UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

**DISSERTAÇÃO**

# Uma proposta de metodologia de ensino de logaritmos através da tecnologia

Maicon do Nascimento Meneguci

SEROPÉDICA, RJ
2022

**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO**
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**
**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT**

# Uma proposta de metodologia de ensino de logaritmos através da tecnologia.

**Maicon do Nascimento Meneguci**

*Sob a Orientação do Professor*
**Prof. Dr. Luciano Vianna Felix**

Seropédica, RJ
Janeiro de 2022

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

M541p

Meneguci, Maicon Do Nascimento , 1993-
Uma proposta de metodologia de ensino de logaritmos através da tecnologia / Maicon Do Nascimento Meneguci. - Nova Iguaçu, 2022.
70 f.: il.

Orientador: Luciano Vianna Felix.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, PROFMAT/MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL, 2022.

1. O uso de tecnologia digital no ensino de matemática . 2. Logaritmos. 3. A tecnologia digital aplicada no Ensino de Logaritmos. 4. Logaritmos e geogebra : Uma proposta de abordagem. 5. Considerações finais. I. Felix, Luciano Vianna , 1986-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. PROFMAT/MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL III. Título.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

**HOMOLOGAÇÃO Nº 3/2022 - ICE (12.28.01.23)**

**Nº do Protocolo: 23083.015405/2022-99**

**Seropédica-RJ, 10 de março de 2022.**

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MAICON DO NASCIMENTO MENEGUCI

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre, no Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 17/02/2022

Conforme deliberação número 001/2020 da PROPPG, de 30/06/2020, tendo em vista a implementação de trabalho remoto e durante a vigência do período de suspensão das atividades acadêmicas presenciais, em virtude das medidas adotadas para reduzir a propagação da pandemia de Covid-19, nas versões finais das teses e dissertações as assinaturas originais dos membros da banca examinadora poderão ser substituídas por documento(s) com assinaturas eletrônicas. Estas devem ser feitas na própria folha de assinaturas, através do SIPAC, ou do Sistema Eletrônico de Informações (SEI) e neste caso a folha com a assinatura deve constar como anexo ao final da tese /
dissertação.

LUCIANO VIANNA FELIX Drº UFRRJ (Orientador, Presidente da Banca)

VINICIUS LEAL DO FORTE Drº UFRRJ (membro interno)

MARCOS VINICIUS PEREIRA SPREAFICO Drº UFMS (externo ao Programa)

***(Assinado digitalmente em 15/03/2022 13:46)***
LUCIANO VIANNA FELIX
*PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR*
*DeptM (12.28.01.00.00.00.63)*
*Matrícula: 1770198*

***(Assinado digitalmente em 10/03/2022 16:11)***
VINICIUS LEAL DO FORTE
*PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR*
*DeptM (12.28.01.00.00.00.63)*
*Matrícula: 2620902*

***(Assinado digitalmente em 10/03/2022 20:45)***
MARCOS VINICIUS PEREIRA SPREAFICO
*ASSINANTE EXTERNO*
*CPF: 057.000.899-98*

# AGRADECIMENTOS

Primeiramente, queria agradecer a Deus pela vida e pela oportunidade dessa caminhada. Ele me fortaleceu e esteve presente em cada momento nessa trajetória.

Aos meus pais Aleir Delgado Meneguci (in memoria) e Severina do Nascimento Meneguci que incentivaram minha educação e sempre apoiaram minhas decisões envolvendo questões da minha carreira.

A minha esposa Deborah Nanttel Nascentes Meneguci por acreditar em mim e sempre incentivar o processo, no qual eu pensei em desistir várias e várias vezes.

Aos meus colegas de turma que sempre buscaram ajudar e incentivar. Cada dúvida tirada, cada dica e cada conselho foram essenciais para essa conquista e sem ajuda de vocês isso não seria possível.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001.

# RESUMO

A preparação dos professores do amanhã para usar a tecnologia é uma das questões mais importantes dos programas atuais de formação de professores. Afinal, o advento da democratização do acesso digital por meio do uso de smartphones, bem como a necessidade advinda do ensino remoto durante a pandemia de Covid-19, trouxeram novos e irreversíveis caminhos possíveis. Diante desse cenário, essa dissertação tem por objetivo abordar alguns diferentes aspectos, amplos e específicos, da relação entre a tecnologia, a educação e o ensino de logaritmos. Com esse propósito, percorremos as tensões que envolvem a tecnologia e a escola, as concepções históricas e formais do conceito de logaritmos e as possibilidades de inovações no contexto da sala de aula de matemática. A abordagem da pesquisa em questão não foi concebida somente no âmbito literário. Para além de levantamentos bibliográficos, como resposta às inquietações que surgiram a partir do diálogo com esses autores, trazemos um possível roteiro de utilização do software Geogebra para o ensino de logaritmos. O roteiro consiste em uma sequência didática que aborda algumas propriedades operatórias logarítmicas. Sua intenção é inspirar práticas docentes inovadoras que promovam investigação e autonomia do aluno, para que a produção do seu conhecimento matemático seja, realmente, significativa e sólida. Trazemos, ainda, um guia de discussões que podem apoiar o professor na implementação dessas atividades. Dessa forma, almejamos contribuir na construção de um caminho de inovação do ensino de matemática, que abrace as potências e contorne as limitações.

**Palavras-chave**: Educação Matemática, Tecnologias de Informação e Comunicação, Logaritmos, Proposta de abordagem.

# ABSTRACT

Preparing tomorrow's teachers to use technology is one of the most important issues in today's teacher education programs. After all, the advent of the democratization of digital access through the use of smartphones, as well as the need arising from remote teaching during the Covid-19 pandemic, brought new and irreversible possible paths. Given this scenario, this work aims to address some different, broad and specific aspects of the relationship between technology, education and the teaching of logarithms. For this purpose, we go through the tensions that involve technology and school, the historical and formal conceptions of the concept of logarithms and the possibilities of innovations in the context of the mathematics classroom. The approach of this research was not conceived only in the literary field. In addition to bibliographic surveys, in response to the concerns that arose from the dialogue with these authors, we bring a possible script for using the Geogebra software for teaching logarithms. The script consists of a didactic sequence that addresses some logarithmic operative properties. Its intention is to inspire innovative teaching practices that promote investigation and student autonomy, so that the production of their mathematical knowledge is really meaningful and solid. We also bring a discussion guide that can support the teacher in the implementation of these activities. In this way, we aim to contribute to the construction of a path of innovation in mathematics teaching, which embraces the powers and circumvents limitations.



**Palavras-chave**: Mathematics Education, Information and Communication Technologies, Logarithms, Approach Proposal

# LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE TABELAS

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

A preparação dos professores do amanhã para usar as tecnologias digitais é uma das questões mais importantes dos programas atuais de formação de professores. Seu uso apropriado e integrado impacta todos os aspectos da educação matemática: o que a matemática ensina, como é ensinada e aprendida, e como é avaliada. Afinal, a democratização do acesso digital por meio do uso de smartphones, bem como a necessidade advinda do ensino remoto durante a pandemia de Covid-19, trouxe novos e irreversíveis caminhos possíveis. O encurtamento de distâncias, a rapidez da circulação de informações, as evoluções na forma de lidar com o mundo afetam todos os processos anteriores (SOUZA; SOUZA, 2010). Sejam em questões sociais, políticas, científicas, psíquicas, emocionais, pedagógicas, … em diferentes aspectos, as relações inter e intrapessoais mudaram e mudam. Com elas, também, as reinvenções de formas de interação e pensamento.

A educação não está ausente dessas inovações, que afetam tanto os indivíduos quanto o próprio ambiente e seus processos. Dessa forma, é natural que surjam novas propostas. Formas de implementar as evoluções e acompanhar suas alterações na interação com o mundo. Assim, mudanças no currículo de matemática, incluindo o uso de tecnologias digitais, têm sido defendidas por vários anos (SOUZA; SOUZA, 2010).

Segundo dados da Pesquisa TIC Educação 2020, em 2019, 82% das escolas brasileiras já têm acesso à internet (CGI.br/NIC.br, 2020). No entanto, o país ainda não se tem esta cultura do uso de computadores para fins didáticos (BATES, 2016). Isto é, o processo de globalização e de desenvolvimento tecnológico não é uniforme e universal. A integração da tecnologia com o mundo corporativo, no cotidiano dos indivíduos e em instituições como a escola, precisa ser refletida à luz dos avanços e recuos internos da comunidade em questão. É necessário considerar as potências e limitações dos recursos humanos, financeiros e sociais que compõe a realidade da implementação e utilização de recursos tecnológicos como ferramentas de ensino. Em especial, o ensino de matemática.

Em face do cenário atual introduzido acima, surge essa dissertação que se organiza em mais quatro capítulos. “O uso da tecnologia digital para o ensino de matemática” é o capítulo que virá a seguir. Nele pretendemos abordar diferentes aspectos, amplos e específicos, da relação entre a tecnologia e a educação. A começar pelo uso massivo das inovações tecnológicas no cotidiano, percorremos como essa aproximação se dá com as salas de aula. Grifamos aqui as potencialidades que ela representa. Mas também as barreiras que encontra, sejam elas físicas, financeiras ou formativas. No entanto, apesar de haver limitações reais, sua implementação precisa ser analisada com atenção. Afinal, os benefícios que representa, quando utilizada de maneira eficaz, são significativos. Ademais, nesse capítulo justificamos nossa pesquisa e sua importância para o campo da educação matemática.

O terceiro capítulo, “Logaritmos”, aborda o conteúdo matemático que escolhemos como um dos pilares do desenvolvimento desse trabalho. Recorremos a uma abordagem histórica, primeiramente, a fim de ressaltar a importância desses objetos matemáticos, tanto para a própria matemática, quanto no universo do aluno. Prosseguimos com os conceitos básicos que envolvem o estudo dos logaritmos e a demonstração de algumas propriedades que serão utilizadas posteriormente.

O quarto e quinto capítulos tem objetivos parecidos. Ambos pretendem servir como respostas aos apontamentos levantados no caminho até eles. O quarto, de uma forma mais geral, defende a utilização de ferramentas metodológicas diversas, tecnológicas, familiares e atraentes aos alunos. Num primeiro momento, optamos por trazer o jogo como uma dessas propostas. Não nos atemos a jogos específicos, mas priorizamos a ideia de gamificação das atividades, sejam elas com jogos tradicionais, com jogos criados para um fim particular da classe ou a utilização de características isoladas deles, como competição ou experimentação. Sugerimos ainda, a utilização de softwares educacionais como outra possível ferramenta. A essa sugestão daremos atenção maior no próximo capítulo.

“Logaritmo e Geogebra: uma proposta de abordagem” é o Capítulo 5. Ele representa uma resposta às inquietações levantadas até aqui. Uma possibilidade, dentre muitas outras. Tem objetivo de inspirar atividades que abordem conteúdos matemáticos, por meio de ferramentas para além da formação tradicional de ensino, que explorem outros aspectos da aprendizagem, outras habilidades que podem ser desenvolvidas nesse processo, que potencializem a produção do conhecimento matemático no aluno e o torne realmente significativo. Para isso, escolhemos o Geogebra como software e trazemos um possível roteiro de utilização desse programa para o ensino de logaritmos. Por fim, fazemos as últimas considerações, diante de todas as discussões promovidas.

## 2 O USO DA TECNOLOGIA DIGITAL NO ENSINO DE MATEMÁTICA

A implementação das tecnologias digitais no ambiente escolar enfrenta diversos desafios. Segundo Costa (2019) apesar de uma retórica favorável ao seu uso, o currículo oficial continua omisso em termos de orientações específicas sobre o que fazer com essas tecnologias. No entanto, vale ressaltar que o uso da tecnologia digital só é viável se a mesma trouxer resultados positivos e satisfatórios no final de uma aula. É o que prevê os Parâmetros Curriculares Nacionais do terceiro e quartos ciclos:

> Só tem sentido se contribuir para a melhoria da qualidade do ensino. A simples presença de novas tecnologias na escola não é, por si só, garantia de maior qualidade na educação, pois a aparente modernidade pode mascarar um ensino tradicional baseado na recepção e na memorização de informações. A presença de aparato tecnológico na sala de aula não garante mudanças na forma de ensinar e aprender. A tecnologia deve servir para enriquecer o ambiente educacional, propiciando a construção de conhecimentos por meio de uma atuação ativa, crítica e criativa por parte de alunos e professores. (BRASIL, 1998, p.140).

Dessa forma, as considerações sobre qualidade, frequência ou eficácia, assim como soluções, propostas e desafios, do uso de tecnologias na educação brasileira, não podem estar aquém da realidade do país. Elas precisam considerar a realidade dos professores, alunos, ambientes escolares e universitários, quanto à formação e investimento. Discutiremos a seguir alguns desses contextos, ao dialogar com outros autores. Suas visões, previsões e propostas, tal como suas denúncias, apontamentos e inquietações.

### 2.1 EDUCAÇÃO PARA O USO SOCIAL DA TECNOLOGIA DIGITAL

O conhecimento é um ponto estratégico no desenvolvimento econômico, social e político da sociedade, tal como a conhecemos. Hoje, uma das características que podem impulsioná-lo é a relação entre educação e tecnologia. Afinal, tal relação é estimulada pelo crescimento espetacular da conectividade com a Internet e da penetração da telefonia móvel. Estima-se que mais de 50% da população mundial agora usa a Internet e esse número está crescendo a uma taxa notável. Embora haja desigualdades significativas na conectividade, demarcadas pela relação com a renda, raça, localização e idade, a infraestrutura da Internet avançou ao ponto de estar presente em localidades que abrangem 96% da população mundial (VALENTE, 2019).

A conectividade digital é promissora para ganhos em saúde, educação, comunicação, lazer e bem-estar. A inteligência artificial, impressoras 3D, transcrição instantânea, reconhecimento de voz e de software de reconhecimento de gestos, são apenas alguns exemplos do que está a ser testado. As tecnologias digitais estão remodelando a atividade humana da vida cotidiana para as relações internacionais, do trabalho para o lazer, redefinindo múltiplos aspectos de nossa vida privada e pública (SCHUHMACHER et al., 2016).

Tais tecnologias ampliaram as oportunidades de liberdade de expressão e de mobilização social, cívica e política, mas também levantam preocupações importantes. A disponibilidade de informações pessoais no mundo cibernético, por exemplo, traz questões significativas de privacidade e segurança. Novos espaços de comunicação e socialização estão transformando o que constitui a ideia de "social" e exigem garantias legais e outras aplicáveis para evitar seu uso excessivo, abusivo e indevido (PÉREZ-GÓMEZ, 2015).

Exemplos desse uso indevido da internet, da tecnologia móvel e da mídia social variam de *cyberbullying* a atividades criminosas, até mesmo ao terrorismo. Neste novo mundo cibernético, os educadores precisam preparar melhor as novas gerações para lidar com as dimensões éticas e sociais não apenas das tecnologias digitais existentes, mas também daquelas ainda a serem inventadas (ANDRADE, 2011).

## 2.2 TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO E RELAÇÃO COM A EDUCAÇÃO

Pode-se falar de vários desafios a serem enfrentados nas escolas brasileiras hoje em dia, principalmente nas escolas públicas. Segundo o autor Costa (2019, p. 16), “As tecnologias digitais de informação e comunicação estão hoje tão presentes na sociedade que não mais se põe em causa a sua utilização no nosso quotidiano, mesmo em contextos mais remotos ou mais desfavorecidos”.

As Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) referem-se a toda tecnologia usada para lidar com telecomunicações, mídia de transmissão, sistemas inteligentes de gerenciamento predial, sistemas de processamento e transmissão audiovisuais e funções de controle e monitoramento baseadas em rede. Embora sejam frequentemente consideradas um sinônimo estendido de Tecnologia da Informação (TI), seu escopo é mais amplo. Aposta-se que elas abrem novas possibilidades para os processos de ensino e de aprendizagem, por prometer valor agregado em termos de eficácia e aprimoramento da qualidade. Contudo, seu sucesso de implementação, no campo da educação, conta com diversos fatores externos (LEITE; RIBEIRO; 2012).

Fantin (2011) cita que tal perspectiva se refere a uma possibilidade de educar sobre os meios, com os meios e através dos meios considerando que uma concepção ecológica e integrada de mídia-educação se refere a fazer educação usando todos os meios e tecnologias disponíveis: computador, Internet, celular, fotografia, cinema, vídeo, livro, CD, DVD, integrando com a corporeidade, a expressividade, o teatro, a dança, etc.” Dessa forma, é possível pensar em uma educação com uso de tecnologias digitais, ainda que a escola não tenha uma equipagem completa.

As ferramentas tecnológicas incluem aquelas que são *específicas para conteúdo* e *neutras em conteúdo*. Na educação matemática, as tecnologias específicas de conteúdo incluem sistemas de álgebra computacional, ambientes de geometria dinâmica, applets interativos, computação portátil, coleta de dados, dispositivos de análise e aplicativos baseados em computador (SOUZA; SOUZA, 2010).

Essas tecnologias ajudam os alunos a explorar e identificar conceitos e relacionamentos matemáticos. As tecnologias de conteúdo neutro incluem ferramentas de comunicação e colaboração em mídia digital baseada na Web, e essas tecnologias aumentam o acesso dos alunos a informações, ideias e interações que podem apoiar e melhorar a criação de sentido, o que é central no processo de apropriação do conhecimento (KENSKI, 2003).

As escolas usam um conjunto diversificado de ferramentas de TIC para comunicar, criar, disseminar, armazenar e gerenciar informações. O que pode melhorar a comunicação interna dos agentes escolares. Além da comunicação externa, tendo, por exemplo, maior participação da família. Em alguns contextos, as TICs também se tornaram parte integrante da interação ensino-aprendizagem, por meio de abordagens como a substituição de lousas comuns por lousas digitais interativas, usando os próprios smartphones ou outros dispositivos dos alunos para aprender durante as aulas. O que possibilita e favorece a escolha de alguns modelos de metodologia de aprendizagem ativa, como o caso da “sala de aula invertida”.

(BATCH; DOMINGUES; WALTER, 2013).

É importante perceber que as novas tecnologias, por si só, não serão capazes de trazer todo o conhecimento que os alunos precisam. O professor deve estar preparado para administrar as novas possibilidades de recursos com os objetivos já presentes no roteiro escolar. Ou seja, usar um aparato tecnológico em sala de aula deverá ser algo para um determinado fim, em um momento específico da aula. As TICs, como qualquer outra ferramenta didático pedagógica, se bem utilizadas, são aliados do processo de ensino e aprendizagem. Podem auxiliar na visualização e interação com o conteúdo, ou como mobilizador da aprendizagem, de forma a complementar ou aprofundar o currículo definido para aquele público. Além disso, a facilidade de comunicação que ela promove e a interação virtual, em outros espaços e contextos, pode potencializar a produção do conhecimento.

> Interagir com as informações e com as pessoas para aprender é fundamental. Os dados encontrados livremente na internet transformam-se em informações pela ótica, pelo interesse e pela necessidade com que o usuário os acessa e os considera. Para a transformação das informações em conhecimentos é preciso um trabalho processual de interação, reflexão, discussão, crítica e ponderações que é mais facilmente conduzido quando partilhado com outras pessoas. As trocas entre colegas, os múltiplos posicionamentos diante das informações disponíveis, os debates e as análises críticas auxiliam a compreensão e a elaboração cognitiva do indivíduo e do grupo. (KENSKI, 2003, p.122).

Nesse contexto, as TICs, às vezes, são vistas como uma solução. Uma resposta eficaz à escassez de recursos manipuláveis, à imutabilidade do ambiente escolar e como um auxílio na prática do professor, ao facilitar a aprendizagem significativa. Todavia, a real implementação dessas tecnologias no cotidiano é marcada por uma série de controvérsias. A começar pelos professores que, por vezes, se mostram resistentes a introduzi-las em sua prática. Há diversos motivos para tal posicionamento. Um deles é a tradição. Os professores analisam suas vivências e argumentam que, em sua época, não foi necessário o uso da internet, nem de recursos didáticos. Ou seja, carregam a compreensão de que a instituição escolar deve ser estável e estática. Uma escola imutável, parada no tempo e aquém das inovações extramuros. Segundo Duvoisin (2002)

> Os professores de hoje são fruto de uma educação excessivamente formal, centrada na memorização e na transmissão de conhecimento, desenvolvida em relação unilateral de ensinar-aprender, pela qual foram reduzidos a alunos-objeto, adestrados e domesticados (DUVOISIN, 2002, p. 98).

Outro ponto que também é bastante questionado pelos professores é sobre o uso monitorado da internet em sala. São levantadas questões sobre a necessidade de um maior controle sobre o que o aluno está pesquisando e que tipo de site ele está tendo acesso, enquanto o professor explica e executa a atividade proposta. De fato, há mecanismos de proteção de sites indesejáveis ao ambiente escolar que podem ser priorizados pela escola. Entretanto é importante perceber que as formas de não se envolver nas atividades propostas em aulas são das mais diversas, ainda que não haja uso de tecnologias digitais oferecidas ou coordenadas pelo professor. Com tecnologia ou não uma participação consciente e focada precisa ser construída com a turma.

> Para que a participação seja realidade, são necessários meios e condições favoráveis, ou seja, é preciso repensar a cultura escolar e os processos, normalmente autoritários, de distribuição do poder no seu interior (...). Outro dado importante é entender a participação como processo a ser construído coletivamente. Nessa direção, é fundamental ressaltar que a participação (..) não pode ser entendida apenas como mecanismo formal/legal (BRASIL, 2005e, p.15).

A escassez de preparação de professores para atuar com o uso de tecnologias digitais, o acesso restrito a formações continuadas, a infraestrutura limitada acadêmica e profissional, são realidades enfrentadas cotidianamente. Revelam o baixo investimento público na educação e configuram-se um risco, ao passo que suas consequências impactam diretamente nos processos de aprendizagem dos alunos. Os professores não se sentem preparados e seguros para utilizar ferramentas instrucionais. Ainda que argumentos, como os citados acima, e barreiras da tradição sejam refutados, o abismo entre a teoria e a implementação ainda é real. Schuhmacher (2016) aponta que acreditar na inserção das TICs em sua prática docente e a consciência das potencialidades delas, não é suficiente para um cenário completo. Sua utilização tende a ser puramente operacional, pouco tensionada com competências didático-pedagógicas. Dessa forma, os resultados não são eficazes como o esperado (SCHUHMACHER et al., 2016).

Ou seja, o uso da tecnologia digitais está associado a como o professor faz uso disso e não que tipo de tecnologia ele terá que usar. Claro que, em um mundo globalizado, é normal que os alunos indaguem o professor sobre a possibilidade de usar novas tecnologias. Alguns livros didáticos também já contêm atividades que pedem o uso de buscas na internet. Tais atividades deixam o aluno mais animado e o professor não pode perder essa oportunidade de tornar a aula mais dinâmica e ao mesmo tempo atrativa.

Quando os professores são alfabetizados digitalmente e treinados para usar as TICs, essas abordagens podem levar a habilidades de pensamento de ordem superior, fornece opções criativas e individualizadas para os alunos expressarem seus entendimentos e deixar os alunos mais bem preparados para lidar com as mudanças tecnológicas em andamento na sociedade e no local de trabalho (BIZELLI, 2013).

Neste caso, o currículo dos professores é considerado um veículo significativo para a realização dos objetivos da Estrutura Curricular Nacional e, consequentemente, é projetado para fornecer uma exposição aprimorada a informações e recursos para apoio profissional contínuo, aprimoramento do ensino-aprendizagem-avaliação-rastreamento e aumento da produtividade (FANTIN, 2011). A Política Nacional de TIC na Educação Escolar organiza as competências para a alfabetização em TIC e o currículo que as inclui, em três níveis amplos: básico, intermediário e avançado.

O nível básico refere-se à existência de noções básicas de computadores e o uso básico de ferramentas e técnicas. Como operar um computador, armazenar, recuperar e gerenciar dados, usar um computador para realizar tarefas básicas de processamento de palavras e dados; conectar, desconectar e solucionar problemas de dispositivos básicos de armazenamento, entrada e saída. Conectar-se à Internet, usar e-mail e navegação na Web, usar mecanismos de pesquisa; manter o computador atualizado e seguro; operar e gerenciar conteúdo de dispositivos externos (gravadores de som, câmeras digitais, scanners etc.); conectar, desconectar, operar e solucionar problemas de dispositivos digitais (BATCH; DOMINGUES; WALTER, 2013).

O nível intermediário, compreende as habilidades de criação e gerenciamento de conteúdo usando uma variedade de aplicativos de software e dispositivos digitais; usar sites e mecanismos de busca para localizar, recuperar e gerenciar conteúdo, ferramentas e recursos; instalar, desinstalar e solucionar problemas de aplicativos de software simples (BATCH; DOMINGUES; WALTER, 2013).

Já o último estágio, que é o nível avançado, refere-se a usar diferentes aplicativos de software para aprimorar o próprio aprendizado - aplicativos de banco de dados, análise de dados e solução de problemas, computação, design, comunicação gráfica e audiovisual; realizar pesquisas e realizar projetos usando recursos da web; usar as TICs para documentação e apresentação; criar e participar de redes baseadas na Web para aprendizado cooperativo e colaborativo; tomar conhecimento de questões de segurança cibernética, direitos autorais e uso seguro das TICs e tomar as medidas necessárias para proteger a si mesmo e a seus recursos (BATCH; DOMINGUES; WALTER, 2013).

O conteúdo do currículo envolve atividades que se baseiam simultaneamente em competências de diferentes níveis, de modo a garantir a conclusão de todos os níveis. O currículo das TICs na Educação tenta, em geral, equipar os professores com competências em TICs para fortalecer suas próprias capacidades profissionais e usar efetivamente ferramentas e dispositivos em seu ensino-aprendizagem. O professor também será treinado para gerenciar o ambiente de TIC na escola e funcionará como coordenador local na organização de programas de capacitação (SIQUEIRA; ALFINITO, 2014).

Portanto, o currículo é apresentado como uma série de cursos de curta duração que garantem os níveis básico, intermediário e avançado de competência. Os cursos de iniciação devem ser realizados no modo presencial, enquanto o Estado pode optar por realizar as atualizações no modo presencial ou online (CARLI, 2013).

## 2.3 A IMPORTÂNCIA DA TECNOLOGIA DIGITAL NA APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

A literatura em torno das tecnologias digitais e da matemática sugere que novas tecnologias mudaram potencialmente o ensino e a aprendizagem, oferecendo oportunidades para uma mudança de foco de uma visão tradicional para uma abordagem mais problemática. Essas tecnologias são conhecidas como Tecnologia da Informação e Comunicação (TICs). Sua utilização é apoiada por pesquisas que afirmam que a visão tradicional da matemática focada na memorização e na aprendizagem mecânica é agora substituída por uma que tenha propósito e aplicação (D’AMBROSIO, 2012).

Em diversos países, o uso de tecnologias digitais na sala de aula de matemática primária já é uma opção. Algumas escolas têm acesso a dispositivos mais poderosos e acessíveis do que nunca (PRETTO, 2011). É importante ressaltar que esses são os mesmos dispositivos que muitas crianças já têm acesso em casa, proporcionando uma oportunidade de preencher a lacuna entre a matemática na escola e suas vidas fora da sala de aula. Quando bem utilizada, a tecnologia pode melhorar o envolvimento dos alunos com a matemática e ajuda a melhorar a compreensão dos conceitos matemáticos.

Em uma pesquisa de avaliação dos recursos digitais realizada por Santos, Reszka e Borba (2021) com alunos do ensino fundamental nascidos na era digital, os resultados foram positivos. Os alunos descobriram que gostavam de usar o recurso digital em *tablets* e computadores e passaram a pensar em matemática como algo a ser tolerado ou suportado por algo que é divertido de aprender. Um bônus era que as crianças começaram voluntariamente a usar seu tempo de tela em casa para fazer matemática. Dados pré e pós-teste também indicaram que o uso da tecnologia contribuiu para melhorar os resultados da matemática (SANTO; RESZKA; BORBA, 2021).

Aproximando essas questões ainda mais das salas de aula, pode-se perceber que em um programa de matemática balanceado, o uso estratégico da tecnologia digital fortalece o ensino e o aprendizado da disciplina. Simplesmente ter acesso à tecnologia não é suficiente. O professor e o currículo desempenham papéis críticos na mediação do uso de ferramentas tecnológicas (D'AMBROSIO, 2012).

Os professores e os desenvolvedores de currículo devem ser tomadores de decisão com conhecimento, capazes de determinar quando e como a tecnologia pode melhorar a aprendizagem dos alunos de forma adequada e eficaz. É importante que as escolas e programas de matemática forneçam aos alunos e professores acesso à tecnologia instrucional. Isso inclui instrução para utilização de hardwares, como dispositivos portáteis, e de softwares, como aplicativos matemáticos com recursos baseados na Web, juntamente com treinamento adequado para garantir seu uso efetivo (ANDRADE, 2011).

Os programas de formação de professores e desenvolvimento profissional, por sua vez, precisam atualizar-se continuamente, a fim de oferecer o conhecimento necessário aos profissionais em formação sobre tecnologia digital e sua aplicação para apoiar o aprendizado. Este trabalho com os profissionais deve incluir o desenvolvimento de aulas de matemática que aproveitem ambientes ricos em tecnologia e a integração de ferramentas digitais na instrução diária, incluindo uma apreciação do poder da tecnologia digital e seu impacto potencial na compreensão e uso da matemática pelos alunos. Além de enriquecer as experiências dos alunos como aprendizes de matemática, o uso dessas ferramentas maximiza as possibilidades proporcionadas pelo crescente conhecimento e conforto dos alunos com meios de comunicação e recuperação de informações orientados pela tecnologia (D'AMBROSIO, 2012).

## 2.4 COMO A TECNOLOGIA DIGITAL É USADA NA SALA DE AULA

Muitos no campo da tecnologia de ponta veem as novas tecnologias digitais como ferramentas poderosas para ajudar as escolas a atender às necessidades de populações estudantis cada vez mais diversificadas. A ideia é que os dispositivos digitais, o software e as plataformas de aprendizagem ofereçam uma variedade inimaginável de opções para adaptar a educação aos pontos fortes e fracos, interesses e motivações acadêmicas de cada aluno, preferências pessoais e ritmo ideal de aprendizado (BATES, 2016).

Nos últimos anos, um grupo de organizações, incluindo a Fundação Bill & Melinda Gates, a Fundação Michael e Susan Dell e a EDUCAUSE criaram uma definição de "aprendizado personalizado" que se baseia em quatro pilares, abordando uma competência cada. São eles: "aprender a ser (competência pessoal); aprender a conviver (competência social); aprender a fazer (competência produtiva); aprender a conhecer (competência cognitiva)" (NEVES; PRADO, 2016, p. 11). O primeiro compreende que cada aluno deve ter um "perfil de aprendiz" que documente seus pontos fortes, pontos fracos, preferências e objetivos. Para o segundo, os ambientes de aprendizagem dos alunos devem ser flexíveis e estruturados de forma a apoiar seus objetivos individuais com o apoio do coletivo e com a possibilidade de compartilhamento e troca. A terceira competência entende que os alunos devem seguir uma progressão baseada na competência. Isto é, que se concentre em sua capacidade de demonstrar domínio de um tópico, em vez de tempo de assento. Por fim, o último pilar compreende que cada aluno deve seguir um caminho de aprendizado individualizado que o incentive a definir e gerenciar metas acadêmicas pessoais (NEVES; PRADO, 2016).

Na direção da personalização da aprendizagem, a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO), desenvolveu um relatório com o objetivo de apresentar diretrizes para a criação de políticas que incentivem a aprendizagem móvel em pleno potencial. Segundo o documento:

> As tecnologias móveis, por serem altamente portáteis e relativamente baratas, ampliaram enormemente o potencial e a viabilidade da aprendizagem personalizada. Além disso, à medida que aumentam o volume e a diversidade de informações que os aparelhos móveis podem coletar sobre seus usuários, a tecnologia móvel torna-se capaz de melhor individualizar a aprendizagem (UNESCO, 2014, p. 14).

Além disso, aliado ao potencial de personalização do ensino, “Hoje, as tecnologias móveis são comuns, mesmo em áreas onde escolas, livros e computadores são escassos” (UNESCO, 2014, p. 10). Ao contrário das tecnologias fixas, as móveis possibilitam a aprendizagem 24/7 (24 horas por dia e 7 dias por semana), no momento e local da escolha do aluno. Sistemas de gerenciamento de aprendizado, sistemas de informações de alunos e outros softwares também são usados para distribuir atribuições, gerenciar cronogramas e comunicações e acompanhar o progresso dos alunos (COSTA; XAVIER, 2014).

O software e os aplicativos educacionais se tornaram mais “adaptativos”, confiando em tecnologia e algoritmos para determinar não apenas o que um aluno sabe, mas também o seu processo de aprendizado e até mesmo seu estado emocional. Apesar de todo progresso tecnológico, a implementação continua sendo um grande desafio. Escolas e educadores em todo o país continuam a lutar com o papel variável dos professores, como equilibrar modelos flexíveis e “personalizados” com os requisitos de responsabilidade estadual e federal que ainda precisam atender e o desafio cultural mais profundo de mudar os hábitos de longa data dos educadores e rotinas (BATES, 2016).

Apesar dos investimentos maciços que muitos sistemas escolares estão fazendo, as evidências de que o aprendizado personalizado digital pode melhorar os resultados dos alunos ou as lacunas estreitas de desempenho em escala permanecem dispersas, na melhor das hipóteses (PÉREZ-GÓMES, 2015).

Muitos considerariam que o uso de dispositivos móveis em matemática consistiria em jogos simples. Uma pesquisa na *App Store* revela dezenas de milhares de jogos de matemática supostamente educacionais, criando uma possível armadilha de aplicativos para professores que passam horas pesquisando em muitos aplicativos de baixa qualidade. Embora os jogos possam ter benefícios em termos de desenvolvimento de fluência, geralmente, eles não são instrutivos suficiente para aprendizagem completa de novos conceitos matemáticos. Por esse motivo, é crucial que haja uma sequência didático-pedagógica bem elaborada pelo professor e que ele supervisione a implementação desse planejamento. (CABRAL; JUNIOR, 2016).

A seguir, sugerimos algumas das diferentes maneiras pelas quais os professores podem usar a tecnologia. Alguns aplicativos, como *Explain Everything*, *EduCreations* ou *ShowMe*, permitem que os alunos mostrem e expliquem a solução para um problema matemático usando voz e imagens. Outra maneira muito falada atualmente é o aprendizado invertido: nele, segundo Bergmann e Sams (2016, p. 33), “o que tradicionalmente é feito em sala de aula, agora é executado em casa, e o que tradicionalmente é feito como trabalho de casa, agora é realizado em sala de aula”. Dessa forma, a tecnologia digital é utilizada como apoio para que o aluno aprenda de forma mais autônoma e ativa, deslocando seu olhar, do professor para a sua própria aprendizagem. O aluno torna-se protagonista, tem liberdade quanto ao lugar e hora do seu estudo, e as dúvidas são discutidas em conjunto. Essa maneira torna possível também que os alunos tenham atendimento personalizado às suas necessidades pessoais (LIMA; SOUSA; SITKO, 2021).

É possível, também, recorrer a pacotes de recursos baseados em assinatura, eles oferecem atividades interativas de aprendizado baseadas em jogos, permitem que o professor defina atividades para alunos individuais e acompanhe o desempenho dos alunos. Um exemplo é o *Mitifica.* Citamos também, aplicativos genéricos que permitem aos alunos explorar a matemática fora da sala de aula. Alguns exemplos são: câmera, *Google Earth*, *Google Maps*, *Geocaching*.

Assim como o mundo mudou, a sala de aula de matemática também mudou. Embora a tecnologia digital seja parte integrante de nossas vidas, ela não deve ser o único recurso usado para ensinar matemática. Quando se trata de tecnologia na sala de aula, é tudo sobre equilíbrio. Cada aluno aprende de maneira diferente, e a tecnologia permite que os educadores acomodem estilos de aprendizagem únicos, caso a caso. Tecnologias como o *DreamBox*, um software de educação matemática usado em várias salas de aula nos EUA, se adaptam ao nível de habilidade de cada aluno e permitem que os alunos aprendam em um ritmo que melhor se adapte às suas necessidades. O software de aprendizado adaptativo está rapidamente substituindo o papel dos livros didáticos nas salas de aula e os alunos estão lidando com assuntos com o auxílio de programas de computador sob medida que atendem às suas necessidades (CABRAL; JUNIOR, 2016).

## 2.5 O POTENCIAL PEDAGÓGICO DA TECNOLOGIA DIGITAL

Embora a tecnologia digital esteja finalmente sendo integrada à educação, seu uso para o ensino e a aprendizagem ainda permanece um desafio. Apesar de muitas escolas hoje serem privilegiadas por terem acesso imediato à tecnologia, professores treinados e um ambiente político favorável, o uso da tecnologia digital na sala de aula ainda é baixo. Alguns atribuem baixos níveis de uso da tecnologia na educação às crenças pedagógicas dos professores. Com isso dito, o potencial da tecnologia para aprimorar o aprendizado não pode ser superestimado.

Há um crescente número de evidências de que a integração da tecnologia digital afeta positivamente o desempenho acadêmico dos alunos. O Centro de Pesquisa Aplicada em Tecnologia Educacional (CARET) constatou que, quando usada em métodos de aprendizagem colaborativa e liderança que visa melhorar a escola através do planejamento tecnológico, a tecnologia impacta a conquista na aprendizagem na área de conteúdo, promove habilidades de pensamento e resolução de problemas de ordem superior e prepara os alunos para a força de trabalho (CABRAL; JUNIOR, 2016).

A inclusão da tecnologia da informação no currículo da maioria das escolas secundárias é relativamente nova. No entanto, ganhou destaque porque algumas instituições o tornaram um assunto obrigatório. Isso é resultado do entendimento de que ele abrange todas as facetas do esforço humano, principalmente o setor educacional (KENSKI, 2003). Portanto, a conformidade com as TICs é uma ferramenta potente para o aprendizado significativo. Segundo Batch, Domingues e Walter (2013) ela cria uma mente analítica dos alunos que os ajuda a estudar e oferecer soluções para problemas que emanam de todos os campos relacionados que o empregam como uma ferramenta de aprendizado. Além disso, sendo um campo de estudo acadêmico emergente, ajuda os alunos a serem inovadores e a desenvolverem novas maneiras de resolver problemas cientificamente, facilita o armazenamento e a recuperação de informações, facilita a compreensão de outros assuntos. Afinal, praticamente todos os campos de aprendizagem são acessíveis às TIC, como a aplicação do projetor para o ensino na sala de aula. Elas criam uma porta para a troca de ideias e invenções entre estudiosos de tecnologia da informação local e internacionalmente e são a base do *e-learning* e da biblioteca on-line. Portanto, a disseminação de informações é mais fácil do que nunca.

Desse modo, para garantir que os investimentos em TIC beneficiem os alunos, condições adicionais devem ser atendidas. As políticas escolares precisam fornecer às escolas a infraestrutura mínima aceitável para as TIC, incluindo conectividade à Internet estável e acessível e medidas de segurança, como filtros e bloqueadores de sites. As políticas dos professores precisam ter como alvo habilidades básicas de alfabetização em TIC, uso de TIC em contextos pedagógicos e usos específicos de disciplina (PÉREZ-GÓMES, 2015).

Além disso, a implementação bem-sucedida das TICs exige sua integração no currículo. O conteúdo digital utilizado precisa ser desenvolvido nos idiomas locais e refletir a cultura local. São necessários apoio técnico, humano e organizacional contínuo em todas essas questões para garantir o acesso e o bom funcionamento dessa integração (CARLI, 2013).

Outro ponto importante é que o custo total da propriedade das TICs é considerável: treinamento de professores e administradores, conectividade, suporte técnico e software, entre outros. Ao incluir as TICs nas salas de aula, é necessário um caminho incremental, estabelecendo infraestrutura e incorporando TICs sustentáveis e facilmente atualizáveis. As escolas de alguns países começaram a permitir que os alunos levassem sua própria tecnologia móvel (como *laptop*, *tablet* ou *smartphone*) para a aula, em vez de fornecer essas ferramentas a todos os alunos - uma abordagem chamada “Traga seu próprio dispositivo” (KENSKI, 2003). No entanto, nem todas as famílias podem comprar dispositivos ou planos de serviço para seus filhos. Se incorporado ao projeto político e pedagógico da escola, a mesma deve garantir que todos os alunos tenham acesso equitativo aos dispositivos de TIC.

Nos últimos anos, vários estudos e relatórios destacaram as oportunidades e os benefícios potenciais das TICs para melhorar a qualidade da educação. Elas são vistas como uma ferramenta crucial para a construção do conhecimento na sociedade e, particularmente, como um mecanismo que poderia fornecer uma maneira de repensar e redesenhar os sistemas e processos educacionais, elevando a qualidade da educação e aumentando sua abrangência social (BATCH; DOMINGUES; WALTER 2013).

Houve um aumento no uso da tecnologia digital nas escolas de ensino fundamental e médio na última década. *Laptops*, *tablets* digitais e sistemas de gerenciamento de aprendizado são exemplos de tecnologias comumente usadas. O aumento do uso da tecnologia digital para o ensino e a aprendizagem na sala de aula do ensino fundamental e médio pode, em nível internacional e em política nacional, ser visto como uma mudança procurada e bem-vinda (PÉREZ-GÓMES, 2015).

# 3 LOGARITMOS

A magnitude de terremotos, a intensidade dos sons e o cálculo de pH, são exemplos de fenômenos naturais, ou estudos que os cercam, que podem ser observados à luz de abordagens matemáticas através da aplicação de logaritmos Antes de mais nada, é preciso entender quais logaritmos utilizam o raciocínio que levou à sua descoberta, ocorrida entre os séculos XVI e XVII por John Napier (1550 - 1617), escocês de uma família nobre que viveu em meio à cisma anglicana (KARRER, 1999).

Em 1614, juntamente com Henry Briggs (1561 - 1630), Napier publicou o livro "*Mirifici logarithmorum canonis constructio*". Depois disso, os logaritmos rapidamente se espalharam entre os matemáticos e logo se tornaram uma ferramenta importante nas ciências. Já que não era mais difícil encontrar expoentes desconhecidos, 200 anos depois de Napier, Laplace disse que, ao reduzir o trabalho, os logaritmos dobraram a vida de cada astrônomo. (VASCONCELOS, 2013). A primeira análise sobre logaritmo realizada por Napier surgiu de uma experiência prática que resultou na definição do logaritmo em termos de medida geométricas ao longo de semirretas. Nesse dispositivo, a base de logaritmo utilizada por Napier era $e^{-1}$. A construção indicada acima pode ser encontrada, com todos os detalhes e passos, no segundo capítulo da Dissertação de Mestrado de Soares (2011), cujo título é *"Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula"*.

O nome de Napier, no entanto, permanece ligado ao surgimento dos logaritmos. O cientista chegou a notar uma correspondência entre os termos de algumas progressões numéricas: estas nada mais são do que sequências de números ordenadas de acordo com uma determinada lei. Nesse sentido, pode-se considerar duas progressões numéricas particulares: 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 e 1, 4, 16, 64, 256, 1.024, 4.096, 16.384, 65.536 (MAOR, 2008).

A primeira dessas séries de números, chamada de *progressão aritmética*, é caracterizada pelo fato de que cada termo é obtido adicionando 2 ao anterior. A segunda, chamada de *progressão geométrica*, caracteriza-se pelo fato de que cada termo é obtido do anterior multiplicando-o por 4. Em geral, em uma progressão aritmética a diferença entre cada termo (excluindo o primeiro) e o anterior é sempre constante e em progressão geométrica o quociente é sempre constante entre cada termo (excluindo o primeiro) e o anterior. Esses valores constantes são chamados de *razão* para as respectivas progressões (KARRER, 1999).

Consideremos quaisquer dois termos da primeira progressão escrita acima. Por exemplo, 4 e 12, colocados respectivamente na 3ª e 7ª posições e adicionados. Obtém-se 16, um número que ocupa o 9º lugar na sequência.

$$a_3 + a_7 = 4 + 12 = 16 = a_9$$

Se considerar agora os termos que na segunda progressão também estão colocados na 3ª e 7ª posições e multiplicá-los.

$$b_3 . b_7 = 16 . 4096 = 65536 = b_9$$

O resultado do produto também ocupa a nona posição (SAMPAIO, 2009). Calculamos, ainda:

$$a_8 - a_4 = 14 - 6 = 8 = a_5$$

$$b_8 \div b_4 = 16384 \div 64 = 256 = b_5$$

Observe que, a subtração, na primeira sequência, e a divisão, na segunda, quando operadas em suas respectivas sequências, resultam em termos de mesma posição (SOARES, 2011). O procedimento, aparentemente trabalhoso que se ilustra, serve para esclarecer que as operações de multiplicação e divisão, mais difíceis de realizar, podem ser substituídas pelas de adição e subtração, conceitualmente mais fáceis. Dessa forma, os logaritmos tem essa natureza: eles servem para simplificar os cálculos. (BURN, 2001).

Para fazer isso, deve-se primeiro reescrever a progressão geométrica usada acima de uma maneira diferente e que é a seguinte:

$$2^0, 2^2, 2^4, 2^6, 2^8, 2^{10}, 2^{12}, 2^{14}, 2^{16}$$

Cada elemento da sequência agora aparece expresso na forma de potência. Uma potência, como se sabe, é composta de um número denominado base (2 em nosso exemplo) elevado a outro número denominado expoente. Pode-se verificar que os termos da progressão representada na forma de potências correspondem aos da progressão geométrica escrita acima:

$$2^0 = 1, 2^2 = 4, 2^4 = 16, 2^6 = 24, \ldots$$

Observe também que os expoentes dos termos da nova progressão (0, 2, 4, 6 etc.) são os mesmos números que aparecem na progressão aritmética escrita no início (SOARES, 2011).

É possível dar a definição completa de logaritmo: "O logaritmo de um número em uma determinada base é o expoente ao qual a base deve ser elevada para obter o próprio número". Chamamos o número, citado na frase anterior, de logaritmando. Por exemplo, o logaritmo do logaritmando 100 à base 10 é 2 pois:

$$10^2 = 100$$

Em símbolos, o logaritmo é escrito da seguinte forma:

$$\log_{10} 100 = 2$$

Observe que o logaritmo é simplesmente o expoente de uma potência e que as duas igualdades descritas acima são equivalentes. Assim como exemplifica esse caso, os logaritmos foram originalmente usados para simplificar cálculos numéricos. É certo que agora podem ser facilmente realizados com o auxílio de calculadoras de bolso e, portanto, perderam parte de sua função original. Entretanto, esse conceito atualmente ainda encontra uso na modelagem de fenômenos nas áreas de biologia, astronomia, ciências da terra e operações financeiras (SOARES, 2011).

Veremos adiante como os logaritmos são capazes de tornar os cálculos mais simples, mas, note que ao expressar números na forma de potências, a multiplicação e a divisão são reduzidas a simples adições e subtrações de expoentes. Por exemplo, a multiplicação de 10.000 por 1.000, transforma-se em:

$$10^4.10^3 = 10^{4+3} = 10^7$$

Além disso, a exponenciação e a radiciação se tornam operações simples de multiplicação e divisão dos expoentes (SAMPAIO, 2009). Por exemplo,

$$\sqrt[3]{1\,000\,000} = \sqrt[3]{10^6} = 10^{\frac{6}{3}} = 10^2 = 100$$

Apesar disso, nem todos os números podem ser expressos em potências de forma imediata e simples como acontece com múltiplos de 10. Para expressar, por exemplo, os números 97 e 98, é necessário olhar para potências de 10 com expoente dois e três. O cálculo desse número não é fácil. Dependendo do esforço necessário para realizar essa multiplicação, usando os expoentes das potências, o ganho de tempo não existiria. Seria, portanto, mais conveniente operar da maneira tradicional (VASCONCELOS, 2013). Diante dessa dificuldade, a utilização da tabela logarítmica tornaria operações complexas mais acessíveis, na ausência de calculadoras. Tomaremos o produto entre 97 e 98 para exemplificar. Com a utilização da tabela logarítmica de base 10 podemos escrever:

$$\log 97 \cong 1{,}986772 \; e \log 98 \cong 1{,}991226$$

Somando as equações, temos:

$$\log 97 + \log 98 = 1{,}986772 + 1{,}991226 = 3{,}977998$$

Conferindo na tabela logarítmica, é possível obter:

$$\log 9506 \cong 3{,}977998 \rightarrow 97.98 = 9506$$

Isto é, por meio da utilização da antiga tabela logarítmica, o produto foi solucionado utilizando a operação de adição. Talvez hoje a realização de contas como essa não seja complexa. Mas em uma época onde as calculadoras não existiam, a utilização dos logaritmos foi revolucionária. Primeiro o escocês, Napier, e depois o inglês, Briggs, esforçaram-se para calcular os logaritmos de muitos números. Henry Briggs (1561-1631), amigo e admirador de Napier, deu-se o trabalho de calcular os logaritmos na base 10 dos números naturais de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000 com quatorze casas decimais. Um trabalho expressivo que seus contemporâneos e seus sucessores imediatos aproveitaram dele, ao utilizarem essas construções para suas pesquisas. Kepler, por exemplo, usou-o para descobrir suas leis astronômicas (SOARES, 2011). Entretanto, uma vez documentados esses resultados, inúmeros outros tornaram-se possíveis.

Os logaritmos permitem, por assim dizer, simplificar operações em números: exponenciação e extração de raiz são substituídas por multiplicação e divisão e as últimas por adição e subtração. Nota-se que a vantagem de tal procedimento será tanto maior quanto mais complicados forem os cálculos. Pode-se dizer que os logaritmos não são razoavelmente aplicáveis às operações de adição e subtração (SAMPAIO, 2009).

## 3.1 CONCEITOS MATEMÁTICOS SOBRE LOGARITMOS

Seja *a* um número real estritamente positivo diferente de 1 e x um número real qualquer. Se $a^x = b$ (b estritamente positivo), então x (ou seja, índice da potência) é chamado de logaritmo do número *b* na base *a*. É escrito como $x = \log_a b$. Portanto, se $a^x = b$, então $x = \log_a b$. Inversamente, se $x = \log_a b$, então $a^x = b$. Desse modo:

$$a^x = b \leftrightarrow log_a b = x$$

Na equação acima, nomeamos o termo *x* de logaritmo; *a*, sua base e *b* é chamado de logaritmando. Vale ressaltar também que $a^x$ é chamado de forma exponencial e $\log_a b = x$ é chamado de forma logarítmica. Alguns exemplos podem ser observados a seguir:

$$7^0 = 1 \rightarrow log_7 1 = 0$$
$$2^6 = 64 \rightarrow log_2 64 = 6$$
$$3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \rightarrow log_3 \frac{1}{81} = -4$$
$$10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100} \rightarrow log_{10} 0{,}01 = -2$$

### 3.1.1 Logaritmo comum (base 10)

O logaritmo comum de um número *b*, é o número x para o qual $10^x = b$. Isto é o mesmo que $log_{10}\, b = x$. Porém, tal expressão é normalmente denotada por *log b*, suprimindo a aparição da base. O logaritmo comum é de grande interesse, principalmente devido à prevalência do sistema numérico decimal em várias culturas ao redor do mundo.

Qualquer que seja o número real positivo x que consideremos, ele estará necessariamente compreendido entre duas potências de 10 com expoentes inteiros consecutivos. Assim, existe um número inteiro *c*, tal que

$$10^c \leq x < 10^{c+t} \rightarrow \log 10^c \leq \log x < \log 10^{c+1} \rightarrow c \leq \log x < c + 1$$

Dessa maneira, podemos afirmar que:

$$\log x = c + m\, , c \in \mathbb{Z}\ e\ 0 \leq m < 1$$

Isto é, quando o logaritmo comum de um número é calculado, a representação decimal do logaritmo é dividida em duas partes: o componente inteiro *c*, conhecido como característica e o componente decimal *m*, chamado mantissa. A característica, em essência, nos diz o número de dígitos que tem o número original. Se maior do que um, basta somar uma unidade a ela. Já a mantissa, tem a propriedade de não se alterar quando o número original é multiplicado por alguma potência de dez. Por exemplo:

$$\log 2 = 0{,}301 = 0 + 0{,}301$$

Logo sua característica é 0 e sua mantissa é 0,301. Da característica, temos que o logaritmando tem 1 algarismo. Esse resultado vem da adição de uma unidade à sua característica. Além disso, sua mantissa será a mesma que os logaritmos comum dos números 200 e 2000, por exemplo, e suas características são, respectivamente, 2 e 3. Esses são os fatos que tornam o logaritmo comum uma ferramenta particularmente útil para determinar a ordem de magnitude de um número excepcionalmente grande (ou pequeno) (MIORIM, 2002).

### 3.1.2 Logaritmo binário (base 2)

O logaritmo binário de um número b, é o número x para o qual $2^x = b$, isto é, $\log_2 b = x$. É amplamente utilizado no campo da ciência da computação, principalmente devido ao fato de que os computadores armazenam informações em bits (ou seja, dígitos que levam 0 ou 1 como valores possíveis)

Semelhante ao caso na base 10, o logaritmo binário pode ser usado para descobrir o número de dígitos de um inteiro positivo na representação binária. Além disso, o logaritmo binário também é usado para descobrir a profundidade de uma árvore binária, ou mesmo o número de operações exigidas por certos algoritmos de computador (isso cai em um tópico conhecido como complexidade de tempo algorítmica) (SCHUBRINGM, 2008).

Além do mundo dos computadores, o logaritmo binário também é usado na teoria musical para conceituar a altura das notas musicais, com base na observação fundamental de que elevar uma nota em uma oitava aumenta a frequência da nota em duas vezes. Como resultado, muitas vezes é conveniente conceber um intervalo musical como o logaritmo binário da relação de frequência (KARRER, 1999).

### 3.1.3 Logaritmo natural (base *e*)

Em alguns livros didáticos preocupados com um desenvolvimento mais rigoroso das funções transcendentais, a base *e* é definida. O logaritmo natural de um número b, é o número x para o qual $e^x = b$. E assim como escrevemos simplesmente $\log b$ para o logaritmo comum, também simplificamos a escrita do logaritmo natural, de $\log_e b$ para $\ln b$.

Da seguinte maneira, como ilustra a figura 1, $\ln b$ é a área da região abaixo do gráfico da função $f(x)=1/x$, acima do eixo x e entre as retas $x=1$ e $x=b$. Tal base é muito importante para o Cálculo Integral e Diferencial no que se refere a solução de equações diferenciais e na representação de números complexos, com a utilização da identidade de Euler.

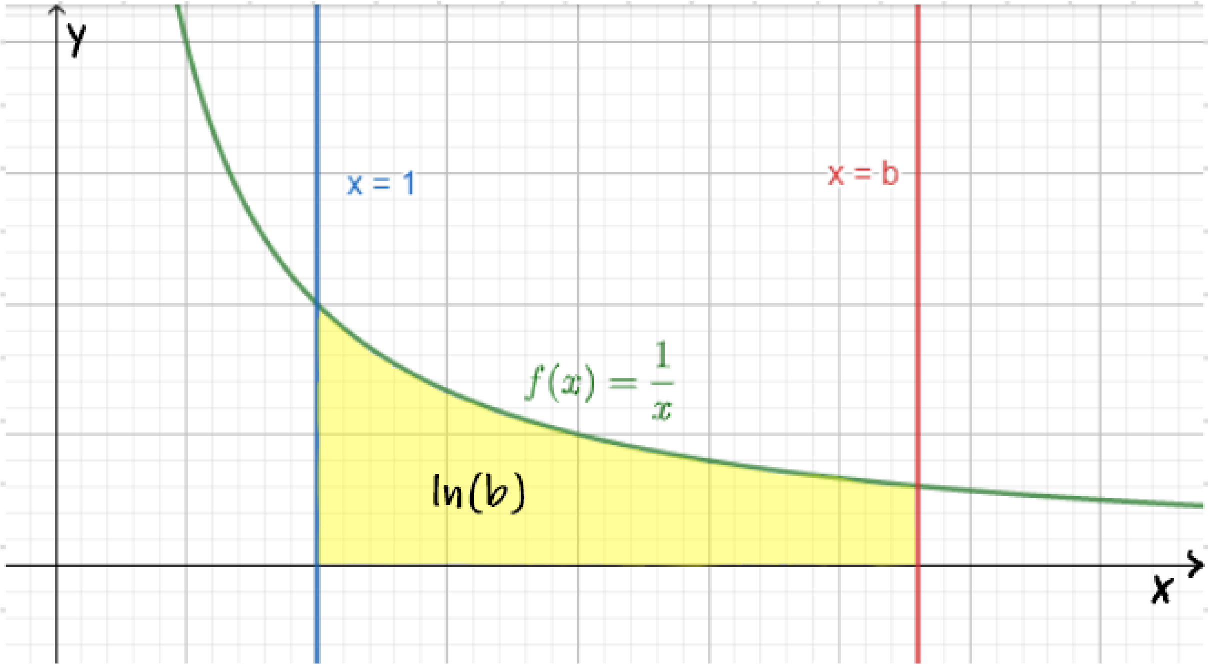


Figura 1 - Logaritmo natural no gráfico
(Fonte: Autor)

Assim, surge o termo natural. (MAOR, 2008). Ao contrário do número 10, que é preferido devido à prevalência do sistema de numeração decimal, o número *e* é uma das constantes especiais que aparecem com frequência surpreendente em vários discursos matemáticos independentemente do sistema numérico escolhido. Como resultado, os matemáticos tendem a considerar a base *e* mais natural do que básico 10. Embora alguns cientistas e engenheiros aplicados discordem em várias ocasiões.

## 3.2 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DO LOGARITMO

As propriedades do logaritmo são derivadas das leis dos expoentes. As propriedades de logaritmo são úteis porque permitem expandir, condensar ou resolver equações logarítmicas. É por essas razões que na maioria dos casos, não se deve memorizar as regras ao resolver problemas logarítmicos. É interessante que se perceba como essas regras são derivadas. Apresentaremos quatro delas:

(i) Propriedade do produto: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$

(ii) Propriedade do Quociente: $\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y$

(iii) Propriedade de Potência: $log_a (x^k) = k \cdot log_a x$

(iv) Propriedade de Mudança de Base: $log_a x = log_c x / log_c a$

Antes de demonstrar as propriedades listadas acima, adicionamos as seguintes proposições decorrentes da definição:

a) $log_a a = 1$. De fato, por definição, $log_a a = b \leftrightarrow a^b = a$. Logo, $b=1$.
b) $log_a 1 = 0$. De fato, por definição, $log_a 1 = b \leftrightarrow a^b = 1 = a^0$. Logo, $b=0$.
c) $log_a a^c = c$. é uma consequência da definição, já que $log_a a^c = b \leftrightarrow a^b = a^c$. Dessa forma, b = c.

- Demonstração de (i):

Seja $M = \log_a x$ e $N = \log_a y$. Convertemos cada uma dessas equações para a forma exponencial. A saber:

$$\Rightarrow a^M = x$$

$$\Rightarrow a^N = y$$

Multiplicando as equações:

$$a^M \cdot a^N = x \cdot y$$

Como a base é comum, podemos utilizar a propriedade de multiplicação de potências de mesma base, adicionando os expoentes:

$$a^{M+N} = x \cdot y$$

Voltando a forma logarítmica, temos:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a (a^{M+N}) = M+N$$

Agora, ao substituir os valores de *M* e *N* na equação que acima:

$$log_a (x \cdot y) = log_a x + log_a y$$

Exemplos:

$$\log 50 + \log 2 = \log 100 = 2$$

$$\log_2 (4 \cdot 8) = \log_2 (2^2 \cdot 2^3) = 5$$

Utilizando essas propriedades e uma tabela de logaritmos é possível simplificar as operações realizadas para cálculos grandes. Tomemos como exemplo o produto de 16 e 128. Na tabela logarítmica de base 2, podemos obter:

$$log_2 16 = 4 \; e \; log_2 128 = 7$$

Somando as equações, temos:

$$log_2 16 + log_2 128 = 7 + 4 = 11$$

Novamente conferindo na tabela logarítmica, é possível obter:

$$log_2 2048 = 11$$

Portanto,

$$log_2 16 + log_2 128 = log_2 2048 \; \rightarrow 16 \,.\, 128 = 2048$$

- Demonstração de (ii):

Seja M = $\log_a x$ e N = $\log_a y$. Convertemos cada uma dessas equações para a forma exponencial. A saber:

$$\Rightarrow a^M = x$$

$$\Rightarrow a^N = y$$

Dividindo as equações:

$$a^M / a^N = x / y$$

Como a base é comum, podemos utilizar a propriedade de divisão de potências de mesma base, subtraindo os expoentes:

$$a^{M-N} = x / y$$

Aplicando logaritmo na equação acima, temos:

$$log_a (x / y) = log_a (a^{M-N}) = M - N$$

Agora, ao substituir os valores de *M* e *N* na equação acima:

$$log_a (x / y) = log_a x - log_a y$$

- Demonstração de (iii):

Seja M = $\log_a x$. Convertemos a equação para a forma exponencial. A saber:

$$a^M = x$$

Elevando a k ambos os lados da equação:

$$(a^M)^k = x^k$$

Pela propriedade de potência de potência:

$$\Rightarrow a^{Mk} = x^k$$

Aplicamos logaritmo de base a na equação acima, temos:

$$log_a\, a^{Mk} = Mk = log_a\, x^k$$

Sabemos que, M = $log_a$ x. Então:

$$Mk = log_a\, x .\, k = log_a\, x^k.$$

Exemplo:

$$\log 100^3 = 3 \log 100 = 3\,.\,2 = 6$$

- Demonstração de (iv):

Seja *M* = $log_a\, x$. Convertendo para a forma exponencial, temos:

$$a^M = x$$

Aplicando logaritmo de base c na equação acima, temos:

$$log_c x = log_c a^M$$

Aplicando a propriedade de potência dos logaritmos, temos:

$$log_c x = M.log_c a \rightarrow M = \frac{log_c x}{log_c a}$$

Sabemos que, M = $log_a$ x. Então:

$$log_a x = \frac{log_c x}{log_c a}$$

# 4 A TECNOLOGIA DIGITAL APLICADA NO ENSINO DOS LOGARITMOS

Com as modificações que o mundo vem sofrendo tanto na sociedade, na política e na situação econômica, a educação não pode deixar de seguir essas mudanças. Concordamos com Gravina e Santarosa (1999), quando defendem que a aprendizagem de matemática

> depende de ações que caracterizam o "fazer matemática": experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento, baseada essencialmente na transmissão ordenada de "fatos", geralmente na forma de definições e propriedades. Numa tal apresentação formal e discursiva, os alunos não se engajam em ações que desafiem suas capacidades cognitivas, sendo-lhes exigido no máximo memorização e repetição, e consequentemente não são autores das construções que dão sentido ao conhecimento matemático. O processo de pesquisa vivenciado pelo matemático profissional evidencia a inadequabilidade de tal abordagem. Na pesquisa matemática, o conhecimento é construído a partir de muita investigação e exploração, e a formalização é simplesmente o coroamento deste trabalho, que culmina na escrita formal e organizada dos resultados obtidos! O processo de aprendizagem deveria ser similar a este, diferindo essencialmente quanto ao grau de conhecimento já adquirido. (GRAVINA; SANTAROSA, 1999, p. 73)

Nesse capítulo, trazemos ferramentas didáticas diferente das tradicionais que possam envolver tecnologia, em algum sentido. As relacionamos com o ensino de matemática e as possibilidades que podem caracterizar sua presença na sala de aula.

## 4.1 OS JOGOS COMO INSTRUMENTO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

O uso dos jogos nas atividades educacionais vem sendo estudado por muitos autores, principalmente, como instrumento de ensino e aprendizagem na Matemática. Sua introdução na prática pedagógica pode ter muitos benefícios ao desenvolvimento do aluno no processo de produção do conhecimento matemático de forma significativa e sólida. Dessa forma, o aprendizado da matemática é muito importante na formação, não apenas escolar, do aluno. Gutton (2006, p.3) afirma que "[...] a Matemática tem muita importância na vida das pessoas. O dia-a-dia está cheio de situações nas quais lidamos com o número, com as operações, com o pensamento combinatório, com a proporcionalidade, com a organização espacial, etc".

Como pode-se observar as modificações que ocorrem no processo de ensino e aprendizagem, concordam com os Parâmetros Curriculares Nacionais De

Matemática (PCN, 1998), que versam, a seguir, sobre a utilização dos jogos no ensino da Matemática:

> Constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução de problemas e busca de soluções. Propicia a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações (PCN, 1998, p. 46).

A maioria dos pesquisadores conceitua a aprendizagem como um construto multidimensional de habilidades de aprendizagem, resultados de aprendizado cognitivo, como conhecimento processual, declarativo e estratégico. O modelo de aprendizagem baseado em jogos é usado em algumas áreas da educação formal com muito sucesso, em particular, em treinamento militar, médico, comercial, físico e escolar. Eles começam já pela educação infantil, onde essas crianças, desde seus primeiros anos da vida escolar, podem acostumar-se a viver nesse mundo.

Existem muitas definições diferentes de jogos. No entanto, as principais características que todas essas definições têm em comum são: presença de regras e objetivo predefinido que deve ser alcançado dentro do jogo. A maioria dos jogos também tem elementos competitivos, onde as habilidades individuais e coletivas estão em primeiro plano (NETO, 2009). Outra característica do jogo é o desafio, tendo em mente que o desafio deve corresponder ao nível de habilidade do aluno e se adaptar permanentemente através dos diferentes níveis do jogo. (BARBOSA, 2015)

Oportunidades de aprendizagem bem-sucedidas por jogos podem ser criadas ao se seguir a teoria da aprendizagem construtivista, onde "construtivista" significa uma abordagem exploratória. As características principais da abordagem construtivista são, entre outras, a interação, o enfrentamento dos problemas, a compreensão do todo, etc. Do ponto de vista construtivista, os aprendizes são participantes ativos na aquisição de conhecimento e engajados em reestruturar, manipular, reinventar e experimentar com conhecimento para torná-lo significativo, organizado e permanente (GRAVINA; SANTAROSA, 1999).

Com isso, os professores precisam estar acompanhando essas modificações e promovendo as suas atividades através de propostas mais lúdicas e eficazes, deixando assim a sua aula mais dinâmica e prazerosa. Além de deixar os alunos mais confortáveis em participar. Segundo Viana, Teixeira e Vieira (2004)

> (...) o jogo é uma atividade que agrada e entusiasma. Há uma ligação muito grande entre o jogo e a Matemática (…) sendo assim parece-nos importante

> que se jogue inclusive nas aulas. Uma aula onde se joga é uma aula animada, divertida e participativa (VIANA; TEIXEIRA; VIERIRA, 2004, p.3)

Grando (2008) recorre às práticas sociais das crianças e adolescentes como aproximação suficiente do aluno com a utilização de metodologias que trabalham como jogos para aprendizagem. A autora defende que tais ferramentas, se aplicadas de forma eficaz, podem ser de grande potência educacional. Afinal, são muito presentes no imaginário lúdico e nas práticas recreativas infantis por serem uma atividade própria da infância e da adolescência, e por estarem tão conectados aos estudantes devido aos jogos computacionais da era atual, acessíveis em qualquer aparelho eletrônico. Dessa forma, já carregam consigo um estereótipo de diversão e são recebidos com empolgação, por parte dos alunos. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> [...] além de ser um objeto sócio cultural, o jogo é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos; supõe um "fazer sem obrigação externa e imposta embora demande exigências, normas e controles. Por meio dos jogos, as crianças não apenas vivenciam situações que se repetem, mas aprendem a lidar com símbolos e a pensar por analogia (jogos simbólicos): os significados das coisas passam a ser imaginados por elas. Ao criarem essas analogias, tornam-se produtoras de linguagem, criadoras de convenções, capacitando-se param se submeterem a regras e das explicações (BRASIL, 1998, p.48).

Em muitos casos, a aplicação de jogos, brincadeiras e simulações para a aprendizagem significam uma oportunidade para os alunos aplicarem o conhecimento adquirido e experimentarem. Desenvolverem habilidades de tomada de decisões, construírem opinião, obtendo assim as experiências no "mundo imaginário seguro". Existem domínios educacionais específicos onde os conceitos e abordagens são baseadas em uma aprendizagem lúdica que têm um alto valor de aprendizado. Esses domínios são interdisciplinares, onde habilidades como pensamento crítico, comunicação em grupo, o debate, coletividade, autoconhecimento, lógica, tomada de decisões e muitos outros podem ser explorados. De acordo com Velasco (1996)

> Brincando a criança desenvolve suas capacidades físicas, verbais ou intelectuais. Quando a criança não brinca, ela deixa de estimular, e até mesmo de desenvolver as capacidades inatas podendo vir a ser um adulto inseguro, medroso e agressivo. Já quando brinca a vontade tem maiores possibilidades de se tornar um adulto equilibrado, consciente e afetuoso (VELASCO, 1996, p. 78).

O caráter educativo do brincar é visto como uma atividade formativa, que pressupõe o desenvolvimento integral do sujeito. Quer seja, na sua capacidade física, intelectual e moral.

Existem muitos jogos de prateleira que podem ser usados no contexto de aprendizagem. Há também possibilidades de usar soluções mais tecnológicas para acessar opções disponíveis em plataformas de e-learning, fóruns ou chat. Mas é preciso estar atento à escolha desses recursos. Parte desse processo de escolha inclui a consideração de vários constrangimentos e oportunidades no ambiente de aprendizagem, por exemplo, tamanho do grupo de estudantes, possibilidades técnicas para os alunos, competências TIC dos alunos (bem como competências TIC do professor), política de licenciamento, sustentabilidade, etc.

Segundo Barbosa, (2015), quando se coloca os jogos nas atividades de Matemática, aumenta-se a possibilidade dos alunos ultrapassarem qualquer tipo de bloqueio relacionado ao medo que tenham por achar a disciplina difícil e complicada. Nesse caso, ao usar os jogos, o professor pode diminuir o impacto que o aluno terá ao ser exposto à novas habilidades matemáticas, diminuindo a ansiedade que muitos estudantes enfrentam nesse processo. Além disso, a curiosidade do aluno pode ser estimulada a fim de promover outros possíveis caminhos de raciocínio e dar espaço a soluções lógicas criativas surgidas da experiência.

Segundo Lopes (2011), o ensino da Matemática através dos jogos não tem por objetivo facilitar o conteúdo, em si. Ao contrário, a utilização desses recursos se refere a formas de maximizar as potências do processo de ensino e de aprendizagem e minimizar os danos que podem haver no caminho. A implementação de jogos nas metodologias de ensino é aliada à concentração, ao interesse, à participação, às experiências outras que não somente às formas tradicionais de ensino, baseadas em processos técnicos de repetição e memorização.

Grando (2008) segue com alguns conselhos sobre a aplicação metodológica dos jogos e ressalta a importância de o jogo estar mais presente na prática do professor. Para que tenhamos convicção de que o jogo será um aliado na aprendizagem, é preciso conhecê-lo, ter jogado, dominar as regras. Não levar o jogo como passatempo, como uma aula recreativa: isso não aproxima os alunos de resultados didático-matemáticos. É preciso respeitar a faixa etária, permitir o manuseio prévio, deixar os alunos refletirem, tirarem conclusões. Ou seja, é preciso entender que um bom trabalho com o jogo demanda tempo. Essa prática, se comum, criaria um ambiente onde os alunos já estarão acostumados com tal recurso. Afim de que não tenham comportamento tão eufórico quando o professor opta por tal recurso e entendam que serão jogos com objetivos matemáticos, não um divertimento. Apesar de ser natural uma certa movimentação fora do padrão de uma aula tradicionalista, uma hora os limites serão estabelecidos (GRANDO, 2008).

O professor que está diretamente trabalhando com o ensino da Matemática, precisa estar em constante revisão dos seus métodos e conceitos de ensinar. Precisa empregar recursos que fazem com que o aluno se desenvolva e obtenha uma interação maior com as atividades e objetivos educacionais, sociais e cognitivos (NETO, 2009). Nesse sentido, Neto (2009) argumenta que

> O uso de jogos para o ensino representa, em sua essência, uma mudança de postura do professor em relação ao que é ensinar Matemática, ou seja, o papel do professor muda de comunicador de conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, interventor, controlador e incentivador da aprendizagem, do processo de construção do saber pelo aluno (NETO, 2009, p 6).

Dessa maneira, é fundamental que o professor em sala de aula note quais jogos podem resultar em melhor aproveitamento para o aprendizado dos alunos, desenvolver modelos de atividades lúdicas que possam ir de encontro ao conteúdo a ser ensinado. Esses jogos precisam efetivar a participação integral de todos os alunos da sala, fazendo com que o coletivo possa ajudar no estímulo da imaginação e da criatividade entre todos. Pode-se observar que aquele professor que não busca uma evolução no seu conhecimento em relação às novas metodologias de ensino, acaba por sua vez deixando de valer-se de oferecer uma produção de conhecimento mais completa ao aluno. Vale relembrar que os alunos são diferentes entre si, as turmas se distinguem, não há um padrão universal de aprendizagem. Cada indivíduo possui seu tempo, sua experiência, suas facilidades. Por isso a importância de o professor estar em constante aprendizagem e ressignificação de suas práticas é tão apontada em pesquisas (BARBOSA, 2015).

Para o ensino da Matemática é recomendável que o professor estabeleça novas práticas, que considere a possibilidade de utilizar recursos didáticos que consigam promover a imaginação e criatividade para tomar decisões, criar estratégias e solucionar problemas utilizando conceitos matemáticos formais em situações aplicadas. É nessa direção que propomos os jogos como um dos recursos possíveis para alcançar uma nova geração de aprendizes com um meio com o qual eles estão acostumados a interagir desde a infância. As propostas são das mais variadas. Podem consistir em oferecer um jogo para introduzir um novo tópico de aprendizagem, aumentando assim o interesse dos alunos por este tópico, ou como uma atividade complementar de aprofundamento ou outra maneira de interação e comunicação.

Os jogos também podem ser usados para o desenvolvimento pessoal e para melhorar a autoestima do jogador, ou seja, do aluno. Em alguns casos, os momentos de ludicidade em sala de aula podem ajudar a estabelecer o diálogo e romper as fronteiras sociais e culturais. Para os alunos com necessidades especiais, os jogos podem ampliar muito mais as formas de interação social e conteudista que lhe estão disponíveis. Além disso, nos jogos, há uma ligação estreita entre ação e reação instantâneas. Os alunos são capazes de avaliar suas próprias atividades e ver como estão se saindo, ou seja, são capazes de avaliar suas decisões e realizar cursos de ações.

> O jogo pode se tornar uma estratégia didática quando as situações são planejadas e orientadas pelo adulto visando a uma finalidade de aprendizagem, isto é, proporcionar à criança algum tipo de conhecimento, alguma relação ou atitude. Para que isso ocorra, é necessário haver uma intencionalidade educativa, o que implica planejamento e previsão de etapas pelo professor, para alcançar objetivos predeterminados e extrair do jogo atividades que lhe são decorrentes. (BERTOL et al, 2018, p. 6)

Com o uso de jogos e as brincadeiras no ambiente escolar, podemos influenciar a motivação e o engajamento dos alunos de uma forma positiva. Podemos, ainda, oferecer um ambiente seguro e contextual que promova a aquisição de diferentes habilidades desde seu nível mais básico, que começa com a coordenação olho e mão, até habilidades mais complexas. Por exemplo, resolução de problemas, comunicação e colaboração, pensamento estratégico e habilidades sociais, individuais e coletivas. No ambiente de aprendizagem como um jogo, o aprender fazendo, o aprendizado ativo e o aprendizado experimental entram em primeiro plano.

## 4.2 APRENDIZAGENS BASEADAS EM JOGOS

Traduzida do inglês, *Game-Based Learning*, a Aprendizagem Baseada em Jogos (GBL) “é uma metodologia pedagógica que se foca na concepção, desenvolvimento, uso e aplicação de jogos na educação e na formação” (CARVALHO, 2015, p. 176). Geralmente, o aprendizado baseado em jogos é projetado para equilibrar o conteúdo com o jogo, além da capacidade do jogador de reter e aplicar o aprendizado adquirido ao mundo real.

As crianças tendem a passar horas brincando de esconde-esconde, aprendendo os passos dos jogos digitais e participando de jogos criativos. Portanto, pode-se dizer que brincar e aprender podem estar interligados, levando ao desenvolvimento cognitivo e emocional dentro de um contexto social e cultural. Além disso, componentes ativos no processo educacional podem se constituir em poderosos auxiliares da aprendizagem. Sua presença desponta como um dos indicadores importantes para a definição de práticas educativas de qualidade em instituições de educação infantil (BRASIL, 1998, p. 67).

Os brinquedos educativos (às vezes chamados de "brinquedos instrutivos") são objetos de brincadeira, geralmente projetados para crianças, que devem estimular a aprendizagem. Eles são muitas vezes destinados a atender a um propósito educacional, como ajudar uma criança a desenvolver uma habilidade específica ou ensinar uma criança sobre um determinado assunto. Eles costumam simplificar, miniaturizar ou modelar atividades e objetos usados por adultos. Embora as crianças estejam constantemente interagindo e aprendendo sobre o mundo, muitos dos objetos com os quais elas interagem e aprendem não são brinquedos. (NETO, 2009)

Considera-se que os brinquedos são preferencialmente construídos para uso infantil. Uma criança pode brincar e aprender com uma pedra ou uma bengala, mas não seria considerado um brinquedo educacional porque é um objeto natural, não projetado, e não tem propósito educacional esperado.

> O brinquedo contém sempre uma referência ao tempo de infância do adulto com representações veiculadas pela memória e imaginação. O vocábulo "brinquedo" não pode ser reduzido à pluralidade de sentidos do jogo, pois conota criança e tem uma dimensão material, cultural e técnica. Enquanto objeto, é sempre suporte de brincadeira. É o estimulante material para fluir o imaginário infantil. E a brincadeira? É a ação que a criança desempenha ao concretizar as regras do jogo, ao mergulhar na ação lúdica." (KISHIMOTO, 2000, pg. 21).

Nessa perspectiva, certas tecnologias, de aplicação geral, voltam a aparecer no horizonte da educação. Calculadoras e computadores parecem mais "controláveis" do que a televisão. Eles podem parecer mais promissores, mas devem sempre ser vistos com uma necessidade premente de experimentação para encontrar o ponto ideal de uso. Não só isso, mas também é necessário averiguar quais tecnologias poderiam ser mais adequadas ao nosso ambiente. São vários, como também devemos citar projetores, televisores, telas, computador em modo portátil, entre outros.

Embora seus preços estejam caindo, ainda não são facilmente adquiridos por instituições. Porém, seus benefícios podem ser um grande aliado no processo de ensino e de aprendizagem, tornando-os investimento e não prejuízo. Afinal, as tecnologias auxiliam em uma série de situações, desde a simples apresentação de um tema, até o uso das mesmas pelos alunos em um ambiente devidamente programado pelo professor. Ademais, é importante que sejam escolhidos com sabedoria para que se adequem favoravelmente à necessidade do ambiente. Tanto em caráter econômico, quanto cultural.

Em particular, o ensino da matemática tem sido visto como um campo natural de aplicação dessas tecnologias. O custo e a acessibilidade às calculadoras, aos computadores e softwares e o acesso à Internet por uma grande massa de pessoas, tornam a cultura e a educação matemática sujeitas a mudanças. Estudos desenvolvidos por Fava (2012) afirmam que a tecnologia digital trouxe consigo novas metodologias, atividades e considerações sobre as quais o professor de matemática deve refletir para que a incorporação seja realizada com sucesso. Dentre as considerações que traz estão: a importância de formação e treinamento adequado para implementação da tecnologia digital na prática do professor; ambientes de aprendizagem adequados para maior desempenho das propostas; base criativa, crítica e rigorosamente pesquisada que justifiquem e guiem as implementações e a utilização da tecnologia quando realmente trouxer benefício.

Nesse sentido Mattar (2020) destaca a ligação entre os jogos e os softwares matemáticos no ensino da matemática e, assim, possuem um pleno desenvolvimento da lógica e do raciocínio. A atividade matemática, apesar de repleta de grandes passos de abstração, pode recorrer ao componente lúdico no que tange aos conteúdos que lidam com aspectos mais concretos do mundo. O grande benefício da abordagem lúdica da matemática consiste no seu poder de transmitir ao aluno a maneira correta de se posicionar no seu enfrentamento aos problemas matemáticos.

Por fim, um aspecto importante que deve ser considerado na implementação da tecnologia digital em sala de aula é a necessidade de um planejamento sério e responsável, por parte do professor, na utilização de softwares na aprendizagem de Matemática, pois só assim os recursos didáticos desta natureza serão explorados ao máximo.

## 4.3 SOFTWARES EDUCACIONAIS PARA ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

As mudanças na informática iniciadas há 50 anos e ampliadas nas últimas décadas levaram a educação a um debate público em escalas internacionais, onde os avanços por ela oferecidos seriam ideais para o processo educacional, razão pela qual alunos e professores deveriam utilizar softwares educacionais como uma forma de construir seu conhecimento como elemento cultural essencial na sociedade atual, que deve ser bem transmitido institucionalmente; aproveitando as oportunidades oferecidas por esta ferramenta na educação. (ARAÚJO; NÓBRIGA, 2010)

O desenvolvimento de softwares como meio auxiliar heurístico contribui para responder a tais demandas, se for feito de forma eficiente, levando em consideração a dinâmica que ocorre entre os componentes do processo. Mudanças são geradas na atividade e na comunicação, uma vez que esta é mediada pelo computador, para que o professor viabilize o processo, para que o aluno assuma um papel mais ativo na construção do seu conhecimento. Construção que não é arbitrária. É estruturada, planejada e sistêmica, supervisionada pelo professor. Esse estimula a experimentação, a pesquisa, a tomada de decisão e as avaliações (MATTAR, 2020).

Portanto, ao introduzir o software na didática das diferentes disciplinas que fazem parte do currículo educacional, o modelo pedagógico a ser utilizado deve ser revisto, para não cair no normalmente utilizado, onde o aluno é um agente passivo e o professor, o protagonista ou agente ativo do processo ensino-aprendizagem. Nesse modelo, a função do professor é transmitir informações para que o aluno as armazene de forma acrítica e irrefletida e depois as repita quando as circunstâncias o exigirem, deixando de lado o pensamento crítico.

Sob essas considerações, devem ser estabelecidos outros modelos que tenham o aluno como epicentro da atividade de aprendizagem. Que leve em consideração as ideias prévias dos conteúdos a serem aprendidos e, sobretudo, as necessidades de aprendizagem para que tenha relevância e assim conseguir que a aprendizagem seja auto estruturada. Ou seja, que comece a partir das intenções do estudante, tendo a liberdade de escolher o mais conveniente para ele, respondendo assim à diversidade cognitiva presente em cada indivíduo.

Segundo Fava (2012, p. 66), software "é um elemento intangível responsável por grande parte da magia que fez do computador a ferramenta mais poderosa de nosso tempo. São conjuntos de instruções que dizem ao computador o que fazer especificamente". Sem programas, o computador é uma máquina inútil. Somente através do conjunto desses algoritmos suas funções são desempenhadas.

Software educacional é um programa cujas características estruturais e funcionais apoiem o processo de ensino e aprendizagem. Segundo Mattar (2000, p.187), é aquele “material didático especialmente elaborado com um computador nos processos de ensino e aprendizagem”. Segundo (FEITOSA, et al, 2020, p. 166), softwares educacionais são “programas de computador, estruturas de dados e sua documentação que servem para tornar efetivo o método, procedimento ou controle requerido”. Além disso, pode-se expressar que se trata de um conjunto de recursos computacionais interativos elaborados com o intuito de serem utilizados no contexto educacional, daí a necessidade de que as tarefas do professor estimulem seu uso, a fim de que o aluno alcance uma aprendizagem significativa.

Nesse sentido, Lopes (2011) destaca que devido à natureza dinâmica do ambiente educacional, o professor deve se adaptar às mudanças, não só isso, mas também utilizar novos recursos em sua prática para que os alunos adquiram conhecimentos de qualidade e atualizados. Com efeito, Fava (2012, p.59), afirma que “são os procedimentos ou habilidades que o aluno possui e utiliza de forma flexível para aprender e lembrar a informação, afetando os processos de aquisição, armazenamento e uso da informação”. Ou seja, o processo de aprendizagem que o professor espera de seus alunos deve ser acompanhado de diversos procedimentos flexíveis, nos quais a tecnologia digital pode desempenhar um papel importante, principalmente na área da matemática.

O software educacional é, atualmente, considerado um programa instrucional por meio do qual o usuário tem a vantagem de experimentar o autodidatismo sobre um determinado tópico ou navegando em seu conteúdo. Também costuma ser denominado programa de apoio curricular, pois visa reforçar, completar ou servir de material pedagógico em uma ou mais disciplinas.

Entretanto, apesar de ser possível produzir conhecimento matemático, intuitivo ou formal, em ambientes físicos e virtuais diversos, é importante que a solidificação deles seja supervisionada. No contexto de aprendizagem escolar, deve sempre haver alguém que direcione esse processo. Neste caso, o professor e os alunos são motores fundamentais nos processos de ensino e aprendizagem a partir de algo que já foi adquirido. As TICs como ferramentas tecnológicas têm permitido a geração de estratégias educacionais capazes de divulgar o conhecimento e de gerenciá-lo da melhor forma. Ou seja, o conhecimento pode ser recolhido para poder gerar outros conhecimentos e continuar a distribuí-lo por meio dos ambientes educacionais virtuais.

(FEITOSA, et al, 2020)

Nessa perspectiva, diversos softwares profissionais de ensino podem ser utilizados: *Merive, Mathematica, Matlab*, entre outros. Ressaltamos aqui o *Geogebra*, por ser um software livre que facilita o trabalho com geometria, álgebra, análise e cálculo. Por ser um software livre, não exige a compra de licenças e pela variedade de possibilidades que oferece, pode ser utilizado em todas as disciplinas do curso de Matemática ministrado na instituição. Além disso, também existe uma excelente versão do *Geogebra* para telefones celulares. (ARAÚJO; NÓBRIGA, 2010)

# 5 LOGARITMO E GEOGEBRA: UMA PROPOSTA DE ABORDAGEM

Nos capítulos anteriores, percorremos as discussões gerais sobre tecnologia digital, ressaltando as potências e os desafios de sua conexão com a escola, o ensino e a aprendizagem. Introduzimos alguns pontos sobre logaritmo, que incluem sua produção histórica, importância e alguns resultados importantes da teoria formal que o cerca. Voltamos a educação, com intenção de identificar algumas formas práticas de inovar as ferramentas didáticas possíveis, com o apoio dos jogos e softwares educacionais. Por fim, nesse capítulo, reuniremos as ideias que foram exploradas acima.

Além da escolha já feita de discutir o ensino de logaritmos, optamos por fazê-lo utilizando o GeoGebra. Multipremiado, o GeoGebra é "um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar" (GEOGEBRA, 2021). Ele possui uma plataforma online de colaboração com ferramentas de apoio a criação, compartilhamento e utilização de sequências didáticas de diversos assuntos que envolvem Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática.

Com o auxilio dessa ferramenta, apresentaremos uma proposta de abordagem destinado ao ensino de logaritmo para alunos do ensino fundamental.

## 5.1 O SOFTWARE GEOGEBRA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE LOGARITMO

O GeoGebra permite seu uso como auxiliar heurístico no processo de ensino-aprendizagem matemática. Inicialmente, apresentaremos algumas funções do software que auxiliam no estudo de logaritmos e serão importantes para o desenvolvimento da atividade que será proposta. Além disso, as opções que escolhemos apresentar podem auxiliar o professor na criação de outras atividades investigativas envolvendo funções logarítmicas e exponenciais. Dessa maneira, uma primeira observação é que o *Geogebra* permite construir graficamente qualquer nova função a partir de sua lei de formação, exibindo seu gráfico imediatamente. Isso pode auxiliar na identificação de pontos de intersecção, limites, derivação e integração.

Como se pode observar, a título de exemplo, a Figura 2 mostra os gráficos de funções $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$ e da reta $y = x$, bem como as distâncias dos respectivos gráficos à referida reta, o que indica a simetria dos gráficos das funções em relação à reta. (ARAÚJO; NÓBRIGA, 2010)

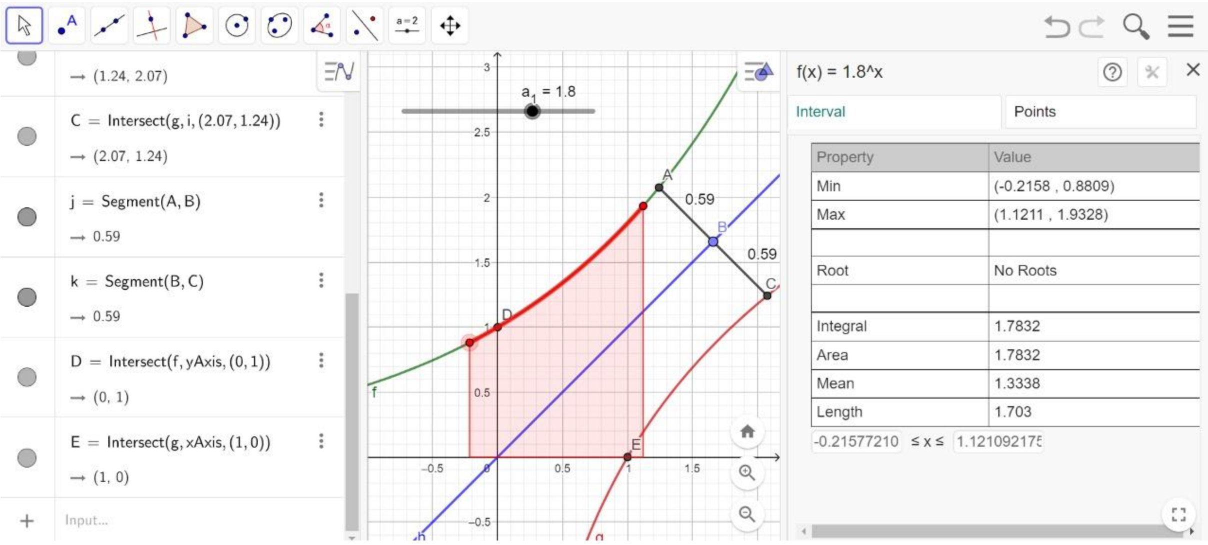


Figura 2- Funções exponenciais e logarítmicas implementadas no GeoGebra.
(Fonte: Autor)

Na altura em que estes conteúdos são introduzidos, a imagem dinâmica é um meio que contribui para o desenvolvimento da explicação e compreensão dos alunos em pesquisas e resoluções de problemas. *Geogebra* é útil como um assistente matemático para processar dados de um conjunto de pontos, para estudar variações, angulatura, e transformações geométricas que podem ser feitas nos gráficos, o que prova sua possível aplicação em outros tópicos do programa (figura 3).

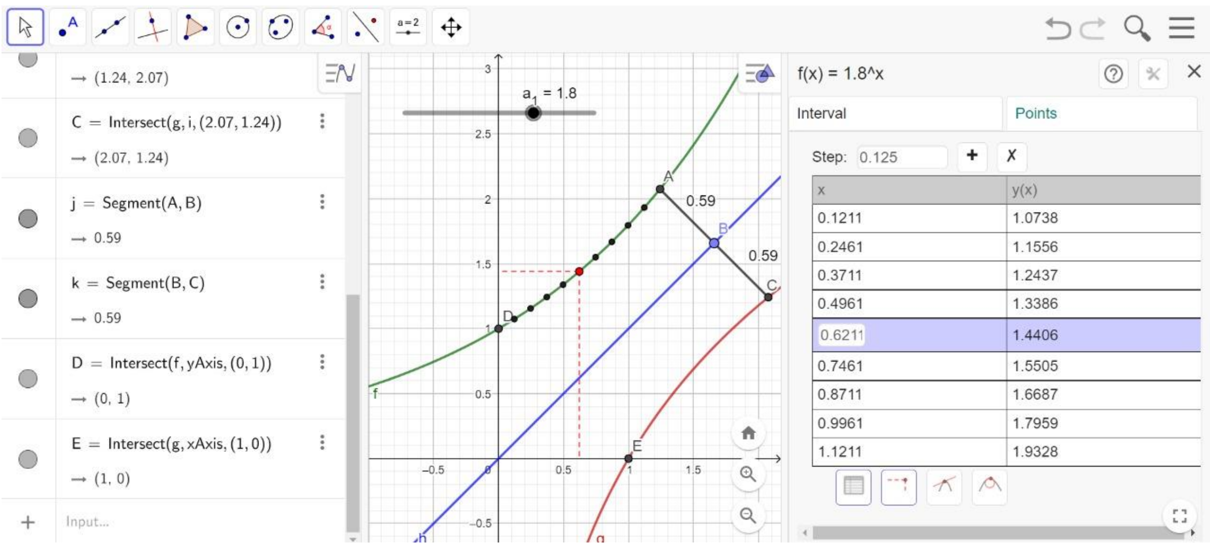


Figura 3 - Analisador de Função com pontos
(Fonte: Autor)

Neste caso também o *Geogebra* pode ser usado na dupla função de auxiliar heurístico e processador de dados; de uma forma muito simples é possível realizar outras operações como adição, produto e composição de funções. Ao utilizar o *GeoGebra* como ferramenta visual que permite aos alunos raciocinar e deduzir por si próprios, cria-se um ambiente de maior participação e discussão das informações, o que favorece a motivação no novo objeto de aprendizagem utilizado. A utilização deste software, tanto no fato de investigar em meio informático, como na possibilidade de visualização de imagens dinâmicas, facilita a compreensão de conceitos como: domínio, imagem, simetria de paridade, crescimento de funções, assíntotas, intersecções zero com os eixos e com outras funções, pontos máximos e mínimos, entre outros.

## 5.2 OS DESAFIOS NO ENSINO DE LOGARITMOS

O trabalho a ser desenvolvido nasce de uma preocupação compartilhada pelos professores da prática sobre as dificuldades que os alunos apresentam ao trabalhar com função e equação logarítmica. Essas dificuldades podem estar relacionadas a problemas de compreensão dos principais conceitos, problemas de visualização da utilidade de equações e funções em um contexto real, por mostrar o assunto de forma pouco significativa, entre outros fatores externos que influenciam a aprendizagem do aluno.

Por outro lado, existem fatores históricos e culturais que dificultam a compreensão do conceito de equação e função logarítmica, por exemplo, ao propor a função exponencial como inversa da função logarítmica ou vice-versa, segundo Feitosa et al (2020), a função logarítmica perde autonomia, também consideram que a priorização de uma apresentação axiomática e uma algoritmização geram uma “dislexia” no discurso da noção de logaritmo.

No início do século XVIII o grande matemático Leonard Euler descobriria as profundas relações entre a função exponencial $a^x = b$ e seu inverso $x = log_a b$. Porém o conceito de logaritmo ganhou popularidade como ferramenta de cálculo no século XVI com Stifel e se consolidou no início do século XVII com Napier e Bürgi. Posteriormente, com as tabelas de logaritmos de base 10 criadas por H. Brigss. Portanto, podemos deduzir que para a abordagem dos logaritmos historicamente não foi essencial conhecer a noção de função exponencial explicitamente.

Por isso, é extremamente importante propor uma estratégia metodológica que alterne os métodos de ensino atuais e os praticados no passado para apresentar a noção de logaritmo, fazendo modificações para que os professores possam produzir processos de exploração e construção que ajudem os alunos a obter uma aprendizagem significativa.

Os estudos sobre o ensino e a aprendizagem do conceito de logaritmo no ensino médio têm sido escassos, sem considerar a relevância desse conceito no desenvolvimento das habilidades matemáticas do aluno, inclusive no ensino superior (LOPES, 2011). Além disso, alguns estudos em didática da matemática mostram que os logaritmos são um conceito matemático de difícil compreensão na escola, por exemplo. Feitosa et al. (2020), verificaram "a apresentação escolar de logaritmos, absolutamente separados de suas origens, esvaziados de significados, isso nos dá uma primeira explicação de por que os alunos não conseguem articular as diferentes apresentações de logaritmos" (FEITOSA, et al, 2020, p. 497).

Os tópicos sobre equações são muito úteis para modelar situações da vida real. Entretanto, as equações representam um desafio para os alunos, pois envolvem a construção de novas ideias que vão sendo assimiladas aos poucos. Normalmente começa-se a trabalhar com equações lineares até chegar a equações logarítmicas. No caso da equação logarítmica, é importante conhecer as diferentes propriedades e características que elas satisfazem, para que o aluno possa compreender o comportamento da função logarítmica.

Tradicionalmente, a noção de função e equação logarítmica, no nível secundário, é abordada por meio da teorização de conceitos e propriedades diretamente ligadas à função exponencial, que não gera processos de análise e dedução nos alunos, mas sim um método ou algoritmo que promove a reprodução mecânica do conhecimento, adquirido trabalhando com a função exponencial, para resolver problemas matemáticos relacionados com a equação e função logarítmica. (LOPES, 2011)

Dessa forma, algumas investigações buscam introduzir os conceitos relacionados à função e equação logarítmica de forma construtiva, utilizando progressões aritméticas e geométricas, conforme historicamente abordadas. Deve-se notar que os logaritmos surgem da necessidade de simplificar uma infinidade de cálculos aritméticos. Isso permitiu que as pessoas trabalhassem com cálculos que incluíam números de grande magnitude necessários para resolver problemas nas áreas de astronomia, economia, biologia e particularmente na navegação marítima (FEITOSA et al, 2020). Feitosa et al (2020) explicam, aos alunos, que as multiplicações podem ser convertidas em adições e as divisões em subtrações, por meio de progressões aritméticas e geométricas como se fazia no passado. Além disso, Fava (2012, p. 86) menciona que “a importância dos logaritmos reside na intenção de reduzir os custosos cálculos de multiplicações e divisões com números muito grandes para reduzi-los a simples adição e subtrações”.

Há também pesquisas que propõem metodologias e estratégias pedagógicas para ensinar equação e função logarítmica por meio do uso de TICs. Alguns deles procuram apresentar aos jovens diferentes tipos de programas gráficos para que os alunos possam associar o critério da função à sua representação gráfica, mas muitos se propõem a trabalhar com a tecnologia digital, mas sem descurar a mediação pedagógica e o trabalho em pares. Araújo e Nóbriga (2010) sugerem que

> Após um conjunto de atividades especialmente pensadas para que adquiram os conceitos básicos e utilizem devidamente o GeoGebra, propõe-se o trabalho colaborativo e a elaboração de um produto não convencional, de forma grupal, onde possam expor as ideias / conceitos investigados (ARAÚJO; NÓBRIGA, 2010, p.13).

Com isso, busca-se, em última instância, dispensar o antigo formato onde apenas as propriedades são explicadas e os exercícios são realizados de forma repetitiva para tentar abranger o assunto.

Alguns implementos como o *GeoGebra* ou o Derive, buscam atrair por meio de suas ferramentas um conhecimento mais amplo onde os alunos não tenham que inicialmente lidar com uma construção passo a passo de gráficos. Podendo, portanto, se dedicar a um estudo mais aprofundado. Isso se reflete na pesquisa de Nascimento (2012). O autor afirma que estes tipos de ferramentas “oferecem uma nova alternativa para aprender funções exponenciais e logarítmicas onde os alunos verão os gráficos de cada função e, assim, podem se concentrar em analisar suas características em detalhes” (NASCIMENTO, 2012, p .6).

A pesquisa de Petla (2008, p. 47) também traz uma proposta. Sua investigação faz uma análise gráfica onde os alunos se familiarizam com o comportamento da função logarítmica, em diferentes bases, construindo seu gráfico a partir de pares ordenados a partir do exponencial das mesmas bases, nas quais invertemos os papéis da ordenada e da abscissa.

Em suma, é por meio do desenvolvimento de aprendizagens significativas que o aluno constrói um conhecimento matemático sólido e coerente. Oliveira et al (2012, p. 17) apontam que “a construção do conhecimento escolar é um processo de elaboração, no sentido de que o aluno seleciona, organiza e transforma as informações recebidas das mais diversas fontes, estabelecendo relações entre essas informações e suas ideias ou conhecimentos prévios”.

Concluindo, existem vários estudos que propõem estratégias educacionais para o ensino da função logarítmica, porém apresentam deficiências na utilização de recursos tecnológicos ou na exposição de conceitos, visto que os alunos carecem de ferramentas que lhes permitam compreender a função logarítmica sem relacioná-la com a função exponencial. É por esse motivo que uma estratégia metodológica que incorpore recursos tecnológicos, tradicionais, abordagens históricas e contemporâneas à função logarítmica podem enriquecer o trabalho dos professores.

## 5.3 UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE LOGARITMO UTILIZANDO O GEOGEBRA

Tendo em vista os assuntos discutidos e as articulações entre Educação Matemática, tecnologias, prática docente e ferramentas com aproximações lúdicas, como jogos e *softwares*, trazemos uma proposta de ação pedagógica que exemplifica os movimentos possíveis de tessitura entre tais questões. Propor utilidades metodológicas não é uma tentativa de ditar mais padrões e dogmas a serem aceitos e aplicados sem qualquer questionamento ou alteração. Pelo contrário, a ideia de propostas como esta é que inspirem outras possíveis práticas. Que inspire professores a procurar outras alternativas, experimentar outros caminhos, percorrer novas estratégias. Sempre considerando as subjetividades presentes na turma, as individualidades dos alunos que participarão desse processo, as condições e recursos que têm a sua disposição.

Por outro lado, mesmo que não sejam universais e perfeitas, propor caminhos e expandi-los em novos formatos, é um movimento necessário. Afinal, muito se fala sobre os problemas que permeiam as relações entre a educação e a tecnologia digital, muitas barreiras são levantadas. Porém, segundo Pinheiro, Pedrosa e Mendonça (2016), discutimos pouco sobre a subversão delas em caráter prático.

> Nas vivências com disciplinas que abordam o uso das tecnologias, em particular o computador, em atividades na educação básica, nos cursos de graduação e especialização, e na formação continuada de professores, verificamos o interesse pelos professores, mas certo desconhecimento ou

> resistência na inserção dessa tecnologia. A formação do professor para utilização do recurso educacional no ensino fundamental deve acontecer em um processo continuo de discussão e reflexão sobre a prática docente de **“como” e “quando”** utilizar o ambiente computacional no planejamento. Esse tema pode ser explorado em trabalhos anteriores, aprofundado e discutido. Mas ocorre que o uso desses recursos no momento da aula não está bem compreendido, tanto na fala dos educadores, como na proposta curricular da escola. Esta **falta de clareza** reside em parte na complexidade de transferir ou adaptar o recurso computacional ao campo do ensino de Matemática onde atua o professor de Matemática. (PINHEIRO; PEDROSA; MENDONÇA, 2016, p. 10 e 11, grifos nossos)

A seguir, trazemos um roteiro que tem como público alvo alunos do primeiro ou terceiro ano do ensino médio. O objetivo dessa atividade é entender a relação entre as propriedades de Logaritmos, por meio da experimentação, tentativa, erro e observação. Para que o roteiro seja implementado com êxito, consideramos que são necessários uma aula introdutória de Logaritmos e conhecimentos básicos do Geogebra, como pré-requisitos. Além disso, é necessário que o aluno tenha acesso ao roteiro que traremos e a um computador, smartphone ou tablet, que tenha o software Geogebra instalado ou possua acesso à internet para utilização do site. Sugerimos, ainda, que o mesmo tenha papel e caneta, para reflexão, a sua disposição. Por fim, a atividade consiste na utilização do Geogebra para manipular as propriedades logarítmicas descritas abaixo:

- Propriedade do produto: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- Propriedade do Quociente: $\log_a (x / y) = \log_a x - \log_a y$
- Propriedade de Potência: $\log_a (x^k) = k \cdot \log_a x$

Em suma, é importante destacar que a proposta relatada a seguir tem objetivo de internalizar, nos estudantes, as propriedades operatórias do logaritmo. Entretanto, por limitações decorrentes da natureza do software, a construção da sequência didática é feita com o manuseio das funções logarítmicas. Finalmente, indicamos ao professor que os termos próprios do Geogebra e que podem não ser conhecidos, estão descritos em um glossário, ao final deste trabalho.

## ROTEIRO DE ATIVIDADES

| Atividade 1: Propriedade dos produtos |
| --- |

1. Digite na aba de entrada a expressão *log ax*. Ao fazer isso, será criado um controle deslizante para o parâmetro *a*, como mostra a figura abaixo.

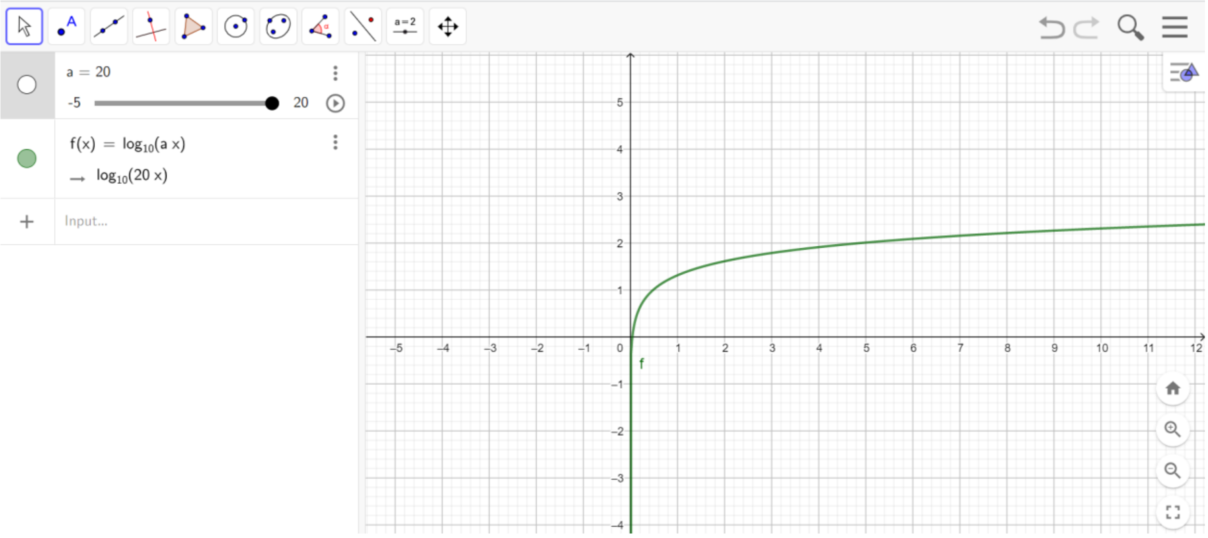


Figura 4 - Função log(ax)
(Fonte: Autor)

2. Mova o controle deslizante do parâmetro *a* para números positivos e negativos. Observe o que acontece com o gráfico e responda às seguintes perguntas:
   - O que você observa na mudança do gráfico?
   - A função está definida em (0,0)?
   - Qual a base do log que inseriu?

3. Digite no campo de entrada a expressão: *log bx* + *log c.* Isso criará controles deslizantes para b e c, como mostra a figura abaixo.

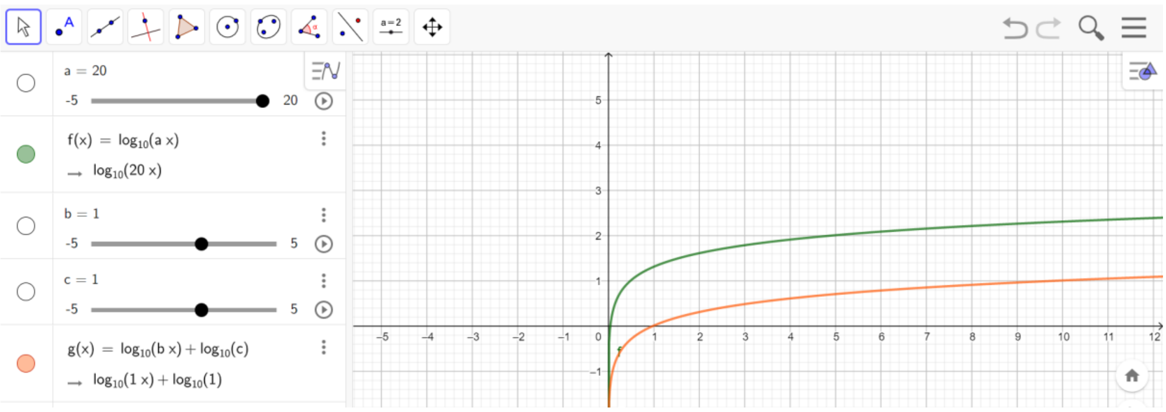


Figura 5 - Função log x e log bx + log c
(Fonte: Autor)

4. Agora você precisa percorrer alguns passos de configuração, como descritos na imagem abaixo.
   - Configure os controles deslizantes dos parâmetros *a*, *b* e *c* para um intervalo começando em -5 e terminando em 20. Para isso, clique com o botão direito sobre o controle deslizante e escolha a opção “Configurações”. Uma janela será aberta à direita da tela, como na figura abaixo. Em seguida, escolha a aba “Controle Deslizante”, nela você poderá definir os limites e incremento do parâmetro.
   - Defina 0,1 como incremento, a fim de obter somente números com uma casa decimal. Isso facilita a manipulação do controle deslizante.
   - Fixe o controle deslizante a em um número estritamente positivo e não primo.

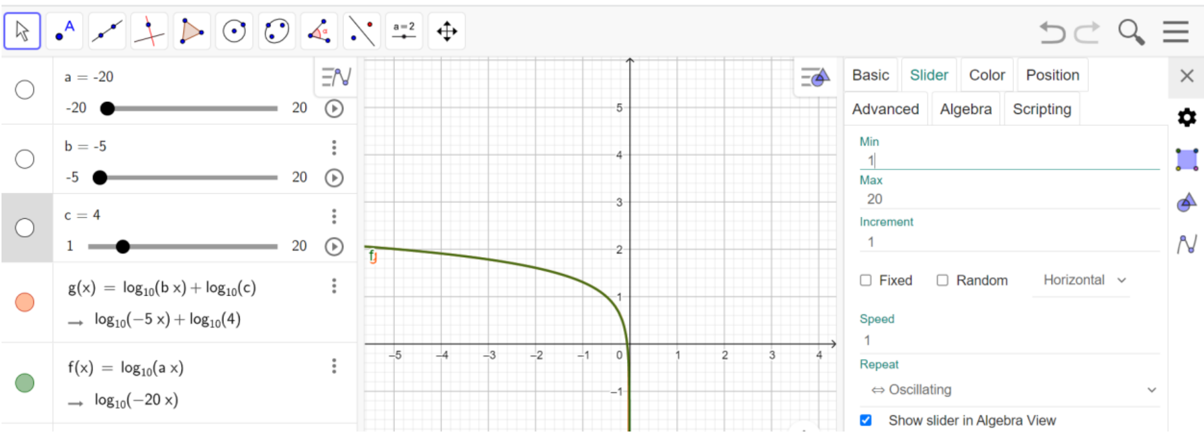


Figura 6 - Configuração dos parâmetros
(Fonte: Autor)

5. Configurações prontas, mova os controles deslizantes *b* e *c* de tal forma que o gráfico se movimente e coincida com o gráfico de *log ax*.
6. Agora, preencha a tabela abaixo com os valores que os parâmetros assumiram ao completar o passo anterior.

| Parâmetro | Número |
|---|---|
| a | |
| b | |
| c | |

Tabela 1: Informações observadas da Atividade 1
(Fonte: Autor)

7. Repita os passos anteriores variando os valores escolhidos para os controles deslizantes, de forma que obtenha outras tabelas preenchidas. Faça-o quantas vezes achar necessário. Anote todos os resultados e prossiga.

8. Observando a tabela acima, responda as perguntas:
   - Você conseguiu fazer os desenhos gráficos coincidirem?
   - Você consegue observar alguma relação entre os parâmetros *a*, *b* e *c*? Descreva essa relação com suas palavras e tente relacionar, matematicamente, as expressões que inserimos no programa.

| Atividade 2: Propriedade da divisão |
|---|

1. Em uma nova tela, digite a expressão *log ax*, na aba de entrada. Ao fazer isso, será criado um controle deslizante para o parâmetro *a*.

2. Mantenha o parâmetro *a* em um valor estritamente positivo. Digite no campo de entrada a expressão: *log bx - log c.* Isso criará controles deslizantes para b e c.

3. Seguindo os passos descritos na Atividade 1, configure os controles deslizantes dos parâmetros *a*, *b* e *c*.

4. Mova os controles deslizantes *b* e *c* de tal forma que o gráfico se movimente e coincida com o gráfico de *log ax*.

5. Agora, preencha a tabela abaixo com os valores que os parâmetros assumiram ao completar o passo anterior.

| Parâmetro | Número. |
|---|---|
| a | |
| b | |
| c | |

Tabela 2: Informações observadas da Atividade 2
(Fonte: Autor)

6. Repita os passos anteriores, variando os valores escolhidos para o controle deslizante a, quantas vezes achar necessário. Anote todos os resultados e prossiga.

7. Observando a tabela acima, responda as perguntas:
   - Você conseguiu fazer os desenhos gráficos coincidirem?
   - Você consegue observar alguma relação entre os parâmetros *a*, *b* e *c*? Descreva essa relação com suas palavras e tente relacionar, matematicamente, as expressões que inserimos no programa.

| Atividade 3: Propriedade da potência |
|---|

1. Repetiremos aqui processos parecidos quanto aos controles deslizantes. Para isso, em uma nova tela, digite a expressão $log(a^n\,x)$.

2. Configure os controles deslizantes *a* e *n*, como descrito na Atividade 1, e os mova para números positivos e negativos. Observe o que acontece com o gráfico.

3. Digite no campo de entrada a expressão: $nlog(b) + log(x)$. Sua tela deve estar parecida com a figura abaixo. Não esqueça de configurar o novo controle deslizante *b* tal como os demais.

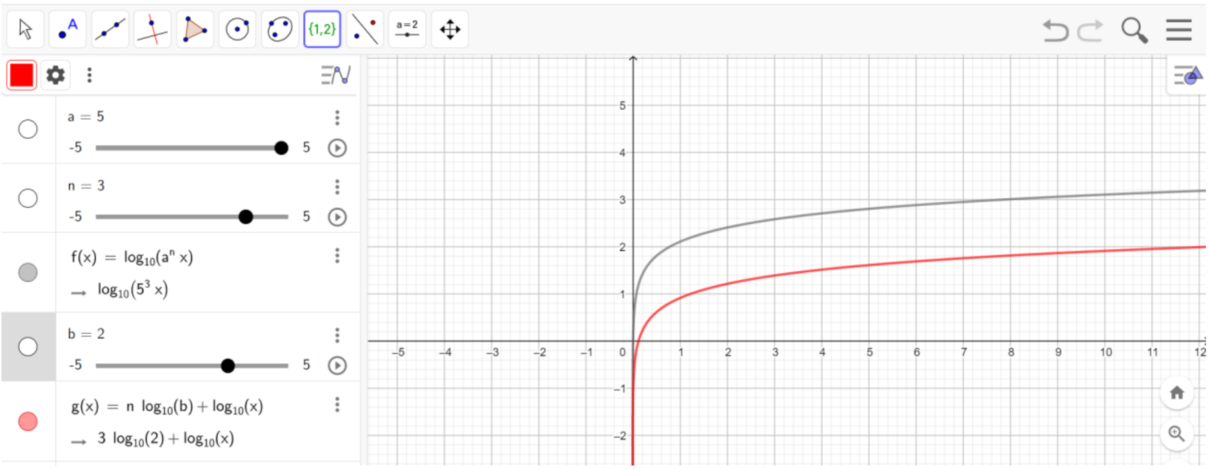


Figura 7 - Tela Geogebra na realização da Parte 3
(Fonte: Autor)

4. Mantenha o controle deslizante *a* fixo em um valor estritamente positivo e mova o controle deslizante *b* de tal forma que o gráfico se movimente e coincida com o gráfico de $log(a^n\,x)$.

5. Agora, preencha a tabela abaixo com os valores que os parâmetros assumiram ao completar o passo anterior.

| Parâmetro | Número. |
|---|---|
| a | |
| b | |
| n | |

Tabela 3: Informações observadas da Atividade 3
(Fonte: Autor)

6. Repita os passos 4 e 5, variando os valores escolhidos para o controle deslizante a, quantas vezes achar necessário. Anote todos os resultados e prossiga.

7. Observando a tabela acima, responda as perguntas:
    - Você conseguiu fazer os desenhos gráficos coincidirem?
    - Você consegue observar alguma relação entre os parâmetros *a* e *b*? Descreva matematicamente qual é essa relação.

## 5.4 O ROTEIRO EM DISCUSSÃO

A fim de concluir essa sessão, comentaremos algumas das perguntas que compõe o Roteiro de Atividades. Em um primeiro momento, é importante que os alunos façam suas próprias observações e tirem suas próprias conclusões. É interessante, também, que eles discutam esses resultados entre si e compartilhem o que observaram, argumentando as possíveis justificativas para esses eventos. Esse contato inicial tende a maximizar a potência da investigação. Assim, após esse momento individual e cooperativo, propomos que o professor organize uma discussão com toda a turma. Alguns pontos que podem ser abordados nessa discussão serão apresentados abaixo.

Inicialmente, nos debruçamos sobre a Atividade 1, especificamente nas perguntas do item 2. Neles, os alunos movimentam o controle deslizante *a* para números positivos e negativos.

- O que você observa na mudança do gráfico?

O parâmetro *a* multiplica o logaritmando internamente e o permitimos assumir valores positivos e negativos. Entretanto, a condição de existência do logaritmando o exige ser estritamente positivo. Dessa maneira, pensar no caso em que o parâmetro *a* seja negativo pode ser uma discussão interessante a promover na turma. Essa discussão se resumiria em refletir para quais valores de x esse caso seria possível.

Explorando a tela do GeoGebra, quando escolhemos algum valor negativo para o parâmetro *a*, seu gráfico existe e é refletido em torno do eixo y. Assim, para valores também negativos de x, esse caso não fere a condição de existência do logaritimando. Afinal, o produto de dois números negativos é positivo e o logaritmo está bem definido.

Dessa maneira, defendemos que a análise de questões sobre as definições e os motivos para que sejam da forma que são tem muita potência quando se trata de construir uma aprendizagem matemática significativa para o aluno. Esse tipo de abordagem promove uma postura crítica do aprendiz diante do conhecimento, tornando a definição mais do que meras restrições sem sentido. O professor pode formalizar essas ideias evidenciando que tal obrigatoriedade se mantém pelo fato de desejarmos que cada $log_a b$ exista e seja associado a um único x. Por exemplo, se o logaritmando for negativo, como no caso abaixo, nenhum valor de x satisfaria tal equação. Assim, a definição de logaritmo estaria comprometida.

$$log_2(-4) = x \ \rightarrow 2^x = -4$$

Por isso, quando vamos investigar a propriedade, de fato, solicitamos ao aluno que mantenha o parâmetro *a* em um valor estritamente positivo. Assim, garantimos a existência do logaritmo utilizado. Entretanto, consideramos importante essa restrição não ser feita em um primeiro momento, justamente para que seja possível problematizar as condições de existência que, por vezes, ficam sem significado para o aluno. Como se não houvesse um motivo e eles só precisassem aceitar o fato, sem questioná-lo.

Vale a pena, ainda, discutir sobre o gráfico sumir quando o parâmetro *a* se encontra, exatamente, no zero. Assim, retornando à definição,

$$a^x = b \ \leftrightarrow \ log_a b = x.$$

Podemos concluir que é impossível o logaritmando ser zero. Pois não há valor real de x que satisfaça a equação

$$a^x = 0\ .$$

- A função está definida em (0,0)?

Responder essa pergunta é discutir sobre a relação entre a curva e o eixo y, refletir se haveria algum momento em que eles se interceptariam. Essa investigação pode ser feita propondo que os alunos aumentem cada vez mais o zoom e tentem definir esse momento. Apesar da limitação do software e da impossibilidade de observação suficientemente comprovatória, a análise empírica pode oferecer uma boa intuição sobre o fato de tais objetos nunca se tocarem. Logo, a função não está definida nesse ponto. A prova dessa observação foi apresentada no caso acima, quando o parâmetro *a* era igual a zero. Portanto, haverá logaritmo para logaritimandos muito próximos de zero, mas não exatamente nele.

- Qual a base do log que inseriu?

Essa última questão do item 2 serve, simplesmente, para observar que quando não definimos a base do logaritmo ao inseri-lo no software, ele o considera um logaritmo comum. Acreditamos que essa convenção já foi abordada nas aulas introdutórias do assunto, mas consideramos que vale a pena indicá-la no uso de uma ferramenta.

No item 8, ainda na Atividade 1, perguntamos:

- Você conseguiu fazer os desenhos gráficos coincidirem?
- Você consegue observar alguma relação entre os parâmetros *a*, *b* e *c*? Descreva essa relação com suas palavras e tente relacionar, matematicamente, as expressões que inserimos no programa.

A Figura 8, apresentada a seguir, mostra uma possibilidade de caminho: durante a movimentação dos controles deslizantes, fixamos em dez o controle deslizante *a*, e movemos os controles deslizantes *b* e *c*, para cinco e dois, respectivamente. Essa é uma das possibilidades de fazer coincidir os gráficos.

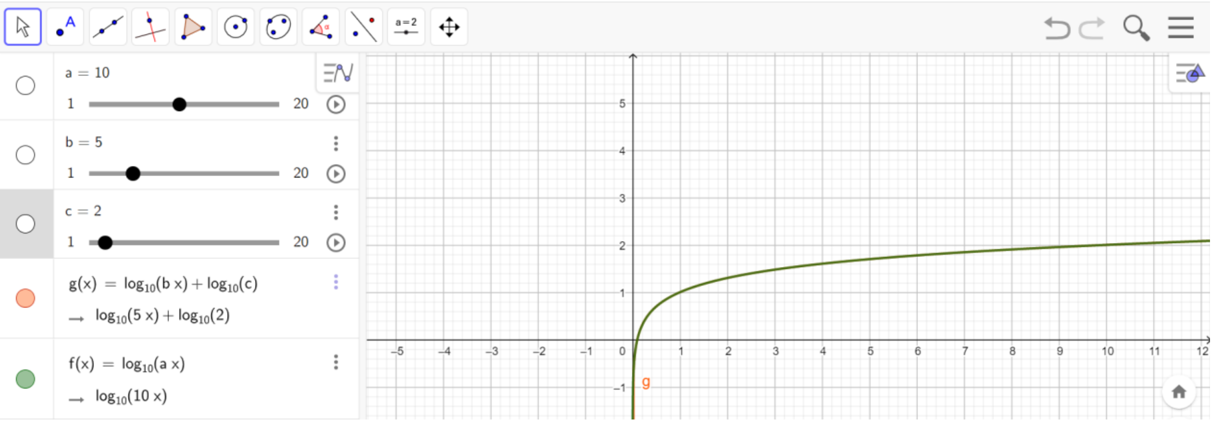


Figura 8 - Um possível resultado na Atividade 1
Fonte: (Autor)

Ademais, sugerimos que os alunos encontrassem outras combinações distintas entre os parâmetros *a*, *b* e *c*. Outros exemplos possíveis são:

$$a = 1, b = 1 \ e \ c = 1$$

$$a = 13{,}5, b = 9 \ e \ c = 1{,}5$$

$$a = 7, b = 3{,}5 \ e \ c = 2$$

Dessa maneira, após observar algumas possibilidades diferentes, espera-se que identifiquem a relação que existe entre eles. Isto é, esperamos que observem que o produto dos parâmetros *b* e *c* resulta no mesmo valor do parâmetro *a*, sempre que é possível fazer as curvas coincidirem. Por fim, essa conclusão nos permite escrever:

$$log(a\,x) = log(bc\,x) = log(b\,x) + log(c).$$

As discussões da Atividade 2 são análogas as indicadas para a Atividade 1. Portanto, seguiremos para a Atividade 3. Nela, o item 2 propõe que se observe o gráfico ao serem movimentados os parâmetros *a* e *n*. Apesar de, agora, o parâmetro *a* estar sendo elevado a uma potência *n*, quando há gráfico, a movimentação não sofrerá muita alteração do que foi observado na primeira atividade. Afinal, continuamos tendo a variável *x* sendo multiplicada por alguma constante. Entretanto, há aqui mais possibilidades de movimentação dos parâmetros onde o gráfico some. Na Atividade 1 isso acontecia, somente, em a=0. Nessa atividade, podemos apontar alguns exemplos, dentre diversos deles:

$$a = -2 \ e \ n = -2{,}5$$

$$a = -3 \ e \ n = 1{,}6$$

$$a = -4.9 \ e \ n = 0{,}3$$

Observe que sempre que o parâmetro *a* é negativo, o gráfico só aparece quando o parâmetro *n* é inteiro. Observe que esse fato ocorro pois, nesse caso, $a^n$ não é um número real. Afinal, se o parâmetro *n* for um número racional não inteiro, a exponenciação transforma-se em radiciação. Pois, se *z* e *w* são números inteiros e *w* não é divisor de *z*, tomando $n = \frac{z}{w}$, teríamos:

$$a^n = a^{\frac{z}{w}} = \sqrt[w]{a^z}$$

Como o parâmetro *a* é negativo, a radiciação é impossível no conjunto dos reais. Essa discussão é mais um motivo para não restringirmos o parâmetro *a*, inicialmente, somente quando vamos explorar as propriedades. Dessa maneira, há possibilidades de discussões para além de somente tomar as definições como verdadeiras, sem que haja qualquer tipo de problematização, significado ou justificativa.

Nas demais combinações de sinal entre os parâmetros *a* e *n*, o gráfico pode ser representado nos reais. Ressaltamos, a seguir, dois casos particulares.

Quando n=1, teremos

$$log(a^n\,x) = log(a^1\,x) = log(a\,x).$$

Ou seja, corresponde exatamente ao mesmo caso já discutido na Atividade 1.

E quando n=0, temos

$$log(a^n\, x) = log(a^0\, x) \;=\; log(\,x)$$

Isto é, independentemente do valor assumido por a, teremos a função logarítmica mais básica, sem qualquer composição.

Por fim, o item 7, sintetiza essa atividade. Nele, após investigar e encontrar parâmetros que façam as curvas coincidirem, os alunos precisam responder as seguintes questões:

- Você conseguiu fazer os desenhos gráficos coincidirem?
- Você consegue observar alguma relação entre os parâmetros *a* e *b*? Descreva matematicamente qual é essa relação.

A imagem abaixo mostra uma possibilidade de caminho: durante a movimentação dos controles deslizantes, fixamos em dez o controle deslizante *a* e em dois, o controle deslizante *n*. Movemos o controle deslizante *b* até que fizesse coincidir os gráficos, isto é, assumindo o valor 10.

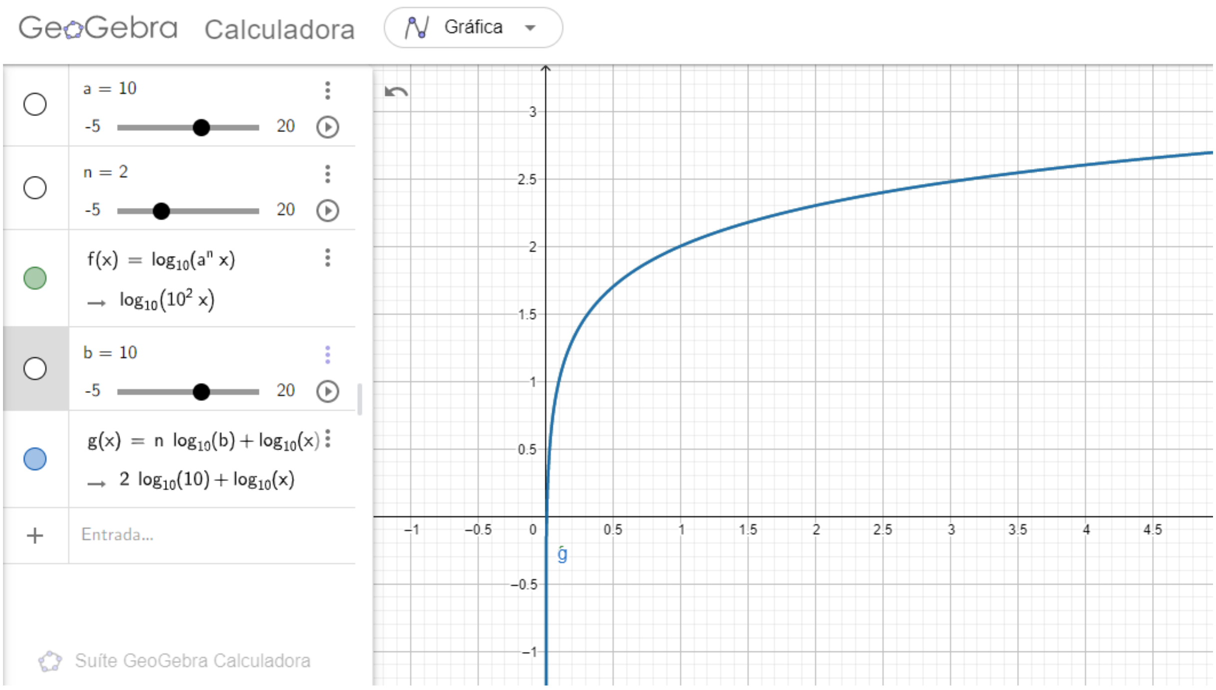


Figura 9 - Um possível resultado na Atividade 3
Fonte: (Autor)

Além dessa maneira, outros exemplos possíveis são:

$$a = 20, n = -2{,}7\; e\; b = 20$$

$$a = 4, n = 0{,}5\; e\; b = 4$$

$$a = 3, n = -3\; e\; b = 3$$

Após colher diversos dados, espera-se que o aluno consiga perceber que a relação entre os parâmetros *a* e *b* é tal que eles são iguais. Portanto, conseguimos formalizar concluindo que $log(a^n x) = log(a^n) + log(x) = log(b^n) + log(x) = nlog(b) + log(c)$. Logo, $log(a^n x) = n\ log(bx)$.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A tecnologia digital transformou a forma como as pessoas acessam informações e conhecimento, como elas interagem e a direção da administração da vida, desde sua esfera pública até a pessoal. As inovações e benefícios são visíveis, em maior ou menor escala, em todas as áreas das relações humanas e sociais. A educação, ainda que com todas as limitações que não podem ser ignoradas, precisa assumir a responsabilidade de acompanhar as demandas trazidas pelos alunos. Nestes tempos exige-se do processo de ensino-aprendizagem a utilização de métodos mais ativos, criativos e promotores, onde o aluno desempenhe um papel protagonista na construção do seu próprio conhecimento, tornando-se assim mais independente e desenvolvendo qualidades investigativas.

Diante desse cenário, acreditamos que nossa pesquisa, e a proposta que nela surge, podem ser uma contribuição importante para o campo da Educação Matemática. Sendo assim, comentaremos alguns aspectos importantes do que se espera na implementação da mesma. Na Atividade 1, o objetivo é que os alunos identifiquem que $log(bc\,x) = log(b\,x) + log(c)$. A imagem abaixo (Figura 9) mostra uma possibilidade de caminho: durante a movimentação dos controles deslizantes, fixamos em dez o controle deslizante *a*, e movemos os controles deslizantes *b* e *c*, para cinco e dois, respectivamente. Essa é uma das possibilidades de fazer coincidir os gráficos. É esperado que observando mais outros resultados como esse, os alunos consigam perceber uma relação entre os parâmetros e possam descrevê-la como no objetivo redigido acima. Analogamente, o objetivo da Atividade 2 é que os alunos identifiquem que $log(bx\,/\,c) = log(b\,x) - log(c)$. Por fim, a última atividade objetiva a compreensão de que $log(a^n x) = n\,log(bx)$.

Propomos utilizar a base 10, por ser a base padrão do GeoGebra. Entretanto, isso não influencia o desenrolar da atividade. Sugerimos também a utilização de números racionais com uma casa decimal para facilitar a visualização dos resultados e das relações. Mas o mesmo procedimento poderia ser feito com outro número real que se encaixe nas condições de existência do logaritmo. Ademais, as relações encontradas entre esses parâmetros demonstram o funcionamento das propriedades logarítmicas para os números racionais com uma casa decimal, mas não valem somente para esse conjunto numérico. Dessa forma, essa extensão precisa ser apontada pelo professor, justificando os motivos da escolha.

Em suma, por meio da experiência, potencializada pelo uso da tecnologia digital, acredita-se que podemos alcançar resultados importantes em direção a uma aprendizagem significativa e sólida, de forma que o aluno consiga aplicar seus conhecimentos além da sala de aula. Esperamos que esse trabalho responda algumas perguntas, mas que também levante outras. Que inspire nossa prática docente por meio do discutido acima, mas que também abra espaço para novas discussões. Dessa forma, em movimento constante, seguiremos um caminho de inovação que abraça as potências e contorna as limitações.

# REFERÊNCIAS


ANDRADE, A. P. R. **O uso das tecnologias na educação:** Computador e internet. 2011. Monografia (Licenciatura em Biologia). Consórcio Setentrional de Educação a Distância. Universidade de Brasília e Universidade Federal de Goiás, Brasília, 2011.

ARAÚJO, L. C. L. de; NÓBRIGA, J. C. C. **Aprendendo matemática com o geogebra.** São Paulo: Editora Exato. 2010.

BARBOSA, C. **Os jogos como facilitadores da aprendizagem da leitura e da escrita de crianças de 4 e 5 anos em instituições de ensino de Brasil e Portugal**. Tese de doutorado inédita. Universidad de Sevilla, Sevilla. 2015.

BATCH, T. M., DOMINGUES, M. J. C. S., WALTER, S. As Tecnologias da Informação e Comunicação: um estudo bibliométrico e sociométrico de 1997-2011. **Avaliação**, Campinas; Sorocaba, SP, v. 18, n. 2, p. 393-416, jul. 2013.

BATES, Tony. Educar na era digital: design, ensino e aprendizagem. **São Paulo: Artesanato Educacional**, v. 7, 2016.

BERGMANN, Jonathan; SAMS, Aaron. **Sala de aula invertida**: uma metodologia ativa de aprendizagem. Tradução de Afonso Celso da Cunha Serra. 1ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

BERTOL, Claudiane Eidt. et al. A importância do lúdico na educação infantil: o lúdico como facilitador do ensino aprendizagem. **Semana Acadêmica**. Fortaleza, ano MMXVII, n. 140, nov. 2018

BIZELLI, J. L. I**novação**: limites e possibilidades para aprender na era do conhecimento. São Paulo: Ed. da UNESP: Cultura Acadêmica, 2013. v.1.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: Ministério da Educação, 1998.
______.Conselho Escolar, gestão democrática da educação e escolha do diretor. Brasília/ DF.5, 2005e.

BURN, R. P. Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms. **Historia Mathematica**, vol. 28, p. 1-17, fev. 2001.

CARLI, Andréa. **Efeitos na Introdução das TIC'S no Ensino de Ciências na Educação Básica.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2013.

CARVALHO, Carlos Vaz de. Aprendizagem baseada em jogos-Game-based learning. In: **II World Congress on Systems Engineering and Information Technology**, p. 176-181. 2015.

CGI.br/NIC.br, Pesquisa sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação nas escolas brasileiras. **TIC Educação**, 2020. Disponível em: https://cetic.br/pt/pesquisa/educacao/

COSTA, Giselda dos Santos; XAVIER, Antonio Carlos. Aprendizagem formal, não-formal e informal com a tecnologia móvel: um processo rizomático. In: **III Congresso internacional TIC e Educação**, Lisboa, Portugal. p. 14-16. 2014.

COSTA, F. A. Reflexões sobre a integração de tecnologias digitais na escola. **Língua e Literacia (s) no Século XXI**, p. 14-39, 2019.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 23. ed. Campinas, SP: Papirus, 2012.

DUVOISIN, I. A. A necessidade de uma visão sistêmica para a educação ambiental: conflitos entre o velho e o novo paradigmas. In: RUSCHEINSKY, Aloísio (org.). **Educação ambiental**: abordagens múltiplas. Porto Alegre: Artmed, p. 91-103, 2002.

FANTIN, Monica. Mídia-educação: aspectos históricos e teórico-metodológicos. **Olhar de professor**, v. 14, n. 1, p. 27-40, 2011.

FAVA, R. **O Ensino na Sociedade Digital**. SEMESP, São Paulo, 13 nov. 2012. Disponível em: http://www.semesp.org.br/noticias/o-ensino-na-sociedade-digital/. Acesso em: 23 set. 2019.

FEITOSA, Murilo Carvalho, et al. Ensino de retas e planos com auxílio do software GeoGebra 3D mobile. **Reamec:** Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática, Cuiabá, v. 8, n. 2, p. 374-391, jun. 2020.

GEOGEBRA, 2021. **Sobre o Geogebra**. Disponível em: < https://www.geogebra.org/about >. Acesso em: 03, dez e 2021.

GRANDO, Regina Célia. Jogos na educação matemática. **II Jornada Nacional de Educação Matemática e XV Jornada Regional de Educação Matemática**–A Educação Matemática na Atualidade. Passo Fundo: Editora Universitária, v. 1, p. 1-16, 2008.

GRAVINA, Maria Alice; SANTAROSA, Lucila Maria Costi. A aprendizagem da matemática em ambientes informatizados. **Informática na educação: teoria e prática**. Porto Alegre. Vol. 1, n. 2, abr, p. 73-88, 1999.

GUTTON, E. **El juego concepto y teoría.** Disponível em: http://www.educacioninfantil.eu/el-juego-concepto-y-teorias. 2006. Acesso em: 18/10/2019

KARRER, M. Logaritmos - **Uma proposta de uma sequência de ensino utilizando a calculadora.** Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 1999.

KENSKI, Vani Moreira. **Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação. São Paulo: Papirus Editora, 2003.

KISHIMOTO, Tizuko M. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. Cortez editora, 2017.

LEITE, Werlayne Stuart Soares; RIBEIRO, Carlos Augusto do Nascimento. A inclusão das TICs na educação brasileira: problemas e desafios. **Magis**, Bogotá, v. 5, n. 10, p. 173-187. 2012.

LIMA, Valdineia Rodrigues; SOUSA, Edilene França Pereira; SITKO, Camila Maria. Metodologias Ativas de Ensino e Aprendizagem: Sala de aula invertida, Instrução por colegas e Júri simulado no ensino de matemática. **Research Society and Development**, v. 10, n. 5. 2021.

LOPES, Maria Maroni. Contribuições do software GeoGebra no ensino e aprendizagem de Trigonometria. In: **XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**, p. 1-12. 2011.

MAOR, Eli. *e*: A **história de um número**. 4ª Ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MATTAR, J. Aprendizagem em ambientes virtuais: teorias, conectivismo e MOOCs. TECCOGS. **Revista Digital de Tecnologias Cognitivas**, São Paulo, n. 7, p. 21 -40, jan./jun. 2013. Disponível em: http://www4.pucsp.br/pos/tidd/teccogs/artigos/2013/edicao_7/2-aprendizagem_em_ambientes_virtuais-joao_mattar.pdf. Acesso em: 23 jul. 2020.

NASCIMENTO, E. G. A. do. Avaliação do uso do software GeoGebra no ensino de geometria: reflexão da prática na escola. In: **CONFERENCIA LATINOAMERICANA DE GEOGEBRA**, Montevideo, Uruguay, nov. 2012

NETO, C. A Importância do Brincar no Desenvolvimento da Criança: Uma Perspectiva Ecológica. In Condessa (Org.). (**Re) Aprender a brincar** – Da especificidade à diversidade. Ponta Delgada: Nova Gráfica. 2009.

NEVES, Eleuzair Cunha; PRADO, Ademir Luiz do. Tecnologia de Informação e Comunicação e suas aplicações em sala de aula. **Revista das Faculdades de Santa Cruz**, ed. 18, v.1, n.1, jan/jun, p. 8 - 19. 2016

OLIVEIRA, J. B. de; et al. O uso de tablets e o GeoGebra como ferramentas auxiliadoras no ensino da Matemática. In: **Conferencia Latinoamericana de Geogebra,** nov. 2012, Montevideo, Uruguay. 2012

PCN, Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. **Secretária de Educação Fundamental.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

PÉREZ-GÓMES, A. I. **Educação na era digital:** a escola educativa. Trad. Marisa Guedes. Porto Alegre: Penso, 2015.

PETLA, R. J. GeoGebra: possibilidades para o ensino de Matemática. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal do Paraná, União da Vitória, 2008.

PINHEIRO, Ana Cláudia Mendonça; PEDROSA, Virlane Nogueira Melo; MENDONÇA, Adriana Ferreira. Uma proposta metodológica do uso do ambiente computacional como recurso didático para o ensino de conceitos matemáticos baseados na Sequência Fedathi. **Anais ENEM**. São Paulo, 2016.

PRETTO, Nelson de Luca. O desafio de educar na era digital: educações. **Revista Portuguesa de Educação**, Minho, v.24, n. 1, p. 95 -118. 2011.

SAMPAIO, P. C. J. **Introdução à Teoria dos Números:** um curso breve. São Carlos: EdUFSCar, 2009.

SANTOS, Vanessa Zucco dos; RESZKA, Maria de Fátima; BORBA, Eduardo Zilles. Educar na era digital: processos de ensinagem com os nativos digitais. **Br. J. Ed., Tech. Soc.**, v.14, n.3, Jul.-Set., p.421-436, 2021

SCHUBRING, Gert. Gauss e a tábua dos logaritmos. **Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, v. 11, n. 3, p. 383-412, 2008.

SCHUHMACHER, Vera Rejane Niedersberg. et al. A percepção do professor sobre suas competências em tecnologias da informação e comunicação**. RENOTE**, v. 14, n. 1, 2016.

SOARES, E. C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula.** Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2011.

SOUZA, Isabel Maria Amorim de; SOUZA, Luciana Virgília Amorim de. O uso da tecnologia como facilitadora da aprendizagem do aluno na escola. **Revista Fórum Identidades**, Itabaiana, v. 8, ano 4, 2010.

UNESCO. **Diretrizes de políticas da UNESCO para a aprendizagem móvel**. Brasília, UNESCO, 2014. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000227770. Acesso em: 20/01/2022

VALENTE, Jonas. **Quase metade do planeta ainda não tem acesso à internet, aponta estudo.** Agência Brasil, 2019. Disponível em: < https://agenciabrasil.ebc.com.br/economia/noticia/2019-09/quase-metade-do-planeta-ainda-nao-tem-acesso-internet-aponta-estudo >. Acesso em: 07 dez 2021.

VASCONCELOS, Getulio de Assis. **A irracionalidade e transcendência do número $e$.** Dissertação de Mestrado Profissional. UNESP, Rio Claro- SP, 2013.

VELASCO, Calcida Gonsalves, **Brincar**: o despertar psicomotor, Rio de Janeiro: Sprit, 1996.

VIANA, José Paulo; TEIXEIRA, Paula; VIEIRA, Rita. Matemática e jogos na Educação e Matemática. **Educação & Matemática**, n. 76, p. 3-18, janeiro/fevereiro de 2004.

# GLOSSÁRIO

Controle deslizante: É uma ferramenta disponível na Janela 11 da Barra de Ferramentas do Geogebra. Para criá-lo, basta ativar a respectiva ferramenta e clicar sobre o local desejado na janela. Feito isto, aparecerá opções de configuração como nome, intervalo e incremento. Seu uso possibilita causar variações em objetos (manualmente ou automaticamente), podendo também assumir a função de uma variável.

Campo de entrada: É a caixa de texto usada para inserir comandos, coordenadas, equações e funções, diretamente através do teclado.