada uma atenção especial para a parte de Coloração de Vértices), e foram aplicadas atividades propondo situações-problema reais dentro do cotidiano do aluno. Na sequência, foi aplicado o Teste 2, nos moldes do Teste 1, agora observando se eles usaram as técnicas aprendidas. Por fim, foi aplicado o questionário final, com a finalidade de apurar se a motivação para

o estudo de Matemática aumentou. Sobre esta forma de investigação, Gil (2008) escreve que consiste essencialmente em submeter os objetos de estudo à influência de certas variáveis, em condições controladas pelo investigador, para observar os resultados que a variável produz no objeto.

### **4.3. DESCRIÇÃO DAS AULAS**

Nesta etapa do trabalho iremos descrever como foram realizados os testes, bem como todas as aulas e questionários aplicados neste estudo de caso.

#### **4.3.1. AULA 1: QUESTIONÁRIO INICIAL**

Na aula 1 foi aplicado o Questionário Inicial, adaptado do Questionário de Gontijo (a Escala de Motivação em Matemática), com o objetivo de analisar o grupo de alunos escolhidos. Este questionário procura mensurar de alguma forma a motivação para o estudo em Matemática. Ele possui as seguintes possibilidades de resposta: (1) nunca; (2) raramente; (3) às vezes; (4) frequentemente; (5) sempre. Tal questionário pode identificar aspectos e características de alunos que estejam motivados para o estudo em Matemática.

A Escala de Motivação em Matemática é um instrumento composto por 28 itens, agrupados em 6 fatores, que visa investigar o nível de motivação dos alunos em Matemática. O Fator 1 foi denominado de 'Satisfação pela Matemática' (8 itens) e representa os sentimentos que os estudantes têm em relação a esta área do conhecimento; o Fator 2, denominado Jogos e desafios (4 itens) representa as percepções dos alunos quanto ao seu apreço em particular de atividades lúdicas e desafiadoras relacionadas à Matemática; Fator 3 – Resolução de Problemas (5 itens), expressa os sentimentos dos alunos face à atividade de resolução de problemas; Fator 4 – Aplicações do Cotidiano (5 Itens) representa as percepções dos alunos quanto à aplicabilidade e a presença da Matemática em algumas situações do cotidiano; Fator 5 – Hábitos de Estudo (4 itens) refere-se à dedicação aos estudos e ao tempo despendido com as atividades escolares; Fator 6 : Interações na Aula de Matemática (2 itens), refere-se à participação nas aulas de Matemática e à forma como o aluno se relaciona com o professor desta disciplina. (GONTIJO, 2007, p.92-93)

1° )Satisfação pela Matemática:

**Tabela 2 – Satisfação pela Matemática**

	Fator 1 – Satisfação pela Matemática	Quantidade de respostas				
	Itens:	1	2	3	4	5
19	As aulas de Matemática estão entre as minhas aulas preferidas.					
20	Quando me pedem para resolver problemas de Matemática, fico nervoso (a).					
23	Tenho muita dificuldade para entender Matemática.					
24	Matemática é “chata”					
25	Aprender Matemática é um prazer					
26	Testo meus conhecimentos resolvendo exercícios e problemas					
27	Tenho menos problemas com matemática do que com as outras disciplinas					
28	Consigo bons resultados em Matemática					

2°) Jogos e desafios

**Tabela 3 – Jogos e desafios**

	Fator 2 – Jogos e Desafios	Quantidade de respostas				
	Itens:	1	2	3	4	5
1	Participo de competições com meus amigos resolvendo problemas matemáticos ou de raciocínio.					
7	Gosto de brincar de quebra-cabeça e jogos que envolvam raciocínio lógico.					
12	Procuro relacionar a Matemática aos conteúdos das outras disciplinas					
14	Gosto de elaborar desafios envolvendo noções de Matemática para meus amigos e familiares.					

### 3º) Resolução de problemas

**Tabela 4 – Resolução de problemas**

	Fator 3 – Resolução de problemas	Quantidade de respostas				
	Itens:	1	2	3	4	5
9	Gosto de resolver os exercícios rapidamente.					
10	Tento resolver um mesmo problema matemático de maneiras diferentes.					
11	Fico frustrado(a) quando não consigo resolver um problema de Matemática.					
21	Diante de um problema, sinto muita curiosidade em saber sua resolução.					
22	Quando minhas tentativas de resolver um problema fracassam, tento de novo.					

### 4º) Aplicações no Cotidiano

**Tabela 5 – Aplicações no cotidiano**

	Fator 4 – Aplicações no Cotidiano	Quantidade de respostas				
	Itens:	1	2	3	4	5
2	Costumo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos matemáticos.					
3	Calculo o tempo que vou gastar ao sair de casa para chegar ao destino que pretendo.					
4	Faço desenhos usando formas geométricas					
5	Percebo a presença da Matemática nas atividades que desenvolvo fora da escola					
6	Faço “continhas de cabeça” para calcular valores quando estou fazendo compras ou participando de jogos.					

5°) Hábitos nos estudos

**Tabela 6 – Hábitos de estudo**

Fator 5 – Hábitos de Estudo		Quantidade de respostas				
Itens:		1	2	3	4	5
13	Estudo Matemática todos os dias durante a semana.					
15	Realizo as tarefas de casa que o professor de Matemática passa.					
17	Estudo as matérias de Matemática antes que o professor as ensine na sala de aula.					
18	Além do meu caderno, eu costumo estudar Matemática em outros livros para fazer provas e testes.					

6°) Interação na sala de aula

**Tabela 7 – Interação na sala de aula**

Fator 6 – Interação na sala de aula		Quantidade de respostas				
Itens:		1	2	3	4	5
8	Faço perguntas nas aulas de Matemática quando eu tenho dúvidas.					
16	Relaciono-me bem com meu professor de Matemática.					

### 4.3.2. AULA 2: TESTE 1

Na aula 2 foi aplicado o Teste 1, um teste composto por quatro itens envolvendo problemas do dia-a-dia do aluno que podem ser solucionados com os conhecimentos “básicos”, ou seja, sem a utilização dos conceitos de Grafos, com o intuito de avaliar como os mesmos resolvem os problemas de incompatibilidade. Para o Teste 1 os alunos foram esclarecidos sobre dúvidas que surgiram, sem influenciar na resolução dos itens. Os mesmos foram orientados a realizar as atividades da forma como acreditavam que deviam ser feitas, e as mesmas foram aplicadas sem a permissão de consulta a qualquer tipo de material ou troca de informações entre eles. Este teste teve duração de 80 minutos. Este tempo foi estabelecido imaginando que cada aluno tinha 20 minutos para resolver cada item. O Teste 1 segue abaixo:

#### Questão 1.

**Em um pet shop, uma vendedora precisa expor 7 peixes exóticos em alguns aquários para venda. Alguns desses peixes não podem ficar com certos peixes, por risco de conflito. A tabela abaixo mostra quais peixes não podem ficar juntos, denotados por x. Qual é o número mínimo de aquários necessários para expor todos esses peixes?**

**Tabela 8: Conflito de peixes**

Peixe	A	B	C	D	E	F	G
A	-	x	x	x	x	x	x
B	X	-				x	x
C	X		-			x	
D	X			-		x	x
E	X				-		
F	X	x	x	X		-	
G	X	x		x			-

**Questão 2.**

Em um canil de reabilitação de cães abandonados, a equipe acabou de receber 6 novos cachorros encontrados, e precisa colocá-los em diferentes casinhas para passar a primeira noite. Constatou-se que alguns desses cães ficam extremamente agressivos na presença de alguns do mesmo grupo, logo, terão que alocá-los em casinhas diferentes. O cachorro A não pode ficar com os cachorros C, D ou E. Os cachorros B e F não podem ficar juntos. O cachorro E não pode ficar com os cachorros D nem F. Quantas casinhas serão necessárias para acomodar os 6 cachorros?

**Questão 3.**

Um químico deseja embarcar os produtos A, B, C, D, E, F, G usando o menor número de containers. Alguns produtos não podem ser colocados num mesmo container porque reagem entre si. Quaisquer dos dois produtos entre A, B, C, G reagem, A reage com F e D, e E também reage com F e D. Qual é o menor número de containers necessários para embarcar os produtos com segurança?

**Questão 4.**

Quantas cores são necessárias para colorir o mapa do Brasil, sendo que regiões adjacentes não podem ter a mesma cor?



**Figura 44: Mapa do Brasil dividido por Regiões**

**Fonte: Autor**

Em relação à pontuação dos testes, foi seguido o seguinte critério de correção:

**-Insuficiente ( I ):** 0 a 3,9 pontos. O desenvolvimento não atende minimamente ao objetivo proposto da atividade;

**-Regular ( R ):** 4 a 5,9 pontos. O desenvolvimento atende minimamente ao objetivo proposto da atividade;

**-Bom ( B ):** 6 a 7,9 pontos. O desenvolvimento atende satisfatoriamente ao objetivo proposto da atividade;

**-Muito Bom ( MB ):** 8 a 10 pontos. O desenvolvimento atende plenamente ao objetivo proposto da atividade.

Cada atividade desenvolvida pelos alunos no Teste 1 teve um objetivo específico; tais objetivos de cada atividade estão descritos a seguir:

**Questão 1:** Descobrir o número mínimo de aquários necessários para expor 7 peixes, sabendo que alguns deles não podem ficar juntos.

OBJETIVO: Espera-se que o aluno consiga fazer uma relação entre o número de peixes e as condições pré-estabelecidas na tabela para poder localizar os peixes em seus devidos aquários, e conseqüentemente encontrar o menor número de aquários necessários para distribuir tais peixes.

**Questão 2:** Encontrar o número de casas para alojar 6 cachorros.

OBJETIVO: Espera-se que o aluno consiga relacionar o número de cachorros com as casinhas, observando as restrições impostas pelo exercício. Vale ressaltar que o fato de não ter uma tabela ilustrando tais restrições deve dificultar o entendimento da questão.

**Questão 3:** Descobrir o número mínimo de containers para alocar elementos químicos em segurança.

OBJETIVO: Espera-se que o aluno consiga relacionar o número de elementos químicos com os containers, observando as restrições impostas pelo exercício. Cumpre ressaltar que o fato de não ter uma tabela ilustrando tais restrições deve dificultar o entendimento da questão.

**Questão 4:** Quantidade mínima de cores diferentes para pintar um mapa.

OBJETIVO: Descobrir o número mínimo de cores necessárias para pintar o mapa do Brasil, observando que regiões adjacentes não podem ter a mesma cor. Foi informado aos alunos que a região externa do mapa do Brasil também deve ser pintada.

### **4.3.3. AULAS 3, 4 e 5: EMBASAMENTO TEÓRICO E PRÁTICO SOBRE A TEORIA DOS GRAFOS**

Para as aulas 3, 4 e 5 foi formulado uma espécie de resumo sobre conceitos básicos e definições sobre Teoria dos Grafos, ou seja, foi feito um embasamento teórico dos principais pontos de Teoria dos Grafos.

Além das definições e conceitos básicos, foram resolvidos nas aulas exercícios clássicos para exemplificar e ilustrar o que seria trabalhado, tais como o número mínimo de cores necessárias para colorir o mapa do Brasil, o número de casinhas para acomodar os 6 cachorros, o número mínimo de aquários necessários para expor todos os peixes, ou ainda, o menor número de containers necessários para embarcar os produtos químicos. São itens que foram cobrados no Teste 1 e que serão resolvidos utilizando as técnicas e conceitos falados nas aulas teóricas, para que os alunos tenham condições de relacionar os itens do Teste 1 com Coloração em Grafos.

Outros três tópicos foram resolvidos com os alunos; o primeiro foi encontrar o número cromático de dois Grafos, o segundo foi o clássico desafio dos Semáforos e por fim foi resolvido um Sudoku 4x4.

Acreditamos que com o embasamento teórico, juntamente com a resolução dos itens, os alunos estariam mais aptos a resolver o Teste 2.

### **4.3.4. AULA 6: CONSTRUINDO UM GRAFO HUMANO DOS ELEMENTOS QUÍMICOS**

Na aula 6, com duração de 50 minutos, trabalhamos de forma interativa com o item que fala dos elementos químicos:

Questão trabalhada:
---------------------

**Um químico deseja embarcar os produtos A, B, C, D, E, F usando o menor número de containers. Alguns produtos não podem ser colocados num mesmo container porque reagem entre si. Quaisquer dos dois produtos entre A, B, C reagem, A reage com F e D, e E também reage com F e D. Qual é o menor número de containers necessários para embarcar os produtos com segurança?)**

Esta atividade consiste em construir com os alunos um Grafo, onde cada vértice será representado por um aluno e as arestas serão feitas com barbante. Como este item tem seis elementos químicos, serão formados cinco Grafos, uma vez que, a turma é formada por 35 alunos. O objetivo desta atividade é apresentar para os alunos a Coloração como um assunto dinâmico e prazeroso.

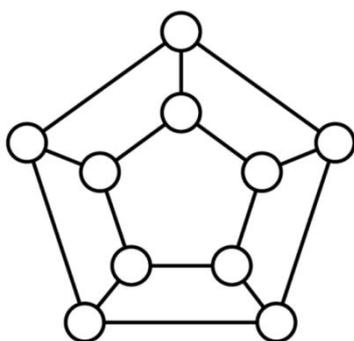
#### 4.3.5. AULAS 7 e 8: APLICAÇÃO DO TESTE 2 E QUESTIONÁRIO FINAL

Essa etapa da pesquisa consiste em aplicar na turma o Teste 2, formado com quatro itens, tendo como base o Teste 1, com a finalidade de avaliar os conhecimentos adquiridos pelos alunos em relação a todos os conceitos e definições sobre Teoria dos Grafos, bem como o estudo de Coloração. Nesse Teste 2, a duração será de 80 minutos, seguindo os moldes da aplicação do Teste 1. O Teste 2 está exposto a seguir:

##### Questão 1.

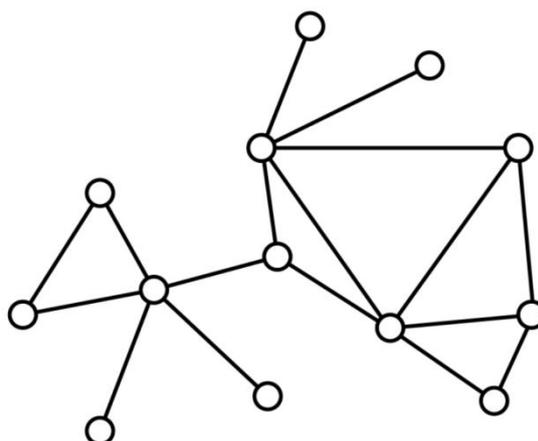
Determine o número cromático dos Grafos abaixo:

a)



Fonte: Autor

b)



Fonte: Autor

Figura 45: Exemplos de Grafos para encontrar o número cromático.

**Questão 2**

Considere a tabela abaixo dos alunos que precisam fazer provas de recuperação, na mesma época, em uma escola do Ensino Fundamental:

**Tabela 9: Quadro de Horário**

<b>Aluno</b>	<b>Disciplina</b>
<b>A</b>	<b>Matemática e Português</b>
<b>B</b>	<b>Matemática e Física</b>
<b>C</b>	<b>Física, Química e História</b>
<b>D</b>	<b>Português e Geografia</b>
<b>E</b>	<b>Matemática e Geografia</b>
<b>F</b>	<b>Português e Química</b>
<b>G</b>	<b>Geografia e História</b>
<b>H</b>	<b>Química e Artes</b>

**a) Monte um Grafo para a situação descrita acima, considerando:**

- Os vértices representando as disciplinas;
- A aresta entre duas disciplinas indica que pelo menos um aluno estará fazendo as duas provas de recuperação.

**OBS.: As provas não podem acontecer no mesmo período.**

**b) Encontre o número mínimo de horários.**

**Questão 3.**

Suponha que o Zoológico “VIDA SELVAGEM” tenha adquirido algumas novas espécies. Alguns destes novos elementos não podem partilhar a mesma jaula. A tabela abaixo mostra quais animais não podem ficar juntos, denotados por x.

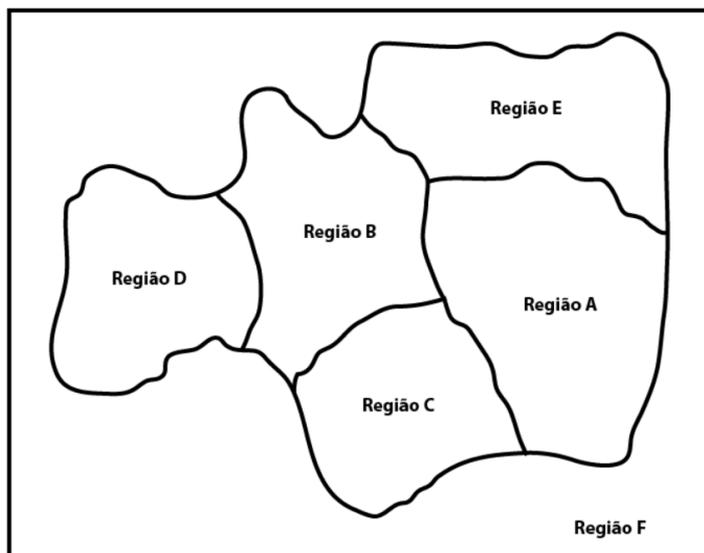
**Tabela 10: Animais do Zoológico**

	<b>Tigre</b>	<b>Zebra</b>	<b>Girafa</b>	<b>Rinoceronte</b>	<b>Águia</b>	<b>Panda</b>
<b>Tigre</b>		X				X
<b>Zebra</b>	X			X	X	
<b>Girafa</b>				X	X	
<b>Rinoceronte</b>		X	X		X	
<b>Águia</b>		X	X	X		
<b>Panda</b>	X					

Qual será o número de recintos em que podemos colocar os novos animais do Zoológico “VIDA SELVAGEM”?

#### Questão 4

Quantas cores são necessárias para colorir o mapa, sendo que regiões adjacentes não podem ter a mesma cor?



**Figura 46: Mapa de uma Região**

**Fonte: Autor**

Cada atividade a ser desenvolvida pelos alunos no Teste 2 teve um objetivo específico; tais objetivos de cada atividade estão descritos a seguir:

**Questão 1:** Determine o número cromático dos Grafos.

OBJETIVO: Descobrir o número mínimo de cores necessárias para colorir o Grafo proposto.

**Questão 2:** Número mínimo de horários para construir um Grafo que represente um quadro de horários das provas de recuperação de uma escola.

OBJETIVO:

a) Associar o quadro de horários de provas a um Grafo.

b) Encontrar o número mínimo de cores necessárias para colorir o Grafo encontrado na letra A e como consequência encontrar o número de horários necessários para a realização das provas.

**Questão 3:** Qual será o número de recintos em que podemos colocar os novos animais do Zoológico “VIDA SELVAGEM”?

OBJETIVO: Espera-se que o aluno consiga fazer uma relação entre o número os animais e as condições pré-estabelecidas na tabela para conseguir colocá-los nos seus devidos recintos, e conseqüentemente encontrar o menor número de recintos necessários para distribuir tais animais.

**Questão 4:** Quantidade mínima de cores diferentes para pintar um mapa.

OBJETIVO: Descobrir o número mínimo de cores necessárias para pintar o mapa, observando que regiões adjacentes não podem ter a mesma cor. Vale ressaltar foi informado ao aluno que a região externa do mapa também deve ser pintada.

Além do Teste 2, os alunos responderam ao Questionário Final, com objetivo de saber se houve uma evolução na motivação e no interesse dos mesmos. Este Questionário será aplicado como última parte das atividades dos alunos e terá duração de 50 minutos, assim como, o Questionário Inicial. O Questionário Final segue abaixo:

**1- Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática.**

**Concordo Totalmente**  **Concordo**  **Discordo**  **Discordo Totalmente**  
**Justifique sua resposta.**

---

**2- Achei fácil estudar os conteúdos sobre Grafos.**

**Concordo Totalmente**  **Concordo**  **Discordo**  **Discordo Totalmente**  
**Justifique sua resposta.**

---

**3- Achei fácil estudar os conteúdos sobre Coloração.**

**( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente**  
**Justifique sua resposta.**

\_\_\_\_\_.

**4- Entendi as várias situações onde podemos aplicar a Técnica de Coloração.**

**( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente**  
**Justifique sua resposta.**

\_\_\_\_\_.

**5- Achei mais interessante resolver problemas de Matemática utilizando Grafos do que da maneira tradicional.**

**( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente**  
**Justifique sua resposta.**

\_\_\_\_\_.

**6- Depois das aulas, busquei mais informações sobre Grafos na internet.**

**( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente**  
**Justifique sua resposta.**

\_\_\_\_\_.

**7- Fiquei mais motivado para estudar Matemática após descobrir que Grafo pode ser usado para resolver problemas do cotidiano, como os problemas do das placas de computador, encontrar número mínimo de cores para pintar um mapa etc.**

**( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente**  
**Justifique sua resposta.**

\_\_\_\_\_.

**8- Acredito que a aula 6, construindo o Grafo dos elementos químicos, fez com que eu conseguisse enxergar mais claramente Coloração em Grafos.**

**( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente**  
**Justifique sua resposta.**

\_\_\_\_\_.

**9- Acredito que a aula 6, construindo o Grafo dos elementos químicos, foi uma forma agradável e divertida de ilustrar a Teoria dos Grafos.**

**( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente**  
**Justifique sua resposta.**

---

---

**10- Dentro do conteúdo aprendido nas aulas sobre Grafos, gostei mais de (marque apenas uma alternativa):**

- (a) Encontrar o número cromático dos Grafos.**
- (b) Horário das provas de recuperação.**
- (c) Zoológico “VIDA SELVAGEM”?**
- (d) Menor número de cores para pintar um mapa.**

**Justifique sua resposta.**

---

---

---

---

---

---

---

---

## 5. RESULTADOS E ANÁLISES

Nas seções a seguir descrevem-se as considerações, resultados e análises observadas em relação ao Questionário Inicial, ao Teste 1, ao Teste 2 e ao Questionário Final.

### 5.1. CONSIDERAÇÕES SOBRE O QUESTIONÁRIO INICIAL



**Figura 47: Foto dos Alunos respondendo ao Questionário de Gontijo**

**Fonte: Autor**

O Questionário Inicial foi aplicado com o objetivo de mensurar a motivação dos alunos para o estudo da Matemática; portanto, veremos abaixo o resultado em porcentagem, com base nas respostas dadas pelos discentes.

1° ) Satisfação pela Matemática:

**Tabela 11 – Satisfação pela Matemática**

	Fator 1 – Satisfação pela Matemática	Quantidade de respostas				
		1	2	3	4	5
19	As aulas de Matemática estão entre as minhas aulas preferidas.	8%	16%	52%	16%	8%
20	Quando me pedem para resolver problemas de Matemática, fico nervoso (a).	10%	25%	45%	10%	10%
23	Tenho muita dificuldade para entender Matemática.	0%	30%	45%	20%	5%
24	Matemática é “chata”	1%	42%	27%	17%	13%
25	Aprender Matemática é um prazer	13%	20%	40%	22%	5%
26	Testo meus conhecimentos resolvendo exercícios e problemas	5%	40%	20%	15%	20%
27	Tenho menos problemas com Matemática do que com as outras disciplinas	32%	18%	27%	18%	5%
28	Consigo bons resultados em Matemática	5%	22%	43%	20%	10%

Podemos ressaltar, com base nas respostas dos alunos:30%nunca ou raramente apresentam dificuldades para entender a Matemática, 35% nunca ou raramente ficam nervosos quando pedem para que eles resolvam algum exercício de Matemática, 76% acham que às vezes, frequentemente ou sempre Matemática está entre as matérias preferidas, e ainda 67% sentem prazer em estudar Matemática. São números positivos. No entanto, podemos observar que 43% dos alunos acham que nunca e raramente a Matemática é chata (ou seja, 57% acham que às vezes, frequentemente ou sempre a Matemática é chata). Aparentemente isto evidencia uma turma de bom nível e com bom relacionamento com a disciplina, embora achem a mesma chata muitas vezes.

2º) Jogos e desafios

**Tabela 12 – Jogos e desafios**

Fator 2 – Jogos e Desafios		Quantidade de respostas				
Itens:		1	2	3	4	5
1	Participo de competições com meus amigos resolvendo problemas matemáticos ou de raciocínio.	52%	26%	16%	4%	2%
7	Gosto de brincar de quebra-cabeça e jogos que envolvam raciocínio lógico.	13%	10%	29%	30%	18%
12	Procuro relacionar a Matemática aos conteúdos das outras disciplinas	33%	40%	10%	15%	2%
14	Gosto de elaborar desafios envolvendo noções de Matemática para meus amigos e familiares.	60%	15%	15%	8%	2%

Dos alunos pesquisados, 78% nunca ou raramente participam de competições entre amigos com problemas matemáticos, assim como 75% nunca ou raramente gostam de elaborar desafios envolvendo noções de Matemática. Com respeito às atividades propostas como quebra-cabeça ou jogos de raciocínio lógico, 48% dos alunos sempre ou frequentemente gostam destas atividades, mas 73% dos alunos nunca ou raramente procuram relacionar a Matemática aos conteúdos das outras disciplinas, a tão comentada interdisciplinaridade. Talvez isso evidencie que os mesmos são pouco estimulados a praticar a interdisciplinaridade.

3º) Resolução de problemas

**Tabela 13 – Resolução de problemas**

Fator 3 – Resolução de problemas		Quantidade de respostas				
Itens:		1	2	3	4	5
9	Gosto de resolver os exercícios rapidamente.	13%	13%	28%	28%	18%
10	Tento resolver um mesmo problema matemático de maneiras diferentes.	14%	40%	28%	13%	5%
11	Fico frustrado(a) quando não consigo resolver um problema de Matemática.	5%	13%	16%	33%	33%
21	Diante de um problema, sinto muita curiosidade em saber sua resolução.	3%	8%	36%	20%	33%
22	Quando minhas tentativas de resolver um problema fracassam, tento de novo.	5%	3%	36%	20%	36%

Dos alunos pesquisados, 74% às vezes, frequentemente ou sempre gostam de resolver os exercícios rapidamente e 54% nunca ou raramente procuram resolver um mesmo problema Matemática de maneiras diferentes. Talvez isso explique o fato de que aproximadamente 82% dos alunos às vezes, frequentemente ou sempre ficam frustrados quando não conseguem resolver um problema de Matemática. Um ponto interessante é que 92% dos alunos às vezes, frequentemente ou sempre tentam refazer os exercícios ao fracassar.

4º) Aplicações no Cotidiano

**Tabela 14 – Aplicações no cotidiano**

Fator 4 – Aplicações no Cotidiano		Quantidade de respostas				
		1	2	3	4	5
2	Costumo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos matemáticos.	59%	28%	10%	0%	3%
3	Calculo o tempo que vou gastar ao sair de casa para chegar ao destino que pretendo.	18%	13%	15%	15%	39%
4	Faço desenhos usando formas geométricas	21%	15%	28%	8%	28%
5	Percebo a presença da Matemática nas atividades que desenvolvo fora da escola	3%	15%	31%	28%	23%
6	Faço “continhas de cabeça” para calcular valores quando estou fazendo compras ou participando de jogos.	0%	5%	18%	21%	56%

Neste bloco de perguntas, podemos observar que 3% dos alunos sempre ou frequentemente costumam explicar fenômenos da natureza usando conhecimentos matemáticos. No entanto, é curioso que 51% sempre ou frequentemente percebem a Matemática nas atividades que desenvolvem fora da escola. Também, 77% sempre ou frequentemente procuram fazer a “contas de cabeça” quando estão fazendo compras ou participando de jogos.

5º) Hábitos nos estudo

**Tabela 15 – Hábitos de estudo**

	Fator 5 – Hábitos de Estudo	Quantidade de respostas				
	Itens:	1	2	3	4	5
13	Estudo Matemática todos os dias durante a semana.	21%	23%	56%	13%	8%
15	Realizo as tarefas de casa que o professor de Matemática passa.	3%	5%	31%	38%	23%
17	Estudo as matérias de Matemática antes que o professor as ensine na sala de aula.	49%	31%	15%	5%	0%
18	Além do meu caderno, eu costumo estudar Matemática em outros livros para fazer provas e testes.	23%	15%	23%	21%	18%

Observou-se que 44% dos alunos nunca ou raramente estudam diariamente, mas 61% sempre ou frequentemente têm o hábito de realizar as tarefas de casa com frequência, 80% dos alunos pesquisados nunca ou raramente têm costume de estudar as matérias de Matemática antes que o professor as ensine na sala de aula e 39% dos alunos frequentemente ou sempre usam outras fontes de pesquisa, além do caderno para estudar Matemática.

6º) Interação na sala de aula

**Tabela 16 – Interação na sala de aula**

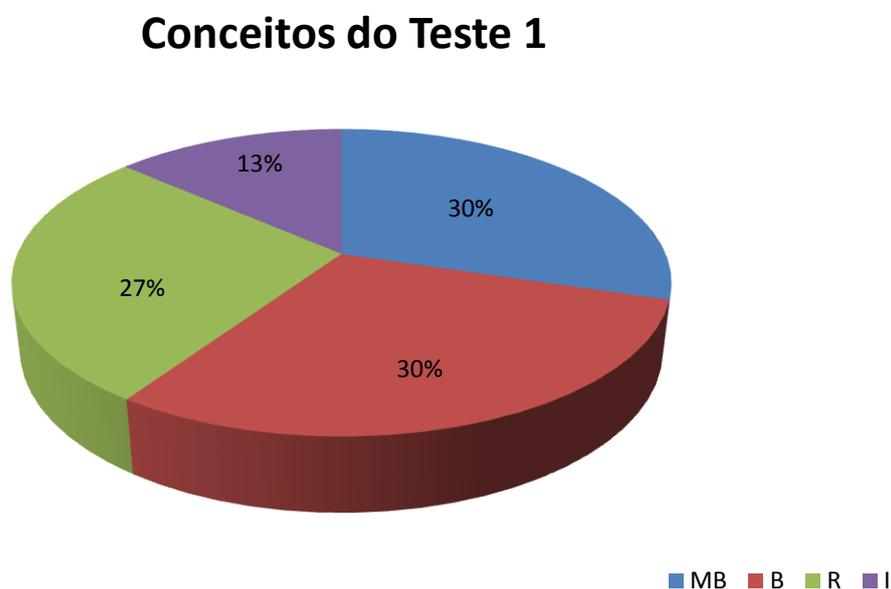
	Fator 6 – Interação na sala de aula	Quantidade de respostas				
	Itens:	1	2	3	4	5
8	Faço perguntas nas aulas de Matemática quando eu tenho duvidas.	13%	33%	15%	26%	13%
16	Relaciono-me bem com meu professor de Matemática.	0%	3%	8%	18%	71%

Pode-se observar que 89% dos alunos sempre ou frequentemente se relacionam muito bem com o professor, mas apenas 39% sempre ou frequentemente fazem perguntas nas aulas de Matemática.

## 5.2. CONSIDERAÇÕES SOBRE O TESTE 1

No dia 10 de novembro, foi aplicado o Teste 1 na turma do 9º ano do Ensino Fundamental. Ele teve duração de 80 minutos, como previsto, e ocorreu de forma tranquila, sem nenhum incidente.

Baseado no critério de avaliação, onde cada nota se encaixaria em um conceito dividido entre: I – Irregular, R – Regular, B – Bom e MB – Muito bom. Observe o gráfico de pizza abaixo, que ilustra o resultado da turma:

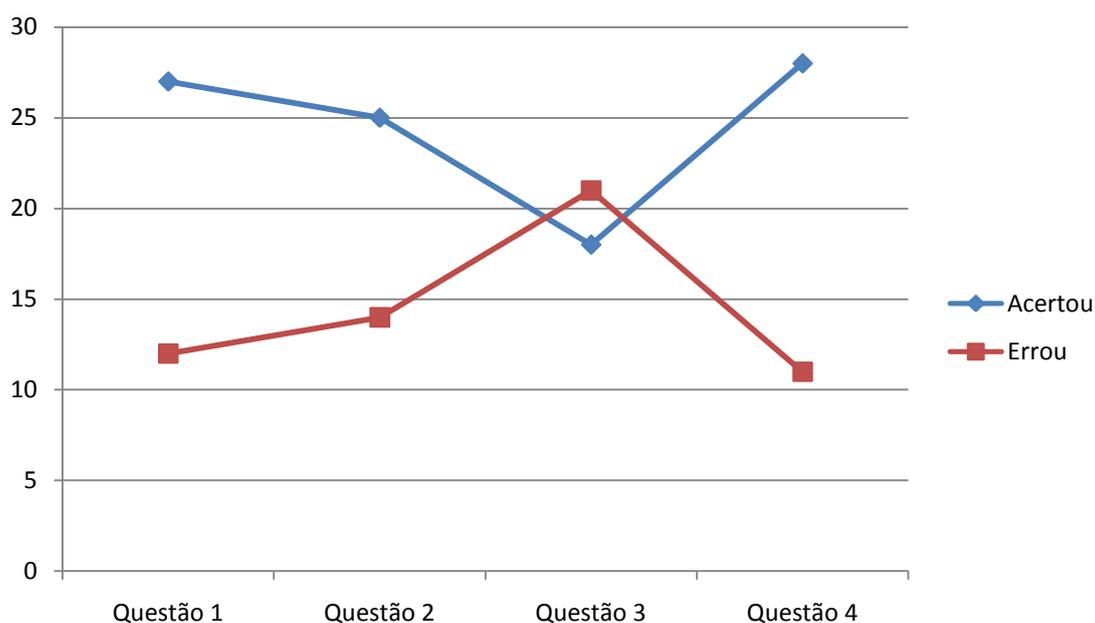


**Figura 48: Gráfico com os conceitos do Teste 1**

**Fonte: Autor**

Analisando os resultados que se referem aos conceitos dos alunos, observamos um equilíbrio entre eles, ou seja, um pouco mais da metade da turma obteve conceito B ou MB. Vale ressaltar que boa parte dos alunos escreveu que as questões não apresentavam muita dificuldade.

A seguir mostraremos um gráfico de linha, identificando qual das questões apresentou o maior índice de acerto e qual questão apresentou o maior índice de erro.



**Figura 49: Gráfico discriminando o número de acertos e erros de cada item do Teste 1**

**Fonte: Autor**

Observando o gráfico, constatamos que as questões que obtiveram o maior número de acertos foram as questões 1 e 4, sendo a questão 4 aquela que atraiu a maior parte dos alunos, uma vez que era a questão que pedia para calcular o número mínimo de cores para colorir o mapa do Brasil. Já a questão 3 foi a questão com o maior índice de erro. Uma das justificativas descritas pelos alunos foi o fato de esta questão não possuir tabela; outros alunos tiveram dificuldade para entender o enunciado. Outros tiveram problemas com a interpretação.

Abaixo serão apresentadas algumas soluções propostas pelos alunos que chamaram a atenção:

### Questão 1

Em um pet shop, uma vendedora precisa expor 7 peixes exóticos em alguns aquários para venda. Alguns desses peixes não podem ficar com certos peixes, por risco de conflito. A tabela abaixo mostra quais peixes não podem ficar juntos, denotados por x. Qual é o número mínimo de aquários necessários para expor todos esses peixes?

Solução:

**Resolução:**

**Comentário:**

O aquário 1 tem que ficar com o peixe A sozinho, pois ele tem problemas com os outros.

Observando a tabela encontrei uma maneira de distribuir os peixes nos outros aquários, então são necessários 3 aquários.

**Figura 50: Solução proposta por aluno sobre a questão do aquário.**

**Fonte: Autor**

Comentário:

O aluno conseguiu fazer uma relação entre a tabela apresentada pelo problema, observando que o peixe A é aquele deve ficar isolado. A partir daí, analisou as outras informações da tabela e concluiu uma possível solução para o problema. Vale ressaltar que pela resposta dada, podemos concluir que o aluno tem noção de que existem outras configurações para distribuir os peixes,

e ainda que, mesmo redistribuindo os peixes, o menor número de aquários será 3.

### Questão 2

Em um canil de reabilitação de cães abandonados, a equipe acabou de receber 6 novos cachorros encontrados, e precisa colocá-los em diferentes casinhas para passar a primeira noite. Constatou-se que alguns desses cães ficam extremamente agressivos na presença de alguns do mesmo grupo, logo, terão que alocá-los em casinhas diferentes. O cachorro A não pode ficar com os cachorros C, D ou E. Os cachorros B e F não podem ficar juntos. O cachorro E não pode ficar com os cachorros D nem F. Quantas casinhas serão necessárias para acomodar os 6 cachorros?

Solução:

**Resolução:**

	A	B	C	D	E	F
A			X	X	X	
B						X
C	X					
D	X				X	
E	X		X			X
F		X			X	

1-A, B  
2-C, E  
3-D, F

3 casinhas

**Comentário:**

Neste exercício montei uma tabela com o mesmo conceito da questão 1 e usei o mesmo princípio de um jogo de lógica (daquele que compramos em banca) onde os espaços com X seriam marcados com N (Não) e os vazios ou com traço seriam marcados com S (sim).

**Figura 51: Solução proposta por um aluno sobre a questão dos cachorros**

**Fonte: Autor**

Comentário:

O aluno conseguiu observar uma semelhança entre as questões 1 e 2, construindo uma tabela com as informações descritas na questão. A partir daí conseguiu analisar de forma mais clara as restrições impostas pela questão.

### Questão 3

Um químico deseja embarcar os produtos A, B, C, D, E, F, G usando o menor número de containers. Alguns produtos não podem ser colocados num mesmo container porque reagem entre si. Quaisquer dos dois produtos entre A, B, C, G reagem, A reage com F e D, e E também reage com F e D. Qual é o menor número de containers necessários para embarcar os produtos com segurança?

Solução:

Resolução:

1 → A

2 → B, D, E

3 → C, F

4 → G

10

A

2

B, D, E

3

C, F

4

G

4 CONTAINERS

Comentário:

Organizando o raciocínio a partir do método de eliminação, é possível fazer o problema sem grandes dificuldades.

“Organizando o raciocínio a partir do método de eliminação, é possível fazer o problema sem grandes dificuldades.”

Figura 52: Solução proposta por um aluno sobre a questão dos elementos químicos

Fonte: Autor

Comentário:

Esta solução foi feita se baseando em organizar os grupos através de eliminação, a medida que o aluno foi desenvolvendo e interpretando o texto, ele foi organizando os grupo. Assim ele conseguiu chegar à solução correta da atividade.

**Questão 4**

Quantas cores são necessárias para colorir o mapa do Brasil, sendo que regiões adjacentes não podem ter a mesma cor?

Solução:



**Figura 53: Solução proposta por um aluno sobre o mapa do Brasil**

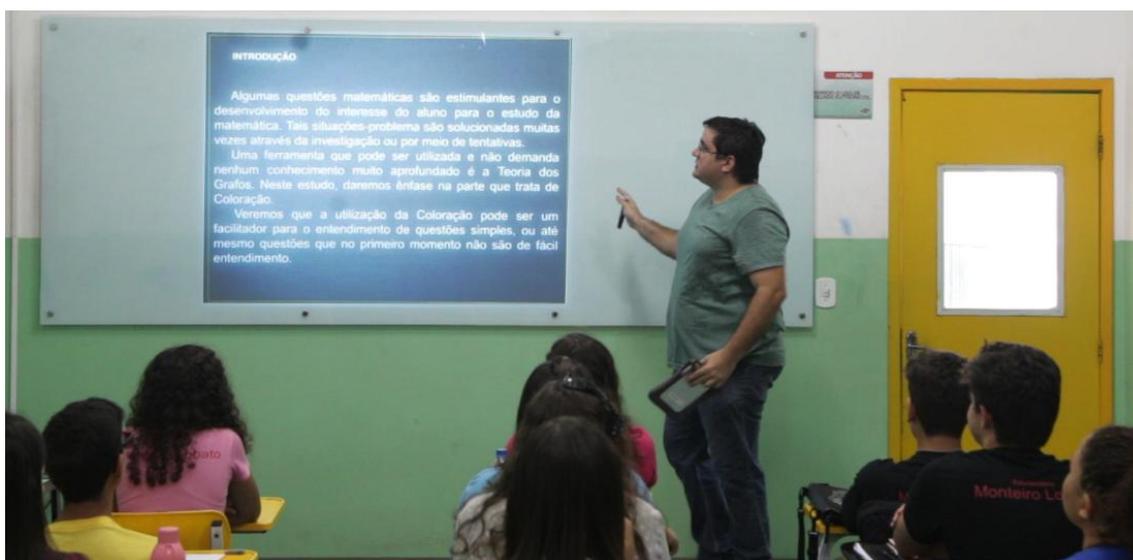
**Fonte: Autor**

Comentário:

A questão que envolve a quantidade mínima de cores para se colorir um mapa foi a questão com o maior percentual de acerto e o item em que os alunos mais se sentiram confortáveis para responder. Alguns alunos preferiram representar as cores por símbolos e outros pintaram as regiões como se pode ver no exemplo acima.

### 5.3. CONSIDERAÇÕES SOBRE AS AULAS 3, 4 E 5

A aula 3 ocorreu como o planejado, foram discutidas definições e conceitos sobre a Teoria dos Grafos para que os alunos pudessem ter embasamento teórico e, conseqüentemente, aplicar/resolver os exercícios propostos utilizando essa nova ferramenta. A turma foi muito participativa e questionadora. Durante o processo de apresentação, eles se mostraram muito interessados principalmente na utilização dos Grafos em situações do dia a dia, como, por exemplo, quando foi falado que a rota de um caminhão de lixo pode ser planejada usando Grafo, com objetivo de percorrer o maior número de ruas em um menor percurso possível. Neste momento, constatamos que a ideia geral de otimização foi alcançada pela turma.



**Figura 54: Introduzindo a Teoria dos Grafos**

**Fonte: Autor**



**Figura 55: Foto sobre a utilização da Teoria dos Grafos**

**Fonte: Autor**

Na aula 4 foram resolvidas as questões propostas no Teste 1, utilizando os conceitos e definições discutidas na aula anterior. Desta forma, conseguimos comparar a maneira com que eles responderam ao Teste 1 com a Teoria dos Grafos. Neste momento, a maior parte dos alunos se posicionou, afirmando que a utilização da Teoria dos Grafos facilitaria a resolução dos exercícios propostos no Teste 1.



**Figura 56: Foto sobre o objetivo do estudo da Teoria de Grafos**

**Fonte: Autor**



**Figura 57: Exemplificando a construção de um Grafo (Coloração)**

**Fonte: Autor**

A aula 5 foi desenvolvida com o objetivo de resolver Sudoku 4x4, utilizando a Teoria dos Grafos – Coloração. Os alunos acharam muito interessante e conseguiram enxergar o quão é abrangente o estudo da Teoria dos Grafos, uma vez que Sudoku não apresenta (aparentemente) nenhuma relação com o trabalho proposto.

Vale destacar que, mesmo achando muito interessante o uso da Teoria dos Grafos – Coloração – para resolver Sudoku, ficou muito evidente que a resolução fica muito longa e que facilmente pode haver algum problema durante o processo de resolução. A maior parte dos alunos concordou que, se houvesse o auxílio de um programa, provavelmente a solução seria mais segura.

#### **5.4. CONSIDERAÇÕES SOBRE A AULA 6**

No início da aula 6 ocorreu um pouco de dificuldade para organizar e distribuir os grupos. O objetivo da atividade era de dividir a turma em 5 grupos com 6 alunos em cada grupo, e outros 5 alunos seriam os coordenadores. Cada coordenador ficaria responsável por um grupo.

A atividade que foi desenvolvida já havia sido resolvida em sala de aula, e a dinâmica desta aula foi montar um Grafo de tal forma que cada aluno represente um vértice, e o barbante represente as arestas.



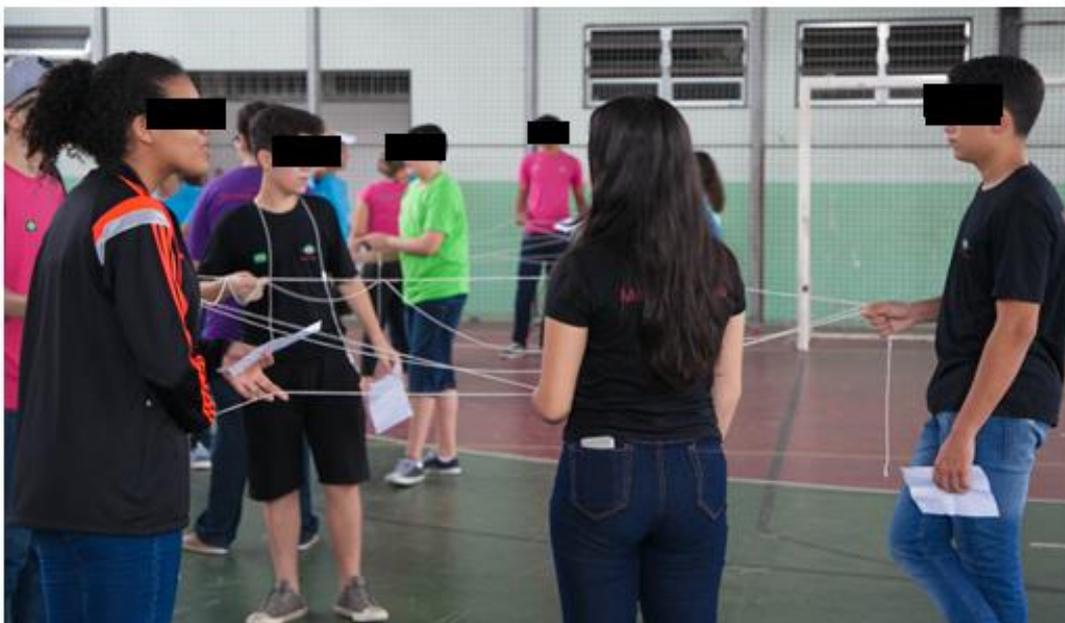
**Figura 58: Foto sobre a explicação da aula prática**

**Fonte: Autor**

Depois dos grupos divididos e dos coordenados em seus lugares, li o exercício deixei que os alunos, orientados pelos coordenadores, montassem os Grafos.

Problema selecionado:

Um químico deseja embarcar os produtos A, B, C, D, E, F usando o menor número de containers. Alguns produtos não podem ser colocados num mesmo container porque reagem entre si. Quaisquer dos dois produtos entre A, B, C, F reagem, A reage com F e D, e E também reage com F e D. Qual é o menor número de containers necessários para embarcar os produtos com segurança?



**Figura 59: Construindo grafos**

**Fonte: Autor**

Na construção dos Grafos, os alunos escolheram aleatoriamente os vértices, ou seja, eles conseguiram construir 5 Grafos diferentes, mas que o resultado obtido fosse o mesmo.



**Figura 60: Praticando a Teoria das 4 Cores**

**Fonte: Autor**

Durante a leitura e construção dos Grafos, alguns grupos encontram um pouco de dificuldade, e, neste momento, houve intervenções para que os alunos entendessem e construíssem os Grafos de forma correta.



**Figura 61: Auxiliando na construção das arestas de um grafo**

**Fonte: Autor**



**Figura 62: Grafos diferentes com o mesmo resultado**

**Fonte: Autor**



**Figura 63: Soluções apresentadas pelos alunos**

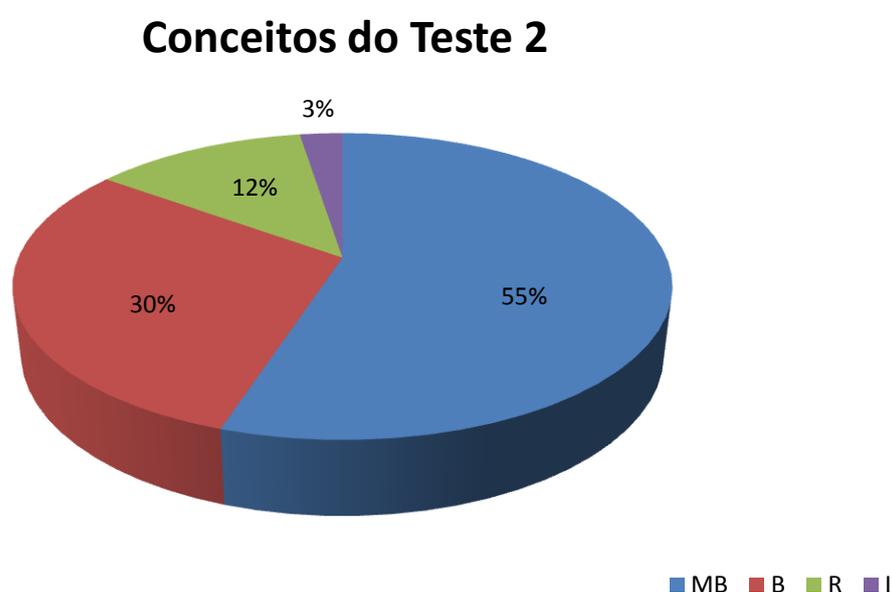
**Fonte: Autor**

Depois que todos conseguiram construir e principalmente enxergar todo o processo de construção do Grafo e encontrar a solução da atividade proposta, foi satisfatória a maneira com que os alunos responderam. Cumpre salientar que em vários momentos do desenrolar da atividade os alunos iam lembrando dos conceitos vistos nas aulas anteriores.

## 5.5. CONSIDERAÇÕES SOBRE O TESTE 2

No dia 24 de novembro, foi aplicado o Teste 2 na turma do 9º ano do Ensino Fundamental. Ele teve duração de 80 minutos, como previsto, e ocorreu de forma tranquila, sem nenhum incidente.

Baseado no critério de avaliação, onde cada nota se encaixaria em um conceito dividido entre: I – Irregular, R – Regular, B – Bom e MB – Muito bom. Observe o gráfico de pizza abaixo, que ilustra o resultado da turma:



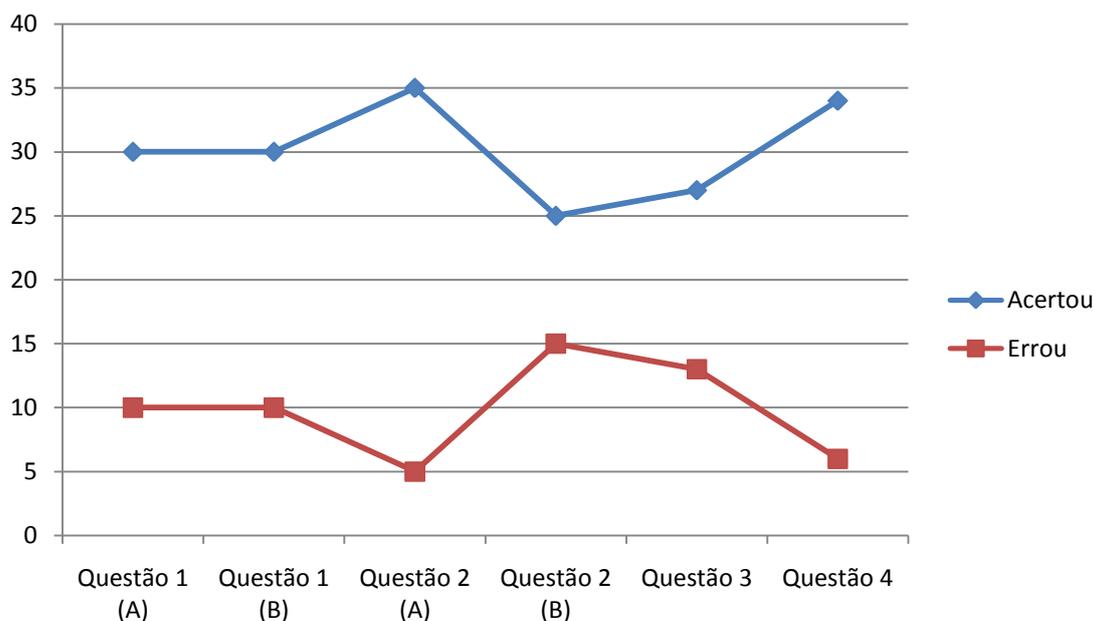
**Figura 64: Gráfico com os conceitos do Teste 2**

**Fonte: Autor**

Analisando os resultados que se referem aos conceitos dos alunos, observamos que 85% das avaliações estão entre MB e B. Apenas 15% dos resultados estão entre R e I.

Cumpramos ressaltar que todos os alunos procuraram utilizar as ideias e conceitos ministrados sobre a Teoria dos Grafos para responder o Teste 2, ou seja, todos os alunos construíram os Grafos e aplicaram as técnicas de Coloração, mesmo aqueles alunos que obtiveram conceitos inferiores.

A seguir mostraremos um gráfico de linha, identificando qual das questões apresentou o maior índice de acerto e qual questão apresentou o maior índice de erro.



**Figura 65: Gráfico discriminando o número de acertos e erro de cada item do Teste 2**

**Fonte: Autor**

Observando o gráfico com desempenho dos alunos em cada item do Teste 2, podemos concluir que houve uma notável melhora do resultado se comparado com o resultado do Teste 1.

Analisando os resultados podemos afirmar que a questão 2 (A), na qual o aluno deveria montar a estrutura de um Grafo, e a questão 4, onde o aluno deveria colorir um mapa com o número mínimo de cores, foram os itens com maior resultado positivo, com aproximadamente 88% de acerto cada um.

A questão 1, que tinha como propósito encontrar o número cromático de dois Grafos, obteve 75% de acerto, tanto no letra (A) quanto na letra (B).

De uma forma geral, podemos afirmar que os alunos conseguiram estruturar os Grafos fazendo as conexões devidas entre Teoria dos Grafos e os exercícios propostos.

Abaixo serão apresentadas algumas soluções propostas pelos alunos que chamaram a atenção:

Questão 1

Determine o número cromático dos Grafos abaixo:

Letra (A)

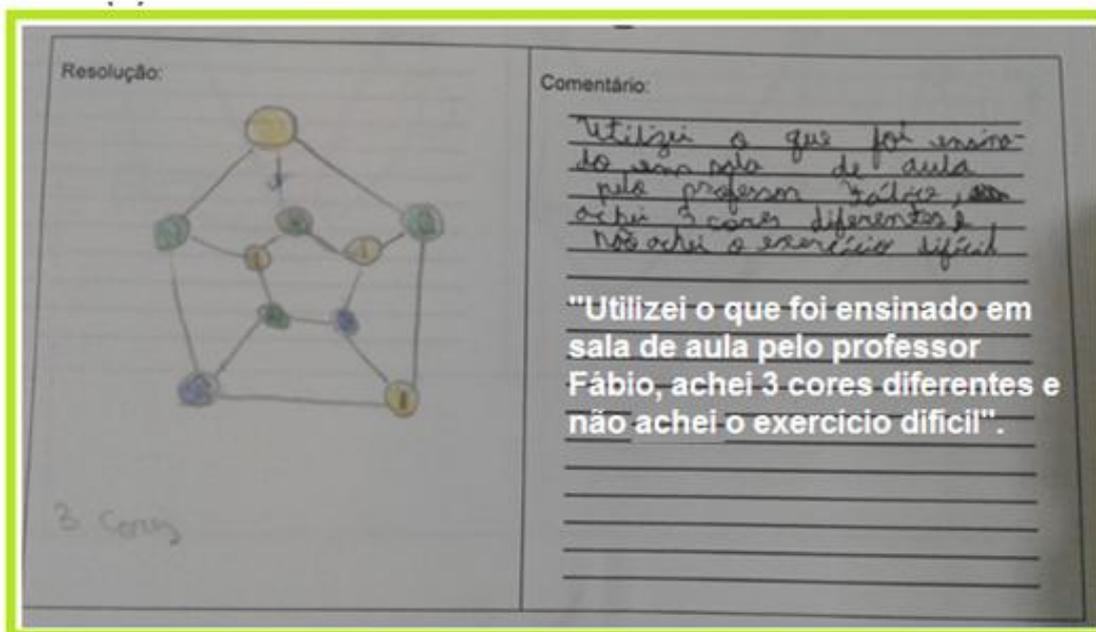


Figura 66: Solução apresentada por um aluno para encontrar o número cromático de um grafo, item (A)

Fonte: Autor

Comentário:

O aluno conseguiu aplicar as técnicas propostas nas aulas teóricas e encontrou o número cromático do Grafo.

Letra (B)

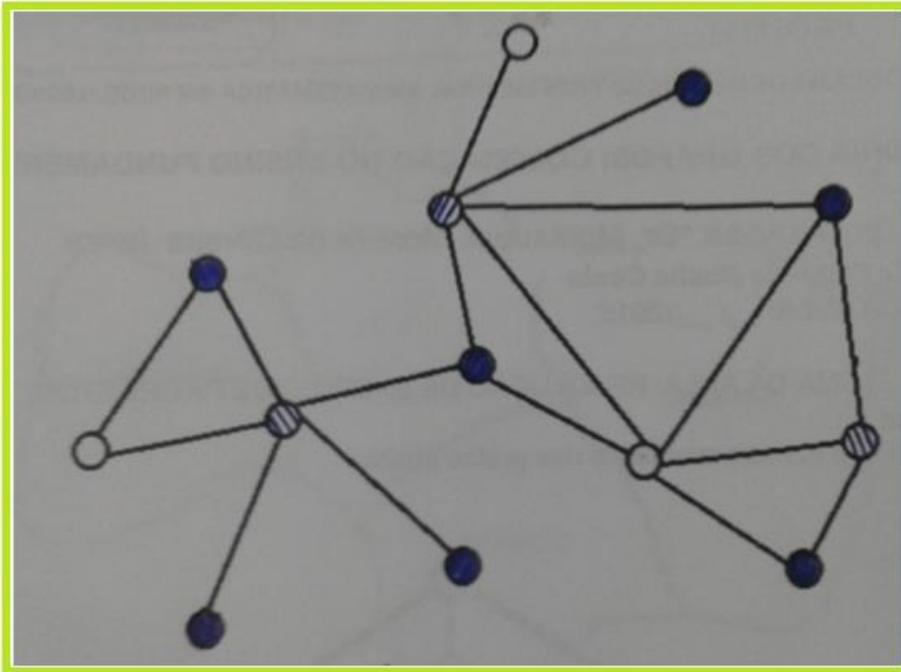


Figura 67: Solução apresentada por um aluno para encontrar o número cromático de um grafo, item (B)

Fonte: Autor

<p>Resolução:</p> <p>" Para resolver esta questão fui seguindo uma sequência que escolhi aleatoriamente. Partii de um vértice e fui pintando seguindo o critério de que dois vértices ligados por uma aresta não podem ter a mesma cor".</p> <p>3 cores.</p>	<p>Comentário:</p> <p>Para resolver esta questão fui seguindo uma sequência que escolhi aleatoriamente. Partii de um vértice e fui pintando <del>segundo</del> seguindo os critérios de que dois vértices ligados por uma aresta não podem ter a mesma cor.</p> <p>3 cores.</p>
--	---

Figura 68: Solução proposta por um aluno explicando como foi feita a coloração do grafo

Fonte: Autor

Questão 2

Número mínimo de horários para construir um Grafo que represente um quadro de horários das provas de recuperação de uma escola.

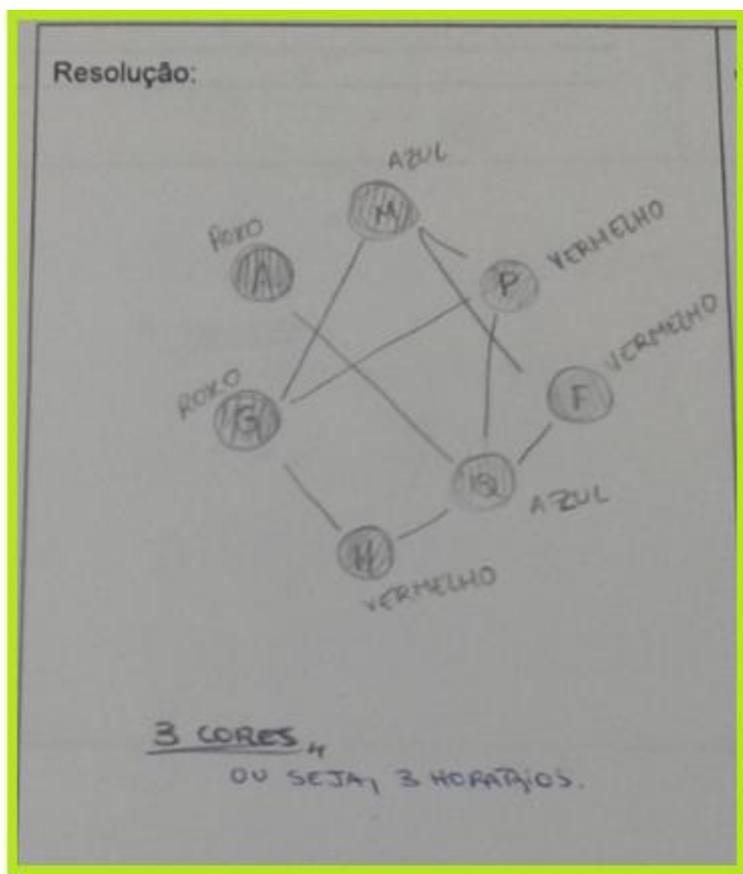


Figura 69: Solução apresentada por um aluno sobre a questão do Horário das provas

Fonte: Autor

Comentário:

Essa questão foi a que mais gerou dificuldade, pois o aluno precisava prestar bastante atenção para encontrar os vértices e as arestas. Podemos dizer que a representação acima foi uma solução clássica e muito eficiente.

### Questão 3

Qual será o número de recintos em que podemos colocar os novos animais do Zoológico "VIDA SELVAGEM"?

**Resolução:**

**Comentário:**

Observando a tabela e as suas ~~restas~~ restrições consegui construir o grafo e facilmente encontrar o número de recintos necessários.

Resposta: 3 recintos

"Observando a tabela e as suas restrições consegui construir o grafo e facilmente encontrar o número de recintos necessários".

Resposta: 3 recintos

RECINTO 1: P, Z, G  
RECINTO 2: T, A  
RECINTO 3: R

**Figura 70: Solução apresentada por um aluno sobre a questão do Zoológico**

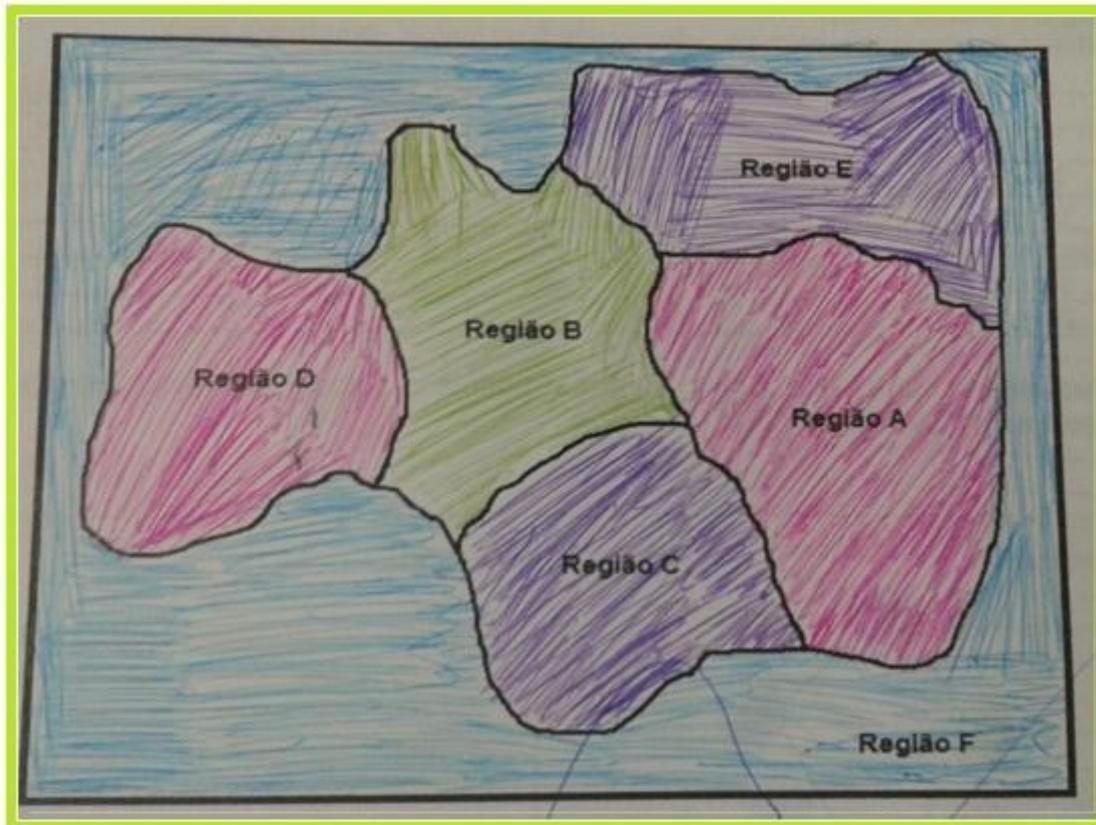
**Fonte: Autor**

#### Comentário:

Nesta questão, o aluno analisou a tabela e consequentemente conseguiu construir o Grafo. Vale ressaltar que este aluno não coloriu os vértices e sim numerou cada um. Essa técnica também é válida, e foi falada durante as aulas teóricas.

Questão 4

Quantidade mínima de cores diferentes para pintar um mapa.

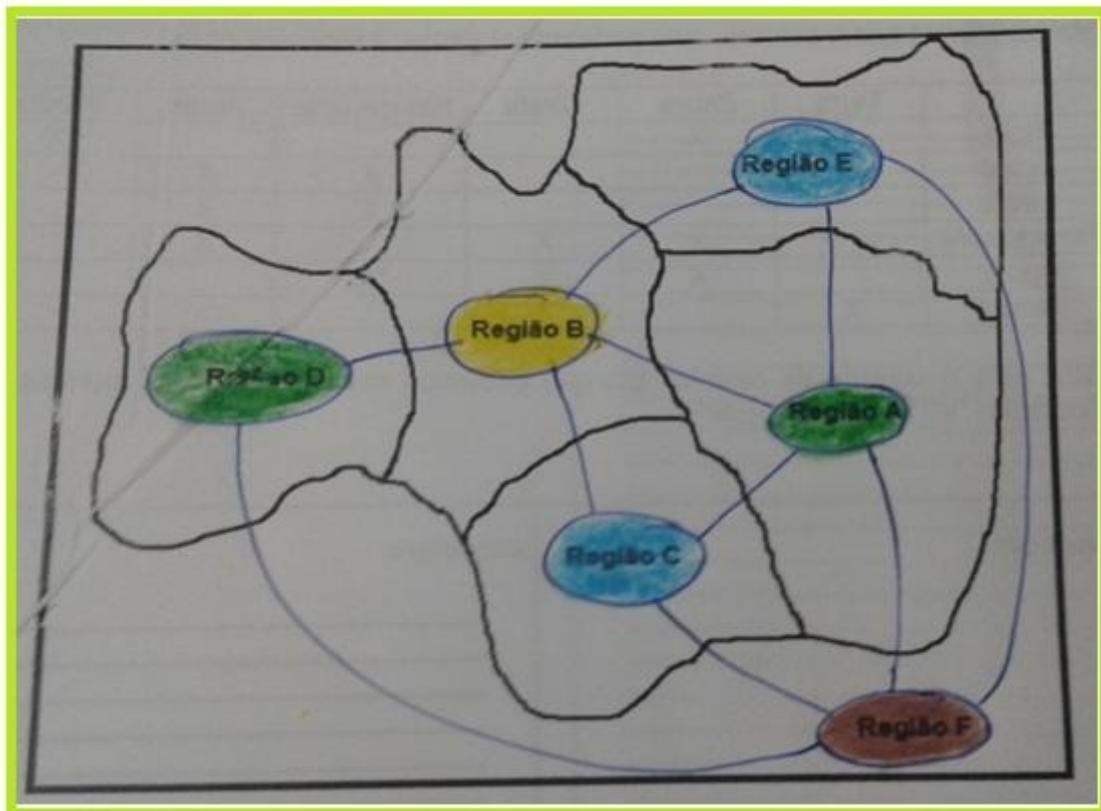


**Figura 71: Solução apresentada por um aluno para colorir um mapa**

**Fonte: Autor**

Comentário:

A questão 4 foi aquela que obteve o maior índice de acerto. É importante ressaltar que muitos alunos optaram por literalmente pintar o mapa, e assim chegar no número mínimo de cores necessárias.



**Figura 72: Outra solução para coloração em mapas, apresentada por um aluno**

**Fonte: Autor**

Comentário:

Uma solução interessante foi a proposta acima, nela podemos observar que o aluno aproveitou o próprio mapa para construir o Grafo e assim facilmente encontrar os vértices e posteriormente pintar os vértices.

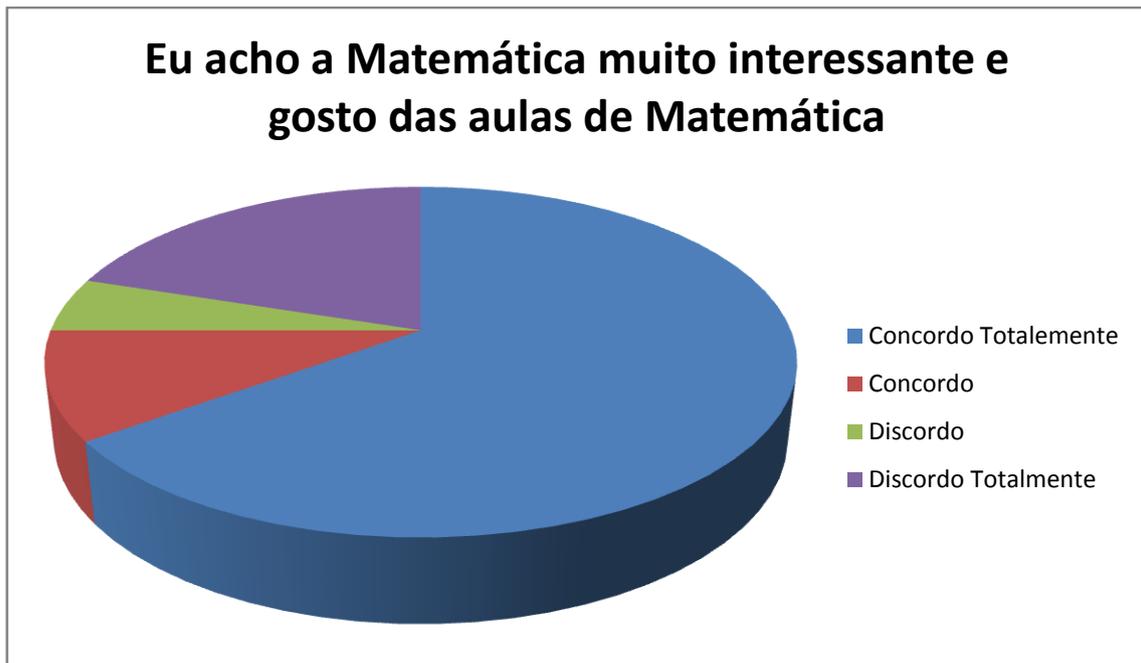
## 5.6. CONSIDERAÇÕES SOBRE O QUESTIONÁRIO FINAL

Nessa seção analisaremos os resultados sobre o questionário respondido pelos alunos ao final de todo o estudo feito. Nele, os alunos responderam a 10 perguntas em relação à presente pesquisa. Neste questionário poderemos identificar qual atividade foi a preferida, se eles acharam a pesquisa interessante, se as atividades desenvolvidas contribuíram de alguma forma para resolução das questões propostas nos testes. Com o resultado, podemos estimar se o estudo de Teoria dos Grafos contribuiu de alguma forma para o desenvolvimento do aluno para o estudo da Matemática.

Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática.

Concordo Totalmente  Concordo  Discordo  Discordo Totalmente

Nesta pergunta, aproximadamente 65% dos alunos concordam totalmente com o fato de a Matemática ser muito interessante, os outros 35% dos alunos ficaram divididos entre 10% que concordam, 5% que discordam e 20% que discordam totalmente, ou seja, a maior parte da turma tem interesse pelo estudo da Matemática.



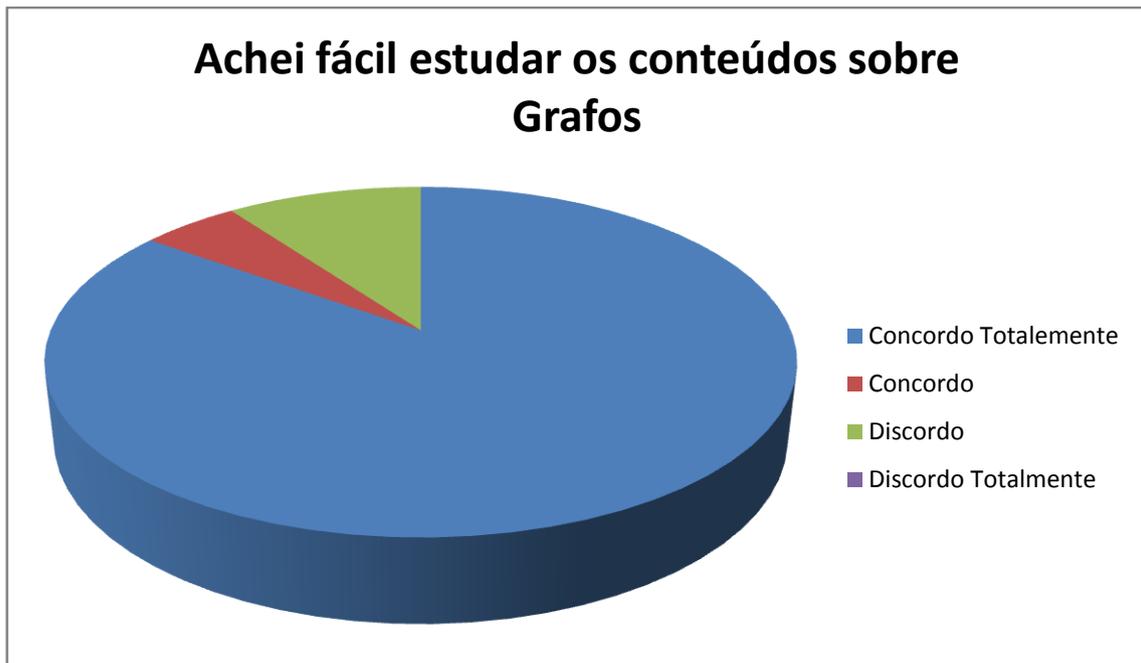
**Figura 73: Gráfico sobre o interesse e gosto pela Matemática**

**Fonte: Autor**

Achei fácil estudar os conteúdos sobre Grafos.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

Neste item, temos um pouco mais de 85% dos alunos concordando totalmente com a pergunta, e ainda, aproximadamente 5% dos alunos concordando, e 10% apenas discordando. Então podemos concluir que estudar Grafos foi considerado fácil pela maioria dos alunos.



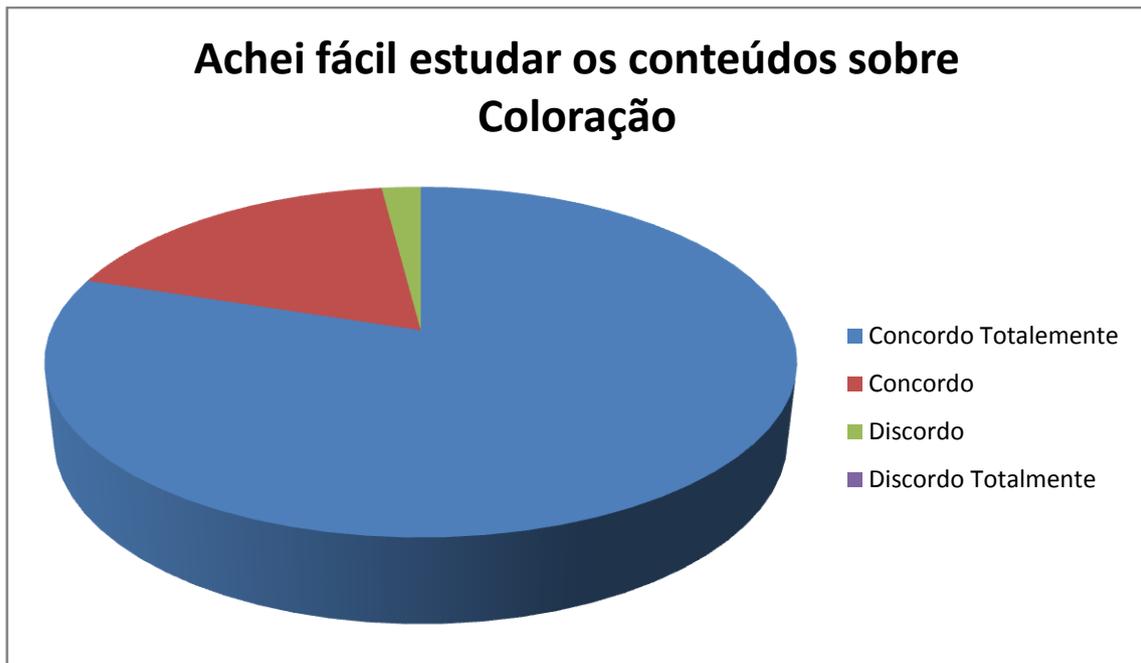
**Figura 74: Gráfico sobre a facilidade do estudo sobre Grafos**

**Fonte: Autor**

Achei fácil estudar os conteúdos sobre Coloração.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

Neste item, 80% dos alunos concordam totalmente. Os alunos destacaram em coloração a questão de achar o número mínimo de cores para pintar um mapa como atividade mais agradável.



**Figura 75: Gráfico sobre a facilidade de estudar Coloração**

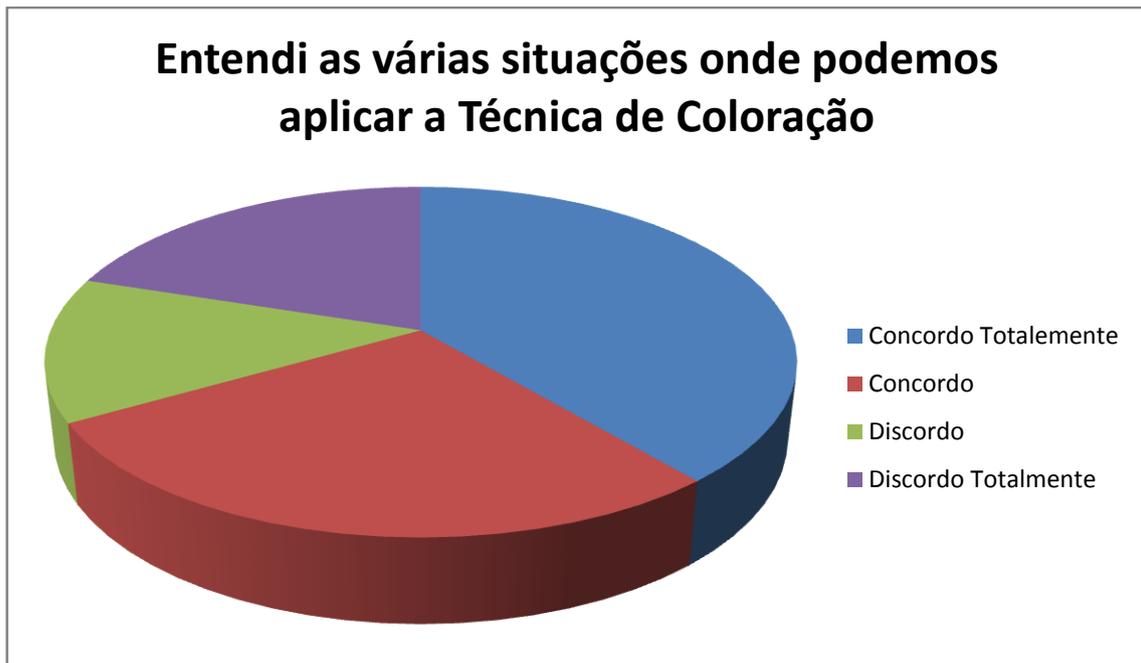
**Fonte: Autor**

Entendi as várias situações onde podemos aplicar a Técnica de Coloração.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

35% dos alunos responderam que concordam totalmente, 25% responderam que concordam, 12% responderam que discordam e 18% discordaram totalmente.

Com base nos resultados, constatamos que a maioria dos alunos compreendeu as situações que podem ser utilizadas para aplicar as técnicas de coloração.



**Figura 76: Gráfico sobre a variedade das situações onde podemos aplicar a Técnica de Coloração**

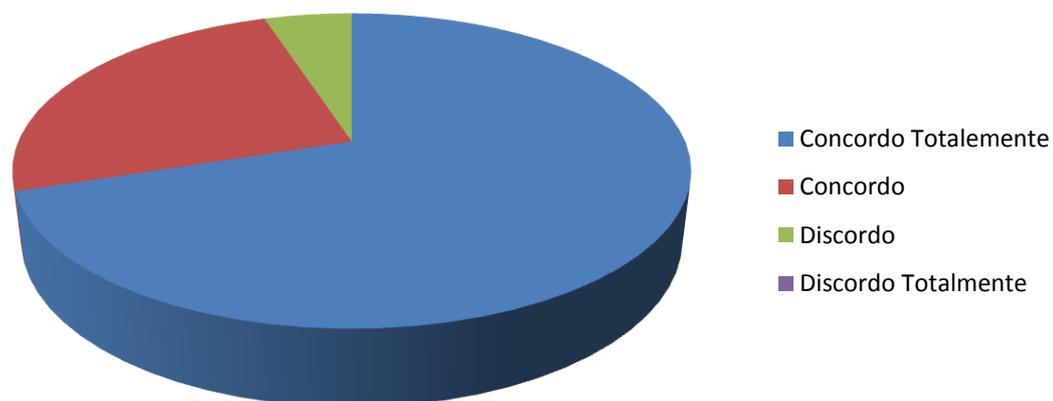
**Fonte: Autor**

Achei mais interessante resolver problemas de Matemática utilizando Grafos do que da maneira tradicional.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

70% dos alunos concordaram totalmente, 25% concordaram e 5% discordaram, ou seja, com base no levantamento de dados, concluímos que resolver itens utilizando Grafos foi muito mais interessante do que resolver itens da maneira tradicional.

**Achei mais interessante resolver problemas de Matemática utilizando Grafos do que da maneira tradicional.**



**Figura 77: Gráfico sobre o interesse em utilizar Grafos**

**Fonte: Autor**

Depois das aulas, busquei mais informações sobre Grafos na internet.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

Neste item, apenas 10% concordaram totalmente, 12% concordaram, 50% discordou e 28% discordaram totalmente. Com base nos dados observamos que os alunos, em sua maioria, não procuraram mais informações dos Grafos.



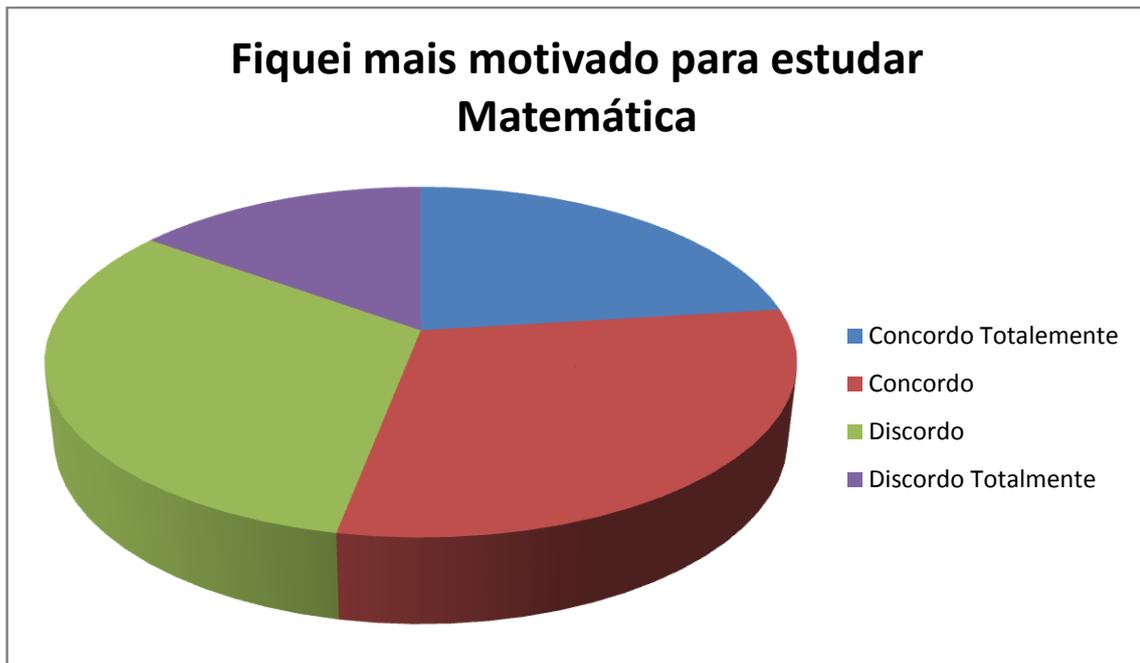
**Figura 78: Gráfico sobre a facilidade de estudar os conteúdos sobre Grafos**

**Fonte: Autor**

Fiquei mais motivado para estudar Matemática após descobrir que Grafo pode ser usado para resolver problemas do cotidiano, como os problemas do das placas de computador, encontrar número mínimo de cores para pintar um mapa etc.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

Para este item temos 23% dos alunos concordando totalmente, 30% dos alunos concordando, 32% dos alunos discordando e 15% discordando totalmente.



**Figura 79: Gráfico sobre a motivação para estudar Matemática**

**Fonte: Autor**

Acredito que a aula 6, construindo o Grafo dos elementos químicos, fez com que eu conseguisse enxergar mais claramente Coloração em Grafos.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

72% dos alunos concordaram totalmente, 20% concordaram e 8% discordaram. Com base no levantamento dos dados, observamos que quando saímos da sala de aula e propomos uma atividade mais dinâmica, mesmo sendo em Matemática, os alunos apresentam um interesse maior e um comprometimento que muitas vezes fica escondido nas dificuldades encontradas na sala de aula.



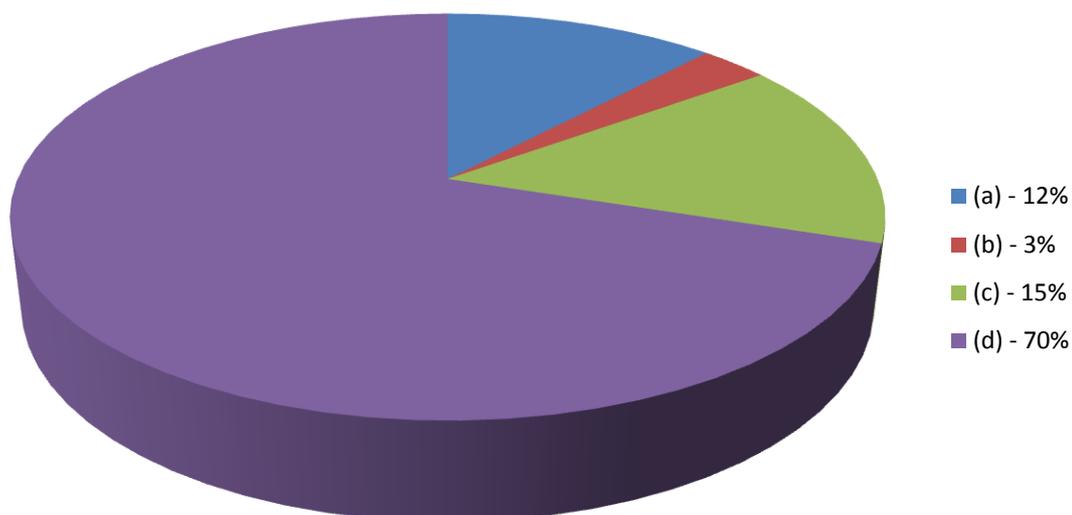
**Figura 80: Gráfico sobre a aula prática**

**Fonte: Autor**

Dentro do conteúdo aprendido nas aulas sobre Grafos, gostei mais de (marque apenas uma alternativa):

- (a) Encontrar o número cromático dos Grafos.
- (b) Horário das provas de recuperação.
- (c) Zoológico "VIDA SELVAGEM"?
- (d) Menor número de cores para pintar um mapa.

## Gráfico sobre atividade que mais gostei.



**Figura 81: Gráfico com a porcentagem referente a questão preferido do Teste 2**

**Fonte: Autor**

Observando o gráfico, constatamos que encontrar o menor número de cores para pintar um mapa foi a atividade mais escolhida pelos alunos. Durante a resolução das atividades, pintar o mapa foi o item em que os alunos mais se sentiram confortáveis, mesmo aqueles alunos com dificuldade em resolver questões matemáticas.

### 5.7. RESOLUÇÃO DE CADA ITEM NOS TESTES.

Os Testes propostos nesta pesquisa já foram apresentados e resolvidos no Capítulo 2.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo analisar uma experiência realizada utilizando problemas relacionados a Coloração em Grafos através de um estudo de caso. Esse estudo foi motivado a partir do momento em que nós (educadores), nos deparamos com uma sala de aula maçante, pouco atrativa, e aulas que não acompanham a evolução e os desejos do nosso corpo discente.

A partir dos testes aplicados na turma do 9º ano do Ensino Fundamental, observamos que de uma forma geral o resultado do Teste I foi satisfatório. Vale lembrar que neste teste os alunos não tiveram nenhum contato com as definições de Teoria dos Grafos - Coloração.

Depois de todo desenvolvimento da pesquisa, constatamos através do Teste II que o desempenho dos alunos melhorou significativamente, uma vez que houve um maior percentual de acerto nas questões do segundo teste em relação ao primeiro teste. Pela análise feita pelo questionário de Gontijo e questionário final, podemos observar que os objetivos específicos foram alcançados.

Em uma das perguntas do Questionário final, foi perguntado se o aluno ficou mais motivado para estudar Matemática; para esse item obtivemos 92% das respostas onde eles concordaram ou concordaram totalmente, fato que comprova a contribuição deste estudo para ser uma opção não convencional no estudo da Matemática.

Um dos principais pontos interessantes na pesquisa foi o comprometimento e a participação dos alunos. Desde o Questionário de Gontijo (adaptado), até o Questionário Final, todos os alunos procuraram assumir a responsabilidade de fazer o melhor para que a pesquisa obtivesse resultados fidedignos.

Outro ponto interessante levado em consideração pelos alunos foi em relação ao uso da Coloração como uma saída simples e eficaz para alguns tipos de situações do dia-a-dia, e com isso conseguiram resolver algumas situações problemas que muitas vezes são classificadas como “Questões de Raciocínio Lógico” de forma fácil e agradável.

Essa pesquisa futuramente vai ser estendida em todo Ensino Fundamental na escola Educandário Monteiro Lobato, onde foi feito esse primeiro estudo. Assim poderemos ter mais parâmetros para enriquecer a pesquisa sobre a Coloração em Teoria dos Grafos e estudar melhor a maneira como a maioria vê a Matemática. Outro ponto importante é divulgar esta pesquisa em revistas apropriadas no estudo da Matemática, assim outros poderão analisar este estudo e adaptar seus modelos e dar continuidade ao estudo de Teoria dos Grafos – Coloração.

## REFERÊNCIAS

BOAVENTURA NETTO, P. O.; JURKIEWICZ, S. Grafos: Introdução e prática. São Paulo: Editora Blucher, 2009.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997b.

BRIA, J. **Grafos no Ensino Fundamental e Médio: Matemática, Interdisciplinaridade e Realidade**. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia (COPPE), Rio de Janeiro, 2015

COSTA, P. P. **Teoria dos Grafos e suas Aplicações**. 2011. 77 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2011. Disponível em: <<http://www.rc.unesp.br/tmelo/diss-polyanna.pdf>>. Acesso em: 22 Set. 2016, 14:51:21.

Dias, L. **Proposta de atividade para o desenvolvimento do raciocínio lógico utilizando o Sudoku**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB, Vitória da Conquista, 2016.

Gontijo, C. H. **Relações entre criatividade, criatividade em Matemática e motivação em Matemática de alunos do Ensino Médio**. 2017, 194 p. Tese (Doutorado) – Instituto de Psicologia, Universidade de Brasília. Brasília, 2007.

PCN - **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, Secretaria da educação fundamental**. Brasília: MEC, 1998.

Piacente, R. **Coloração de Grafos e aplicações**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, Florianópolis, 2015.

## BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação – Reflexos sobre Educação e Matemática.** São Paulo/Campinas, Summus/Ed. Da UECampinas, 1986.

GOMES, A.A. **GRAFOS: UMA EXPERIÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro-UFRRJ, Seropédica, 2015.

LIMA, E. L. **Alguns problemas clássicos sobre Grafos.** Revista do professor de Matemática, n. 12. São Paulo: SBM, 1988.

OLIVEIRA, M. **Grafos: Uma Experiência no Ensino Fundamental,** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – UFRRJ, Seropédica, 2015.

RANGEL, D. L. S.;PIRES, Célia. Apostila - **Uma proposta de oficina de coloração de mapas e Grafos para o ensino fundamental e médio.** UNESP - São José do Rio Preto-SP.

SILVA Jr., ODILON MAGNO **Coloração em Grafos: Uma Experiência no Ensino Médio.** 2016. 101 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2016.

TOSCANA, David. **As Pontes de Königsberg.** 1 ed. Casa da Palavra, 2012.

Imagens:

<http://www.mapasparacolorir.com.br/mapa/brasil/brasil-regioes-nomes.png>

[http://www.abril.com.br/noticia/diversao/no\\_168200.shtml](http://www.abril.com.br/noticia/diversao/no_168200.shtml);

<http://www.sudoku.name/rules/pt>.

## APÊNDICES

### APÊNDICE A: TESTE I USADO NA AULA 2.



**PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL**  
**TEORIA DOS GRAFOS: COLORAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL**

PROF ORIENTADOR.: Dr. Montauban Moreira de Oliveira Junior

ALUNO: **Fábio da Rocha Costa**

DATA DA AULA: \_\_/\_\_/2016

AULA Nº 2

TEMA DA AULA: RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS PROPOSTOS.

**Questão 1.** Em um pet shop, uma vendedora precisa expor 7 peixes exóticos em alguns aquários para venda. Alguns desses peixes não podem ficar com certos peixes, por risco de conflito. A tabela abaixo mostra quais peixes não podem ficar juntos, denotados por x. Qual é o número mínimo de aquários necessários para expor todos esses peixes?

Peixe	A	B	C	D	E	F	G
A	-	x	x	x	x	x	x
B	x	-				x	x
C	x		-			x	
D	x			-		x	x
E	x				-		
F	x	x	x	x		-	
G	x	x		x			-

**Questão 2.** Em um canil de reabilitação de cães abandonados, a equipe acabou de receber 6 novos cachorros encontrados, e precisa colocá-los em diferentes casinhas para passar a primeira noite. Constatou-se que alguns desses cães ficam extremamente agressivos na presença de alguns do mesmo grupo, logo, terão que alocá-los em casinhas diferentes. O cachorro A não pode ficar com os cachorros C, D ou E. Os cachorros B e F não podem ficar juntos. O cachorro E não pode ficar com os cachorros D nem F. Quantas casinhas serão necessárias para acomodar os 6 cachorros?

**Questão 3.** Um químico deseja embarcar os produtos A, B, C, D, E, F, G usando o menor número de containers. Alguns produtos não podem ser colocados num mesmo container porque reagem entre si. Quaisquer dos dois produtos entre A, B, C, G reagem, A reage com F e D, e E também reage com F e D. Qual é o menor número de containers necessários para embarcar os produtos com segurança?

**Questão 4.** Quantas cores são necessárias para colorir o mapa do Brasil, sendo que regiões adjacentes não podem ter a mesma cor?



## APÊNDICE B: TESTE II USADO NA AULA 7.



### PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL TEORIA DOS GRAFOS: COLORAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL

PROF ORIENTADOR.: Dr. Montauban Moreira de Oliveira Junior

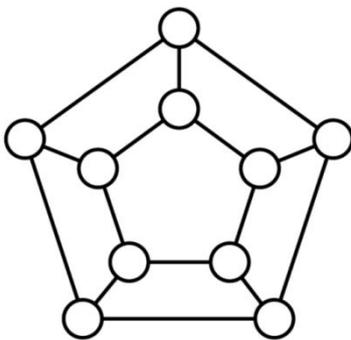
ALUNO: **Fábio da Rocha Costa**

DATA DA AULA: \_\_/\_\_/2016

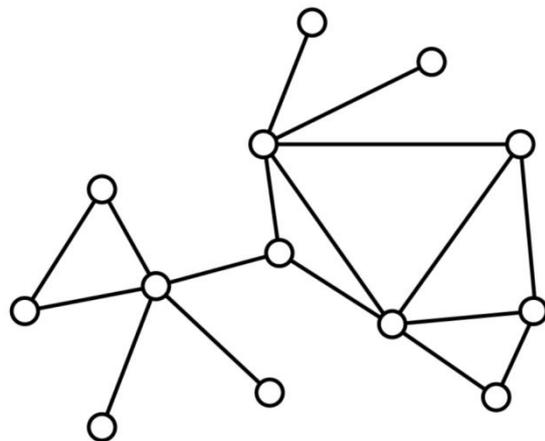
TEMA DA AULA: RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS PROPOSTOS.

**Questão 1. Determine o número cromático dos Grafos abaixo:**

a)



b)



**Questão 2**

Considere a tabela abaixo dos alunos que precisam fazer provas de recuperação, na mesma época, em uma escola do Ensino Fundamental:

Aluno	Disciplina
A	Matemática e Português
B	Matemática e Física
C	Física, Química e História
D	Português e Geografia
E	Matemática e Geografia
F	Português e Química
G	Geografia e História
H	Química e Artes

a) Monte um Grafo para a situação descrita acima, considerando:

- Os vértices representando as disciplinas;
- A aresta entre duas disciplinas indica que pelo menos um aluno estará fazendo as duas provas de recuperação.

OBS.: As provas não podem acontecer no mesmo período.

b) Encontre o número mínimo de horários.

Questão 3.

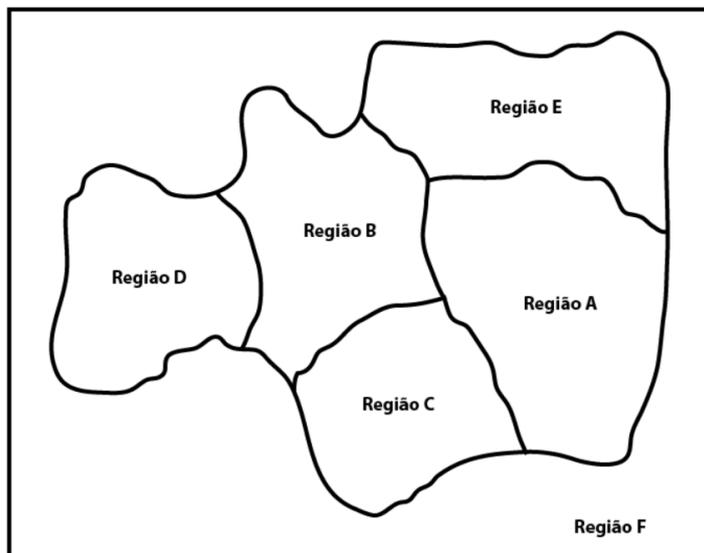
Suponha que o Zoológico “VIDA SELVAGEM” tenha adquirido algumas novas espécies. Alguns destes novos elementos não podem partilhar a mesma jaula. A tabela abaixo mostra quais animais não podem ficar juntos, denotados por x.

	Tigre	Zebra	Girafa	Rinoceronte	Águia	Panda
Tigre		X				X
Zebra	X			X	X	
Girafa				X	X	
Rinoceronte		X	X		X	
Águia		X	X	X		
Panda	X					

Qual será o número de recintos em que podemos colocar os novos animais do Zoológico “VIDA SELVAGEM”?

**Questão 4**

**Quantas cores são necessárias para colorir o mapa, sendo que regiões adjacentes não podem ter a mesma cor?**



## APÊNDICE C: QUESTIONÁRIO FINAL USADO NA AULA 8.



PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

### TEORIA DOS GRAFOS: COLORAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL

PROF ORIENTADOR.:Dr. Montauban Moreira de Oliveira Junior

ALUNO: **Fábio da Rocha Costa**

DATA DA AULA: \_\_/\_\_/2016

TEMA DA AULA: Questionário Final

Prezados alunos este questionário faz parte da nossa pesquisa com o intuito de apurarmos a relação de interesse e motivação pelo estudo da Matemática. Respondam com a maior exatidão possível, o sentimento que você expressa em relação a cada questão.

1- Eu acho a Matemática muito interessante e gosto das aulas de Matemática.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente  
Justifique sua resposta.

---

---

---

---

2- Achei fácil estudar os conteúdos sobre Grafos.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente  
Justifique sua resposta.

---

---

---

---

3- Achei fácil estudar os conteúdos sobre Coloração.

( ) Concordo Totalmente ( ) Concordo ( ) Discordo ( ) Discordo Totalmente

Justifique sua resposta.

---

---

---

4- Entendi as várias situações onde podemos aplicar a Técnica de Coloração.

Concordo Totalmente  Concordo  Discordo  Discordo Totalmente  
Justifique sua resposta.

---

---

---

5- Achei mais interessante resolver problemas de Matemática utilizando Grafos do que da maneira tradicional.

Concordo Totalmente  Concordo  Discordo  Discordo Totalmente  
Justifique sua resposta.

---

---

---

6- Depois das aulas, busquei mais informações sobre Grafos na internet.

Concordo Totalmente  Concordo  Discordo  Discordo Totalmente  
Justifique sua resposta.

---

---

---

7- Fiquei mais motivado para estudar Matemática após descobrir que Grafo pode ser usado para resolver problemas do cotidiano, como os problemas do das placas de computador, encontrar número mínimo de cores para pintar um mapa etc.

Concordo Totalmente  Concordo  Discordo  Discordo Totalmente  
Justifique sua resposta.

---

---

---

8- Acredito que a aula 6, construindo o Grafo dos elementos químicos, fez com que eu conseguisse enxergar mais claramente Coloração em Grafos.

Concordo Totalmente  Concordo  Discordo  Discordo Totalmente  
Justifique sua resposta.

---

---

---

---

9- Acredito que a aula 6, construindo o Grafo dos elementos químicos, foi uma forma agradável e divertida de ilustrar a Teoria dos Grafos.

Concordo Totalmente  Concordo  Discordo  Discordo Totalmente  
Justifique sua resposta.

---

---

---

---

10- Dentro do conteúdo aprendido nas aulas sobre Grafos, gostei mais de (marque apenas uma alternativa):

- (a) Encontrar o número cromático dos Grafos.
- (b) Horário das provas de recuperação.
- (c) Zoológico "VIDA SELVAGEM"?
- (d) Menor número de cores para pintar um mapa.

Justifique sua resposta.

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## ANEXOS

### ANEXO A: QUESTIONÁRIO ADAPTADO DO QUESTIONÁRIO DE GONTIJO, USADO NA AULA 1.

#### Questionário de Gontijo adaptado

1° ) Satisfação pela Matemática:

Tabela 1 – Satisfação pela Matemática

	Fator 1 – Satisfação pela Matemática	Quantidade de respostas				
	Itens:	1	2	3	4	5
19	As aulas de Matemática estão entre as minhas aulas preferidas.					
20	Quando me pedem para resolver problemas de Matemática, fico nervoso (a).					
23	Tenho muita dificuldade para entender Matemática.					
24	Matemática é “chata”					
25	Aprender Matemática é um prazer					
26	Testo meus conhecimentos resolvendo exercícios e problemas					
27	Tenho menos problemas com Matemática do que com as outras disciplinas					
28	Consigo bons resultados em Matemática					

2°) Jogos e desafios

Tabela 2 – Jogos e desafios

	Fator 2 – Jogos e Desafios	Quantidade de respostas				
	Itens:	1	2	3	4	5
1	Participo de competições com meus amigos resolvendo problemas matemáticos ou de raciocínio.					
7	Gosto de brincar de quebra-cabeça e jogos que envolvam raciocínio lógico.					
12	Procuro relacionar a Matemática aos conteúdos das outras disciplinas					
14	Gosto de elaborar desafios envolvendo noções de Matemática para meus amigos e familiares.					

3º) Resolução de problemas

Tabela 3 – Resolução de problemas

	Fator 3 – Resolução de problemas	Quantidade de respostas				
	Itens:	1	2	3	4	5
9	Gosto de resolver os exercícios rapidamente.					
10	Tento resolver um mesmo problema matemático de maneiras diferentes.					
11	Fico frustrado(a) quando não consigo resolver um problema de Matemática.					
21	Diante de um problema, sinto muita curiosidade em saber sua resolução.					
22	Quando minhas tentativas de resolver um problema fracassam, tento de novo.					

4º) Aplicações no Cotidiano

Tabela 4 – Aplicações no cotidiano

	Fator 4 – Aplicações no Cotidiano	Quantidade de respostas				
	Itens:	1	2	3	4	5
2	Costumo explicar fenômenos da natureza utilizando conhecimentos matemáticos.					
3	Calculo o tempo que vou gastar ao sair de casa para chegar ao destino que pretendo.					
4	Faço desenhos usando formas geométricas					
5	Percebo a presença da Matemática nas atividades que desenvolvo fora da escola					
6	Faço “continhas de cabeça” para calcular valores quando estou fazendo compras ou participando de jogos.					

5º) Hábitos nos estudos

Tabela 5 – Hábitos de estudo

	Fator 5 – Hábitos de Estudo	Quantidade de respostas				
	Itens:	1	2	3	4	5
13	Estudo Matemática todos os dias durante a semana.					
15	Realizo as tarefas de casa que o professor de Matemática passa.					
17	Estudo as matérias de Matemática antes que o professor as ensine na sala de aula.					
18	Além do meu caderno, eu costumo estudar Matemática em outros livros para fazer provas e testes.					

6º) Interação na sala de aula

Tabela 6 – Interação na sala de aula

	Fator 6 – Interação na sala de aula	Quantidade de respostas				
	Itens:	1	2	3	4	5
8	Faço perguntas nas aulas de Matemática quando eu tenho duvidas.					
16	Relaciono-me bem com meu professor de Matemática.					