

UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO

**Uma proposta do algoritmo KNN sobre uma
perspectiva riemanniana para o problema de
classificação de imagens**

Helainy Torres

2022



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM
MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL**

**UMA PROPOSTA DO ALGORITMO KNN SOBRE UMA PERSPECTIVA
RIEMANNIANA PARA O PROBLEMA DE CLASSIFICAÇÃO DE
IMAGENS**

HELAINY TORRES

Sob orientação de
Marcelo Dib Cruz

e co-orientação de
Ronaldo Malheiros Gregorio

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre** no Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, Área de Concentração em Modelagem Matemática e Computacional.

Seropédica, RJ, Brasil
Maio de 2022

Ficha catalográfica elaborada com
os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

I693p IGNACIO DE ALMEIDA TORRES, HELAINY , 1982-
UMA PROPOSTA DE ALGORÍTMO KMN SOBRE UMA
PERSPECTIVA RIEMANNIANA PARA O PROBLEMA DE
CLASSIFICAÇÃO DE IMAGENS / HELAINY IGNACIO DE
ALMEIDA TORRES. - Rio de Janeiro, 2022.
53 f.: il.

Orientador: MARCELO DIB CRUZ.
Coorientador: RONALDO MALHEIROS GREGORIO.
Dissertação (Mestrado). -- Universidade Federal
Rural do Rio de Janeiro, PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL, 2022.

1. Aprendizado de Máquina. 2. Métrica Riemanniana.
3. KNN. 4. Machine Learning. 5. Riemannian Metrics.
I. DIB CRUZ, MARCELO, 1967-, orient. II. MALHEIROS
GREGORIO, RONALDO, 1978-, coorient. III Universidade
Federal Rural do Rio de Janeiro. PROGRAMA DE PÓS
GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL.
IV. Título.

© 2022

Todos os direitos autorais reservados a Helainy Torres. A reprodução de partes ou do todo deste documento só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

E-mail: helainytorres@gmail.com

Este documento foi criado usando o sistema \LaTeX de preparação de documentos para composição de alta qualidade originalmente desenvolvido por Leslie Lamport a partir do sistema de formatação \TeX criado por Donald Knuth.

O formato final deste documento foi obtido usando a classe `UFRuralRJ`, uma adaptação livre das classes `mdtufsm` e `iiufrgs` para a formatação de documentos acadêmicos produzidos na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ) de acordo com as recomendações contidas na terceira edição do *Manual de instruções para organização e apresentação de dissertações e teses na UFRRJ*, publicado no ano de 2006.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E
COMPUTACIONAL

ATA Nº 2213/2022 - PPGMMC (12.28.01.00.00.61)

Nº do Protocolo: 23083.034103/2022-10

Seropédica-RJ, 30 de maio de 2022.

HELAINY IGNACIO DE ALMEIDA TORRES

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção de grau de **Mestre**, no Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional PPGMMC, área de Concentração em Modelagem Matemática e Computacional.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 30/05/2022

Conforme deliberação número 001/2020 da PROPPG, de 30/06/2020, tendo em vista a implementação de trabalho remoto e durante a vigência do período de suspensão das atividades acadêmicas presenciais, em virtude das medidas adotadas para reduzir a propagação da pandemia de Covid-19, nas versões finais das teses e dissertações as assinaturas originais dos membros da banca examinadora poderão ser substituídas por documento(s) com assinaturas eletrônicas. Estas devem ser feitas na própria folha de assinaturas, através do SIPAC, ou do Sistema Eletrônico de Informações (SEI) e neste caso a folha com a assinatura deve constar como anexo ao final da tese / dissertação.

Marcelo Dib Cruz Drº UFRRJ (Orientador, Presidente da Banca)

Carlos Andres Reyna Vera-Tudela Drº UFRRJ (membro interno)

Juliana Baptista dos Santos França Drª (Externa à Instituição - UFRJ-RJ)

(externo à Instituição)

(Assinado digitalmente em 03/06/2022 12:44)
CARLOS ANDRES REYNA VERA TUDELA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptM (12.28.01.00.00.63)
Matrícula: 2433643

(Assinado digitalmente em 04/06/2022 06:40) JULIANA BAPTISTA DOS SANTOS FRANÇA)
Assinante externo
CPF 053.276.397-11

(Assinado digitalmente em 06/06/2022 10:10)
MARCELO DIB CRUZ
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DCOMP (11.39.97)
Matrícula: 1168071

Para verificar a autenticidade deste documento entre em <https://sipac.ufrj.br/public/documentos/index.jsp> informando seu número: 2213, ano: 2022, tipo: ATA, data de emissão: 03/06/2022 e o código de verificação: 06c65161dc

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me conduzir, sustentar e dar sabedoria para realização deste projeto.

Aos meus orientadores Marcelo Dib Cruz e Ronaldo Malheiros GregorioRonaldo Malheiros Gregorio, por me acolher e acreditar no meu trabalho.

Ao meu marido Raphael por estar ao meu lado e sempre me apoiar. As meus queridos filhos Helena, Olivia e Isaac pelo amor, carinho e por compreenderem minha ausência em momentos importantes de suas vidas;

Aos professores, colegas e amigos do Programa de Mestrado em Modelagem Matemática Computacional da UFRRJ.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*"Deus não joga dados."
Albert Einstein*

TORRES, Helainy. **Uma proposta do algoritmo KNN sobre uma perspectiva riemanniana para o problema de classificação de imagens**. 2022. 42f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2022.

Machine learning (Aprendizado de Máquina) ganhou destaque por ser uma área da inteligência artificial que permite que algoritmos tomem decisões através do conhecimento extraído de amostras de dados. Uma das áreas de *Machine Learning* são os algoritmos de classificação, que se baseiam em prever a classe de uma observação dada. Existem vários métodos na literatura, que resolvem problemas de classificação como Rede Neural, SVM, KNN entre outros. Uma das semelhanças entre eles é utilizar a métrica euclidiana para determinar erros e aproximações. Nesse trabalho propomos construir um algoritmo baseado no KNN utilizando a métrica riemanniana para o problema de classificação de imagens. Os bancos de imagens utilizados durante a pesquisa são de imagens médicas e cada imagem será representada como uma matriz de covariância. O método proposto foi comparado com o KNN clássico que utiliza a métrica euclidiana e em todosos testes realizados se mostrou superior, apesar da qualidade das imagem, demonstrando que a técnica tem muito a oferecer.

Palavras-chave: Aprendizado de Máquina; Métrica Riemanniana; KNN.

ABSTRACT

TORRES, Helainy. **A proposal of th KNN algorithm on a riemannian perspective for the image classification problem.** 2022. 42p. Dissertation (Master in Mathematical and Computational Modeling). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2022.

Machine learning has gained prominence as an area of artificial intelligence that allows algorithms to make decisions through knowledge extracted from data samples. One of the areas of Machine learning is classification algorithms, which are based on predicting the class of a given observation. There are several methods in the literature that solve classification problems such as Neural Network, SVM, KNN, among others. One of the similarities between them is to use the Euclidean metric to determine errors and approximations. In this work we propose to build an algorithm based on KNN using the Riemannian metric for the image classification problem. The image banks used during the research are of medical images and each image will be represented as a covariance matrix. The proposed method was compared with the classical KNN that uses the Euclidean metric and in all tests performed it proved to be superior, despite the image quality, demonstrating that the technique has a lot to offer.

Keywords: Machine Learning; Riemannian Metrics; KNN.

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	2
1.2	Objetivos Específicos	2
1.3	Organização	3
2	CAPÍTULO 2 - PROCESSAMENTO DE SINAIS	4
2.1	Processamento Digital de Imagens	5
2.2	Processamento Digital de Imagens Médicas	6
3	CAPÍTULO 3 - MACHINE LEARNING	7
3.1	Tipos de Métodos de Classificação	8
3.1.1	Métodos de Classificação Não-Supervisionado	8
3.1.2	Métodos de Classificação Supervisionado	8
3.2	Algoritmos de Classificação	9
3.2.1	Árvores de Decisão	9
3.2.2	Randon Forest (Floresta Aleatória)	10
3.2.3	Classificação Naïve Bayes	10
3.2.4	Support Vector Machine(SVM)	10
3.2.5	Redes Neurais	10
3.2.6	KNN - K^{th} Nearest Neighbor (K-ésimo Vizinho mais Próximo)	11
4	CAPÍTULO 4 - CONCEITOS DE GEOMETRIA RIEMANNIANA	13
4.1	Variedades diferenciáveis	13
4.1.1	Variedades diferenciáveis	13
4.1.2	Curva diferenciável	13
4.2	Geometria Riemmaniana	14
4.2.1	Métrica Riemanniana	14
4.3	Geodésica	14
4.4	Variedades de Hadamard	15
4.5	Matrizes Simétricas Definidas Positivas	16
4.5.1	Conceitos de Análise Matricial	16
4.6	Espaço tangente à S_{++}^n : produto interno e norma	17

4.7	Distância e segmento geodésico em S^{++}	17
5	CAPÍTULO 5 - MÉTODO PROPOSTO	18
5.1	Análise e Reconhecimento de Padrões de imagens na Medicina	19
5.1.1	Seleção de Atributos Representativos da Imagem	19
5.1.2	Um modelo simples de formação de imagem	19
5.2	Detecção de atributos relevantes para o mapeamento da imagem	23
5.2.1	Descritores de Covariância para Classificação de imagens	25
5.2.2	Matriz de Covariância para análise discriminante de imagens	26
5.3	Descrição do método proposto	26
5.3.1	Métrica de avaliação	27
6	CAPÍTULO 6 - EXPERIMENTOS COMPUTACIONAIS	28
6.1	Descrição dos experimentos	28
6.2	Análise discriminante de imagens de pele de pacientes com malárias e sem anomalias de pele	29
6.2.1	Análise discriminante de imagens de raios X torácico de pacientes com Covid-19, Pneumonia e sem anomalias	30
6.2.2	Análise discriminante de imagens de raios X torácico de pacientes com 15 doenças respiratórias distintas	32
6.2.2.1	Precisão por classes	34
6.2.2.2	Classes agrupadas em conjuntos de 3 classes	37
7	CAPÍTULO 7 - CONCLUSÃO	38
7.1	Conclusões e Discussões sobre os resultados	38
8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	39

Lista de Figuras

2.1	Comparativo entre imagens raw e processada	6
3.1	Representação de uma árvore de decisão.	9
5.1	Descritor de covariância	18
5.2	Representação de uma imagem digital bidimensional.....	20
5.3	Representação de imagem por número de bits.....	20
5.4	O método de decomposição de imagens RGB.	21
5.5	Vizinhança-4 de um pixel.....	21
5.6	Vizinhança-8 de um pixel.....	22
5.7	Vizinhança-3D de um pixel	22
5.8	Representação do comportamento da imagem.....	24
5.9	Representação dos atributos da imagem através do mapeamento proposto ...	25
6.1	Banco de imagens de malária	29
6.2	Gráfico comparativo de métricas	30
6.3	Banco de imagens de doenças respiratórias	30
6.4	Gráfico comparativo	31
6.5	Gráfico de variação de K por classes	35
6.6	Gráfico de variação de K por classes	37

Lista de Tabelas

6.1	Resultados Comparativos	29
6.2	Resultados Comparativos	31
6.3	Descrição de doenças respiratórias utilizadas no trabalho	32
6.4	Tabela de variação de K por classes	34
6.5	Classes de doenças utilizadas nos testes	35
6.6	Resultados Comparativos 15 classes de doenças respiratórias	36
6.7	Resultado de teste de agrupamento de 3 classes.	37

Aplicações computacionais com interações humanas tornaram-se essenciais nas atividades do cotidiano: utilizando-se de algoritmos de Inteligência Artificial para desenvolver tarefas como reconhecimento facial, assistentes pessoais ativados por voz, carros autônomos, robôs teleguiados entre outros que facilitam, auxiliam e orientam as atividades humanas.

O *Machine learning* (Aprendizado de Máquina) ganhou destaque por ser uma área da inteligência artificial que permite que algoritmos tomem decisões através do conhecimento extraído de amostras de dados. Ou seja, os algoritmos extraem informações de dados brutos e constroem modelos matemáticos que serão utilizados para tomar decisões e conclusões sobre outros conjuntos de dados, aprendendo com seus erros e fazendo previsões a partir de diferentes abordagens. Uma vez que um algoritmo aprende o que fazer com os dados, ele pode fazer seu trabalho de forma automática.

Uma das áreas de **Machine learning** são os algoritmos de classificação, que baseiam-se em prever a categoria de uma observação dada, procurando estimar um “classificador” que gere como saída a classificação qualitativa de um dado não observado com base em dados de entrada com classificações já definidas. Ou seja, dado um conjunto de entidades o algoritmo se propõe a dividir o espaço em regiões denominadas classes de forma a manter os mais similares na mesma classe, e essa similaridade é determinada por alguma característica que seja comum entre eles.

Existem vários algoritmos disponíveis para esses processos de reconhecimento de características, técnicas como Árvore de Decisão, *Random Forest*, Classificação *Naïve Bayes*, *Support Vector Machine*(SVM) e Redes Neurais [1]. A maioria desses métodos utiliza a métrica Euclidiana para calcular a similaridade entre os objetos. Porém, existem outras métricas que podem funcionar também, como por exemplo a métrica Riemanniana.

A classificação de imagens é um tópico importante e recorrente em pesquisas de reconhecimento de padrões de visão computacional, particularmente em aplicações em que o objeto é detectado ([2]) ou o rastreamento visual ([3], [4]). Essas diversas aplicações podem ser aplicadas em áreas distintas, como na medicina e na saúde, transportes, agronegócio, comércio em geral, serviços públicos, cidades inteligentes e na indústria.

A análise e interpretação computadorizada de imagens médicas são fundamentais no auxílio a um diagnóstico preciso e no estudo de patologias sem agravos às condições de saúde do paciente. O uso de tecnologias para auxiliar as áreas médicas, já se tornou algo recorrente, por conta da necessidade de extensos processamentos de informação gerada neste campo. Trabalhos como [5],[6],[7],[8],[9] enfatizam a importância de utilizar sistemas de diagnósticos por computador ao apresentarem taxas de diagnósticos errados em programas de rastreamento e mostram que o uso análises automáticas de imagens médicas podem melhorar o diagnóstico

médico de radiologistas.

A representação da imagem é uma das etapas fundamentais para as tarefas de detecção, rastreamento e classificação. O valor do pixel é a escolha mais simples e natural, utilizando a informação espectral de cada pixel para achar regiões homogêneas. Esse mapeamento tem sido utilizado em muitos métodos tradicionais de classificação, no entanto, o descritor é geralmente limitado pela representação de alta dimensão, e não é robusto para ruído.

Extensões naturais aos valores brutos dos pixels tem sido pesquisadas para obter informações mais úteis às análises: histograma de imagem, gradientes, matrizes esparsas, bordas e cores ([10],[11],[12],[13]). Recentemente, descritores de covariância atraíram maior atenção na área de visão computacional, reconhecimento de padrões e aplicações ([14], [15]). Tuzel [14], propõe representar regiões da imagem por uma matriz de covariância não singular de d - recursos utilizando-se de atributos como posição, intensidade, derivadas direcionais de ordem superior e orientação de borda em cada pixel.

O objetivo desse trabalho é propor uma adaptação do método KNN, utilizando a métrica Riemanniana para calcular a similaridade entre os objetos. O método será comparado com o KNN usando a métrica Euclidiana. Os dados utilizados para comparação são de origens médicas e a sua Modelagem Matemática será através de Matrizes de Covariâncias.

1.1 Objetivos

Adaptar o algoritmo KNN para utilizar a métrica Riemanniana no cálculo da similaridade, para dessa forma classificar imagens mapeadas através de matrizes de covariâncias.

1.2 Objetivos Específicos

- Desenvolver uma aplicação, baseada no algoritmo KNN onde a similaridade entre as imagens são calculadas baseadas na métrica Riemanniana a partir da matriz de covariância das imagens;
- Comparar o desempenho do classificador utilizando a métrica Riemanniana e a Euclidiana;
- Analisar a quantidade de classes que o classificador é capaz de distinguir com eficiência;
- Validar resultados com base de dados distintas.

1.3 Organização

Capítulo 1, Introdução do trabalho desenvolvido;

Capítulo 2, Fundamentação teórica sobre Processamento de Sinais;

Capítulo 3, Machine Learning;

Capítulo 4, Revisão de conceitos básicos de geometria riemanniana;

Capítulo 5, Modelo proposto;

Capítulo 6, Experimentos computacionais;

Capítulo 7, Conclusões e proposta para projetos futuros;

Capítulo 2 - Processamento de Sinais

Segundo Gonzales[16], os métodos de processamento digital de imagens provém de duas áreas principais de aplicação: melhorar informações visuais para a interpretação humana e processamento de dados de imagens para armazenamento, transmissão e representação, considerando a percepção automática por máquinas.

Apesar de a primeira fotografia reconhecida remonta ao ano de 1826 e da implementação de um sistema de transmissão de imagens por cabo submarino no início da década de 1920, com base em uma fita codificada por uma impressora telegráfica, a história do processamento digital de imagens tem estreita relação com o desenvolvimento do computador digital[16].

Na verdade, imagens digitais necessitam tanto de capacidade de armazenamento e desempenho computacional ou seja, o progresso na área de processamento digital de imagens depende diretamente do desenvolvimento de computadores digitais e tecnologias relacionadas, incluindo armazenamento de dados, visualização e transmissão.

O processamento de sinais desenvolveu-se então de forma significativa a partir de meados da década de 60, com o aparecimento dos computadores digitais de 3^o geração que possibilitaram a aplicação de conceitos teóricos. A investigação espacial foi a grande responsável pelo seu rápido desenvolvimento e difusão em outras áreas de aplicação [16]. Os primeiros sistemas de diagnósticos pela imagem surgem na década de 70, não só a Tomografia Axial Computorizada mas também sistemas para Medicina Nuclear e Ultrassonografia, demonstrando a importância do processamento de imagem em Medicina [17].

Os detectores digitais capturam quase todas as informações das imagens de raios-X. No entanto, o alcance da radiação é tão grande que as imagens brutas e não processadas não possuem informações claras como podemos observar na Figura 2.1. Sem o processamento da imagem, em alguns casos, seria impossível a interpretação para o olho humano e, conseqüentemente, essa imagem não poderia ser usada para diagnóstico.

2.1 Processamento Digital de Imagens

O Processamento de Sinais consiste no estudo, análise e manipulação de sinais. Os Sinais, de um modo geral, são representações matemáticas de fenômenos Físicos e carregam uma determinada *Informação* sobre ele. Esta *Informação* pode estar associada a uma medida (fenômeno físico), ou pode estar associada à um nível cognitivo (conhecimento). O Processamento Digital de Sinais é o processo de manipulação matemática de um sinal para modificá-lo ou melhorá-lo à fins de interpretação humana ou de máquinas, caracterizando-se pela representação através de sinal discreto, frequência discreta, ou outros sinais de domínios discretos.

O Processamento de Imagens é uma área do Processamento de Sinais que estuda, analisa e quantifica sinais no formato de imagens e as *Informações* contidas nele. Processar uma imagem consiste em realizar transformações com o objetivo de extrair estas *Informações* relevantes sobre a natureza da imagem e suas características. Processamento Digital de Imagens é como denominamos a técnica de análise e manipulação de dados multidimensionais, por computador de modo que a entrada são imagens e/ou saída do processo são imagens ou informações obtidas a partir destas [16].

Os primeiros computadores poderosos o suficiente para realizar tarefas de Processamento de Imagens significativas foram desenvolvidos no início da década de 1960. O desenvolvimento do Processamento Digital de Imagens dependia da disponibilidade dessas máquinas e a partir do início do programa espacial a área de processamento de imagens cresceu rapidamente envolvendo os fundamentos de várias ciências, como Física, Computação, Matemática. Existe também uma grande interrelação entre Processamento Digital de Imagens e outras disciplinas como Redes Neurais, Inteligência Artificial, Percepção Visual, Ciência Cognitiva. Algumas disciplinas se desenvolveram de forma parcialmente independente ao Processamento de Imagens como a Fotogrametria, o Sensoriamento Remoto usando imagens aéreas e de satélite, a Astronomia e o Imageamento Médico [18].

Os métodos de Processamento de Imagens podem ser divididos em grupos de acordo com a área de aplicação: melhorar a qualidade de imagens para interpretação humana, onde mecanismos de reconstrução de imagens podem ser utilizados para eliminação de ruídos e distorções e aquisição de outras informações; e percepção visual utilizando recursos computacionais, onde técnicas de reconhecimento de padrões podem ser utilizadas para a classificação de imagens de uma cena; transmissão e armazenamento de imagens raw (brutas), processadas, ou características que as representem.

Para processar uma imagem digitalmente, precisamos representá-la de forma finita e discreta para que seja possível realizar manipulações ou modelagens matemáticas. Uma das formas de representar uma imagem seria definindo-a como uma função $f(x, y)$, em que x e y são coordenadas espaciais retangulares (pixel) e a amplitude de f em qualquer par de coordenadas (x, y) é chamada de intensidade da imagem nesse ponto que pode ser representada em níveis de cinza ou cores.

2.2 Processamento Digital de Imagens Médicas

A área de processamento e análise digital de imagens é um dos campos mais importantes da ciência médica, devido ao rápido e contínuo progresso na visualização de imagens médicas e avanços nos métodos de diagnóstico assistido por computador e terapias guiadas por imagens [18]. O corpo humano é um sistema complexo e a aquisição de dados sobre suas propriedades estáticas e dinâmicas produz grandes quantidades de informação que podem ser alteradas de acordo com seu estado de saúde.

A visualização da imagem é realizada através de um parâmetro de contraste, determinado por alguma característica física que diferencia os diferentes tecidos, órgãos ou sistemas. A maioria das imagens médicas utiliza a interação entre a energia eletromagnética e o corpo humano, com exceção da ultrassonografia, que utiliza energia mecânica,

A Radiologia é um braço da medicina responsável pelo diagnóstico por imagens e tratamento de doenças, ela é muito utilizada no desenvolvimento de soluções baseadas em aprendizado de máquina. Os tipos mais comuns de imagens radiográficas incluem tomografias computadorizadas, raio-x e imagens de ressonância magnética. Imagens de raio-x são interessantes porque possuem menor custo associado, têm aquisição mais rápida e são mais amplamente disponíveis. Outro fator interessante a observar é a disponibilidade pública de dados anotados de raio-x que podem ser usados no desenvolvimento de soluções [19].

As imagens médicas digitais geralmente não são adequadas para a visualização direta, sem qualquer tipo de processamento. Usualmente, há necessidade de realizar um pré-processamento da imagem para que ela seja corrigida ou realçada adequadamente, melhorando o seu contraste, corrigindo pixels defeituosos, reduzindo ruído ou permitindo que técnicas avançadas de processamento sejam mais eficientes.

Imagem raw (ou crua) é aquela que não foi submetida a qualquer tipo de processamento digital. Na aquisição, por exemplo, de imagem médica por exposição a equipamento de raios X, a imagem raw é obtida diretamente dos dados de atenuação do feixe de raios X (Figura: 2.1).

As técnicas de processamento que alteram o contraste das imagens podem destacar determinados objetos do fundo da imagem e possibilitar melhor percepção visual, baseada em critérios subjetivos do olho humano.



(a) Imagem Raw



(b) Imagem Pré-Processada

Figura 2.1: Comparativo entre imagens raw e processada ¹

¹ Fonte: disponível em: <http://www.agfahealthcare.com/he/usa/en/binaries/vets%20Image%20processing_tcm561-120347.pdf>.

Capítulo 3 - Machine Learning

Machine Learning ou Aprendizado de Máquina é uma área de pesquisa da Inteligência Computacional Artificial que estuda o desenvolvimento de métodos capazes de extrair conhecimento a partir de amostras de dados. Baseando-se na ideia de que sistemas podem aprender com dados, identificar padrões e tomar decisões com pouca ou nenhuma intervenção humana.

Este tipo de conhecimento explora a construção de algoritmos que aprendem com seus erros e fazem previsões sobre dados a partir de diferentes abordagens ou algoritmos da literatura para encontrar a solução de um determinado problema, e essa escolha pode não ser única. Geralmente esses algoritmos dependem de informações sobre o tipo de problema que se deseja resolver, o número de variáveis e o tipo de modelo que melhor se adequa a situação.

Machine Learning pode ser dividida em métodos de Classificação que buscam prever a categoria de uma dada observação e métodos de Regressão que utilizam dados de entrada (preditores) já observados para prever uma resposta. Nesse trabalho não abordaremos os métodos de Regressão apenas métodos de Classificação, pois é onde se enquadra o algoritmo que será utilizado.

Vários algoritmos são usados para criar classificadores de um conjunto de dados, sendo o termo “classificação” definido como o processo de atribuir a uma dada informação, o rótulo da classe a qual ela pertence. Desse modo, por meio de um conjunto de treinamento as técnicas de Machine Learning são usadas na indução de um classificador que seja capaz de prever a classe de instâncias quaisquer no contexto em que ele foi treinado.

As técnicas de classificação ou reconhecimento de padrões são utilizadas para comparar diferentes tipos de amostras identificando as semelhanças e diferenças entre elas. Estas técnicas se fundamentam nas seguintes suposições:

- amostras pertencentes a mesma classe são semelhantes;
- existem diferenças entre amostras pertencentes a classes diferentes;
- as semelhanças e diferenças são refletidas nas medidas de similaridade utilizadas para caracterizar as amostras.

Métricas ou medidas de similaridade são um critério que avalia o quão próximo ou similar dois objetos podem ser, calculando a distância entre eles em um espaço de entrada. Métricas diferentes podem ser utilizadas para avaliar a similaridade de diferentes formas. Podemos destacar as seguintes métricas como exemplos de similaridade: distância euclidiana, distância de Mahalanobis e distância de Manhattan.

3.1 Tipos de Métodos de Classificação

A escolha da métrica depende da modelagem utilizada, deve-se saber a priori quais amostras são semelhantes e quais são diferentes para encontrar os critérios de classificação. A classificação de imagens consiste no estabelecimento de um processo de decisão no qual um grupo de pixels é definido como pertencente a uma determinada classe. Neste sentido, os sistemas computacionais auxiliam o usuário na interpretação das classes que as imagens pertencem. Os métodos de classificação digital podem ser agrupados em função da presença ou não de uma fase de treinamento onde o analista interage com o computador, dessa forma podem ser divididos em métodos de classificação supervisionados ou não supervisionados.

3.1.1 Métodos de Classificação Não-Supervisionado

O método é dito não-supervisionado quando o classificador não utiliza a priori nenhum conhecimento sobre as classes existentes na imagem e define, sem a interferência do analista, a estratificação da cena, atribuindo a cada pixel uma determinada classe. Tal abordagem corresponde à técnica de segmentação de imagens, onde as mesmas são divididas em certas classes sem conhecimento prévio. O algoritmo define estas classes com base em regras estatísticas pré-selecionadas[20].

Em alguns casos, apesar de existir o objetivo da tarefa desejada, os resultados finais não são conhecidos e, portanto, não se tem os rótulos para passar ao modelo. Por exemplo: dada uma coleção de artigos, deseja-se agrupá-los automaticamente de acordo com a frequência de algumas palavras ou contagem de páginas. Não se sabe quantos grupos serão formados.

Este modelo aprende a executar uma tarefa a partir de dados não-rotulados (sem um resultado conhecido), apenas com base em suas características e padrões semelhantes, ou seja, o modelo deduz estruturas a partir de uma amostra do problema; bem utilizado em situações com muitas observações e muitas características como: áudios, imagens e vídeos.

3.1.2 Métodos de Classificação Supervisionado

O método de classificação é dito supervisionado quando existe um conhecimento prévio de algumas áreas em que se deseja trabalhar, o que permite a seleção de amostras de treinamento confiáveis. O algoritmo classificador opera com base na distribuição de probabilidade de cada classe selecionada. Ou seja, o classificador é inicialmente treinado, para depois associar os demais objetos a uma determinada classe (previamente definida), através de regras estatísticas preestabelecidas [21].

Este aprendizado é iterativo e é realizado até que uma condição seja atingida, geralmente uma porcentagem aceitável de acertos, ou seja, a ideia é sempre de minimizar os erros que a inteligência artificial produz. Essa condição de parada com base na acurácia máxima é possível pois se trata de aprendizado com resultado conhecido.

As classificações não-supervisionada e supervisionada podem ser utilizadas simultaneamente para minimizar as desvantagens inerentes de cada método, obtendo, assim, uma maior eficiência na caracterização dos alvos nas imagens. Tal método é conhecido como classificação híbrida.

3.2 Algoritmos de Classificação

Existem diversas técnicas e algoritmos de machine learning e diante de um problema, deve-se escolher, dentro deste universo de técnicas, qual algoritmo mais se adequa a encontrar a solução que pode não ser única.

3.2.1 Árvores de Decisão

Uma árvore de decisão é uma ferramenta que utiliza um gráfico ou modelo de decisões e suas possíveis consequências, incluindo resultados de eventos fortuitos, custos de recursos e utilidade. Na figura 3.1, podemos observar a estrutura de uma árvore de decisão: o nó raiz é um dos atributos da base de dados e o nó folha é a classe ou valor que será gerado como resposta. Porém existe uma hierarquia nas decisões que incluem/ligam o nó mais valoroso (*root node*) e os resultados apresentados nos nós folhas (*leaf nodes*) [22].

Do ponto de vista de decisões de negócios, em um algoritmo de *machine learning* uma árvore de decisão é o número mínimo de perguntas que devem ser respondidas para avaliar a probabilidade de tomar uma decisão correta. Ele permite abordar o problema de uma forma estruturada e sistemática para chegar a uma conclusão lógica.

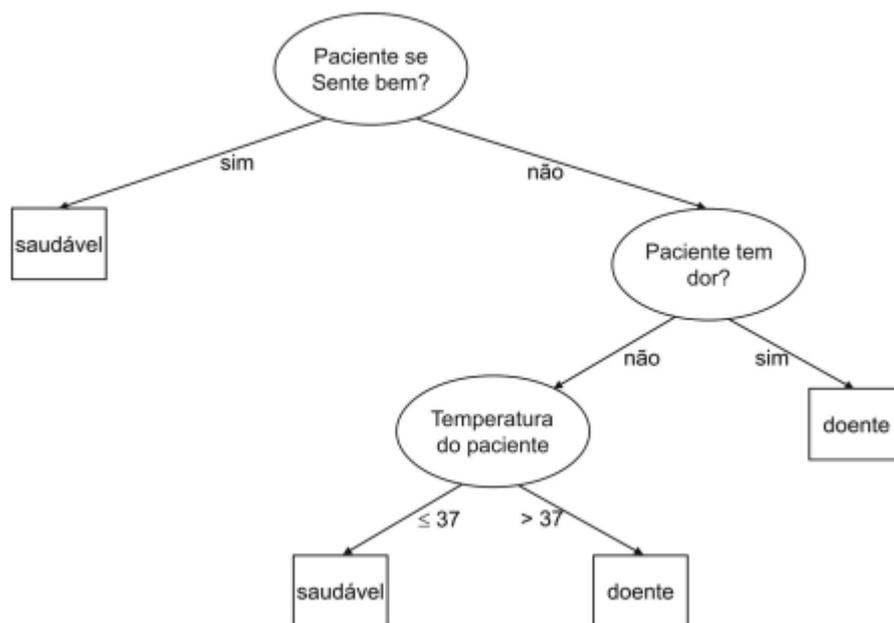


Figura 3.1: Representação de uma árvore de decisão.²

² Fonte: Indução de Regras e Árvores de Decisão [22].

3.2.2 Randon Forest (Floresta Aleatória)

Randon Forest são uma combinação de preditores de árvores de tal forma que cada árvore depende dos valores de um vetor aleatório amostrado independentemente e com a mesma distribuição para todas as árvores da floresta [23]. O principal objetivo da *Randon Forest* é minimizar o erro de generalização convergindo até um limite à medida que o número de árvores na floresta se torna grande, mostrando a dependência do modelo aos dados.

3.2.3 Classificação Naïve Bayes

Os classificadores *Naïve Bayes* são classificadores probabilísticos simples baseados no teorema de Bayes, utilizando probabilidades condicionais, supondo independência entre os preditores. Visto que ele prevê a probabilidade de uma hipótese acontecer baseado em um conhecimento prévio (rótulo da classe) [24]. Em termos de equação, $P(A|B)$ seria a probabilidade de um evento A acontecer sabendo que o evento B ocorreu. Alguns exemplos reais de suas aplicabilidades seria classificar um artigo de notícias sobre tecnologia, política ou esportes com base na frequência das palavras do texto.

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)} \quad (3.1)$$

3.2.4 Support Vector Machine(SVM)

Uma *Support Vector Machine* (SVM) é basicamente uma máquina linear, cuja idéia principal é construir um hiperplano como superfície de decisão de tal forma que a margem de separação entre exemplos positivos e negativos seja máxima [25].

Neste método, a partir de um espaço de entrada de padrões não-linearmente separáveis é formado um novo espaço de características, em dimensão outra, onde os padrões serão linearmente separáveis. Assim, um hiperplano de separação ótimo entre os exemplos é construído [26]. É um algoritmo binário usado para classificação, regressão e detecção de desvios muito utilizado com sucesso para reconhecimento de imagens, diagnósticos médicos e análises de textos.

3.2.5 Redes Neurais

Redes Neurais Artificiais são sistemas inspirados nos neurônios biológicos e na estrutura massivamente paralela do cérebro, com capacidade de adquirir, armazenar e utilizar conhecimento experimental. Normalmente o tipo de processamento de um único neurônio é a combinação linear das entradas com os pesos seguida pela passagem da combinação linear por uma função de ativação. A natureza do problema a ser resolvido normalmente define restrições em relação aos tipos de redes e algoritmos de aprendizagem possíveis. Neste texto distinguem-se redes com propagação do fluxo de informação para frente, redes recorrentes e redes competitivas. Em relação aos algoritmos de adaptação, vamos distinguir entre aprendizagem supervisionada e aprendizagem não-supervisionada. [27]

3.2.6 KNN - K^{th} Nearest Neighbor (K-ésimo Vizinho mais Próximo)

O KNN é um método de classificação não paramétrico, discriminante e determinístico. Ele é muito utilizado pela sua simplicidade e eficiência. A técnica consiste em determinar, dentro de um determinado conjunto, quais são os K - *elementos* que mais se assemelham com o elemento que desejamos classificar ou são mais "próximos", baseados na suposição de que quanto mais as amostras se assemelham entre si, mais próximas elas estarão no espaço multidimensional gerado pelas variáveis.

Para o cálculo da distância entre dois pontos, as métricas mais comuns são a distância Euclidiana, Manhattan e Minkowski, sendo a primeira a mais utilizada. A baixo é descrito este cálculo. Seja $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ dois pontos $X < Y$.

A distância Euclidiana entre X e Y é descrita pela equação 3.2:

$$d(x, y)_e = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \quad (3.2)$$

Se alguma dimensão da variável tiver uma importância diferente das outras, um peso relativo pode ser incluso (w_i), desse modo a distância Euclidiana ponderada pode ser descrita como mostrado na equação 3.3. Nas distâncias Manhattan e Minkowski, os pesos também podem ser aplicados [28].

$$d(x, y)_m = \sqrt{w_1(x_1 - y_1)^2 + w_2(x_2 - y_2)^2 + \dots + w_n(x_n - y_n)^2} \quad (3.3)$$

Método

Os passos do algoritmo KNN de classificação são as seguintes:

1. Calcular a distância entre todas as amostras do conjunto de treinamento no espaço n-Dimensional;
2. Receber uma objeto não classificado;
3. Medir a distância do novo objeto em relação aos outros objetos que já estão classificados;
4. Ordenar as distâncias em ordem crescente;
5. Obter as K menores distâncias;
6. Verificar a classe de cada objeto que tiveram a menor distância e contar as suas ocorrências;
7. Tomar como resultado a classe que mais apareceu dentre os objetos que tiveram as menores distâncias;
8. Classificar o novo objeto com a classe resultante da classificação.

Vantagens do Método

1. Computacionalmente muito simples.
2. Funciona bem quando o número de amostras numa classe é pequeno.

Desvantagem do Método

1. Incapaz de detectar amostras anômalas, alocando-as em uma das classes do conjunto de treinamento.

De todos os métodos citados, o KNN será o alvo desse trabalho porém, ao invés de utilizarmos algumas das clássicas medidas de distâncias citadas utilizaremos a métrica Riemanianna para determinar a similaridade das classes a serem estudadas.

Essa medida de proximidade ou similaridade está relacionada as características que foram utilizadas para mapea-los e precisamos determinar qual a melhor forma de representação. Grande parte dos métodos de classificação originalmente propostos no espaço euclidiano podem ser estendidos para variedades riemannianas. Quando analisamos objeto como pontos no espaço euclidiano a distância representa a menor linha reta entre dois pontos, porém se analisarmos como uma variedade no espaço riemanniano essa distância representa uma curva minimizante geodésica.

Capítulo 4 - Conceitos de Geometria Riemanniana

As variedades Riemannianas surgem como extensões naturais das superfícies regulares em \mathbb{R}^3 . Neste capítulo introduzimos alguns conceitos, notações e propriedades fundamentais sobre geometria Riemanniana pertinentes à variedades riemannianas, matrizes simétricas definidas positivas para ambientação da proposta a ser apresentada conforme feito em [29]. Não entraremos em detalhes como exemplos e demonstrações, para não nos distanciarmos do objetivo principal de nosso trabalho. Sugerimos a consulta de [SAKAI][30] e [CARMO][31].

4.1 Variedades diferenciáveis

4.1.1 Variedades diferenciáveis

Definição 4.1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto \mathbb{M} , não vazio, e uma família de aplicações biunívocas $x_\alpha : \mathbb{U}_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}$ de abertos \mathbb{U}_α de \mathbb{R}^n em \mathbb{M} tais que:*

1. $\bigcup_\alpha x_\alpha(\mathbb{U}_\alpha) = \mathbb{M}$
2. Para todo par α, β com $x_\alpha(\mathbb{U}_\alpha) \cap x_\beta(\mathbb{U}_\beta) = \mathbb{W} \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(\mathbb{W})$ e $x_\beta^{-1}(\mathbb{W})$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.
3. A família $\{(\mathbb{U}_\alpha, x_\alpha)\}$ é máxima relativamente as condições (1) e (2).

4.1.2 Curva diferenciável

Definição 4.1.2. *Seja \mathbb{M} uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{M}$ é dita uma curva diferenciável em \mathbb{M} . Sejam $\gamma(0) = p \in \mathbb{M}$ e D o conjunto das funções de \mathbb{M} diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva γ em $t = 0$ é a função $\gamma'(0) : D \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:*

$$\gamma'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0}, f \in D \quad (4.1)$$

4.2 Geometria Riemanniana

4.2.1 Métrica Riemanniana

Definição 4.2.1. Uma métrica riemanniana (estrutura Riemanniana) em uma variedade diferenciável \mathbb{M} é uma correspondência que associa a cada ponto $x \in \mathbb{M}$ um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ diferenciável em $T_x\mathbb{M}$. E $\| \cdot \|$ é a norma e a métrica correspondem à $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$, dada por $\|v\|_x = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ e $d(u, v)_x = \|u - v\| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle}$, $u, v \in T_x\mathbb{M}$.

Uma variedade diferenciável \mathbb{M} munida de uma métrica Riemanniana é chamada *variedade Riemanniana*.

Conhecida a métrica riemanniana, podemos determinar o comprimento de uma curva suave γ ligando dois pontos quaisquer $p, q \in \mathbb{M}$. Considere $\gamma: [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{M}$ satisfazendo $\gamma(t_1) = p$ e $\gamma(t_2) = q$. Assim, o comprimento riemanniano de γ é definido por

$$L(\gamma) = \int_{t_2}^{t_1} \|\gamma'(t)\| dt \quad (4.2)$$

e a distância riemanniana d entre p_1 e p_2 define-se como

$$d(p, q) = \inf_{\gamma \in C_{p,q}} \{L(\gamma)\} \quad (4.3)$$

onde $C_{p,q}$ é o conjunto de todas as curvas suaves conectando p à q . De forma intuitiva, uma curva ligando p à q , tal que o comprimento desta curva seja menor ou igual à qualquer outra curva ligando p à q , é conhecida como geodésica.

Definição 4.2.2. Uma curva diferenciável γ é dita *normal* se $\|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}$ é constante, para todo $t \in (p, q)$.

Segue que o comprimento de uma curva normal é dada por $\|\gamma'(t)\|_{\gamma(t)}(q - p)$.

O conceito de curva normal em geometria riemanniana simplifica o cálculo da distância entre dois pontos dados.

4.3 Geodésica

Seja \mathbb{M} uma variedade riemanniana. Uma curva suave $\gamma: I \rightarrow \mathbb{M}$ é denominada geodésica quando

$$\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0 \quad (4.4)$$

para todo $t \in I$, onde $\frac{D\gamma'(t)}{dt}$ é a derivada covariante do campo $\gamma'(t)$ (à saber, $\frac{D\gamma(t)}{dt}$ representa a projeção ortogonal de $\gamma(t)''$ sob $T_{\gamma(t)}M$, para cada $t \in I$). Decorre imediatamente que quando γ é uma geodésica, $\|\gamma(t)\|^2 = \langle \gamma(t)', \gamma(t) \rangle \equiv \text{constante}$.

Definição 4.3.1. Seja \mathbb{M} uma variedade riemanniana completa. Para cada $p \in \mathbb{M}$, a aplicação exponencial em p , representada por \exp_p , é definida por

$$\begin{aligned} \exp_p: T_p\mathbb{M} &\rightarrow \mathbb{M} \\ v &\longmapsto \exp_p v = \gamma_v(1) \\ \exp_p tv &= \gamma_v(t) \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde γ_v é a geodésica em \mathbb{M} , tal que $\gamma_v(0) = p$, $\gamma'_v(0) = v$.

Definição 4.3.2. *Uma variedade riemanniana \mathbb{M} é geodesicamente completa se para todo $p \in M$, a aplicação \exp_p está definida para todo $v \in T_p\mathbb{M}$, ou seja, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Veremos nos teoremas 4.3.1 e 4.3.2 uma propriedade geométrica similar à do \mathbb{R}^n que diz respeito a unicidade dos segmentos geodésicos ligando dois pontos quaisquer.

Teorema 4.3.1. (Holpf-Hinow) *Seja \mathbb{M} uma variedade Riemanniana e seja $p \in \mathbb{M}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. \exp_p está definida em todo o $T_p\mathbb{M}$.
2. (\mathbb{M}, d) é completo como espaço métrico, onde d é distância riemanniana.
3. Os subconjuntos limitados e fechados de \mathbb{M} são compactos. Além disso, cada uma das afirmações acima implica que
4. Para quaisquer dois pontos p e $q \in \mathbb{M}$ existe um segmento geodésico γ ligando p à q com $L(\gamma) = d(p, q)$. A geodésica γ com esta propriedade é chamada minimizante.

Teorema 4.3.2. *Seja M uma variedade de Hadamard. Então M é difeomorfa ao espaço euclidiano \mathbb{R}^n , $n = \dim \mathbb{R}^n$. Assim, para todo ponto $p \in \mathbb{M}$, aplicação exponencial \exp_p é um difeomorfismo.*

Cabe ressaltar a relevância deste teorema, pois se \mathbb{M} é uma variedade de Hadamard, então M tem a mesma topologia e estrutura diferenciável do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . De forma similar ao \mathbb{R}^n , a propriedade geométrica que garante a unicidades dos segmentos geodésicos ligando dois pontos quaisquer de \mathbb{M} é preservada. Esse resultado é válido para a variedade das matrizes simétricas definidas positivas, munido da métrica dada pela hessiana de 4.12.

4.4 Variedades de Hadamard

Variedades Riemannianas completas, conexas e com curvatura seccional não positiva são ditas variedades de Hadamard. O teorema a seguir segue como aplicação do teorema 4.3.1.

Teorema 4.4.1. *Seja M uma variedades de Hadamard. Então \mathbb{M} é difeomorfa ao espaço euclidiano \mathbb{R}^n , $n = \dim \mathbb{R}^n$. Assim, para todo ponto $p \in \mathbb{M}$, aplicação exponencial \exp_p é um difeomorfismo.*

Cabe ressaltar a relevância deste teorema, pois se \mathbb{M} é uma variedade de Hadamard, então \mathbb{M} tem a mesma topologia e estrutura diferenciável do espaço euclidiano \mathbb{R}^n . De forma similar ao \mathbb{R}^n , a propriedade geométrica que garante a unicidades dos segmentos geodésicos ligando dois pontos quaisquer de \mathbb{M} é preservada. Esse resultado é válido para a variedade das matrizes simétricas definidas positivas, munido da métrica dada pela hessiana de 4.12.

Definição 4.4.1. *Um subconjunto S de uma variedade de Hadamard M é dito geodesicamente convexo se para quaisquer par de pontos p e q em S , o único segmento geodésico que os une está contido em S .*

4.5 Matrizes Simétricas Definidas Positivas

4.5.1 Conceitos de Análise Matricial

A seguir são colocadas algumas definições e teoremas sobre os tipos de matrizes que serão utilizadas no desenvolvimento do projeto. A partir de [32], são destacados conceitos dentro do contexto de matrizes reais $\mathbb{R}^{m \times n}$, de modo que fiquem adaptados ao algoritmo apresentado.

Definição 4.5.1. No espaço vetorial $\mathbb{R}^{m \times n}$, podemos introduzir o seguinte produto interno

$$\langle A, B \rangle_F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}, \quad (4.6)$$

onde $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, denominado produto interno de Frobenius, que pode ser expresso ainda como

$$\langle A, B \rangle_F = \text{Tr}(B^T A). \quad (4.7)$$

Definição 4.5.2. Para o espaço vetorial $\mathbb{R}^{m \times n}$, a norma definida pelo produto interno 4.7 é chamada de norma de Frobenius e é denotada por $\|\bullet\|_F$. Logo, se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\|A\|_F = (\langle A, A \rangle_F)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\text{Tr}(A^T A)}. \quad (4.8)$$

A seguir relembramos o conceito de autovalores, assim como o autovetor associado.

Definição 4.5.3. Dada a equação matricial

$$Ax = \lambda x \quad (4.9)$$

se a equação 4.9 tiver solução não-trivial x , dizemos que λ é um autovalor de A e x , o autovetor associado a λ . Observe que a equação 4.9 pode ser reescrita como

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (4.10)$$

donde podemos concluir que teremos solução não-trivial x , se somente se, $\det(A - \lambda I) = 0$. Chamamos $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ de polinômio característico, cujas raízes são os autovalores de A . O núcleo da transformação linear $(A - \lambda I)$, denotado por $N(A - \lambda I) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I)x = 0\}$, se denomina autoespaço associado a λ . Qualquer vetor não-nulo do conjunto $N(A - \lambda I)$ é um autovetor de A .

Definição 4.5.4. Uma matriz A é dita **simétrica** se $A = A^T$.

Teorema 4.5.1. Todos os autovalores de uma matriz simétrica são reais. Além disso, autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais.

Definição 4.5.5. Uma matriz A real simétrica $n \times n$ é dita:

1. **definida positiva** se $x^T Ax > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo.
2. **definida negativa** se $x^T Ax < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo.
3. **semidefinida positiva** se $x^T Ax \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo.
4. **semidefinida negativa** se $x^T Ax \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo.

Denotemos por S_{++}^n o conjunto de matrizes simétricas definidas positivas, por S_+^n o conjunto de matrizes simétricas semidefinidas positivas e por S^n o conjunto de matrizes simétricas.

Teorema 4.5.2. Seja uma matriz A real simétrica $n \times n$. Então, A é definida positiva se e somente se todos os seus autovalores são positivos.

4.6 Espaço tangente à S_{++}^n : produto interno e norma

De acordo com [33], o espaço tangente à S_{++}^n em X , denotado por TXS_{++}^n , é o espaço de matrizes reais simétricas S^n , ou seja

$$TXS_{++}^n = S^n.$$

para todo $X \in S_{++}^n$.

Seja $X \in S_{++}^n$ um ponto fixo. A métrica riemanniana em TXS_{++}^n , com respeito a hessiana de $F(X) = -\ln \det(X)$, é dada por

$$\langle S_1, S_2 \rangle_X = \langle F''(X)S_1, S_2 \rangle_F, \quad (4.11)$$

$S_1, S_2 \in XS_{++}^n$.

Em [34], na demonstração da proposição 2.3.1, analisando as diferenciais de

$$F(X) = -\ln \det(X) \quad (4.12)$$

conclui-se que F'' é a transformação linear que satisfaz

$$F''(X)H = X^{-1}HX^{-1} : \quad (4.13)$$

com $H \in S^n$. Segue ainda, que a relação inversa a relação dada em 4.13 é dada por

$$[F''(X)]^{-1}H = XHX. \quad (4.14)$$

A partir de 4.13 conclui-se que 4.11 pode ser reecrita como

$$\langle S_1, S_2 \rangle_X = \langle X^{-1}S_1X^{-1}, S_2 \rangle_F = \text{Tr}\{X^{-1}S_1X^{-1}S_2\}, \quad (4.15)$$

onde $S_1, S_2 \in TXS_{++}^n$. A norma associada de um vetor em TXS_{++}^n , localmente em X , é definida por

$$\|S\|_X = \sqrt{\langle S, S \rangle_X} = \sqrt{\langle F''(X)S, S \rangle_F} = \sqrt{\langle X^{-1}SX^{-1}, S \rangle_F} = \sqrt{\text{Tr}\{X^{-1}SX^{-1}S\}} \quad (4.16)$$

onde $S \in TXS_{++}^n$

4.7 Distância e segmento geodésico em S^{++}

Sejam $A, B \in S_{++}^n$, denote por $\theta_l(X)$ o l -ésimo autovalor de X , $l = 1, \dots, n$. De acordo com [35], a distância riemanniana $d(A, B)$ entre A e B , com respeito a métrica riemanniana definida pela hessiana da função barreira 4.12 é dada por

$$d(A, B) = \left[\sum_{l=1}^n \ln^2 \theta_l \left(A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.17)$$

e seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow S_{++}^n$, de acordo com teorema 6.1 [36] o único segmento geodésico conectando A a B é dado por:

$$\gamma(t) = A^{\frac{1}{2}} \left(A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}} \right)^t A^{\frac{1}{2}} \quad (4.18)$$

Note que, sendo γ o único segmento geodésico ligando A e B tal que $\gamma(0) = A$ e $\gamma(1) = B$,

$$\exp_A^{-1} B = \dot{\gamma}(0) = A^{\frac{1}{2}} \ln \left(A^{\frac{-1}{2}} B A^{\frac{-1}{2}} \right) A^{\frac{1}{2}} \quad (4.19)$$

onde $\dot{\gamma}(t)$ denota a derivada de γ com respeito a t .

Capítulo 5 - Método proposto

A proposta desse trabalho é classificar imagens através do método *KNN* e para determinar a similaridade das classes de imagens utilizaremos a métrica Riemanniana no cálculo das distâncias. Para isso, é necessário representar as imagens como variedades riemannianas. Em [14],[2] e [14] essa técnica é utilizada para detecção de pedestre, p2 e p3. Como mencionado no capítulo 4, a menor distância entre dois pontos no espaço Riemanniano é uma curva geodésica ou seja, propomos que a métrica Riemanniana, devido à sua curvatura, seja capaz de separar as classes de forma mais eficaz.

A primeira etapa do processo seria representar as imagens no formato de uma variedade no espaço Riemanniano, e para isso são extraídas características relevantes para o conjunto de imagens a ser analisado como intensidade luminosa, bordas e contornos da imagem. Essas características serão utilizadas para construir uma matriz de covariância que represente cada imagem original, como podemos observar no diagrama da figura 5.1.

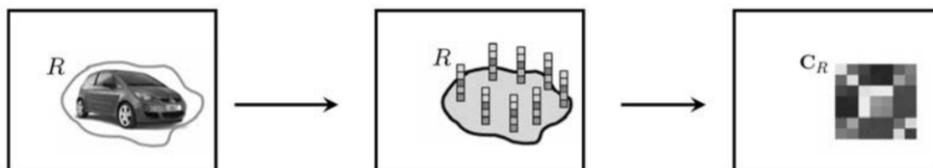


Figura 5.1: Representação de imagens através de matriz de covariâncias ³

As matrizes de covariância são por construção matrizes simétricas definidas positivas e por essa razão representam uma variedade no espaço Riemanniano, podemos nos beneficiar desse mapeamento explícito e estender muitos dos métodos de classificação originalmente propostos em espaço Euclidianos para variedades Riemannianas ([37], [38], [39], [40], [41], [42]). Ou seja, ao modelar as imagens na forma de matrizes de covariância podemos utilizar um algoritmo que aproveite as características do espaço riemanniano para realizar a classificação. Nesse trabalho utilizamos o algoritmo de busca do vizinho mais próximo (*KNN*) usando uma métrica de distância definida nas matrizes simétricas definidas positivas para correspondência de características e cálculo de similaridades: utilizaremos a métrica riemanniana para calcular a similaridade da matriz de covariância da imagem a ser classificada em relação a um conjunto de imagens de classes conhecidas determinando a classificação através do algoritmo *KNN*.

Para duas matrizes simétricas definidas positivas X e Y , podemos calcular a distância entre elas a partir da seguinte equação (5.1), que representa o correspondente comprimento

³ Fonte: Pedestrian detection via classification on riemannian manifolds[2].

geodésico ao longo da curvatura no espaço riemanniano que será utilizado como a distância métrica ou a similaridade.

$$D(X, Y) = \|\log(X^{-\frac{1}{2}} Y X^{-\frac{1}{2}})\|_F \quad (5.1)$$

5.1 Análise e Reconhecimento de Padrões de imagens na Medicina

Os métodos baseados em aprendizado de máquina (ML) mostraram sucesso na análise confiável de imagens médicas [43], [44], [45], [46], [47]. Uma aplicação comum da análise de imagens baseada em ML é a classificação de imagens com características semelhantes [48]. O desafio é extrair descritores representativos das regiões de interesse da imagem: métodos matemáticos, estatísticos e computacionais são utilizados para extrair informações específicas de imagens, mas tais algoritmos costumam ser bastante específicos para cada tarefa de análise de imagens tornando-se um desafio para os pesquisadores da área. Recentemente, vários métodos baseados em ML para o diagnóstico de imagens médicas de COVID-19 foram propostos [49], [50], [51], [52].

Na área médica, técnicas de reconhecimento de padrões desenvolvidas pelas áreas da ciência da computação são utilizadas para reconhecimento de tumores, quantificação de deformidades em estruturas anatômicas, visualização de contornos, análises morfométricas e para auxílio ao diagnóstico, entre outras funções.

5.1.1 Seleção de Atributos Representativos da Imagem

Vários tipos de características podem ser extraídas da imagem na forma de atributos representativos, porém alguns são irrelevantes ou redundantes para o seu mapeamento ou classificação. Esses atributos podem ser extraídos da textura, cor, intensidade luminosa, bordas, contornos entre outros.

O processo de seleção de atributos tem como função mapear as medidas extraídas das imagens em características mais significativas proporcionando uma classificação mais precisa. Dessa forma, podemos fazer a redução da dimensão do dado de entrada melhorando o desempenho do classificador. Basicamente, manter a dimensionalidade dos dados como a menor possível é importante principalmente devido ao menor custo computacional (menor uso de memória e classificador mais rápido) e à maior acurácia do classificador. Entretanto, em alguns casos, uma redução muito acentuada do número de atributos analisados pode reduzir o desempenho do classificador, em virtude de uma perda na capacidade de discriminação dos dados.

5.1.2 Um modelo simples de formação de imagem

Como os computadores não são capazes de processar imagens contínuas, mas apenas arrays de números digitais, é necessário representar imagens como arranjos bidimensionais de pontos. Uma imagem monocromática pode ser representada como uma função $f(x, y)$, na qual x e y são coordenadas espaciais e o valor de f em qualquer ponto (x, y) é proporcional à intensidade luminosa (brilho ou nível de cinza) no ponto considerado. Cada ponto que representa a imagem digital na grade bidimensional é denominado pixel que é o menor elemento da imagem.

Na Figura 5.2, apresenta-se a notação matricial usual para a localização de um pixel no arranjo de pixels de uma imagem bidimensional. O primeiro índice denota a posição da linha, m , na qual o pixel se encontra, enquanto o segundo, n , denota a posição da coluna. Se

a imagem digital contiver M linhas e N colunas, o índice m variará de 0 a $M - 1$, enquanto n variará de 0 a $N - 1$. Podemos observar na Figura 5.2, o sentido de leitura (varredura) e a convenção usualmente adotada na representação espacial de uma imagem digital.

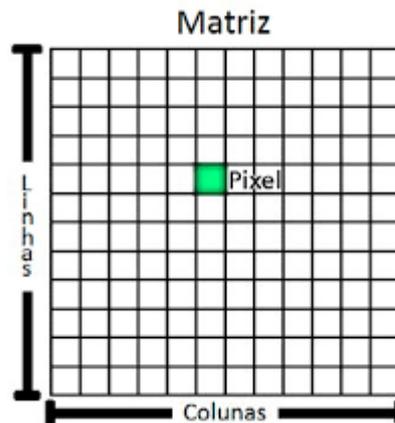


Figura 5.2: Representação de uma imagem digital bidimensional.⁴

Uma imagem só pode ser processada em um computador se estiver no formato digital, ou seja, ela deve ser formada por pixels espaçados de uma distância d e com valores representados por números inteiros.

Dada uma cena ou uma imagem contínua, o processo de amostragem permite a criação de uma imagem digital representando esta imagem por uma matriz bidimensional de $(n \times m)$ pixels. Quanto maiores os valores de n e m usados para se representar a mesma imagem melhor será esta aproximação.

Em imagens digitais é comum a utilização de 8 bits para a representação de um pixel, sendo desta forma, possíveis valores entre 0 e 255 (tons de cinza). Em imagens de tomografia computadorizada (TC) e outras modalidades são necessárias representações de variações muito mais sutis do que as permitidas com 8 bits, sendo, desta forma, necessário o uso de 12 ou até mesmo 16 bits por pixel[53]. Na Figura 5.3, podemos observar o efeito da variação de pixel em uma imagem.

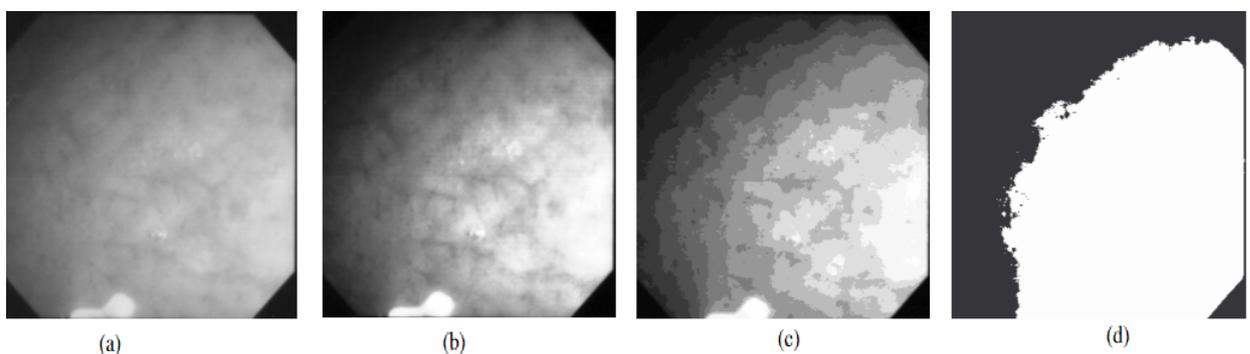


Figura 5.3: Imagem de uma porção do duodeno obtida em um exame de endoscopia com: (a) 8 bits por pixel (256 tons de cinza), (b) 7 bits por pixel (128 tons de cinza), (c) 4 bits por pixel (16 tons de cinza) e (d) 1 bit por pixel (2 tons de cinza)⁵

⁴ Fonte: <https://www.gov.br/economia/pt-br/assuntos/patrimonio-da-uniao/programa-de-modernizacao/linha-do-tempo/29-digitalizacao-matricial.pdf>

⁵ Fonte: <https://www.sorocaba.unesp.br/Home/Graduacao/EngenhariaAmbiental/antonio/imagens.pdf>

Em uma imagem digital colorida no sistema RGB, um pixel pode ser visto como um vetor cujas componentes representam as intensidades de vermelho (*R - Red*), verde (*G - Green*) e azul (*B - Blue*) de sua cor. A imagem colorida pode ser vista como a composição de três imagens monocromáticas:

$$f(x, y) = f_R(x, y) + f_G(x, y) + f_B(x, y), \quad (5.2)$$

na qual $f_R(x, y)$, $f_G(x, y)$, $f_B(x, y)$ representam, respectivamente, as intensidades luminosas das componentes vermelha, verde e azul da imagem, no ponto (x, y) .

Na Fig. 5.4, são apresentados os planos monocromáticos de uma imagem e o resultado da composição dos três planos. Os mesmos conceitos formulados para uma imagem digital monocromática aplicam-se a cada plano de uma imagem colorida.

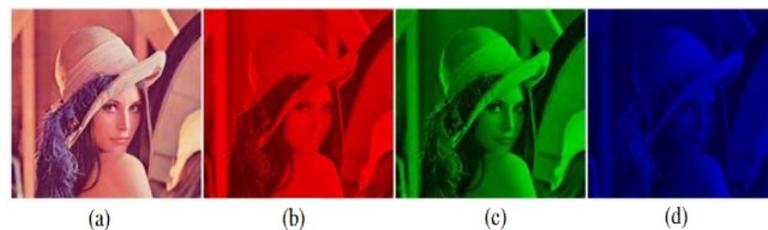


Figura 5.4: O método de decomposição de imagens RGB. (a) Original imagem Lena; (b) Componente vermelho; (c) Componente verde; (d) Componente azul ⁶

Alguns relacionamentos básicos entre pixels

A separação e representação dos pixels relativos a cada objeto, ou região, é uma etapa fundamental para o sucesso do processo de análise da imagem. Embora o ser humano possa facilmente identificar regiões com as mesmas características ou objetos presentes em uma imagem, para se realizar a mesma tarefa com um computador deve-se implementar algoritmos que analisem as características de cada pixel ou da distribuição da população de pixels.

Vizinhos de um pixel:

Vizinhança-4: Um pixel $f(x,y)$ possui 4 vizinhos horizontais e verticais como ilustrado em fig. 5.5. $(x + 1, y)$, $(x - 1, y)$, $(x, y + 1)$, $(x, y - 1)$

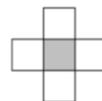


Figura 5.5: Vizinhança-4 de um pixel

Vizinhança-8: Um pixel $f(x,y)$ possui 8 vizinhos horizontais, verticais e diagonais como ilustrado em fig. 5.6.

$(x + 1, y)$, $(x - 1, y)$, $(x, y + 1)$, $(x, y - 1)$, $(x - 1, y - 1)$, $(x - 1, y + 1)$, $(x + 1, y - 1)$, $(x + 1, y + 1)$

⁶ Fonte: https://www.researchgate.net/publication/274475944_ChaosBased_Image_Encryption_Algorithm_Using_De-composition

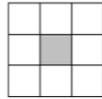


Figura 5.6: Vizinhança-8 de um pixel

Vizinhança tridimensional: representação de vizinhos tridimensionais ilustrado em fig. 5.7.



Figura 5.7: Vizinhança-3D de um pixel

Derivadas de um pixel

Alguns conceitos matemáticos importantes que serão utilizados no capítulo 6.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

$$\begin{cases} f(x+1, y) - f(x, y) & \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = f(i, j+1) - f(i, j) \\ f(x, y+1) - f(x, y), & \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = f(i, j) - f(i+1, j) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y) & \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(i, j+1) + f(i, j-1) - 2f(i, j) \\ f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y), & \longrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f(i+1, j) + f(i-1, j) - 2f(i, j) \end{cases}$$

Aproximação do gradiente por diferenças finitas: A derivada de um pixel, é a diferença entre ele e seu vizinho, a derivada de uma imagem é uma matriz cujos valores são as diferenças entre os pixels vizinhos.

5.2 Detecção de atributos relevantes para o mapeamento da imagem

As bordas são regiões da imagem onde ocorre uma mudança de intensidade em um certo intervalo do espaço, em uma certa direção, essa região corresponde a uma alta derivada espacial.

Como uma borda é definida por uma mudança no nível de cinza, quando ocorre uma descontinuidade na intensidade, ou quando o gradiente da imagem tem uma variação abrupta, um operador que é sensível a estas mudanças operará como um detector de bordas. Um operador de derivada faz exatamente esta função. Uma interpretação de uma derivada seria a taxa de mudança de uma função, e a taxa de mudança dos níveis de cinza em uma imagem é maior perto das bordas e menor em áreas constantes.

Se pegarmos os valores da intensidade da imagem e acharmos os pontos onde a derivada é um ponto de máximo, nós teremos marcado suas bordas. Dado que as imagens são em duas dimensões, é importante considerar mudanças nos níveis de cinza em muitas direções. Por esta razão, derivadas parciais das imagens são usadas, com as respectivas direções x e y . Uma estimativa da direção atual da borda pode ser obtida usando as derivadas x e y como os componentes da direção ao longo dos eixos, e computar o vetor soma. Esses resultados podem ser observados na Figura 5.8, quando existe uma mudança no nível de cinza, podemos observar essa variação na intensidade $I(x, y)$ e nas suas derivadas $I'(x, y)$ e $I''(x, y)$.

O operador envolvido é o gradiente, e se a imagem é vista como uma função de duas variáveis $I(x, y)$ então o gradiente é definido como:

$$\nabla I(x, y) = \frac{\partial I(x, y)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \hat{j}$$

Os detectores de borda são uma coleção de métodos de pré-processamento de imagem local muito importantes usado para localizar mudanças na função de intensidade; arestas são pixels onde esta função (brilho) muda abruptamente.

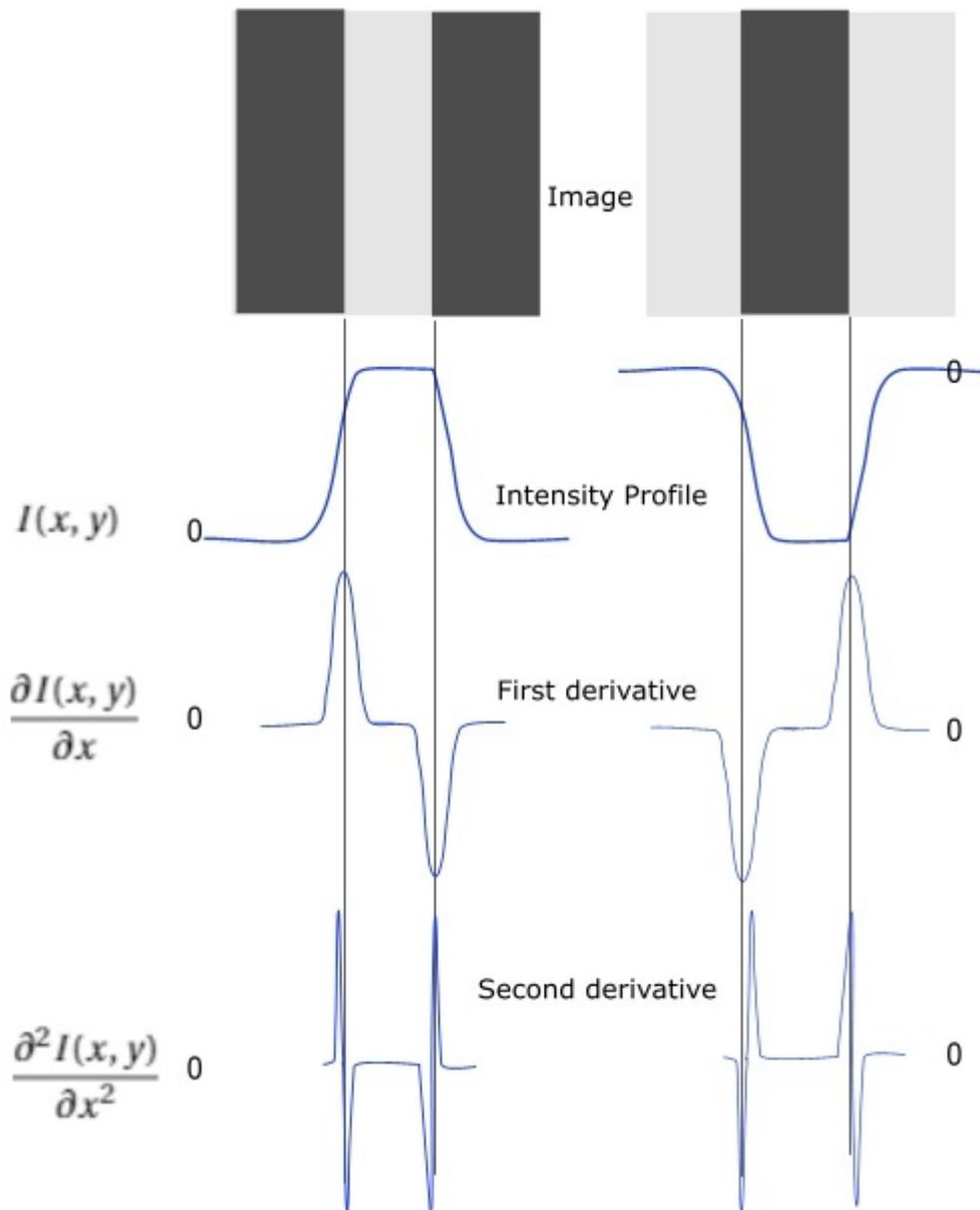


Figura 5.8: Representação do comportamento da imagem e de suas funções ⁷

⁷ Fonte: Adaptado de https://mipav.cit.nih.gov/pubwiki/index.php/Edge_Detection:_Zero_X_Laplacian

5.2.1 Descritores de Covariância para Classificação de imagens

Seja $I(x, y)$ uma função unidimensional da imagem que representa a intensidade do pixel na posição (x, y) . Para o problema de classificação de imagens, definimos o mapeamento $F(I, x, y)$, para cada pixel como:

$$F(I, x, y) = \left[I(x, y) \quad \left| \frac{\partial I(x, y)}{\partial x} \right| \quad \left| \frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \right| \quad \left| \frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial x^2} \right| \quad \left| \frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial y^2} \right| \quad \left| \frac{\partial I(x, y)}{\partial x \partial y} \right| \quad Amp \quad \psi \right]^T \quad (5.3)$$

onde x e y são a localização do pixel,

$$Amp = \sqrt{\left(\frac{\partial I(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \right)^2} \quad e \quad \psi = \arctan\left(\frac{\partial I(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \right)$$

$I(x, y)$, $\left| \frac{\partial I(x, y)}{\partial x} \right|$, $\left| \frac{\partial I(x, y)}{\partial y} \right|$, $\left| \frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial x^2} \right|$, $\left| \frac{\partial^2 I(x, y)}{\partial y^2} \right|$, $\left| \frac{\partial I(x, y)}{\partial x \partial y} \right|$, Amp , ψ , são respectivamente a intensidade da derivada na direção x , a intensidade da derivada na direção y , a intensidade da segunda derivada na direção x , a intensidade da segunda derivada na direção y , a intensidade da derivada na direção x e y o módulo do gradiente e o último termo é a orientação da borda.

Com o mapeamento definido, a imagem de entrada é convertida para um recurso em 8 dimensões: o descritor de covariância de uma imagem se transformou em uma matriz 8×8 que, devido à simetria, podemos armazenar apenas a parte triangular superior, que tem apenas 36 valores diferentes e dessa forma economizar espaço e processamento.

Na Figura 5.9, pode-se observar os atributos mapeados da equação 5.3 em uma imagem de Raio-X de um torax utilizado no projeto.

O descritor codifica informações das variações das características definidas dentro da região, suas correlações entre si e o layout espacial (posição).

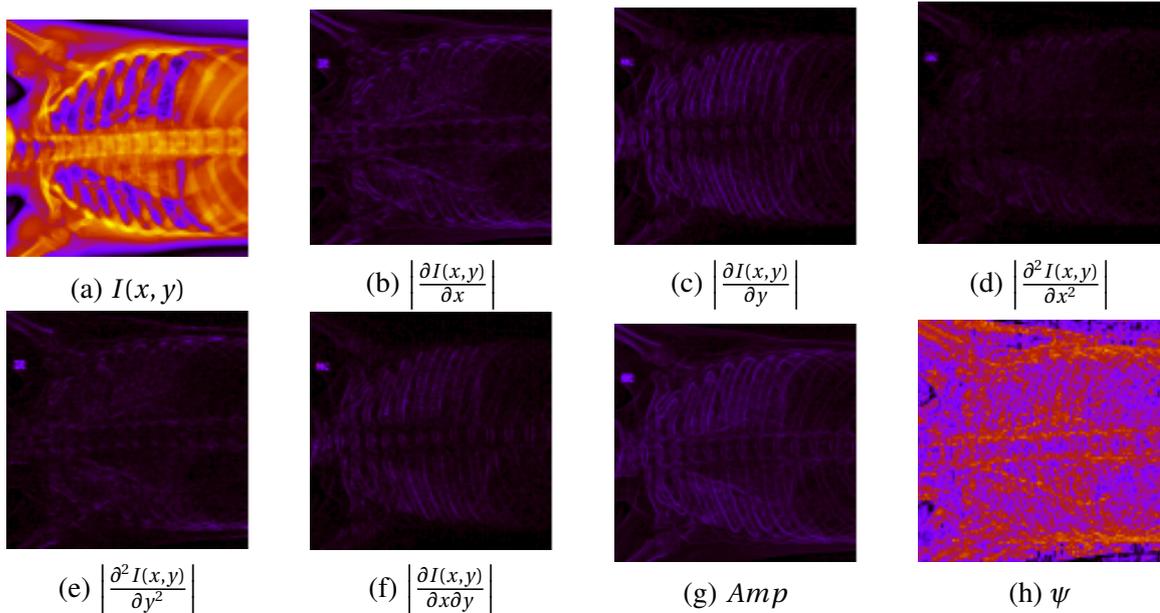


Figura 5.9: Representação dos atributos da imagem através do mapeamento proposto ⁸

⁸ Imagem gerada pela autora.

5.2.2 Matriz de Covariância para análise discriminante de imagens

A covariância mede a relação linear entre duas variáveis. A matriz de correlação $M_{(n \times n)}$, mede a relação linear entre as n variáveis combinadas duas a duas. A tendência existente na relação estabelecida entre as variáveis sendo expressa através do sinal de covariância. Se o valor da covariância é positivo ela é qualificada como direta, ou seja se aumentarmos ou diminuirmos o valor da variável a outra irá variar proporcionalmente. Por outro lado, se o valor da covariância é negativo ela é qualificada como indireta, ou seja se aumentarmos ou diminuirmos o valor da variável a outra irá variar inversamente.

Para cada imagem será construída uma matriz de covariância, utilizando-se atributos da imagem, no mapeamento utilizado foram definidos 8 atributos ($n = 8$). A matriz de covariância será construída a partir da Equação 5.4 que por construção será simétrica definida positiva, já que uma característica da covariância é a relação: $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$ [2].

$$Cov(X, Y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1} \quad (5.4)$$

5.3 Descrição do método proposto

- Seja I_1, I_2, \dots, I_n imagens do conjunto de dados utilizados para verificação do algoritmo.
- As Imagens I_j foram convertidas em escala de cinza, normalizadas e divididas em conjunto de teste e treino, nesse projeto foi utilizado 50% para treino e 50% para teste em todas as situações.
- Realizamos a extração de atributos, para cada imagem, através do cálculo da primeira derivada, segunda derivada e do gradiente como descrito na equação 5.3.
- A partir desses atributos, construímos suas respectivas matrizes de covariância S_1, S_2, \dots, S_n , utilizando a equação 5.4.
- Para cada elemento do conjunto de teste (S_j), que será validado, calculamos a distância riemanniana entre j e i , onde i pertence ao conjunto de treinamento, como definido no capítulo 4.

$$d(X, Y)_R = \|\log(X^{\frac{-1}{2}} Y X^{\frac{-1}{2}})\|_F \quad (5.5)$$

- Colocamos as distâncias em ordem crescente e analisamos os K' s melhores resultados. Dentre esses a classe que for mais recorrente será a classificação da imagem.
- Repetimos o mesmo processo para calcular utilizar a métrica euclidiana a fins comparativos, como definido no capítulo 4.

$$d(X, Y)_E = \|\langle X, Y \rangle\|_F \quad (5.6)$$

- Os resultados foram representados no capítulo 6.

5.3.1 Métrica de avaliação

Acurácia: indica uma performance geral do modelo. Dentre todas as classificações, quantas o modelo classificou corretamente;

Utilizamos a acurácia como métrica de avaliação:

$$acuracia = \frac{\textit{classificados corretamente}}{\textit{Total da classe}} \times 100\% \quad (5.7)$$

Capítulo 6 - Experimentos Computacionais

Neste capítulo são descritos os experimentos realizados para avaliar o desempenho da métrica riemanniana sobre a métrica euclidiana através do classificador KNN, proposta desse trabalho, em bancos de imagens de características diferentes. Cada seção apresenta detalhes sobre as bases de dados utilizadas para os experimentos, os resultados encontrados, gráficos e as conclusões sobre os mesmos.

Para realização dos testes, foi utilizado uma máquina Intel(R) Core(TM) i5-7300HQ , 8MB cache, 8GB de RAM, 2.50 GHz, sistema operacional Windows 10 e o projeto foi desenvolvido na linguagem PHYTON.

6.1 Descrição dos experimentos

Como foi descrito no capítulo 5, para todos os banco de dados de imagens médicas utilizadas, as imagens passaram por uma etapa de pré-processamento onde foram convertidas para escala de cinza e normalizadas. Na etapa de execução dos testes foram utilizados 50% dos dados de imagem para treinar o classificador e 50% para testar e validar os resultados.

Sequência de experimentos:

- 1 ° Classificação de imagens de pacientes com malária e normais.
- 2 ° Classificação de imagens de pacientes com covid-19, pneumonia e normais.
- 3 ° Classificação de imagens de pacientes entre 15 tipos de doenças respiratórias.
- 4 ° Classificação de imagens de pacientes entre 15 tipos de doenças respiratórias subdivididos em conjuntos de 3 doenças.

6.2 Análise discriminante de imagens de pele de pacientes com malárias e sem anomalias de pele

O conjunto de dados utilizado foi retirado do site oficial do Lister Hill National Center for Biomedical Communications (LHNCBC). Uma base que contém cerca de 27.558 imagens de pele de pacientes infectados com malária e sem anomalias, dividindo-se em 13.779 infectados e 13.779 não infectados. A figura 6.1 mostra um exemplo de uma imagem de pele contaminada com malária e um paciente saudável.

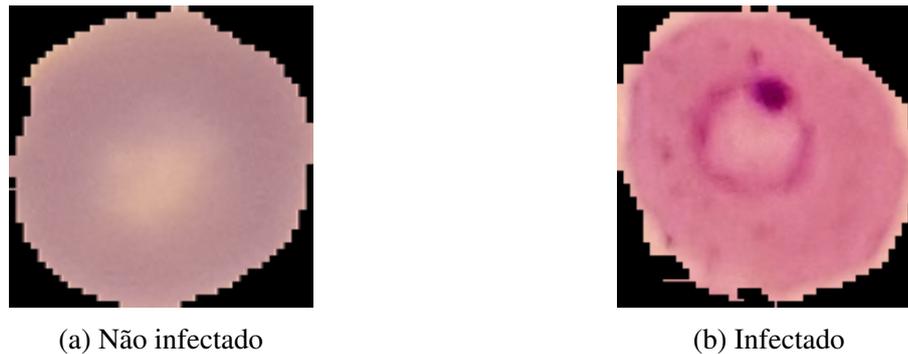


Figura 6.1: Banco de imagens de malária. Fonte: ⁹

Foram utilizados para treino 50% dos dados de pacientes infectados e 50% de pacientes não infectados, os mesmos valores foram utilizados para teste. Os resultados para essa análise podem ser verificados na tabela 6.1 e através do gráfico 6.2, neles podemos verificar que a métrica riemanniana foi superior a euclidiana para diversos valores de K .

Tabela 6.1: Resultados Comparativos

K	Malaria	
	KNN Riemanniano	KNN Euclidiano
5	94,39%	20,01%
7	94,00 %	68,01%
11	94,39 %	45,87%
13	94,60%	58,36%
21	94,39%	62,11%

⁹ Banco de imagens LHNCBC : <https://lhncbc.nlm.nih.gov/LHC-downloads/downloads.html>

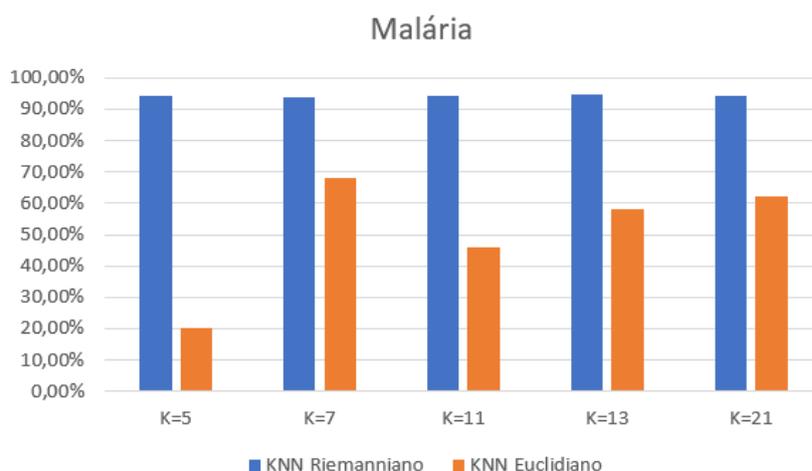


Figura 6.2: Gráfico comparativo de métricas

6.2.1 Análise discriminante de imagens de raios X torácico de pacientes com Covid-19, Pneumonia e sem anomalias

A radiografia de tórax pode ser usada como um processo de triagem de primeira linha para pacientes que apresentam sintomas semelhantes ao COVID-19. Para este experimento foram utilizados a base de dados do projeto [44]. Uma base que contém cerca de 420 imagens de raio-X do torax de pacientes que apresentaram doenças respiratórias, dividindo-se em 140 infectados com COVID-19, 140 infectados com pneumonia e 140 não infectados. Como podemos observar na Figura 6.3.

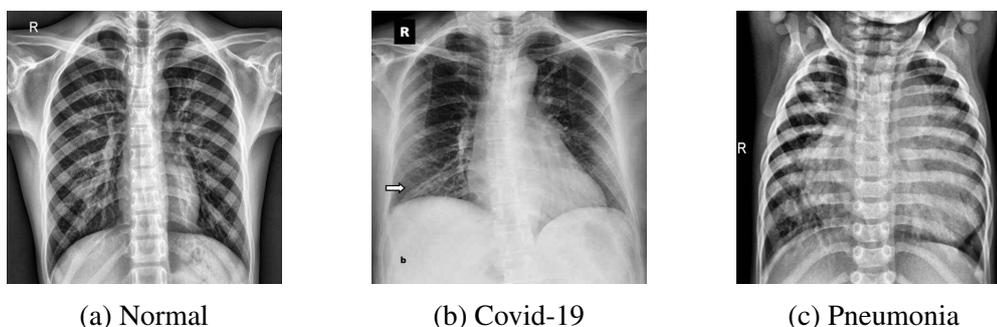


Figura 6.3: Banco de imagens de doenças respiratórias ¹⁰

Os resultados para essa análise podem ser verificados na tabela 6.2 e através do gráfico 6.4, neles podemos verificar que a métrica riemanniana foi superior a euclidiana para diversos valores de K .

¹⁰ Fonte: <https://github.com/abzargar/COVID-Classifier>

Tabela 6.2: Resultados Comparativos

K	Respiratórias	
	KNN Riemanniano	KNN Euclidiano
5	79,04%	52,04%
7	80,00%	63,86%
11	75,33%	72,32%
13	72,85%	66,68%
21	68,09%	43,08%

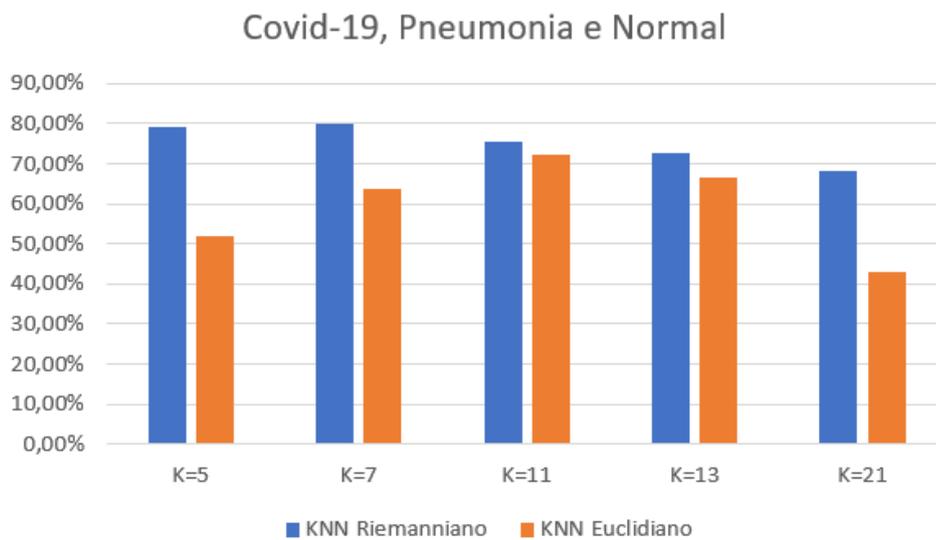


Figura 6.4: Gráfico comparativo

6.2.2 Análise discriminante de imagens de raios X torácico de pacientes com 15 doenças respiratórias distintas

Nesse estudo utilizamos imagens radiológicas torácicas de 15 doenças respiratórias distintas apresentadas na tabela 6.3, essa base de dados é originária do projeto *Xrays Chest 299px*¹¹. Nela estão representadas o nome das doenças utilizadas nos testes, uma imagem de referência dessa doença e sua descrição de acordo. A quantidade de dados para cada doença não era equivalente, apesar de termos 91.319 imagens, foram utilizados 1.000 imagens de cada tipo doença, onde a limitação foi a doença que apresentava menor quantidade de imagens, já que o propósito desse teste era verificar o comportamento para um número elevado de classes.

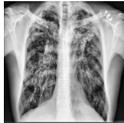
Para esse conjunto de dados, adotamos as seguintes estratégias para executar os testes:

- 1 ° Precisão por classes (subseção 6.2.2.1), onde avaliamos o desempenho do algoritmo para múltiplas classes e destacamos o melhor valor de K para cada classe (tabela 6.4) e o resultado foi expresso no gráfico 6.5. A tabela 6.6 é uma versão expandida desses resultados (Tabela 6.4), onde o valor em destaque é o melhor resultado para aquela quantidade de classes. Na tabela 6.5, apresentamos as doenças que foram utilizadas em cada subconjunto de testes, uma combinação diferente de classes proporciona resultados diferentes.
- 2 ° Classes agrupadas em conjuntos de 3(subseção 6.2.2.2), onde avaliamos o desempenho do algoritmo para subconjuntos aleatórios de 3 classes. Na tabela 6.7, podemos observar no valor das colunas o código dos testes, o valor de K que apresentou melhor resultado e o percentual de acertos na métrica Riemmaniana e Euclidiana, além das 3 doenças utilizadas em cada etapa. Esse resultado vem expresso no gráfico 6.6.

Tabela 6.3: Descrição de doenças respiratórias utilizadas no trabalho

Número	Nome	Imagem	Descrição
1	Normal		Imagem de um pulmão sem nenhuma anomalia.
2	Covid-19		O coronavírus (COVID-19) é uma doença infecciosa causada pelo vírus SARS-CoV-2.
3	Pneumonia		É uma infecção que se instala nos pulmões, órgãos duplos localizados um de cada lado da caixa torácica.
4	Edema pulmonar		É uma condição caracterizada pelo acúmulo de líquido no interior dos pulmões.

¹¹ <https://www.kaggle.com/datasets/jbeltranleon/xrays-chest-299px>

5	Fribose pulmonar		Surge como sequela de um grupo de diferentes doenças pulmonares caracterizadas pela destruição progressiva e irreversível da arquitetura do pulmão
6	Atelectasia		A atelectasia é um quadro clínico no qual a totalidade ou parte de um pulmão fica sem ar e entra em colapso.
7	Enfisema pulmonar		O enfisema pulmonar é uma doença degenerativa, que geralmente se desenvolve depois de muitos anos de agressão aos tecidos do pulmão devido ao cigarro e outras toxinas no ar.
8	Cardiomegalia		Pode ocorrer restrição extrapulmonar devido a existência de uma competição pelo espaço intratorácico entre os pulmões e um coração com tamanho aumentado
9	Consolidação pulmonar		É definida como a substituição do ar dos alvéolos por líquido, células ou a combinação destes dois.
10	Efusão pulmonar		Quando ocorre uma acumulação de líquido entre o pulmão e a parede torácica.
11	Infiltrado pulmonar		Os alvéolos e os bronquíolos terminais ficam inflamados (“inchados”) e preenchidos com fluido, impedindo o correto funcionamento dos pulmões.
12	Massa pulmonar		Um nódulo (ou massa) pulmonar é uma pequena área anormal. Quando a lesão tem mais de três cm é chamada de massa; na presença de massa a chance de câncer é alta.
13	Nódulo pulmonar		Nódulo pulmonar é um termo amplo que designa alterações radiológicas detectadas em exames de imagem do pulmão. Ele é uma lesão sólida ou em vidro fosco, normalmente arredondada e com menos de 3 centímetros de diâmetro.

14	Espessamento pleural		É uma doença da pleura visceral e pode aparecer como seqüela de uma reação inflamatória relacionada, por exemplo, com tuberculose, cirurgia torácica, hemotórax decorrente de traumas ou reação a drogas.
15	Pneumotorax		É a presença de ar entre as duas camadas da pleura (membrana fina, transparente, de duas camadas que reveste os pulmões e o interior da parede torácica), resultando em colapso parcial ou total do pulmão.

6.2.2.1 Precisão por classes

Classes	K	Riemaninano	Euclidiano
3 Classes	7	74,29 %	64,29 %
4 Classes	9	76,79 %	62,14 %
5 Classes	8	64,57 %	52,00 %
6 Classes	7	55,24 %	42,86 %
7 Classes	9	51,22 %	37,76 %
8 Classes	9	45,36 %	31,79 %
9 Classes	10	38,57 %	28,10 %
10 Classes	11	35,43 %	26,29 %
11 Classes	11	32,60 %	24,29 %
12 Classes	7	29,40 %	21,79 %
13 Classes	4	42,32 %	17,03 %
14 Classes	14	24,80 %	19,18 %
15 Classes	9	23,52 %	17,62 %

Tabela 6.4: Tabela de variação de K por classes

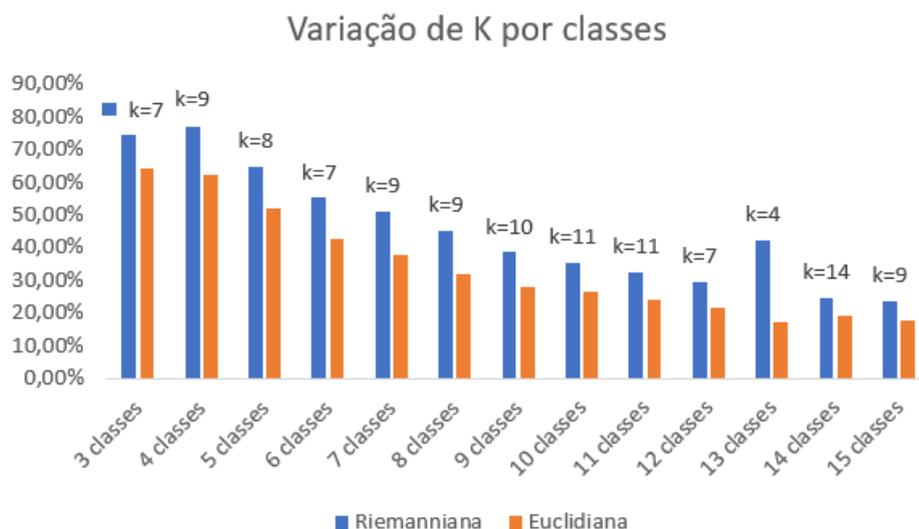


Figura 6.5: Gráfico de variação de K por classes

Como explicado anteriormente a tabela a seguir 6.5, demonstra as doenças utilizadas na geração dos testes para multiplas classes e varios valores de K.

Tabela 6.5: Classes de doenças utilizadas nos testes

Doenças	Classes												
	15	14	13	12	11	10	09	08	07	06	05	04	03
Normal													
Covid 19													
Pneumonia													
Atelectasia													
Massa													
Consolidação pulmonar													
Fibrosi													
Infiltração													
Efisema pulmonar													
Pneumotorax													
Edema													
Cardiomegalia													
Efusão pulmonar													
Espessamento pleural													
Nódulo													

Na tabela 6.6, analisamos o comportamento dos melhores valores de K (grafico 6.5), para multiplas classes.

Tabela 6.6: Resultados Comparativos 15 classes de doenças respiratórias

Classes	K = 4			K = 7			K = 8			K = 9			K = 10			K = 11		
	KNN	Rie	Euc															
3	73,810 %	62,857 %	64,286 %	74,286 %	64,286 %	64,286 %	73,333 %	62,381 %	62,381 %	73,810 %	63,810 %	63,810 %	69,524 %	64,286 %	64,286 %	70,952 %	63,810 %	63,810 %
4	76,071 %	61,429 %	60,714 %	76,429 %	60,714 %	60,714 %	75,357 %	60,714 %	60,714 %	76,786 %	62,143 %	62,143 %	73,571 %	63,929 %	63,929 %	74,286 %	61,071 %	61,071 %
5	62,286 %	50,286 %	50,857 %	64,571 %	50,857 %	52,000 %	64,571 %	52,000 %	52,000 %	64,571 %	51,143 %	51,143 %	61,714 %	49,714 %	49,714 %	62,857 %	52,000 %	52,000 %
6	53,810 %	40,000 %	42,857 %	55,238 %	42,857 %	43,333 %	54,286 %	43,333 %	43,333 %	55,238 %	42,619 %	42,619 %	52,381 %	45,714 %	45,714 %	55,000 %	42,857 %	42,857 %
7	49,592 %	34,490 %	37,143 %	50,816 %	37,143 %	36,735 %	48,980 %	36,735 %	36,735 %	51,224 %	37,755 %	37,755 %	47,959 %	40,000 %	40,000 %	49,388 %	38,980 %	38,980 %
8	42,500 %	27,857 %	31,607 %	44,107 %	31,607 %	30,893 %	42,679 %	30,893 %	30,893 %	45,357 %	31,786 %	31,786 %	43,036 %	33,036 %	33,036 %	42,321 %	33,214 %	33,214 %
9	24,762 %	36,825 %	38,413 %	27,460 %	38,413 %	37,619 %	27,143 %	37,619 %	37,619 %	28,730 %	38,095 %	38,095 %	28,095 %	38,571 %	38,571 %	28,095 %	38,571 %	38,571 %
10	33,143 %	22,000 %	25,429 %	34,286 %	25,429 %	24,857 %	33,143 %	24,857 %	24,857 %	34,000 %	25,857 %	25,857 %	33,143 %	26,000 %	26,000 %	35,429 %	26,286 %	26,286 %
11	31,948 %	20,260 %	23,377 %	31,688 %	23,377 %	23,506 %	30,779 %	23,506 %	23,506 %	31,948 %	24,675 %	24,675 %	32,338 %	24,675 %	24,675 %	32,597 %	24,286 %	24,286 %
12	29,048 %	18,690 %	21,786 %	29,405 %	21,786 %	21,786 %	27,738 %	21,786 %	21,786 %	27,738 %	22,024 %	22,024 %	28,333 %	22,024 %	22,024 %	29,405 %	21,548 %	21,548 %
13	42,321 %	17,033 %	19,670 %	27,253 %	19,670 %	20,000 %	26,484 %	20,000 %	20,000 %	26,154 %	20,110 %	20,110 %	25,824 %	20,549 %	20,549 %	26,154 %	19,890 %	19,890 %
14	24,184 %	16,429 %	17,959 %	24,082 %	17,959 %	18,673 %	24,796 %	18,673 %	18,673 %	24,082 %	18,776 %	18,776 %	24,286 %	18,571 %	18,571 %	24,796 %	18,878 %	18,878 %
15	23,238 %	15,142 %	17,142 %	22,476 %	17,142 %	17,523 %	22,761 %	17,523 %	17,523 %	23,523 %	17,619 %	17,619 %	22,190 %	17,904 %	17,904 %	22,476 %	17,428 %	17,428 %

6.2.2.2 Classes agrupadas em conjuntos de 3 classes

É importante destacar que nesse conjunto de teste poderíamos ter utilizados outros subconjuntos dentre os 455 possíveis, a escolha foi feita de forma aleatória e a métrica riemmaniana manteve os melhores resultados quantitativos.

Tabela 6.7: Resultado de teste de agrupamento de 3 classes.

Teste	K	Riem	Eucl	Normal	Covid 19	Pneumonia	Atelectasia	Massa	Consolidação	Fibrosi	Infiltração	Efisema	Pneumotorax	Edema	Cardiomegalia	Efusão	Espessamento	Nódulo
T1	5	68,5 %	51,4 %															
T2	11	92,8 %	61,4 %															
T3	4	66,6 %	51,9 %															
T4	27	37,1 %	27,6 %															
T5	13	50,0%	38,5 %															
T6	11	43,8 %	40,0 %															
T7	17	66,2 %	48,5 %															
T8	5	68,0 %	60,4 %															
T9	7	74,2 %	61,4 %															
T10	23	44,2 %	20,4 %															

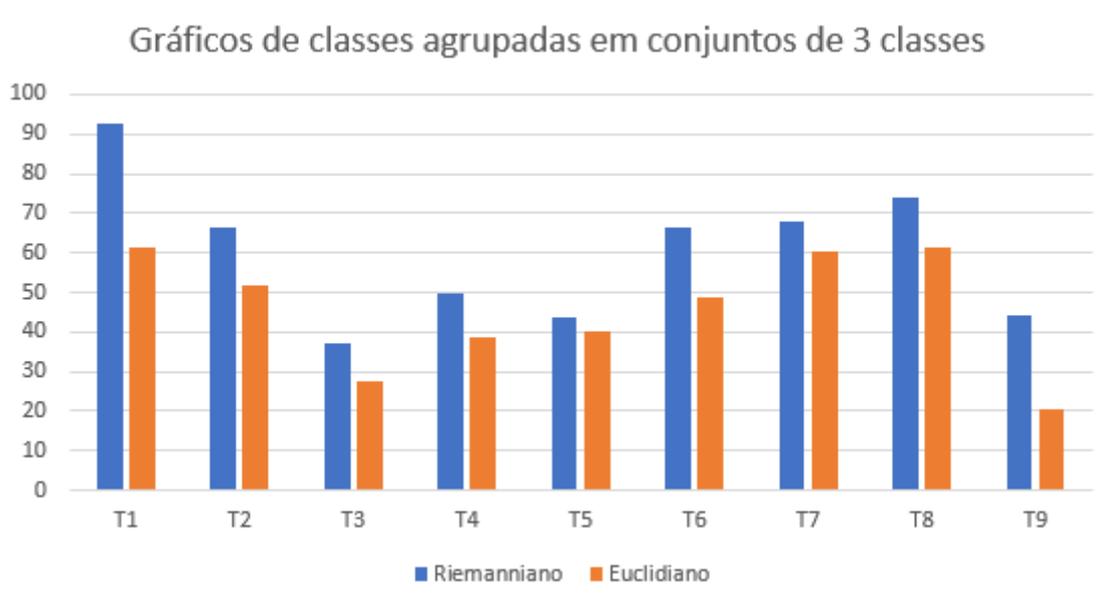


Figura 6.6: Gráfico de variação de K por classes

Capítulo 7 - Conclusão

7.1 Conclusões e Discussões sobre os resultados

Este estudo avaliou a eficácia de utilizar a métrica Riemanniana no algoritmo KNN comparado à métrica Euclidiana para detectar doenças. Os dados analisados evidenciaram a promissora possibilidade da utilização desta técnica com a sensibilidade satisfatória para detectar doenças, já que em todos os testes realizados a métrica se mostrou superior mesmo em situações em que a eficácia esteve abaixo de 50%.

O resultado encontrado neste trabalho afirma que a métrica Riemanniana tem muito a oferecer, já que os dados utilizados não foram tratados e possuíam baixa qualidade. O que poderia explicar que em algumas situações a eficácia foi baixa em ambas as métricas.

A nitidez das imagens, a saturação e o posicionamento do paciente podem ter influenciado nos testes e seria uma explicação razoável para o primeiro experimento, com imagens de pacientes com malária, terem um resultado superior aos testes de doenças respiratórias.

Outro resultado importante sobre o trabalho é a confirmação que aumentando o número de classes o algoritmo piora seus resultados. Uma hipótese seria que conforme a dificuldade do problema aumenta, os resultados pioram. Não foi possível concluir um valor limite para o número de classes como proposto.

Apesar de usarmos sempre as mesmas imagens para testes e treino, combinações diferentes de doenças produzem resultados diferentes: como podemos observar na tabela 6.7, no teste T_2 obtivemos 92% de eficácia e no teste T_3 obtivemos 60% alterando apenas uma doença. Uma suposição para essas situações seria que algumas doenças são biologicamente muito próximas e matematicamente o modelo poderia precisar de mais atributos.

Dentre as contribuições desse trabalho podemos destacar a representação de imagens na forma de variedades riemannianas o que permite não apenas a classificação através da distância mas também abre caminho para construções de filtros de imagens, correção de brilho, reconhecimento de padrões entre outros baseados na métrica riemanniana.

Como propostas para projetos futuros podemos sugerir testar a métrica Riemanniana em outros algoritmos de classificação pois o cálculo da similaridade ou distância é um fator crucial para os métodos. Para melhorar esse modelo sugerimos aumentar o número de atributos e, no caso de doenças respiratórias, pode-se recortar o aparelho respiratório das imagens reduzindo ruídos.

Referências bibliográficas

- 1 THIAGO, E. R. de S. Reconhecimento de voz utilizando extração de coeficientes mel-cepstrais e redes neurais artificiais. 2017.
- 2 TUZEL, O.; PORIKLI, F.; MEER, P. Pedestrian detection via classification on riemannian manifolds. *IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence*, IEEE, v. 30, n. 10, p. 1713–1727, 2008.
- 3 LAN, X.; MA, A. J.; YUEN, P. C. Multi-cue visual tracking using robust feature-level fusion based on joint sparse representation. In: *Proceedings of the IEEE conference on computer vision and pattern recognition*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 1194–1201.
- 4 LAN, X.; ZHANG, S.; YUEN, P. C. Robust joint discriminative feature learning for visual tracking. In: *IJCAI*. [S.l.: s.n.], 2016. p. 3403–3410.
- 5 CHAN, H.-P. et al. Improvement in radiologists' detection of clustered microcalcifications on mammograms. *Arbor*, v. 1001, p. 48109–0326, 1990.
- 6 DOI, K. et al. Computer-aided diagnosis: present and future. a new horizon on medical physics and biomedical engineering. *Elsevier Science Publishers BV*, p. 59–66, 1991.
- 7 ELLIS, I. et al. Early experience in breast cancer screening: emphasis on development of protocols for triple assessment. *The Breast*, Elsevier, v. 2, n. 3, p. 148–153, 1993.
- 8 PETRICK, N. et al. An adaptive density-weighted contrast enhancement filter for mammographic breast mass detection. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, IEEE, v. 15, n. 1, p. 59–67, 1996.
- 9 GIGER, M.; MACMAHON, H. Image processing and computer-aided diagnosis. *Radiologic Clinics of North America*, v. 34, n. 3, p. 565–596, 1996.
- 10 LAN, X. et al. Joint sparse representation and robust feature-level fusion for multi-cue visual tracking. *IEEE Transactions on Image Processing*, IEEE, v. 24, n. 12, p. 5826–5841, 2015.
- 11 LAN, X. et al. Learning common and feature-specific patterns: a novel multiple-sparse-representation-based tracker. *IEEE Transactions on Image Processing*, IEEE, v. 27, n. 4, p. 2022–2037, 2017.

- 12 DALAL, N.; TRIGGS, B. Histograms of oriented gradients for human detection. In: IEEE. *2005 IEEE computer society conference on computer vision and pattern recognition (CVPR'05)*. [S.l.], 2005. v. 1, p. 886–893.
- 13 LOWE, D. G. Distinctive image features from scale-invariant keypoints. *International journal of computer vision*, Springer, v. 60, n. 2, p. 91–110, 2004.
- 14 TUZEL, O.; PORIKLI, F.; MEER, P. Region covariance: A fast descriptor for detection and classification. In: SPRINGER. *European conference on computer vision*. [S.l.], 2006. p. 589–600.
- 15 WANG, R. et al. Covariance discriminative learning: A natural and efficient approach to image set classification. In: IEEE. *2012 IEEE conference on computer vision and pattern recognition*. [S.l.], 2012. p. 2496–2503.
- 16 GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. C. *Processamento digital de imagens*. [S.l.]: Pearson Educação, 2009.
- 17 PEREIRA, A. S.; RAFAEL, J. A. *Processamento de imagens em medicina. Acta Medica Portuguesa*, 1992.
- 18 SILVA, A. M. M. da; PATROCÍNIO, A. C.; SCHIABEL, H. *Processamento e análise de imagens médicas. REVISTA BRASILEIRA DE FÍSICA MÉDICA (ONLINE)*, 2019.
- 19 LEÃO, P. P. de S. et al. Detecção de covid-19 em imagens de raio-x utilizando redes convolucionais. *Journal of Health Informatics*, v. 12, 2021.
- 20 RICHARDS, J. A.; RICHARDS, J. *Remote sensing digital image analysis*. [S.l.]: Springer, 1999. v. 3.
- 21 ADENIYI, P. O. Digital analysis of multitemporal landsat data for land-use/land-cover classification in a semi-arid area of nigeria. *Photogrammetric engineering and remote sensing*, v. 51, n. 11, p. 1761–1774, 1985.
- 22 MONARD, M. C.; BARANAUSKAS, J. A. Indução de regras e árvores de decisão. *Sistemas Inteligentes-Fundamentos e Aplicações*, sn, v. 1, p. 115–139, 2003.
- 23 BREIMAN, L. Random forests. *Machine learning*, Springer, v. 45, n. 1, p. 5–32, 2001.
- 24 GOLDSCHMIDT, R.; PASSOS, E. *Data mining*. [S.l.]: Gulf Professional Publishing, 2005.
- 25 HAYKIN, S. *Redes neurais: princípios e prática*. [S.l.]: Bookman Editora, 2007.
- 26 CORTES, C.; VAPNIK, V. Support-vector networks. *Machine learning*, Springer, v. 20, n. 3, p. 273–297, 1995.
- 27 RAUBER, T. W. *Redes neurais artificiais. Universidade Federal do Espírito Santo*, v. 29, 2005.
- 28 SILVA, L. Uma aplicação de árvores de decisão, redes neurais e knn para a identificação de modelos arma não sazonais e sazonais. *Rio de Janeiro. 145p. Tese de Doutorado-Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro*, 2005.

- 29 GREGÓRIO, R.; OLIVEIRA, P. R. Método proximal com fatorações de schur para determinação da média riemanniana de matrizes simétricas definidas positivas. 2012.
- 30 SAKAI, T. Riemannian geometry, translations of mathematical monographs 149, american mathematical society, providence, ri, 1996. *MR1390760 (97f: 53001)*.
- 31 CARMO, M. P. d. *Geometria Riemanniana*. [S.l.], 1988.
- 32 LEON, S. J. *Álgebra Linear com Aplicações*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000.
- 33 MOAKHER, M. A differential geometric approach to the geometric mean of symmetric positive-definite matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, SIAM, v. 26, n. 3, p. 735–747, 2005.
- 34 GREGÓRIO, R.; OLIVEIRA, P. R. *Título Algoritmo de Ponto no Cone das Matrizes Simétricas Semidefinidas Positivas e Um Método de Escalarização Proximal Log Quadrático para Programação Multiobjetivo*. Tese (Doutorado) — COPPE/UFRJ, 2008.
- 35 ROTHUS, O. S. Domains of positivity. In: SPRINGER. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. [S.l.], 1960. v. 24, n. 1, p. 189–235.
- 36 NESTEROV, Y. E.; TODD, M. J. et al. On the riemannian geometry defined by self-concordant barriers and interior-point methods. *Foundations of Computational Mathematics*, Springer, v. 2, n. 4, p. 333–361, 2002.
- 37 HARANDI, M. T. et al. Sparse coding and dictionary learning for symmetric positive definite matrices: A kernel approach. In: SPRINGER. *European Conference on Computer Vision*. [S.l.], 2012. p. 216–229.
- 38 LI, P. et al. Log-euclidean kernels for sparse representation and dictionary learning. In: *Proceedings of the IEEE international conference on computer vision*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 1601–1608.
- 39 CASEIRO, R. et al. Semi-intrinsic mean shift on riemannian manifolds. In: SPRINGER. *European conference on computer vision*. [S.l.], 2012. p. 342–355.
- 40 VEMULAPALLI, R.; PILLAI, J. K.; CHELLAPPA, R. Kernel learning for extrinsic classification of manifold features. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. [S.l.: s.n.], 2013. p. 1782–1789.
- 41 HUANG, Z. et al. Learning euclidean-to-riemannian metric for point-to-set classification. In: *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 1677–1684.
- 42 HUANG, Z. et al. Log-euclidean metric learning on symmetric positive definite manifold with application to image set classification. In: PMLR. *International conference on machine learning*. [S.l.], 2015. p. 720–729.
- 43 DU, Y. et al. Classification of tumor epithelium and stroma by exploiting image features learned by deep convolutional neural networks. *Annals of biomedical engineering*, Springer, v. 46, n. 12, p. 1988–1999, 2018.

- 44 HEIDARI, M. et al. Prediction of breast cancer risk using a machine learning approach embedded with a locality preserving projection algorithm. *Physics in Medicine & Biology*, IOP Publishing, v. 63, n. 3, p. 035020, 2018.
- 45 HEIDARI, M. et al. Development and assessment of a new global mammographic image feature analysis scheme to predict likelihood of malignant cases. *IEEE transactions on medical imaging*, IEEE, v. 39, n. 4, p. 1235–1244, 2019.
- 46 OPBROEK, A. V. et al. Transfer learning improves supervised image segmentation across imaging protocols. *IEEE transactions on medical imaging*, IEEE, v. 34, n. 5, p. 1018–1030, 2014.
- 47 ZARGARI, A. et al. Prediction of chemotherapy response in ovarian cancer patients using a new clustered quantitative image marker. *Physics in Medicine & Biology*, IOP Publishing, v. 63, n. 15, p. 155020, 2018.
- 48 KHUZANI, A. Z.; HEIDARI, M.; SHARIATI, S. A. Covid-classifier: An automated machine learning model to assist in the diagnosis of covid-19 infection in chest x-ray images. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group, v. 11, n. 1, p. 1–6, 2021.
- 49 OH, Y.; PARK, S.; YE, J. C. Deep learning covid-19 features on cxr using limited training data sets. *IEEE transactions on medical imaging*, IEEE, v. 39, n. 8, p. 2688–2700, 2020.
- 50 ROY, S. et al. Deep learning for classification and localization of covid-19 markers in point-of-care lung ultrasound. *IEEE transactions on medical imaging*, IEEE, v. 39, n. 8, p. 2676–2687, 2020.
- 51 WANG, S. et al. A fully automatic deep learning system for covid-19 diagnostic and prognostic analysis. *European Respiratory Journal*, Eur Respiratory Soc, v. 56, n. 2, 2020.
- 52 ZHANG, K. et al. Clinically applicable ai system for accurate diagnosis, quantitative measurements, and prognosis of covid-19 pneumonia using computed tomography. *Cell*, Elsevier, v. 181, n. 6, p. 1423–1433, 2020.
- 53 SONKA, M.; HLAVAC, V.; BOYLE, R. *Image processing, analysis, and machine vision*. [S.l.]: Cengage Learning, 2014.