UFRRJ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO / INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, CONTEXTOS CONTEMPORÂNEOS E DEMANDAS POPULARES

TESE

MEDIAÇÃO SEMIÓTICA E APRENDIZAGEM DE QUADRILÁTEROS EM UMA AMBIÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

ALEXANDER PIRES DA SILVA

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO / INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, CONTEXTOS CONTEMPORÂNEOS E DEMANDAS POPULARES

ALEXANDER PIRES DA SILVA

MEDIAÇÃO SEMIÓTICA E APRENDIZAGEM DE QUADRILÁTEROS EM UMA AMBIÊNCIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Sob a orientação do Professor Doutor

Marcelo Almeida Bairral

Tese submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Doutor em Educação**, no Programa de Pós-Graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares. Área de Concentração em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares.

Seropédica/Nova Iguaçu, RJ

Fevereiro, 2024

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S586m Silva, Alexander Pires da , 1979-
Mediação semiótica e aprendizagem de quadriláteros em uma ambiência no ensino fundamental / Alexander Pires da Silva. - Seropédica; Nova Iguaçu, 2024.
192 f.: il.

Orientador: Marcelo Almeida Bairral.
Tese(Doutorado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares, 2024.

1. GeoGebra. 2. Tablet. 3. Toques em tela. 4. Polígonos. 5. Cognição corporificada. I. Bairral, Marcelo Almeida , 1969-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Programa de Pós Graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares III. Título.

"O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001"

"This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001"

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO,
CONTEXTOSCONTEMPORÂNEOS E DEMANDAS POPULARES

TERMO Nº 161 / 2024 - PPGEDUC (12.28.01.00.00.00.00.20)

Nº do Protocolo: 23083.013991/2024-07

Seropédica-RJ, 15 de março de 2024.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO/INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, CONTEXTOS CONTEMPORÂNEOS E DEMANDAS POPULARES

ALEXANDER PIRES DA SILVA

Tese submetida como requisito parcial para a obtenção do grau de **Doutor**, ao Programa de Pós-Graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares. Área de Concentração em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares.

TESE APROVADA EM 28/02/2024

Membros da banca:

MARCELO ALMEIDA BAIRRAL. Dr. UFRRJ (Orientador/Presidente da Banca).

DORA SORAIA KINDEL. Dra. UFRRJ (Examinadora Externa ao Programa).

GISELA MARIA DA FONSECA PINTO. Dra. UFRRJ (Examinadora Externa ao Programa).

PEDRO PALHARES. Dr. UMinho (Examinador Externo à Instituição).

SANDRA APARECIDA FRAGA DA SILVA. Dra. IFES (Examinadora Externa à Instituição).

(Assinado digitalmente em 20/03/2024 11:13)
DORA SORAIA KINDEL
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptES (12.28.01.00.00.86)
Matrícula: 1420931

(Assinado digitalmente em 15/03/2024 09:20)
GISELA MARIA DA FONSECA PINTO
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
PPGEDUCIMAT (12.28.01.00.00.00.00.18)
Matrícula: 1604226

(Assinado digitalmente em 17/03/2024 21:27)
MARCELO ALMEIDA BAIRRAL
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptTPE (12.28.01.00.00.00.00.24)
Matrícula: 1098802

(Assinado digitalmente em 15/03/2024 15:44)
SANDRA APARECIDA FRAGA DA SILVA
ASSINANTE EXTERNO
CPF: 081.312.707-69

(Assinado digitalmente em 17/03/2024 14:39)
PEDRO MANUEL BAPTISTA PALHARES
ASSINANTE EXTERNO
Passaporte: CC083672

Visualize o documento original em **https://sipac.ufrrj.br/public/documentos/index.jsp** informando seu número: **161**, ano: **2024**, tipo: **TERMO**, data de emissão: **15/03/2024** e o código de verificação: **803e370afe**

DEDICATÓRIA

A Sebastião Cláudio da Silva, meu pai, por ter acreditado que seu filho iria chegar longe com seus pensamentos e positividade.

A mim mesmo, por ser persistente e dedicado às coisas que me proponho a fazer.

Aos educadores e educadoras matemáticos deste país, que, assim como eu, acreditam e lutam pelo ensino de uma matemática mais democrática.

AGRADECIMENTOS

A gratidão é um sentimento profundo de apreço e de reconhecimento por algo que recebemos, seja material, emocional ou espiritual. É uma emoção positiva que surge quando percebemos e valorizamos os benefícios ou atos de bondade que recebemos de outras pessoas, do mundo ao nosso redor ou até mesmo de nós mesmos. E foi por experimentar esse sentimento durante toda essa caminhada, que agradeço:

À UFRRJ, por proporcionar minha formação, desde a graduação até o doutorado, contribuindo para meu desenvolvimento profissional e pessoal, e, ainda, aos colegas e amigos que conheci ao longo dessa jornada.

Ao GEPETICEM, por possibilitar leituras, discussões e escritas relacionadas a uma educação pública de qualidade e democrática.

Ao meu orientador, professor Marcelo Almeida Bairral, pela competência profissional na condução dos trabalhos e pela empatia que transmite. Seu comprometimento com a Educação Matemática é uma fonte de inspiração para todos.

Aos membros da banca, professores(as) Gisela Pinto, Soraia Kindel, Pedro Palhares e Sandra Fraga, pela leitura atenta e pelos apontamentos que contribuíram para o desenvolvimento da pesquisa.

Ao Colégio Manoel de Araújo Dantas, em especial à diretora Alessandra de Macedo Corrêa e à turma 603 do ano de 2022, por proporcionarem um ambiente propício para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos professores do PPGEDUC, Edméa Santos, Rodrigo Lamosa e Beto, pela oportunidade de aprender e compartilhar experiências e teorias.

Aos companheiros de pesquisa Alexandre Assis, Bruno Madureira, Marcos Paulo Henrique e Rute, pela disposição em contribuir para a produção de textos e de novos olhares educacionais, além das muitas dúvidas compartilhadas.

E um agradecimento especial ao meu parceiro Cristiano Rocha, por seu apoio constante ao longo das minhas formações, desde a especialização na UFF, passando pelo mestrado na UFRRJ, e, agora, o doutorado, também na UFRRJ.

BIOGRAFIA

A itinerância a partir da graduação

A minha trajetória profissional como professor de matemática é marcada por uma série de experiências enriquecedoras, que não apenas moldam a minha prática pedagógica, mas também contribuem para o meu desenvolvimento pessoal e acadêmico. Essa jornada tem sido um verdadeiro testemunho de dedicação, compromisso e busca constante por aprimoramento.

Desde os primeiros passos na graduação em Matemática na UFRRJ, demonstrei interesse pelo ensino ao me envolver como monitor em um pré-vestibular comunitário. Esse foi o ponto de partida para uma série de oportunidades que se apresentaram ao longo de minha formação. Ao receber convites para atuar como professor de Matemática em outros pré-vestibulares, não apenas consolidei meus conhecimentos teóricos, mas também mergulhei na ambiência de sala de aula, colocando em prática e refinando minhas habilidades pedagógicas.

A transição para o Ensino Fundamental em uma escola privada trouxe novos desafios e responsabilidades, incluindo a elaboração de planejamentos e projetos pedagógicos. Essa experiência foi enriquecedora, permitindo aprofundar as práticas pedagógicas e ampliar a visão sobre o processo de ensino e aprendizagem.

O estágio curricular obrigatório em uma escola pública de Ensino Médio foi um marco crucial em minha jornada, proporcionando uma compreensão mais profunda da realidade educacional e da prática docente em um novo contexto. Essa experiência não apenas reafirmou minha vocação, mas também me impulsionou a buscar novos horizontes, incluindo o contato com a pesquisa científica.

A participação em eventos acadêmicos, como o Encontro Nacional de Educação Matemática, desempenhou um papel fundamental no despertar da formação continuada, inspirando-me a direcionar minha atenção para a pesquisa educacional. Essa busca pelo conhecimento culminou com a realização dos cursos de especialização em Docência do Ensino Superior e em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática, além da entrada em um programa de mestrado em Matemática e na finalização desta tese.

Ao longo dessa jornada, não apenas acumulei experiências profissionais, mas também desenvolvi uma consciência crítica sobre os desafios enfrentados no campo da educação, especialmente durante minha atuação e vivência no chão da escola. Minha inquietação em relação à qualidade do ensino e ao papel das tecnologias educacionais impulsionou-me a buscar respostas satisfatórias e a me engajar em projetos voltados para a melhoria de práticas educativas.

Acredito que os cursos de aperfeiçoamento desempenham um papel crucial na trajetória de um educador, fornecendo ferramentas e conhecimentos necessários para aprimorar sua prática pedagógica e manter-se atualizado em um cenário educacional em constante evolução. Em meu caso, a participação em diversos cursos de aperfeiçoamento foi um elemento-chave para o meu desenvolvimento profissional.

O primeiro curso que realizei foi o "Curso de Atualização em Matemática, Trigonometria e Números Complexos", oferecido pela CECIERJ. Concluído em 2006, esse curso representou o primeiro passo em direção ao aprimoramento das habilidades em Matemática, fornecendo uma base sólida para minha atuação como professor nessa disciplina.

Posteriormente, decidi dedicar-me ao ensino superior, o que me levou à matrícula no "Curso de Especialização em Docência do Ensino Superior", oferecido pela Universidade Candido Mendes (UCAM). Concluído em 2009, esse curso ampliou meus horizontes, fornecendo conhecimentos em áreas como Didática do Ensino Superior, Direito e Legislação Educacional, e Metodologia da Pesquisa, qualificando-me para atuar no ambiente acadêmico.

A experiência com a educação à distância também foi explorada por mim ao participar do "Curso Livre de Formação de Tutores em Educação à Distância", oferecido pela CGTPG/LANTE. Essa oportunidade não apenas expandiu minhas habilidades como tutor à distância, mas também me familiarizou com as tecnologias educacionais emergentes, o que mitigou os desafios do ensino remoto vivenciados na pandemia da COVID-19.

No entanto, foi o curso de "Especialização em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática" (NTEM), oferecido pela Universidade Federal Fluminense (UFF), que teve um impacto significativo em minha carreira. Concluído em 2013, esse curso proporcionou uma visão aprofundada das tecnologias educacionais disponíveis e sua aplicação no ensino da Matemática. Além disso, o NTEM despertou um interesse renovado pela pesquisa em Educação Matemática, com um olhar para futuros desafios envolvendo práticas educacionais com tecnologias digitais.

Esses cursos de aperfeiçoamento não apenas enriqueceram minhas práticas, mas também refletiram meu compromisso com uma educação de qualidade e a consciência de manter atualizado um ambiente educacional dinâmico. Através do aprendizado contínuo e da busca incessante pelo aprimoramento profissional, busco oferecer o melhor para meus alunos e alunas, além de inspirar outros educadores a seguir o mesmo caminho de crescimento e de desenvolvimento contínuos.

As inquietações e interesses foram uma força motriz por trás da minha busca constante por aprimoramento e dedicação ao campo da Educação Matemática. Desde os primeiros passos em minha carreira, percebi que minha prática educacional alcançava apenas um número ínfimo de estudantes, uma prática reproduzida a partir de professores e professoras que marcaram minha formação acadêmica. Essa inquietação foi alimentada pela participação em eventos acadêmicos, como o Encontro Nacional de Educação Matemática, onde tive a oportunidade de me engajar em discussões sobre os desafios enfrentados no ensino e na aprendizagem de Matemática e de explorar novas perspectivas e abordagens pedagógicas.

Meu interesse em explorar novas metodologias e tecnologias educacionais foi marcado pela busca por cursos de aperfeiçoamento, especialização, mestrado e doutorado. Esse interesse não apenas refletiu em enfrentar novos desafios em sala de aula, mas também na compreensão da importância de acompanhar os avanços tecnológicos e sua aplicação no contexto educacional. Além disso, tenho interesse em pesquisas em Educação Matemática que utilizam práticas com dispositivos móveis com toques em tela, seja no contexto de sala de aula ou na qualificação de docentes. Com isso, busco oportunidades para expandir meus horizontes acadêmicos e contribuir para o avanço do conhecimento na área.

Ao longo da minha jornada, enfrentei desafios, mas também encontrei inspiração e motivação em minhas inquietações e interesses. Estou determinado a buscar novos conhecimentos e minha paixão pela educação é um elemento-chave em minha trajetória profissional, motivando-me a buscar constantemente inovações e melhorias que possam contribuir para a Educação Matemática. Que essa itinerância inspire outros(as) docentes a abraçarem suas próprias inquietações e interesses, e a se tornarem agentes de mudança na educação.

Hoje, ao concluir este trabalho, posso afirmar que minhas lentes específicas em matemática, tecnologias digitais e práticas pedagógicas se ampliaram para incluir questões relacionadas ao capital, aos organismos educacionais e à hegemonia cultural. O mais importante de tudo isso é que esses conhecimentos estão sendo colocados em prática junto aos pares que lecionam em sala de aula.

RESUMO

SILVA, Alexander Pires da. **Mediação Semiótica e Aprendizagem de Quadriláteros em uma Ambiência no Ensino Fundamental**. 2024. 192p. Tese (Doutorado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares). Instituto de Educação/Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica/Nova Iguaçu, RJ, 2024.

Essa pesquisa busca identificar - na perspectiva da cognição corporificada - contribuições e limitações de uma ambiência com *tablets*+GeoGebra no aprendizado de estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental sobre quadriláteros. Trata-se de uma intervenção pedagógica desenvolvida em uma escola pública onde o autor leciona. Foram elaboradas e implementadas tarefas relacionadas a quadriláteros no GeoGebra em *tablets*. Os dados foram produzidos mediante diário de campo do pesquisador, registros dos alunos para as atividades propostas, gravações em áudio e vídeo e telagravações. A análise semântica está focada nos aspectos que emergem na resolução das tarefas e dos signos envolvidos nesse processo. Verificam-se diversas funções dos toques: as que contribuem nas medições e as que revelam e classificam são exemplos de algumas delas. Observa-se também que os olhares, as construções e as interações em tela, centrados na malha e nas medições, contribuíram para o entendimento das definições de quadriláteros, retângulos e quadrados, especialmente por meio de seus ângulos internos. O uso da malha quadriculada surgiu como um artefato instigante na emergência de conceitos, propriedades e medições. A tese defendida é a de que o trabalho com quadriláteros nesse tipo de ambiência também deve contemplar explorações e medições de ângulos e de análise de diagonais, e não apenas observação nos lados.

Palavras-chave: GeoGebra. *Tablet*. Toques em tela. Polígonos. Cognição corporificada.

ABSTRACT

SILVA, Alexander Pires da. **Semiotic Mediation and Learning Quadrilaterals in an Elementary School Environment**. 2024. 192p. Tese (Doutorado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares). Instituto de Educação/Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica/Nova Iguaçu, RJ, 2024.

This research seeks to identify - from the perspective of embodied cognition - contributions and limitations of an environment with *tablets*+GeoGebra in the learning process of sixth-grade students regarding quadrilaterals in Elementary School. It involves a pedagogical intervention developed in a public school where the author teaches. Tasks related to quadrilaterals in GeoGebra on *tablets* were elaborated and implemented. Data were collected through the researcher's field diary, student records for proposed activities, audio and video recordings, and screen recordings. Semantic analysis focuses on the aspects emerging in task resolution and the signs involved in this process. Various functions of touches are identified: those that contribute to measurements and those that reveal and classify are examples of some of them. It is also observed that gazes, constructions, and interactions on the screen, focused on the grid and measurements, contributed to the understanding of the definitions of quadrilaterals, rectangles, and squares, especially through their internal angles. The use of the grid emerged as an intriguing artifact in the emergence of concepts, properties, and measurements. The thesis argues that working with quadrilaterals in this type of environment should also include explorations and measurements of angles and analysis of diagonals, and not just observation of sides.

Keywords: GeoGebra. *Tablet*. Touchscreen interactions. Polygons. Embodied cognition.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

AGD	Ambiente de Geometria Dinâmica
COVID - 19	*Corona Virus Disease* – 2020/2021
DMcTT	Dispositivos Móveis com Toques em Telas
GG	GeoGebra
GEPETICEM	Grupo de Estudos e Pesquisas das Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática
NTEM	Novas Tecnologias no Ensino da Matemática
BDBTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
SMECE	Secretaria Municipal de Educação, Cultura e Esporte
PPGEduc	Programa de Pós-Graduação em Educação Contextos Contemporâneos e Demandas Populares
UFF	Universidade Federal Fluminense
IGISP	Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo
TIC	Tecnologias da Informação e Comunicação
UFRRJ	Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Sumário

INTRODUÇÃO

A presente tese versa sobre o aprendizado de quadriláteros de alunos do Ensino Fundamental em atividades com o GeoGebra em *tablets*. Apesar de dezessete anos de Ensino de Matemática, somente nos últimos anos, contagiados por alguns textos e por práticas na sala de aula, percebemos a importância do ensino e da aprendizagem em Geometria. Isso porque sua forma de representação vai além das ideias matemáticas, delineando as artes, as edificações e a natureza, cuja prática, em sala de aula, atravessa a construção, a experimentação, a representação e a argumentação, possibilitando os estímulos da criatividade, bem como da imaginação.

Em leituras na Educação matemática, percebemos a Geometria como sendo fundamental para o desenvolvimento da capacidade de visualização espacial, da resolução de problemas e do desenvolvimento do pensamento lógico. Ademais, atrevemo-nos acrescentar o seu papel como instrumento para cultivar, além da criatividade e da imaginação, mencionados anteriormente, a perseverança, a curiosidade, a resiliência e a colaboração, visto que resolver problemas geométricos pode ser um desafio, porque, muitas vezes, envolve a aplicação de conceitos abstratos a situações práticas, contudo a persistência, a capacidade de trabalhar em grupo e a utilização de tecnologias podem ajudar a superar essas dificuldades.

Na representação geométrica de objetos, entendemos que alunos e alunas têm a possibilidade de aprender a analisar informações, a fazer hipóteses, a testar suas ideias e a chegar a conclusões baseadas em fatos e evidências, estabelecendo, assim, não somente relações entre diferentes conceitos, mas aplicações de regras e princípios para resolver problemas. Fato esse que promove a elevação do raciocínio lógico e dedutivo, o que inclui a pensar "fora da caixa", a considerar múltiplas soluções e a explorar novas ideias.

Pesquisar práticas educativas que se utilizam das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) é recorrente em nossa formação e, no biênio 2014-2015, período de especialização, despontou a curiosidade em pesquisar aplicativos que se utilizam de dispositivos móveis com toque em tela (DMcTT), em especial *smartphones*. A escolha desse dispositivo adveio dos fatos de que um número considerável de estudantes o manuseava durante as aulas, porém, sem indicativos pedagógicos, e a verificação das dificuldades encontradas pelos alunos e pelas alunas, no que concerne a conceitos e formas algébricas e geométricas das funções polinomiais.

Após utilizarmos o *Math Lab*[1] em *smartphones*, em que foi possível observar, geometricamente, a família das funções, os indivíduos envolvidos começaram a fazer relações pertinentes a conceitos do conteúdo, denotando ser fundamental, para esse caso, a manipulação geométrica da função. A contar dessa situação, as pesquisas continuaram com os DMcTT, atualmente, com uso de Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) em *tablet* para aprendizagem de quadriláteros.

A aprendizagem de quadriláteros é fundamental nos anos finais do Ensino Fundamental, pois essas figuras geométricas básicas têm aplicações em diversos contextos matemáticos. Em geometria plana, por exemplo, os quadriláteros permitem a conceituação de elementos como lados, ângulos e vértices. Na trigonometria, são úteis para demonstrar teoremas como o de Pitágoras, o de Ceva e o de Varignon, além das Leis dos Senos e Cossenos.

Na geometria analítica, os quadriláteros podem ser explorados através da localização de quatro coordenadas não lineares ou pela representação de quatro retas cujas interseções formam quadriláteros. Já na geometria espacial, os quadriláteros são importantes para a planificação de prismas e pirâmides, auxiliando na análise das suas faces.

Além disso, o estudo dos quadriláteros, especialmente no sexto ano do Ensino Fundamental, introduz os alunos aos primeiros polígonos, juntamente com os triângulos. Eles servem como base para a compreensão de conceitos mais complexos e são essenciais para a introdução de estudos posteriores sobre triângulos e outras formas geométricas.

Estudos como os de Silva (2017), Bairral e Silva (2018), Marques (2019) e Molon et. al (2021) sinalizam que os(as) discentes, muitas vezes, enfrentam dificuldades na aprendizagem de quadriláteros alusivas a: (a) definir ou conceituar um quadrilátero qualquer; (b) (re)conhecer as suas propriedades relacionadas aos lados, aos ângulos e às diagonais; (c) identificar semelhanças e diferenças das ou entre as famílias do paralelogramo e do trapézio; (d) resolver problemas envolvendo quadriláteros, como encontrar a área e/ou o perímetro.

Diante do exposto, levantamos a seguinte questão.

“Que contribuições e limitações uma ambiência com *tablet*+GeoGebra provoca no desenvolvimento conceitual de quadriláteros nos estudantes do sexto ano do Ensino

1 Um tipo de calculadora gráfica onde é possível escrever a expressão algébrica e, ao mesmo tempo, observar o seu gráfico.

Fundamental de uma escola pública?”. De certo, este trabalho procura elucidar os seguintes questionamentos:

- Que funções os toques assumem na aprendizagem de quadriláteros?

- Que conceitos e propriedades sobre quadriláteros podem ser elucidados na ambiência com *tablet*+GeoGebra?

Baseado nessa proposta, esta tese se ampara nos seguintes objetivos:

- Descrever e analisar signos, que emergem a partir de interações alunos(as)-alunos(as), alunos(as)-professor ou alunos(as)-dispositivo, na implementação das tarefas elaboradas;

- Mapear, identificar e classificar as funções dos toques na tela;

- Indicar potencialidades e limitações do *tablet*+GeoGebra na ambiência *tablet*+GeoGebra+quadriláteros.

A presente pesquisa[2] defende o uso de AGD em DMcTT para o ensino e a aprendizagem de quadriláteros, uma vez que essas tecnologias, quando utilizadas por discentes ou docentes, possibilitam identificar dois aspectos que precisam de atenção: as interações e as manipulações em tela (Bairral, 2017).

Pensando nas problemáticas causadas pela defasagem das aprendizagens em matemática, em especial nos anos finais do Ensino Fundamental, acentuamos que a exploração de diferentes tipos de investigação[3] geométrica, em particular os quadriláteros em AGD, pode contribuir para corporificar a relação entre as situações existentes da realidade com as da matemática (Bairral, 2017). Posto isso, aspiramos que nossa averiguação contribua para a literatura em Educação Matemática, a fim de que professores, professoras e estudantes de licenciatura em matemática se sintam inspirados a (re)pensar em suas práticas pedagógicas.

Esta pesquisa é uma intervenção pedagógica realizada na própria prática e sua

---

[2] Vinculada ao projeto Construindo e analisando práticas educativos em educação matemática com dispositivos touchscreen, aprovado no comitê de ética com parecer 604/2015 (Anexo A).
3 Com base em Ponte, Brocardo e Oliveira (2020), tem a ideia de trabalhar com problemas indagativos e que, a princípio, se apresentam de modo confuso, mas tem o intuito de clarificá-los e de estudá-los em um processo organizado.

configuração alcança os pensamentos críticos de Damiani et al. (2013), no tocante a essa abordagem. De acordo com esses autores, "nas intervenções, a intenção é descrever detalhadamente os procedimentos realizados, avaliando-os e produzindo explicações plausíveis, sobre seus efeitos, fundamentadas nos dados e em teorias pertinentes" (Damiani, 2013, p.3). Em simetria com esses pensamentos, temos a convicção de que esse tipo de pesquisa é implementado de forma a contribuir para avaliar as práticas pedagógicas no desempenho de discentes e, também, de docentes que vivenciem essa experiência de investigação em suas próprias práticas.

Em relação às teorias, organizamos um esquema (Figura 1), que ilustra a estrutura preliminar da configuração teórica da tese, a partir das pesquisas sobre geometria com DMcTT.

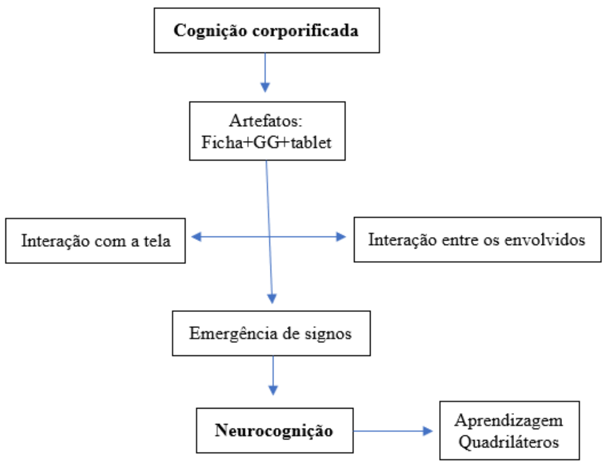


Figura 1 – Ilustração preliminar da configuração teórica da tese
Fonte: Elaborada pelo autor

Cada parte dessa estrutura será pormenorizada no capítulo destinado à fundamentação teórica, em que o leitor terá a possibilidade de entender os nossos argumentos. No entanto, retomaremos a questão desta tese de forma a explicitar a sua configuração: "Que contribuições e limitações uma ambiência com *tablet*+GeoGebra provoca no desenvolvimento conceitual de quadriláteros por estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública?". Para essa inquirição, corporificamos este estudo em sete capítulos, além da introdução.

O primeiro capítulo estabelece a revisão de literatura com foco na aprendizagem de quadriláteros com a utilização do GeoGebra em *tablet*. Com esse propósito, executamos duas metodologias distintas: uma baseada na revisão de uma revisão de literatura existente e, outra, utilizando a ferramenta tecnológica online chamada Buscador de Trabalhos Acadêmicos.

Durante essa revisão, foram identificadas algumas carências, destacando-se as seguintes: (a) Potencialidades de um AGD, no contexto da mobilidade e dos toques; e (b) Produção e elaboração de símbolos, signos e significados, no ensino e na aprendizagem de matemática, por meio de AGD+DMcTT.

O capítulo seguinte abarca os referenciais teóricos das bases epistemológicas, alicerçados na cognição corporificada, nos recursos pedagógicos e na intervenção como pesquisa. Esses fundamentos foram explorados e refinados, tornando-se ferramentas conceituais robustas para esta investigação, permitindo uma compreensão dos processos cognitivos envolvidos na aprendizagem de quadriláteros com o uso do GeoGebra em *tablets*. Além disso, eles também orientaram a metodologia adotada e as análises realizadas ao longo da tese.

No terceiro capítulo, dedicamo-nos à descrição da intervenção pedagógica como método de pesquisa, abordando os componentes essenciais desse processo. Nesse contexto, enfatizamos o método de intervenção centrado na atuação do professor, as construções geométricas empregadas na formação dos quadriláteros, a coleta de dados e outros aspectos relevantes.

Na sequência, dividimos a descrição da análise de dados em dois capítulos, explorando algumas funcionalidades do toque e da malha quadriculada do GeoGebra, ambas emergentes das soluções das tarefas propostas.

No capítulo seis, destacamos os resultados e as reflexões das análises, que abordam a emergência de signos, as mediações e a avaliação do impacto da intervenção nos instrumentos de coleta de dados e nos procedimentos utilizados na análise.

No último capítulo, apresentamos as considerações finais sobre os aspectos que consolidaram nossa questão de pesquisa. Ponderamos as funções dos toques, o desenvolvimento conceitual dos quadriláteros, a utilização de signos na aprendizagem e as possíveis vantagens e limitações do uso do GeoGebra em *tablets* na ambiência constituída. A tese defendida é a de que olhares, construções e toques em tela, centradas na malha quadriculada e nas medições, contribuem para o desenvolvimento conceitual de quadriláteros.

A seguir, desenvolvemos a revisão da literatura, com base em trabalhos selecionados, seguindo critérios que incluem a proximidade com a questão de pesquisa e o uso de AGD em DMcTT, como *tablets* e *smartphone*s, no ensino e na aprendizagem de quadriláteros.

CAPÍTULO I - REVISÃO DE LITERATURA

Durante o desenvolvimento deste capítulo, apresentaremos o processo de busca e validação de obras que abordam a utilização do GeoGebra em Dispositivos Móveis com Toque em Tela (DMcTT), especialmente *tablet* e *smartphones*, no contexto da geometria, com foco em quadriláteros. O objetivo é encontrar embasamento teórico que respalde a relevância da pesquisa para a Educação Matemática.

A revisão de literatura foi iniciada no segundo semestre de 2020 e se concentrou, inicialmente, na análise teórica de duas dissertações, indicadas pelo orientador e acolhidas pelo autor, para atenuar possíveis dificuldades no percurso desta tese. Em seguida, conduzimos uma pesquisa na revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo (IGISP). A escolha desse periódico levou em consideração a sua avaliação e o fato de ser uma fonte de divulgação científica para pesquisas e trabalhos desenvolvidos com o uso do GeoGebra. Além disso, para esse momento, buscamos trabalhos especialmente relacionados a países ou a territórios onde o português ou o espanhol eram as línguas predominantes, abrangendo, assim, as regiões do continente americano.

A partir do segundo semestre de 2021, optamos por utilizar a ferramenta BUSCAd[4], após divulgação por um dos membros do GEPETICEM. Criada por dois estudantes do Instituto Federal do Espírito Santo, o instrumento tecnológico se mostrou eficaz no processo de revisão de literatura, uma vez que houve diminuição no tempo despendido com o processo e a obtenção de resultados que se aproximaram das investigações, abrangendo diversas plataformas acadêmicas. Além disso, fizemos uso da difusão em rede.

1.1 Análise inicial de duas dissertações sobre geometria em DMcTT[5]

Nos primeiros passos desta pesquisa, concentramos as análises em práticas educativas que incorporavam o uso de DMcTT no ensino e na aprendizagem de conceitos geométricos. Nessa empreitada, propusemo-nos a compreender os caminhos tomados, o quadro teórico adotado, a abordagem metodológica e as contribuições, a partir dos estudos de duas dissertações, sugeridas pelo orientador desta tese e validadas pelo autor, visando atenuar as

---

[4] Ferramenta tecnológica online intitulada Buscador de Trabalhos Acadêmicos. Mais informações em: https://linktr.ee/buscad. Acessado em: 04/01/2024.

dificuldades no delineamento deste trabalho. Deliberadamente, procedemos com uma detalhada exposição dessas dissertações para, posteriormente, realizarmos a análise e a síntese das informações, com foco nas descobertas e não apenas nas citações bibliográficas, a fim de gerar novos resultados significativos (Randolph, 2009).

No auge da pandemia, quando o ensino remoto se tornou uma das premissas para a "retomada das aulas", discutíamos e explorávamos ferramentas tecnológicas digitais, tanto dentro quanto fora do grupo de pesquisa GEPETICEM, para atender às necessidades dos(as) discentes no contexto do ensino e da aprendizagem. Considerando esse fato e relacionando-o com a questão desta pesquisa, optamos por analisar as dissertações de mestrado de Henrique (2017) e de Duarte (2018), ambas desenvolvidas no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

Essas dissertações tiveram como objetivo a implementação e a análise de atividades realizadas em sala de aula, utilizando o aplicativo GeoGebra em *smartphones*, para a aprendizagem de conceitos geométricos relacionados ao estudo de polígonos, ângulos e retas. Para situar e coletar evidências qualitativas, a respeito dos primeiros passos tomados pelos autores, nossa análise se concentrou em descrever as ideias a respeito do título, dos objetivos e da revisão de literatura das dissertações.

Henrique (2017), no título do seu trabalho, traz a utilização do GeoGebra em *smartphone* e no computador, como contribuição para o estudo de conceitos geométricos, com alunos do Ensino Fundamental, mas sem especificar o tipo de conteúdo. Em relação aos objetivos, o geral analisa as contribuições de um Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD) para a construção de conceitos geométricos, valorizando a fala do aluno, por meio de atividades diversas, e o específico procura identificar as contribuições e os desafios do GeoGebra.

No mapeamento sobre o ensino e a aprendizagem de polígonos regulares e retas paralelas cortadas por uma transversal, por meio da utilização de um AGD, o autor analisou as revistas eletrônicas em Educação Matemática (Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, JIEEM, Educação Matemática Pesquisa, BOLEMA, Boletim GEPEM online, Vidya, Educação Matemática em Revista, Zetetiké, Perspectivas da Educação Matemática e REVEMAT), mas sem especificar o porquê dessas e não outras. Para efetuar as buscas, foram palavras-chave: retas cortadas; quadriláteros; triângulo(s); polígonos regulares; ensino de geometria; aprendizagem em geometria.

Henrique (2017) realizou sua primeira pesquisa nos dias 27 e 28 de janeiro de 2016, que contemplou artigos no período de 2011 a 2015, “com o intuito de encontrar o suporte adequado tanto para análise quanto para o desenvolvimento da pesquisa, de um modo geral” (p.4). O autor utilizou como estratégias para seleção dos artigos as pesquisas em âmbito nacional e os questionamentos: (a) qual abordagem na pesquisa? (b) qual AGD utilizado? (c) além do AGD, quais foram as outras tecnologias utilizadas? (d) qual o embasamento teórico da pesquisa? (e) quais as conclusões obtidas? Dentre os artigos contemplados para a pesquisa, o autor destacou três textos, entre os 7, que apresentavam a implementação de atividades com alunos e alunas dos anos finais do ensino fundamental. Também ressaltou as contribuições do GeoGebra para o processo de ensino e de aprendizagem.

Podemos destacar que os textos de interesse de Henrique (2017) evidenciaram as potencialidades do GeoGebra, as formas de interação docente, deram ênfase nas tarefas desenvolvidas, apresentaram as contribuições do AGD à prática docente, mas, apesar disso, não foram suficientes, pois ele percebeu que a tecnologia *touchscreen* necessitava de um olhar diferente da dinâmica do computado. Devido a isso, o autor sentiu a necessidade de realizar novas buscas. É importante enfatizar que o interesse dele nos anos finais do Ensino Fundamental (8.° e 9.°) foi contemplado parcialmente, em virtude da inexistência de pesquisas que abordassem a aprendizagem de Geometria com DMcTT para o nono ano.

A dissertação de Duarte (2018) tem como título "A utilização do GeoGebra, do *smartphone* e de reflexões escritas na construção de conceitos relacionados a retas paralelas cortadas por uma transversal". O objetivo geral se propõe a analisar as contribuições do AGD para a construção de conceitos geométricos, com a prática docente de aceitar a resolução de atividades feita pelo(a) discente. Como objetivo específico, também busca identificar as contribuições e os desafios presentes no uso do GeoGebra.

Na revisão bibliográfica, Duarte (2018) realiza um mapeamento das contribuições do *software* GeoGebra no ensino de geometria, sem especificar o dispositivo utilizado. O levantamento foi conduzido em revistas eletrônicas de Educação Matemática, incluindo Bolema, Novas Ideias em Informática Educativa, Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, Boletim Gepem online, Jieem, Revemat, Educação Matemática em Revista, e em anais de diversos eventos, como o VI Congresso Internacional de Ensino na Matemática, XIX Ebrapem, XII Enem. No entanto, a autora não detalha os critérios para a escolha dessas fontes.

O foco da pesquisa dessa autora é obter informações sobre a aprendizagem e o ensino de geometria com AGD, especialmente o GeoGebra, no contexto de retas paralelas cortadas por uma transversal. As palavras-chave utilizadas no levantamento incluem: "ensino de geometria em AGD", "contribuições do GeoGebra no ensino de geometria", "ensino e aprendizagem com o GeoGebra", "geometria com o GeoGebra", "softwares de geometria dinâmica", "retas paralelas cortadas por uma transversal utilizando o GeoGebra".

De acordo com Duarte (2018), a primeira busca foi realizada de 20 a 26 de maio de 2017, que localizou periódicos de 2011 a 2016. Apesar de a autora ter levado mais tempo para fazer a sua pesquisa, em relação a Henrique, não foram identificados comentários, na dissertação, sobre dificuldades ou facilidades nas buscas. A estratégia da autora foi selecionar artigos que trouxessem atividades que foram implementadas utilizando o GeoGebra em computadores, *tablet* ou *smartphones*. Para isso, houve a necessidade de verificar algumas características, tais como: (a) a temática da pesquisa; (b) seus objetivos; (c) o AGD utilizado; (d) o referencial teórico; (e) a metodologia empregada na pesquisa; (f) os resultados obtidos. Cabe ressaltar que, pela busca de periódicos nacionais e com termos em português, foi constatada a preferência por pesquisas em âmbito nacional.

Dentre os treze artigos encontrados, a autora selecionou seis, com a temática na implementação de atividades com uso do *software* GeoGebra nos processos de ensino e de aprendizagem, porém em computadores. Mesmo com essas escolhas, ela percebeu que os artigos não contemplavam toda proposta, cujo foco era um AGD mediante a tecnologia *touchscreen*, como argumenta Duarte (2018). Foi observado que o nível de escolaridade nos artigos selecionados foi bem versátil. Os sujeitos eram estudantes do 8° ano do Ensino Fundamental, o que faz todo sentido o interesse por textos com esse nível de ensino. No entanto, ela só conseguiu dois.

Em síntese, o primeiro momento da revisão de literatura, em ambas dissertações, abarca: (a) uma análise das contribuições do AGD para a construção de conceitos geométricos, em uma prática docente que valoriza a fala do aluno diante de atividades diversas; (b) as contribuições e os desafios do GeoGebra; (c) a escolha do levanto bibliográfico em revistas eletrônicas; e (d) as palavras-chave que remetem ao objeto de pesquisa.

Para organizar os textos selecionados, Henrique (2017) e Duarte (2018) recorreram à construção de quadros com informações a respeito do(s) autor(es), da(s) palavra(s)-chave, do ano e do nome da revista, além de algumas observações importantes, como, por exemplo, a especificação do nível de escolaridade e as contribuições para o desenvolvimento dos seus respectivos trabalhos, alinhados aos objetivos predefinidos. Tais quadros podem ser encontrados em Henrique (2017, p.5-6) e Duarte (2018, p.18-21).

Ao relacionar o interesse de ambos pelos artigos por eles selecionados, observa-se que, dentre os três artigos escolhidos por Henrique (2017), dois também foram escolhidos por Duarte (2018), o que não remete a uma coincidência, tendo em vista a(s) semelhança(s) da(s) palavra(s)-chave utilizada(s) nas buscas. Outra informação importante que se pode fazer, ainda na primeira busca para seleção de textos, é a carência de trabalhos com atividades que envolvam a utilização de AGD para o ensino de geometria nos anos finais do Ensino Fundamental.

Com a finalidade de preencher lacunas provenientes da primeira busca, ambos os autores realizaram novas procuras, em que foram utilizadas as mesmas revistas do levantamento inicial, mas com foco nos anos finais do Ensino Fundamental. Diante do exposto, no tópico seguinte, discorreremos sobre a dinâmica dessa averiguação, para efeitos de organização e entendimento.

1.1.2 Análise sobre a continuação das buscas e a definição do referencial teórico

No segundo momento de inquirição, Henrique (2017) fez uso das palavras-chave: “GeoGebra” e “retas paralelas”, para buscas efetuadas no dia 11 de agosto de 2016. Encontrou quarenta e nove textos envolvendo a palavra-chave “GeoGebra” e dez envolvendo “retas paralelas”, enquanto Duarte (2018) fez a busca com as palavras-chave: “GeoGebra para *smartphone*”, “retas paralelas utilizando o GeoGebra”, “GeoGebra touchscreen e retas paralelas”, para levantamentos no dia 26 de maio de 2017. Entretanto, a autora não especificou a quantidade de textos garimpados com a utilização desses termos.

Dentre os textos encontrados nesse segundo momento, Henrique (2017) selecionou dois, mas, segundo ele, só um estava em harmonia com a proposta, a qual mencionava o “GeoGebra convencional”, sem especificar se foi acessado por computador ou por dispositivos móveis. Já Duarte (2018) selecionou quatro e, de acordo com ela, todos traziam implementações de atividades com a tecnologia touchscreen em AGD, o que estava em consonância com a pesquisa.

Ainda na segunda fase de levantamento, Henrique (2017) fez buscas diferentes das anteriores, em periódicos de Educação Matemática, no que se refere à regra que enfatiza intervenções com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental. Para isso, analisou um periódico diferente dos citados, o qual, segundo ele, tem o objetivo de divulgar pesquisas que abordam processos de ensino e de aprendizagem com estratégias inovadoras (HENRIQUE, 2017, p. 10). Isso o levou a dois textos que mencionavam implementações com a utilização de *smartphones*. Não foram encontrados indícios da quantidade de artigos que apareceram nessa busca.

No Quadro 1, encontra-se uma síntese dos sete textos oriundos dessa segunda busca, que contribuíram, de alguma forma, para o desenvolvimento da pesquisa dos autores.

Quadro 1 - Textos selecionados pelos autores na segunda fase de busca

Temática/Título	Dispositivo tecnológico	Nível de escolaridade	Autor(a) da dissertação
Engenharia Didática e GeoGebra Aliados na Construção de Conceitos Geométricos	Não especificado (GeoGebra convencional)	6° ano do Ensino Fundamental	Henrique (2017)
Contribuições pedagógicas de um AGD	*Smartphones*	1° série do Ensino Médio	
Investigação do uso de dispositivos touchscreen para o ensino aprendizagem geométrica	*Smartphones*	Graduação	
Um levantamento de dispositivos touchscreen voltados ao ensino de matemática	Dispositivos móveis	Não especificado	Duarte (2018)
Uso de *smartphone*s em atividades que auxiliem a construção de demonstração em geometria	*Smartphones*	Graduação	
*Smartphone*s em sala de aula: buscando possibilidades para ensinar e aprender matemática	*Smartphones*	Anos finais do Ensino Fundamental	
Um toque ou um arrastar direto na tela do *Smartphone*: reflexões e possibilidades para aprender sobre retas paralelas cortadas por uma transversal por meio do GeoGebra	*Smartphones*	8° ano do Ensino Fundamental	

Fonte: Elaborado pelo autor

O Quadro 1 evidencia a escassez de pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de geometria em Ambientes Virtuais de Aprendizagem, por meio de *tablet* e *smartphones*, em qualquer nível de escolaridade, situação que nos chama a atenção, já que muitos entendidos assumem os *smartphones* como parte do corpo.

Ao retomarmos os textos selecionados pelos autores na segunda busca, os quais tentaram encontrar implementações de tarefas, no Ensino Fundamental, que possibilitassem aos alunos e alunas manipular e/ou interagir, por meio de dispositivos moveis, constatamos que somente dois textos foram contemplados por Duarte (2018) e nenhum por Henrique (2017). Isso demanda que se façam mais pesquisas com essa temática e que abordem esse nível de ensino, em virtude da importância da construção de raciocínios geométricos. Vale destacar que Henrique (2017) aparece como autor nos dois textos utilizados por Duarte (2018), sendo considerado, em nossa concepção, protagonista de pesquisas em práticas educativas com a utilização de DMcTT, pelo menos em território nacional.

Ao fazer o estudo dessas dissertações, foi possível observar os caminhos tomados pelos autores para obtenção de informações a respeito de artigos que continham alguma relação com as questões das suas respectivas pesquisas, isto é, uma revisão sistemática de literatura. Para isso, utilizaram-se de critérios bem definidos, tais como, palavra(s)-chave e inclusão/exclusão, para, respectivamente, fazer buscas de textos em *sites* de revistas e selecioná-los. E, caso fosse necessário, gerariam novas buscas aplicando novos critérios.

Assim sendo, dentro do campo dos DMcTT e do ensino de geometria, foram observadas carências de estudos sobre: (a) potencialidades da utilização de *tablet* e *smartphones* no ensino e na aprendizagem; (b) práticas que valorizem a fala e o protagonismo de estudantes; (d) potencialidades de um AGD no contexto da mobilidade e dos toques; e (e) sistematização de tarefas centradas na construção de conceitos geométricos por meio das manipulações na tela. Tais observações podem ser relevantes tanto para educação básica quanto para o ensino superior.

Ao considerar as conclusões advindas das análises das revisões de literatura de duas pesquisas qualitativas, apresentamos os resultados como fatos, pois os métodos de pesquisa secundária seguem uma abordagem paralela aos métodos de pesquisa primária. Portanto, é coerente com a tradição qualitativa que o autor dessa revisão revele a natureza intrínseca do estudo primário (Randolph, 2009). Importa salientar que essa constatação não simplifica nem diminui a demanda do nosso trabalho sistemático de revisão, dada a contínua (des)atualização das bases de dados. Essas informações podem ser recuperadas por meio da ferramenta BUSCAd e pela difusão em rede durante todo o processo da revisão de literatura.

1.2 Mapeamento de quadriláteros na revista IGISP

Durante a análise das duas dissertações mencionadas anteriormente, verificamos que apenas a pesquisa de Henrique (2017) explorava essa temática no contexto do *Sketchometry*[6], englobando não apenas quadriláteros, mas também polígonos regulares e retas paralelas cortadas por uma transversal. Diante desse cenário, no processo de mapeamento subsequente, focalizamos o diagnóstico de textos que explorassem o uso do GeoGebra no ensino e na aprendizagem relacionados exclusivamente a quadriláteros.

[6] Trata-se de um ambiente de geometria dinâmica gratuito, acessível tanto *online* quanto *offline*, em computadores, *tablets* e *smartphones*. Disponível em: https://sketchometry.org/en/. O acesso a esse ambiente foi realizado em 04/01/2024.

Para esse fim, conduzimos um levantamento online no período de 04 a 08 de dezembro de 2020, considerado, na época, como o intervalo pertinente. Durante esse período, foram identificadas publicações entre 2012, quando se iniciou a comercialização de *tablets* no Brasil, e 2020, que estavam disponíveis na revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo (IGISP).

A escolha desse site ocorreu por três motivos: (a) por representar um espaço de divulgação científica de pesquisas e trabalhos desenvolvidos, especificamente, com o uso do GeoGebra; (b) por conjecturarmos que pesquisadores e pesquisadoras, nessa área, tendem a submeter seus artigos; e (c) por semear artigos avaliados por pares.

Importa esclarecer que o *International* GeoGebra *Institute* é uma organização sem fins lucrativos que colabora com Institutos GeoGebra independentes oficializados em diversos países, distribuídos pelos seis continentes, incluindo os localizados na PUC São Paulo e na UFF Rio de Janeiro.

Esses Institutos Internacionais de GeoGebra, também sem fins lucrativos, surgiram em resposta à ampla disseminação e ao uso do GeoGebra. Em cada Instituto, professores e pesquisadores unem esforços para impulsionar o ensino e aprendizagem da Matemática, apoiando e desenvolvendo atividades como a criação de materiais para oficinas, bem como a concepção e a implementação de projetos relacionados ao software, entre outras iniciativas (PUC-SP, 2023).

Em síntese, os Institutos GeoGebra compartilham experiências no que diz respeito à capacitação para o uso do GeoGebra, seja oferecendo cursos gratuitos, ou publicando periódicos. Além disso, prestam suporte para o desenvolvimento de materiais destinados a estudantes e professores, visando aprimorar a Educação Matemática, a Ciência e a Tecnologia. Procuram, ainda, fomentar a colaboração entre profissionais e pesquisadores, buscando estabelecer parcerias e formar uma comunidade de usuários do GeoGebra.

No site da revista IGISP, na seção de busca, empregamos a ferramenta "Filtro Avançado" para investigar textos desde janeiro de 2012 (marcando o início das publicações) até novembro de 2020 (delimitando o período até a época). Além disso, utilizamos as palavras-chave "quadrilátero(s)", "polígono(s)", e "Geometria", combinadas de maneira sequencial, através dos conectivos "*AND*" e "*OR*", em conjunto com termos como "*smartphone(s)*", "*tablet(s)*" ou "tecnologia(s)". Desse modo, foram geradas 60 possibilidades de buscas distintas, como por exemplo "*quadrilátero AND smartphone*"; "*quadriláteros AND smartphone*" ou "*quadrilátero OR tablet*". Essa abordagem foi adotada com o intuito de abranger o maior número possível de trabalhos relevantes para a temática em questão.

Dessa maneira, foram mapeados 16 textos, nos quais, inicialmente, pela leitura do resumo de cada artigo, identificamos estudos com temáticas que contemplam conceitos de Geometria, a saber: um com estudo de conceitos relacionados a retas paralelas cortadas por uma transversal; dois envolvendo triângulos; quatro envolvendo quadriláteros; um com reflexão de formular ideias geométricas, tanto em lápis e papel, quanto em ambiente dinâmico; um com construção de modelos geométricos por meio da modelagem; um com material (livreto) que apresenta sugestões sobre como aprender conteúdos relacionados à Geometria Espacial; um com resoluções de questões da OBMEP; um com utilização do comando sequência do GeoGebra; um com utilização da plataforma WGL (Web Geometry Laboratory); um com características do GeoGebra e o Virtual Math Team com o GeoGebra (VMTcG); um com transformações geométricas isométricas no plano euclidiano; um com estudo da distância entre dois pontos e de equação da reta.

Com foco na temática específica do ensino e aprendizagem de quadriláteros, refinamos a busca com base em atividades aplicadas aos estudantes do Ensino Fundamental. Assim, selecionamos três textos, dois nacionais, ambos de mesma autoria, e um internacional. O Quadro 2 oferece uma síntese dos textos escolhidos, ressaltando o ano de publicação, a autoria, o título do trabalho e algumas observações destacadas neles. É importante destacar que todos os estudos utilizaram o GeoGebra no ambiente computacional.

Quadro 2 - Textos selecionados na revista IGISP

Ano	Autor(a)	Título do trabalho	Algumas observações
2018	José Pedro Almeida Ganeto, Maria São da Conceição Costa Sousa, Maria João Silva Gonçalves, Samira Sams Santos Duarte	GeoGebra no Estudo da Geometria no 2º ano do 2º ciclo do Ensino Básico de Escolaridade	Em Cabo Verde, o 2° ano do 2° ciclo do Ensino Básico equivale ao 6° ano do E.F. Quanto às análises e às discussões das atividades sobre quadriláteros, não foram identificadas. Deram ênfase à análise dos questionários.
2017	André Pereira da Costa, Marcelo Câmara dos Santos	O uso do GeoGebra no ensino de quadriláteros notáveis: um estudo com alunos do 6º ano do ensino fundamental	Os autores replicam e analisam uma sequência didática envolvendo construções de quadrados e de retângulos, realizadas por discentes, a partir de elementos geométricos ou de propriedades específicas desses polígonos.
2016	André Pereira da Costa, Marcelo Câmara dos Santos	Estudo dos quadriláteros notáveis por meio do GeoGebra: um olhar para as estratégias dos estudantes do 6º ano do	Encontramos a primeira parte da replicação e da análise da sequência didática envolvendo, dessa vez, as construções de paralelogramos e de retângulos, também, a partir de

		ensino fundamental	elementos geométricos ou de propriedades específicas desses polígonos.

Fonte: Elaborado pelo autor

Com base nesse levantamento, destacamos os dois textos de Costa e Santos (2016; 2017), cuja união está contida numa dissertação intitulada “A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental: um estudo sob a luz da teoria vanhieliana” (Costa, 2016). Essa escolha foi motivada pelos seguintes fatores: (i) a presença de elementos que favorecem a construção de quadriláteros no GeoGebra; (ii) a utilização de três categorias - pragmática, aplicativa e relacional - na análise das justificativas dos estudantes, categorias até então por nós desconhecidas; e (iii) a carência de material que faça uso do GeoGebra em DMcTT para o aprendizado de quadriláteros.

Em decorrência desses aspectos, foi realizada uma segunda fase de levantamento, utilizando a ferramenta BUSCAd, a qual será desenvolvida posteriormente. Essa etapa visa ampliar a busca por materiais que explorem o uso do GeoGebra na Educação Matemática para o ensino de quadriláteros, complementando e aprofundando o embasamento da pesquisa.

1.3 O uso da BUSCAd no processo de revisão sistemática

Ao pensarmos na otimização de tempo no processo de buscas, com o intuito de engendrar uma revisão sistemática de literatura, recorremos ao Buscador de Trabalhos Acadêmicos (BUSCAd), em decorrência da garantia na abrangência dos resultados, que permite realizar uma seleção de trabalhos com mais eficiência e, consequentemente, produzir uma análise com mais qualidade. Assim sendo, conjecturamos conhecer as pesquisas que dialogam com a nossa temática, a fim de norteá-la para uma produção científica significativa.

A BUSCAd[7] foi desenvolvida no Microsoft Excel com a finalidade de contribuir para operação de importação e tratamento de dados em estudos nos quais se admite uma revisão de literatura. De fato, ela dispõe de seis abas, “Sequência”, “Resultados”, “Tratamento”, “Seleção qualificada”, “Análise” e “Gráficos”, constituindo, dessa maneira, uma revisão com mais confiabilidade. Esta ferramenta tem o formato de uma planilha eletrônica que recebe atualizações sempre que necessário. Mesmo assim, o seu uso continua livre e gratuito para

7 Até 14/03/2023, momento de finalização desse documento de qualificação. A versão mais atual é 2.6.2. Para mais informações a respeito da BUSCAD, sugiro a leitura em: https://ojs.ifes.edu.br/index.php/saladeaula/article/view/1206

qualquer usuário que a apeteça.

Na aba “Sequência”, destacamos três áreas consideráveis, sendo duas delas específicas a *strings*, com possibilidades tanto de digitar um termo em cada linha - com o propósito de gerar automaticamente sequências - quanto de compor, pelo menos, uma sequência apropriada. A outra, permite selecionar o escopo ampliado nos seguintes bancos de dados: catálogo de Teses Dissertações da Capes (T&D Capes), Scientific Eletronic Library Online (Scielo), Springer, no Portal Periódicos Capes (limitado ao acesso gratuito), Directory of Open Access Journals (Doaj), Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), Institute of Education Sciences (Eric), Educapes e Google Acadêmico. Para efeitos de elucidação, tanto a T&D Capes quanto a BDTD integram os sistemas de informação de teses e dissertações existentes nas instituições de ensino e pesquisa brasileiras, no entanto, somente a BDTD, conforme descrito no portal, “possibilita que a comunidade brasileira de ciência e tecnologia publique suas teses e dissertações produzidas no país e no exterior, dando maior visibilidade a produção científica nacional” (BDTD, 2023).

Ao efetuar as buscas com o auxílio da BUSCAd, nos períodos de janeiro a meados de fevereiro de 2023, recorremos às sequências formadas pelos termos “quadrilátero”, “quadriláteros”, “geometria”, “*tablet*”, “*tablets*” e “GeoGebra”, produzindo combinações com três deles, de modo a interpolar o operador booleano *AND* indicado pelo manual do usuário. A princípio, sem utilizar os termos “polígono” e “polígonos”, dispomos dessas sequências por interpretarmos que elas poderiam suprir as pesquisas da área de Geometria que se utilizam do GeoGebra por intermédio de *tablet*. Dessa forma, foram encontradas 389 tipologias de trabalhos, sendo 221 duplicações identificadas e notificadas que, após o comando, foram apagadas automaticamente.

Com intuito de atestar potencialidades da ferramenta eletrônica em relação à varredura automática, aumentamos a quantidade de sequências, acrescentando, além das palavras “polígono” e “polígonos”, algumas combinações entre dois termos específicos que, complementado as ideias iniciais das combinações e do operador *AND*, suscitou uma quantidade expressiva de trabalhos. Ao final desse processo, foram contabilizadas 2306 tipologias, mas quando o sistema identificou e excluiu 1919 duplicações, restaram quase 17% para serem identificadas e, se necessário, completar as lacunas existentes nos dados. À vista disso, transportamos 387 títulos obtidos em cada plataforma para o primeiro refinamento. De fato, tanto a tubulação das bases selecionadas quanto as sequências pesquisadas podem ser evidenciadas na figura abaixo.

Digite em cada linha 1 termo para geração automática de sequências	Digite em cada linha abaixo 1 sequência a ser pesquisada	x	Capes: T&D	Scielo	Springer	Periódicos	DOAJ	BDTD	ERIC	EduCapes	Google	TOTAL
Gerar Sequências			Quantidade de Trabalhos obtidos em cada Plataforma									2306
	"quadrilátero" AND "tablet" AND "geogebra"	x	0	0	0	0	0	0	0	35		35
	"quadrilátero" AND "tablets" AND "geogebra"	x	0	0	0	0	0	1	0	35		36
	"quadriláteros" AND "tablet" AND "geogebra"	x	0	0	1	0	0	0	0	35		36
	"quadriláteros" AND "tablets" AND "geogebra"	x	0	0	1	0	0	1	0	35		37
	"polígono" AND "tablet" AND "geogebra"	x	0	0	0	0	0	0	0	77		77
	"polígono" AND "tablets" AND "geogebra"	x	0	0	0	0	0	2	0	77		79
	"polígonos" AND "tablet" AND "geogebra"	x	0	0	0	0	0	0	0	77		77
	"polígonos" AND "tablets" AND "geogebra"	x	0	0	0	0	0	2	0	77		79
	"geometria" AND "tablet" AND "geogebra"	x	0	0	19	2	1	4	0	157		183
	"geometria" AND "tablets" AND "geogebra"	x	0	0	19	1	0	8	0	157		185
	"quadrilátero" AND "dispositivos móveis"	x	0	0	0	1	0	0	0	45		46
	"quadriláteros" AND "dispositivos móveis"	x	1	0	1	1	0	0	0	45		48
	"polígonos" AND "dispositivos móveis"	x	1	0	0	0	0	0	0	94		95
	"polígono" AND "dispositivos móveis"	x	0	0	0	0	0	0	0	94		94
	"quadrilátero" AND "tablet"	x	0	0	11	0	0	2	0	85		98
	"quadrilátero" AND "tablets"	x	0	0	11	0	0	4	0	85		100
	"quadriláteros" AND "tablet"			0	12	0	0	2	0	85		99
	"quadriláteros" AND "tablets"			0	12	0	0	4	0	85		101
	"polígono" AND "tablet"			0	20	4	0	1	0	171		196
	"polígono" AND "tablets"			0	20	8	0	2	0	171		201
	"polígonos" AND "tablet"			0	22	4	1	1	0	171		200
	"polígonos" AND "tablets"			0	23	8	0	2	0	171		204

Microsoft Excel

Concluído

Registros duplicados deletados: 1919

Figura 2 - Tabulação das bases selecionadas
Fonte: BUSCAd, captura da tela

Nela, observamos a relevância de escrever alguns termos no singular e no plural, na maioria dos casos, uma vez que eles se encontravam disseminados em 6/8 das bases rastreadas, culminando em pelo menos um trabalho detectado. Quanto as plataformas Scielo, ERIC, EduCapes e Google, a primeira, apesar de ser uma revista científica brasileira, não apresentou nenhum texto relacionado às sequências produzidas; a ERIC, no que lhe concerne à base de dados patrocinada pelos Estado Unidos, presumíamos ter poucas chances de encontrar tipologias empregando sequências contendo algum termo em português; já a terceira apresentou a maior quantidade em relação às outras, o que se justifica pela concentração de diversas obras, ou seja, ela hospeda mais que artigos, dissertações e teses, gerando um grande volume de dados; e a Google, de caso pensado, foi excluída para evitar a dilatação do escopo da pesquisa.

Embora as vantagens da Google Acadêmico sejam muitas, com destaque para a possibilidade de acesso a várias fontes distintas e de forma gratuita, optamos por não selecioná-la, em atenção à forma de indexação vultosa de informações que podem variar amplamente, incluindo fontes pouco confiáveis e artigos sem revisão por pares. Além disso, ela indica fontes, mas sem garantia de acesso, casos de muitos artigos publicados em periódicos internacionais que exigem pagamentos de taxa para acesso. Posto isto e, neste caso, interpretamos ser prejudicial a seleção da Google Acadêmico para esse o momento da revisão de literatura.

Após transportarmos os 387 trabalhos para aba “Resultados”, implementamos três ações: o uso da ferramenta filtragem em tipologia, a identificação do ISSN e o preenchimento do resumo, sendo essas últimas somente em casos não especificados, que juntas geraram condicionamentos à pré-seleção e à complementação dos dados. Com o propósito de selecionarmos artigos, dissertações e teses, marcarmos essas tipologias na planilha eletrônica. Automaticamente, remanesceram 37 trabalhos, oriundos de 20 artigos, 10 dissertações e 7 teses, ramificados em diversas áreas do conhecimento, dentre essas ressaltamos a Educação, a

Engenharia e a Informática.

Ainda em "Resultados", preenchemos alguns dados ausentes nas obras direcionadas tanto à Educação e à Matemática (seja na forma geral ou restrita) quanto às "vazias" (classificação dada pelo sistema), com ênfase no "resumo", que são essenciais no tratamento das informações. Findada essa ação, os títulos foram carregados na aba "Tratamento" a fim de intensificar o refinamento.

Nessa etapa, decidimos, primeiramente, filtrar o período a partir de 2012, devido às condutas protagonizadas pelo lançamento de *tablet* no mercado nacional e pela ampliação do seu acesso pelos usuários, até o ano de 2023. Em seguida, carregamos os termos "quadrilátero(s)", "polígono(s)", "geometria", "dispositivos móveis" e "*tablet*(s)", automaticamente nas colunas da planilha, produzindo, assim, contagens de cada um deles à medida que eram rastreados nos títulos característicos. Dessa forma, para catalogar trabalhos que contribuíssem para balizar esta pesquisa, selecionamos títulos que apresentavam, no mínimo, o valor igual a dois no somatório total dos "TERMOS", a contar das combinações entre [dispositivos móveis ou *tablet*] com [quadrilátero(s), polígono(s) ou geometria] em que o sistema atribuía, pelo menos, o valor igual a um para cada uma destas palavras relacionadas. Com intuito de sintetizar estas combinações, montamos o seguinte esquema:

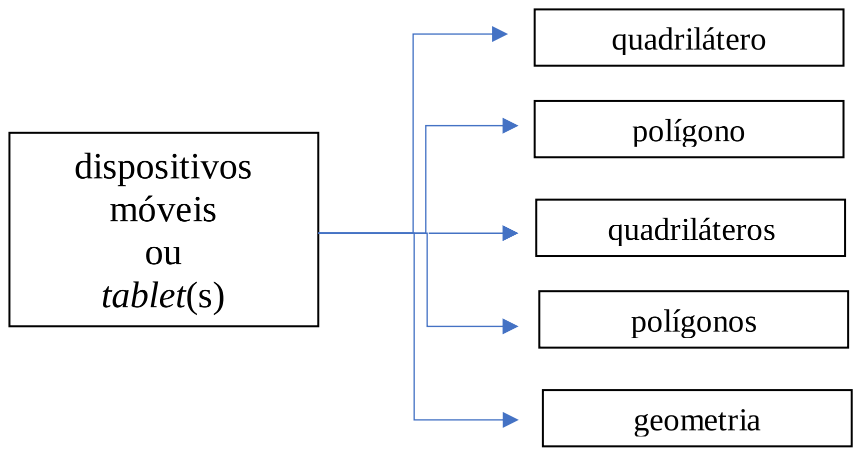


Figura 3 - Esquema com combinações de alguns termos
Fonte: Elaborada pelo autor

Conforme mencionado anteriormente, esses termos se localizavam em forma de colunas, onde era possível selecionar os valores lançados a cada um deles. Diante disso, prosseguimos da seguinte maneira: se na filtragem da coluna do "termo dispositivos móveis" mostrasse os valores (0)-(2)-(7), por exemplo, eram selecionados os valores diferentes de zero. Como resultado, apareciam somente trabalhos que mencionavam "dispositivos móveis" duas ou sete vezes. Depois disso, filtramos outro termo diferente desse, como por exemplo "quadrilátero", o qual já eram previstas duas possibilidades de valores para seleção, zero ou diferente de zero, ambos favoráveis a combinação entre eles. No caso de valores diferentes de zero, significava que o texto continha as palavras "dispositivos móveis" e "quadrilátero", alertando-nos para elegê-lo para uma seleção qualificada.

O raciocínio a partir destas combinações e o critério do somatório possibilitaram excluir textos que divergiram totalmente da nossa questão de pesquisa, limitando, dessa maneira, o seu quantitativo em 15. Daí em diante, o processo adveio da leitura dos resumos para validação ou desaprovação dessas tipologias. Assim, promovemos 2 artigos, 2 dissertações e 3 teses para a seleção qualificada. Tais resultados foram catalogados e podem ser conferidos no Quadro 3, abaixo.

Quadro 3 - Algumas naturezas dos trabalhos pré-selecionados

Ano	Autor(es)	Título do trabalho	Tipologia	Plataforma
2021	Marcos Paulo Henrique	Metáforas e toques em tela: potencializando aprendizagens discentes no estudo de retas paralelas e transversais	Tese	BDTD
2020	Alexandre Rodrigues de Assis	Alunos do ensino médio realizando toques em telas e aplicando isometrias com GeoGebra	Tese	BDTD
2019	Felipe de Jesus Ribeiro Marques	Arquitetando com alunos do ensino médio. Argumentos sobre quadriláteros em um ambiente virtual com GeoGebra	Dissertação	BDTD
2018a	Marcelo Almeida Bairral; Elen Roza da Conceição Silva	Trabalhando quadriláteros em *smartphones*: alunos de uma escola pública descobrindo e produzindo propriedades	Artigo	CAPES
2018b	Alexandre Rodrigues de Assis; Marcelo Almeida Bairral; Wagner da Silveira Marques	Raciocínio de alunos em interação com dispositivos móveis: toques e retoques numéricos ou geométricos	Artigo	CAPES
2017	Ana Paula Basqueira	Processos de modelação presentes no ensino de matemática em contexto de sala de aula com uso de TIC	Tese	BDTD
2015	Alexandre Rodrigues de Assis	Alunos do ensino médio trabalhando no GeoGebra e no Construtor Geométrico: mãos e rotações em touchscreen	Dissertação	BDTD

Fonte: Elaborado pelo autor.

Esse quadro reflete uma quantidade limitada de pesquisas relacionadas a dispositivos móveis, especialmente *tablet* e *smartphones*, no contexto do ensino e aprendizagem de geometria, com foco específico em quadriláteros. Nele, destacam-se alguns autores, como Assis (2015, 2018, 2020) e Bairral (2018b, 2018a), que emergem como protagonistas nessas temáticas, explorando o uso desses dispositivos com tela sensível ao toque. Além disso, é interessante notar a inclusão de um trabalho externo ao GEPETICEM, o de Basqueira (2017), até então desconhecido pelo autor desta tese.

Ao agregar as pesquisas de Henrique (2017) e Duarte (2018), da análise inicial, os textos de Costa (2016) e Graneto et al. (2018), da revista IGISP, juntamente com os trabalhos de Guimarães et al. (2021), Fernandes (2023) e Madureira (2023), das difusões em redes, compomos uma coletânea abrangente para a apropriação de informações e uma possível seleção para a estruturação desta pesquisa.

No entanto, para abordar as sub-perguntas desta tese, nomeadamente (i) que funções os toques assumem na aprendizagem de quadriláteros e (ii) que aspectos da aprendizagem podem ser elucidados na ambiência ficha+*tablet*+GG+toques+fala+escrita, compreendemos, após os estudos, que nem todos os trabalhos incluídos nas buscas seriam pertinentes para esse estágio. Portanto, desenvolvemos um novo quadro, que inclui o ano, autor(es), o título e as observações das obras selecionadas, a fim de refletir precisamente as contribuições para essas questões específicas, conforme podemos observar abaixo.

Quadro 4 - Obras selecionadas com algumas observações

Ano	Autor(es)	Título do trabalho	Observações
2021	Marcos Paulo Henrique	Metáforas e toques em tela: potencializando aprendizagens discentes no estudo de retas paralelas e transversais	O Design da tarefa envolve a construção utilizando o GeoGebra em *smartphones*, seguida por análise, diálogo, reflexão e escrita. Explora o desenvolvimento dos toques, que seguem a tríade de ambientação, domínio relacional e domínio construtivo.
2020	Alexandre Rodrigues de Assis	Alunos do ensino médio realizando toques em telas e aplicando isometrias com GeoGebra	O Design da tarefa engloba construções e manipulações utilizando o GeoGebra em *tablet*. A análise se concentra nos toques na tela, mas também nas ações simbólicas originadas por eles.
2018	Marcelo Almeida Bairral; Elen Roza da Conceição Silva	Trabalhando quadriláteros em *smartphone*s: alunos de uma escola pública descobrindo e produzindo propriedades	O texto destaca as novas ações dinâmicas nas construções de objetos em AGD como *Sketchometry*, *FreeGeo* e GeoGebra, incluindo arrastar e movimentar. Argumenta que ações como mexer, mover e arrastar podem contribuir para a formação de um novo vocabulário para aprendizes e para atividades relacionadas a quadriláteros em AGD utilizando *smartphones*.
2021	Rita de Cássia da Costa	Uso de *smartphone* na investigação de	A obra argumenta sobre o potencial do GeoGebra em *smartphones* no processo de

	Guimarães, William Vieira, Roberto Seidi Imafuku, Emanoel Fabiano Menezes Pereira	propriedades de quadriláteros notáveis	ensino e aprendizagem de quadriláteros, com foco específico em trapézios e paralelogramos. Propõe que os aprendizes possam explorar e formular definições a partir das manipulações na tela.
2023	Bruno Mendes da Costa Madureira	Discentes do Ensino Fundamental interagindo e aprendendo sobre quadriláteros em atividades com *smartphone*s	A pesquisa aponta para três processos ao utilizar o GeoGebra em *smartphone*: (a) construtivo – os estudantes identificam e observam as características dos quadriláteros por meio da exploração; (b) investigativo – nesse processo, podem surgir ideias, falas e características que não estavam previstas inicialmente; e (c) ida e volta – envolve a construção e desconstrução da figura, fazendo parte do desenvolvimento de conceitos. Esse processo sugere uma dinâmica de construir e desconstruir, contribuindo para uma compreensão mais profunda dos conceitos envolvidos.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Esse conjunto diversificado de estudos serve de base para explorar as lacunas existentes no ensino e na aprendizagem de quadriláteros, considerando a implementação de tarefa+GG+*tablet* na sala de aula. Adicionalmente, contribui para o avanço do conhecimento em práticas educativas envolvendo DMcTT no campo da geometria.

Diante de carências identificadas - (a) potencialidades da utilização de *tablet* e *smartphones* no ensino e na aprendizagem; (b) práticas que valorizem a fala e o protagonismo de estudantes; (c) potencialidades de um AGD no contexto da mobilidade e dos toques; e (d) sistematização de tarefas centradas na construção de conceitos geométricos por meio das manipulações na tela - e em busca de novas pesquisas, acrescentamos às mencionadas anteriormente, (e) Produção e elaboração de símbolos, signos e significados no ensino e na aprendizagem de matemática por meio de AGD+DMcTT; e (f) tarefas que se utilizam de DMcTT para conceitos, definições, provas e validações matemáticas.

É importante ressaltar que parte dessas obras, mencionadas anteriormente, será detalhada no capítulo de fundamentação teórica, a seguir, enquanto a outra parte será citada ao longo deste trabalho, de modo a enriquecer as discussões e as análises apresentadas. Essa abordagem visa aprimorar a compreensão e a contextualização do estado atual da pesquisa na temática da tese.

CAPÍTULO II – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICO-METODOLÓGICA

Neste capítulo, apresentamos alguns referenciais teóricos que contribuíram para a compilação da metodologia e para a análise dos dados desta tese. Nosso objetivo é abordar as intervenções pedagógicas como pesquisa, explorar alguns recursos pedagógicos e examinar a cognição corporificada em relação aos aspectos do pensamento humano.

A estruturação deste capítulo envolve três aspectos principais: a metodologia da pesquisa, a relação entre a cognição corporificada e a neurocognição na aprendizagem e, ainda, o emprego de recursos pedagógicos no ensino. Juntos, esses elementos compõem o arcabouço teórico que sustenta a tese apresentada.

Começamos por apresentar um mapa conceitual representativo do quadro teórico estabelecido para, em seguida, justificar como esses elementos se relacionam neste trabalho e na abordagem teórica do trabalho pedagógico numa turma de sexto ano do E.F.

Figura 4 - Mapa conceitual ilustrando as bases epistemológicas da pesquisa
Fonte: Elaborada pelo autor

Ao considerarmos as bases epistemológicas ilustradas no mapa anterior, adotamos os seguintes autores e autoras para sustentar a base teórica desta pesquisa: nas intervenções como pesquisa, Damiani et al. (2013); no campo da cognição corporificada, McNeill (1992, 2005 e 2008); na neurociência, Bairral (2021); para as definições em geometria e na classificação dos quadriláteros, Villers (1994) e Govender e Villers (2004); e para os recursos pedagógicos, Assis (2020), Assis e Bairral (2022), Bussi e Mariotti (2008), Cyrino e Jesus (2014), Gusmão (2019), Gusmão e Font (2020) e Henrique (2021).

Antes de detalharmos os referenciais teóricos mencionados anteriormente, é importante salientar que nossa abordagem é influenciada pela teoria histórico-cultural, associada a Vygotsky, que enfatiza a importância do ambiente social e cultural no desenvolvimento humano. Essa teoria sugere que a aprendizagem e o desenvolvimento estão enraizados em um contexto cultural mais amplo e que as interações sociais desempenham um papel crítico na apropriação do conhecimento desenvolvido pela humanidade e que chega até nós. Assim como Vygotsky, acreditamos que o desenvolvimento humano é (re)configurado pelo contexto social e cultural em que uma pessoa está inserida.

2.1 Intervenção pedagógica como pesquisa

Ao considerarmos a pesquisa de campo, em que o cenário, os indivíduos, os planejamentos e as implementações são concebidos e organizados pelo professor-pesquisador, que, por sua vez, a coloca em prática com sua própria turma em um ambiente escolar, deparamo-nos com duas possibilidades metodológicas para a escrita da tese: Design e Intervenção.

Embora essas duas metodologias tenham características dinâmicas, que permitem a (re)configuração das ações, à medida que a pesquisa avança e as situações imprevistas surgem, o professor-pesquisador tem a oportunidade, por meio da metodologia da Intervenção, de potencializar as produções acadêmicas. Essas produções têm o potencial de impactar positivamente a prática em sala de aula, reduzindo a distância entre a pesquisa acadêmica em Educação Matemática e sua influência na prática dos profissionais que trabalham nas instituições de ensino.

Assim como Assis (2020), não estamos preocupados em determinar um caminho fixo para esta pesquisa, seja na coleta de dados, seja na aderência estrita a uma metodologia predeterminada. Nosso foco principal está no desenvolvimento dos indivíduos inseridos em um ambiente propício para a aprendizagem sobre quadriláteros. Portanto, optamos por adotar a intervenção pedagógica como a metodologia desta pesquisa.

Damiani e colaboradores (2013) argumentam que a pesquisa como intervenção pedagógica cria um ambiente propício para investigações, uma vez que está fundamentada na Teoria Histórico-Cultural da Atividade e tem o potencial de gerar conhecimento educacional. Concordamos com esses autores sobre o uso do termo "intervenção", que pode ter sentidos diferentes dependendo da área em que é empregado, como na saúde (psicologia e medicina), na administração e no militarismo. Na Educação Matemática, entendemos que o termo "intervenção" tem o sentido de elaborar, implementar e propor uma ação concreta, sem impor limites, tanto no processo de construções de signos quanto na interação entre os indivíduos envolvidos e, se for o caso, entre o indivíduo e dispositivo[8].

Como afirmam Damiani e colaboradores (2013), as intervenções como pesquisa não devem ser confundidas com projetos de ensino ou extensão e seus relatórios não podem ser equiparados a meros relatos de experiências. Esse tipo de pesquisa é conduzido com o propósito de contribuir para a solução de problemas práticos. As intervenções são semelhantes a experimentos no sentido de buscar novos elementos e refletir sobre suas repercussões. Sua eficácia é baseada em paradigmas que apresentam princípios, procedimentos e critérios de qualidade bem definidos. Esses estudiosos ratificam que "nas intervenções, a intenção é descrever detalhadamente os procedimentos realizados, avaliando-os e produzindo explicações plausíveis, sobre seus efeitos, fundamentadas nos dados e em teorias pertinentes" (p. 59).

Os autores também destacam as características da pesquisa de intervenção, que incluem (a) a busca pela produção de mudanças, (b) a resolução de problemas específicos, (c) a natureza aplicada, (d) a integração com um referencial teórico, e (e) a capacidade de gerar conhecimento. Essas características são observadas na pesquisa de Madureira (2023), que empregou essa metodologia para examinar se o uso do GeoGebra em *smartphones* influenciou a formulação de conjecturas, a classificação e as justificativas elaboradas pelos estudantes na resolução de tarefas relacionadas a quadriláteros[9].

No entanto, é importante notar que essas características podem se assemelhar às da pesquisa-ação, uma vez que ambas buscam promover avanços educacionais. Contudo, existem distinções na pesquisa de intervenção. O pesquisador, por exemplo, identifica e decide como resolver o problema, mas está aberto a críticas e sugestões, considerando as contribuições dos

[8] Recurso digital que apoia o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, a resolução de problemas e a visualização de princípios matemáticos.

[9] Está relacionada à sua ênfase na transformação social, no engajamento das comunidades afetadas, na participação ativa dos envolvidos, na consideração do contexto e na reflexão crítica sobre as dimensões políticas e sociais das questões investigadas.

participantes da pesquisa para (re)formular o trabalho. Além disso, o foco principal da pesquisa de intervenção não está na ação emancipatória de natureza político-social[10].

Além das características mencionadas anteriormente, é importante destacar que, nesta pesquisa de intervenção, o leitor encontrará informações sobre os métodos de intervenção e avaliação da intervenção. Os detalhes do primeiro estarão incluídos na seção de metodologia da pesquisa, enquanto os aspectos relativos ao segundo estarão nas seções de resultados e discussões.

O método da intervenção será detalhadamente descrito, com ênfase em seu embasamento teórico. Considerando que o ambiente da intervenção é uma sala de aula, a descrição abordará o método de ensino aplicado, fornecendo justificativas para a adoção das diversas práticas específicas planejadas e implementadas.

No método de avaliação da intervenção, o foco será na descrição dos instrumentos de coleta e análise de dados empregados para capturar os efeitos da intervenção. Essas escolhas serão justificadas com base em fundamentos da teoria metodológica.

Dessa forma, nossa intenção é contribuir para a pesquisa no campo da Educação Matemática, particularmente para os estudos sobre quadriláteros voltados para avaliar o impacto de práticas pedagógicas específicas na aprendizagem dos(as) discentes. Reconhecemos que as intervenções pedagógicas podem se configurar como estratégias valiosas para aprimorar as práticas de ensino e para identificar soluções para os desafios enfrentados no processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos.

2.2 Cognição Corporificada – o toque que "fala"

Pesquisas envolvendo tarefas que fazem uso de dispositivos móveis com tela sensível ao toque não são novidades, especialmente aquelas relacionadas ao estudo das diferentes formas de manipulação para a resolução de problemas geométricos. Com base em Assis (2020), definimos a manipulação na tela, no contexto da resolução de tarefas geométricas, como o uso de ferramentas ou técnicas de *software* (aplicativos) que permitem ao indivíduo ajustar ou interagir com uma representação visual, geralmente em um ambiente digital, para auxiliar na solução de problemas geométricos.

---

[10] https://cursos.ufrrj.br/posgraduacao/ppgeducimat/files/2021/10/Produto-MADUREIRA-BAIRRAL-.docx-1.pdf

Essa manipulação pode envolver a capacidade de mover, girar, ampliar, reduzir, desenhar ou realizar outras ações sobre os elementos geométricos exibidos na tela. Em essência, a manipulação na tela (*touchscreen*) consiste no conjunto de toques realizados por um indivíduo durante a interação com um dispositivo digital.

Diante do exposto, reconhecemos as manipulações *touchscreen* como ações corpóreas e multimodais que, quando compartilhadas, podem fornecer indícios sobre o processo de construção de significados matemáticos, por parte dos(as) estudantes, em ambientes educacionais mediados por dispositivos com telas sensíveis ao toque (Bairral, 2021). Esse reconhecimento leva em conta a teoria da cognição corporificada, que se baseia na ideia de que o corpo humano é uma extensão da mente e que a mente utiliza o corpo para perceber e interagir com o mundo ao seu redor, através dos sentidos e da linguagem, por exemplo.

Para entendermos um pouco sobre a relação existente entre a linguagem e o pensamento através dos gestos, tomaremos como base McNeill (1992, 2005 e 2008). Os seus estudos sobre a cognição corporificada e a relação entre a linguagem e a ação corporal nos ajudam a analisar produções dos discentes para além da escrita. Suas pesquisas sobre a gestualidade na comunicação humana, com as quais ele argumenta que a linguagem e a gestualidade são inseparáveis e que a compreensão da linguagem deve levar em conta a ação corporal do falante, possibilitam avaliar os indivíduos, a posteriori, por completo.

McNeill (1992) argumenta que as expressões corporais são uma parte fundamental da linguagem e que o significado das palavras e frases é, muitas vezes, determinado pelas expressões gestuais que as acompanham. Ele também defende a ideia de que a compreensão da linguagem é um processo corporificado, que envolve a interação entre o corpo, a mente e o ambiente. Segundo o autor, os participantes de um diálogo produzem quatro tipos de gestos: (i) icônicos (as mãos ilustram a fala por meio de representações em forma de desenho, reproduzindo o real), (ii) ritmados (reprodução de sons com as mãos e/dedos), (iii) dêiticos (ação de apontar) e (iv) metafóricos (gestos realizados no espaço, associados à criação de símbolos para algo abstrato), que representam as manifestações diretas do pensamento desses indivíduo.

Os gestos alimentam e impulsionam o pensamento e a fala, sendo que a linguagem é concebida “como uma dialética de linguagem imagética em que o papel dos gestos é fornecer imagens para o diálogo. O gesto é um componente integral da linguagem nesta concepção, e não apenas um acompanhamento ou ornamento” (McNeill, 2005, p. 1, tradução nossa).

McNeill (2005) considera a imagem como uma forma simbólica que é determinada pelo significado, não por um sistema de contrastes de forma ou padrões de boa forma. As imagens são acionais e visuoespaciais, ou seja, estão relacionadas à ação e à percepção espacial. Elas não são fotográficas, porque a forma da imagem não é simplesmente moldada por estímulos externos, mas sim pelo significado que elas representam. Isso significa que as imagens são formas simbólicas que adquirem significado devido ao contexto em que são utilizadas. Com isso, esse autor introduz novos conceitos que permitem entender a relação entre gestos e fala como combinações de pensamentos, onde os gestos desempenham um papel fundamental na comunicação e na expressão de ideias.

Dessa forma, concordamos com o autor que os gestos podem ser vistos como representações visuais dos processos mentais, tornando os pensamentos mais concretos e tangíveis. Eles são uma parte fundamental da comunicação humana e desempenham um papel importante na expressão de pensamentos e na compreensão mútua, porque "os gestos tornam-se símbolos significativos quando despertam implicitamente em um indivíduo as mesmas respostas que despertam explicitamente em outros indivíduos" (Hidromel *apud* McNeill, 2005, p. 14, tradução nossa).

Por sua vez, os toques na tela, assim como os gestos, podem representar manifestações diretas do pensamento de um indivíduo, à medida que ele realiza uma tarefa proposta. A interação por meio de toques em telas pode ter várias funções, pois pode (a) oferecer informações ou pistas que ajudam as pessoas a entender o que alguém está propondo ou fazendo quando modifica ou observa uma ação; (b) levar a "insights" (percepções ou compreensões profundas de um determinado tema ou assunto) que desencadeiam interpretações em um ambiente que envolve tecnologias digitais, especificamente dispositivos touchscreen. Essas interpretações podem ser críticas para entender o que está acontecendo no contexto; (c) não apenas fornecer informações, mas também ter significados intrínsecos que contribuem para a negociação de significados e interpretações no contexto em que estão ocorrendo. Em outras palavras, as interações com toques em tela desempenham um papel ativo na construção e na troca de significados e interpretações.

Esses tópicos, anteriormente elencados, foram interpretados a partir de Assis (2020), com relação à afirmação:

> [...] toques em telas podem fornecer elementos para um possível entendimento da proposta de quem modifica e/ou observa a ação, possibilitando insights para desencadear interpretações no ambiente com tecnologias digitais, no nosso caso, com dispositivos touchscreen, com significados constitutivos de contributos para negociar

significações e interpretações no contexto de ocorrência. (p.55-56).

Em dispositivos touchscreen, como smartphones e tablet, os indivíduos frequentemente usam gestos de toque para interagir com a interface, como tocar, deslizar, pinçar etc. Esses gestos mimetizam11 ações do mundo real, como tocar em um ícone ou passar o dedo em uma área da superfície da tela. Essa forma de interação é intuitiva e eficaz, aproveitando a capacidade natural das pessoas de realizar ações físicas.

McNeill (2008) afirma que o mimetismo é uma resposta social interativa com a função primária de compreender outra pessoa e é adotada espontaneamente, enquanto a mímica é uma forma de materialização na qual o ouvinte tenta concretizar o gesto de outra pessoa, lançando luz sobre gestos e contextos que, de outra forma, pareceriam obscuros.

Conforme esse estudioso, o mimetismo se transforma em mimese por meio da interpretação da mímica, atuando como uma ferramenta para recuperar o funcionamento da mente de outra pessoa. Em outras palavras, a fusão mental dos envolvidos é possível por meio da mimese (mimetismo interpretado) e da cognição incorporada. Como ilustração, consideramos um estudante posicionado nas primeiras carteiras da sala de aula, que toca e arrasta os vértices do quadrilátero na tela *touchscreen*, equiparando-se a ação de mover objetos no mundo real. Os(as) outros(as) colegas da sala, por sua vez, observam e, em seguida, são incentivados(as) a realizar as mesmas ações em seus próprios dispositivos digitais. Ao reproduzirem a ação do estudante principal, todos os envolvidos experimentaram e vivenciaram o mesmo contexto de pensamento.

Portanto, podemos estabelecer uma relação entre o mimetismo na comunicação gestual e os toques em telas touchscreen, já que ambos envolvem a reprodução de gestos ou ações como parte do processo de comunicação ou interação com dispositivos.

Ao considerarmos os toques na tela em resposta a instruções, seja por meio de enunciados de tarefas ou mediações individuais/grupais, há uma (re)produção ou continuidade de raciocínios. Em ambos os casos, as formas de toque não apresentam diferenças significativas, pois estão intrinsecamente ligados à cognição incorporada, um processo cognitivo que envolve a mente e o corpo atuando em conjunto. Portanto, os toques na tela demonstram como as pessoas pensam e podem até desempenhar um papel na modificação desses pensamentos, de maneira semelhante aos gestos produzidos por uma criança ao explicar uma tarefa. De acordo

[11] Mimetismo é uma espécie de personificação emprestada, ou seja, emprega ações significativas do outro (Mc Neill, 2005, tradução nossa).

com Goldin-Meadow (2006):

> O gesto esclarece como as pessoas pensam e pode até desempenhar um papel na mudança desses pensamentos. O gesto pode, portanto, fazer parte da linguagem ou ele mesmo pode ser linguagem, alterando sua forma para se adequar à sua função. (p.34, tradução nossa).

Goldin-Meadow (2006) registra em seus estudos que o gesto pode fazer parte da linguagem quando acompanhado da fala, apoiando a visão de McNeill. Além disso, o gesto, por si só, pode ser a linguagem na ausência desta. Neste caso, os gestos, considerados não verbais, se transformam em linguagem, revelando nossa capacidade básica de comunicação estruturada. Eles assumem todo o fardo da comunicação, geralmente compartilhado pelas duas modalidades, por meio de uma sequência lógica de raciocínio.

Essa dinâmica é semelhante na interação entre o indivíduo e dispositivos sensíveis ao toque, como *smartphones* ou *tablet.* Ao tocar na tela e interagir com o dispositivo, as pessoas estabelecem conexões entre sistemas simbólicos. Em outras palavras, traduzem seus gestos e toques em ações no mundo digital. Esse processo envolve o uso de componentes sensoriais (sensório) e movimento físico (motor) para a comunicação entre os envolvidos.

A interação com dispositivos touchscreen é um processo que se baseia tanto no mundo real quanto no nosso corpo. Os gestos de toques na tela são, em muitos casos, semelhantes a ações do mundo real, como discutido anteriormente (mimetismo). Essa forma de interação estabelece conexões e relações entre o mundo físico e o mundo digital, desempenhando um papel essencial na negociação de significados e na interpretação de informações em contextos específicos. Portanto, corroboramos a ideia de Assis (2020) de que:

> [...] toques em telas – constitutivos de contributos para negociar significados e interpretação no contexto de ocorrência – estabelecem correspondência entre sistemas simbólicos ao explorarem componentes sensório-motor, possibilitados pela interação com o mundo e, como nosso corpo, estabelecem as relações. (p.56)

Ao considerar manipulações em um ambiente de geometria dinâmica por meio de telas sensíveis ao toque, fica evidente que os gestos de toque desempenham um papel significativo na formação do pensamento e na expressão verbal dos estudantes. Esses gestos de toque não apenas auxiliam na visualização de conceitos geométricos mas também promovem a colaboração e a construção de conhecimento entre os participantes, enriquecendo o desenvolvimento conceitual em geometria (Henrique, 2021).

Nesse contexto, tanto os gestos estudados por McNeill (1992, 2005 e 2008) e Goldin-Meadow (2006) quanto os gestos de toque em telas explorados por Assis (2020) e Henrique (2021) representam a expressão do pensamento do indivíduo por meio da interação, seja ela entre sujeitos ou entre sujeitos e dispositivos. Essa interação atua como um mecanismo de mudança, com efeitos cognitivos internos, gerando imagens como formas simbólicas para complementar a fala ou substituí-la, mas sempre no sentido de externar os pensamentos em uma determinada situação.

Dessa forma, os estudantes, de fato, usam suas mãos para traduzir seus raciocínios, potencializados pelas manipulações em telas em um Ambiente de Geometria Dinâmica (AGD), contribuindo para o desenvolvimento da visualização, onde os participantes constroem, modificam, recriam e compartilham toques e ideias em uma ação recíproca. Tudo isso funciona como uma extensão do pensamento no ato de tocar na tela.

2.2.1 Neurocognição e aprendizagem – o toque que mexe, constrói

A aprendizagem desempenha um papel transcendental no cenário educacional, sendo um catalisador essencial para o desenvolvimento integral dos alunos e das alunas. Esse processo dinâmico não apenas molda as habilidades do pensamento acadêmico (analisar, comparar, identificar causa e efeito, categorizar e classificar, solucionar problemas, persuadir, sintetizar, interpretar, avaliar, comunicar, aplicar etc.), mas também contribui significativamente para a formação de indivíduos capazes de enfrentar os desafios do século, por exemplo, a (hiper)conectividade. No âmbito da matemática, essa importância se destaca, delineando uma jornada que vai além do simples domínio de fórmulas e de nomear e classificar figuras geométricas.

A matemática oferece um terreno fértil para o desenvolvimento do raciocínio lógico e abstrato. Através da resolução de problemas matemáticos, os(as) estudantes tem a oportunidade de aprimorar suas habilidades analíticas, aprendendo decompor desafios complexos em partes gerenciáveis e criar e aplicar métodos sistemáticos para encontrar soluções. Essa capacidade de pensar de maneira estruturada não apenas beneficia os estudos matemáticos, mas também se estende para outras esferas da vida, preparando os indivíduos para enfrentar desafios diversos.

Além disso, a matemática não é apenas uma disciplina isolada; ela se torna uma ferramenta essencial com aplicações em uma variedade de campos, sendo, portanto, crucial explorar essa interconexão na sala de aula. A aprendizagem em matemática capacita os(as) discentes a descobrir e aplicar conceitos em contextos do mundo real, preparando-os(as) para as áreas científica, tecnológica, econômica, entre outras.

Contrariamente à ideia comum, a matemática também oferece um terreno propício para a criatividade e a inovação, algo nem sempre destacado na Educação Básica no Brasil. A resolução de problemas matemáticos deveria conter abordagens criativas e/ou inovadoras, estimulando a imaginação dos alunos e das alunas. Isso não apenas enriquece a experiência de aprendizagem, mas também ressalta a interconexão entre a lógica matemática e a expressão criativa.

Um exemplo recente envolve Júlia[12], uma estudante brasileira do Ensino Fundamental de Belo Horizonte. Em abril de 2022, ao realizar uma atividade sobre números quadrados perfeitos que envolvia os números naturais, Júlia identificou um padrão que divergia das instruções dadas por seu professor e que não era encontrada em livros didáticos brasileiros. Ao compartilhar essa descoberta com ele, ficou claro que havia algo inovador em seu raciocínio. Desse momento, surgiu a “Regressão de Júlia”, um novo método para calcular a raiz quadrada exata de um número natural. Este método também pode ser aplicado para encontrar a medida do lado de um quadrado, dado a sua área.

Entendemos que o caso de Júlia, ocorrido com seu professor e os demais indivíduos da turma dentro do contexto da sala de aula, não deve ser considerado excepcional. Pesquisas recentes, como as de Assis (2020), Henrique (2021) e Madureira (2023), por exemplo, evidenciaram que estudantes que utilizaram Dispositivos Móveis com Toques em Tela (DMcTT), como *smartphones* ou *tablet*, encontraram novas formas de explorar e conceituar figuras geométricas, potencializando a produção corporificada do conhecimento dos envolvidos de forma autoral.

Cabe assinalar que na investigação de Madureira (2023), com foco nos quadriláteros, foi evidenciado que, no processo de transformação dessas figuras por meio das manipulações no ambiente GeoGebra, um aluno do sexto ano do Ensino Fundamental identificou a ideia de congruência. Ele enfatizou que basta ter o mesmo formato e o mesmo ângulo para concluir a transformação da figura objetivada. Por exemplo, para ele, transformar um paralelogramo qualquer em um quadrado requer que os lados e os ângulos do paralelogramo se transformem, respectivamente, nos lados e nos ângulos do quadrado.

Bairral (2021) e Costa (2023) embasam suas abordagens na neurociência, com o

---

[12] Regressão de Júlia: gênia brasileira de 11 anos cria novo cálculo para raiz quadrada. Escrita por Victor Soares. Disponível em: https://www.terra.com.br/byte/ciencia/regressao-de-julia-genia-brasileira-de-11-anos-cria-novo-calculo-para-raiz-quadrada,a3c05efa73e8f7f085c03e8275cf3946v5q0ousw.html. Acesso em: 20/11/23.

propósito de enriquecer as práticas pedagógicas para aprimorar a aprendizagem dos discentes, destacando a interação como um condicionante para a "sincronização neural"[13]. Essa sincronização, revelada em pesquisas recentes da neurociência, refere-se à capacidade do cérebro de se conectar quando os indivíduos estabelecem interações sociais, como é observado em atividades colaborativas (Costa, 2023).

Sob a perspectiva histórico-cultural, as transformações ao longo da trajetória de um sujeito estão intrinsecamente vinculadas às interações entre o indivíduo, a sociedade, sua história de vida e o contexto cultural em que está imerso. Socialmente falando, a interação compreende qualquer intercâmbio comunicativo estabelecido entre os participantes, seja entre sujeitos ou entre sujeito e dispositivo[14] - dentro de um determinado contexto discursivo. Essa dinâmica pode surgir tanto a partir das demandas de uma tarefa quanto de outros interesses do interlocutor. Bairral (2017) afirma que "a interação não é uma cena comunicativa estática, mas dinâmica. Ela não é acidental, isto é, não ocorre ao acaso. Tampouco constitui um intercâmbio unilateral ou unidirecional de mensagens ou outras manifestações discursivas" (p. 105).

Diante do exposto, consideramos que o DMcTT, especificamente *smartphones* e *tablet*, quando introduzido na sala de aula com propósitos pedagógicos, estabelece uma relação recíproca entre o sujeito e o dispositivo. Em outras palavras, o sujeito age sobre o dispositivo, mas, ao mesmo tempo, o dispositivo também influencia o sujeito. Nesse processo interativo, os envolvidos têm intencionalidades e constantemente modificam as relações que se estabelecem no ambiente, seja de forma colaborativa ou não. Quando um indivíduo toca a tela, está interagindo com ela e provocando uma reação, caracterizando, assim, a ocorrência de interação (Bairral, 2017 e 2021). Importa destacar que nem todo processo comunicativo com o DMcTT por meio de toques condiciona necessariamente uma interação. Para que isso ocorra, é fundamental que haja uma ação recíproca, compartilhada e movimentada a partir do que é introduzido.

Os dispositivos móveis sensíveis ao toque, como *smartphones*, *ultrabooks*, *notebooks*, *netbooks*, *GPS* (*Global Positioning System*) e *tablet*, apresentam singularidades de mobilidade, tanto física quanto virtual, e de conectividade. No entanto, ao considerarmos a convergência e a ubiquidade, a diversidade desses dispositivos é reduzida. Adicionalmente, quando observamos a capacidade de baixar e compartilhar diversos aplicativos, manipulando-os por

[13] Destaque da autora.

[14] Para esse contexto, consideramos qualquer conjunto heterogêneo, linguístico ou não, que entra em nossa vida e transforma as relações e os discursos dos sujeitos. (Agamben apud Bairral, 2021).

meio de toques na tela, essa funcionalidade fica geralmente limitada aos *smartphones* e *tablet*.

Essas características impactam a percepção do usuário, uma vez que a mobilidade proporciona a ocupação de diferentes espaços; a conectividade oferece acesso a informações, possibilitando a participação coletiva; a convergência concentra uma variedade de aplicativos que, hoje em dia, podem ser compartilhados mesmo sem uma conexão à *internet*; e a ubiquidade promove a concomitância entre os espaços físico e virtuais.

Os DMcTT têm a capacidade de (re)criar e modificar a maneira como compartilhamos informações e nos relacionamos com o mundo e com os outros por meio de interações. Além disso, possuem o potencial de influenciar nossa subjetividade e nossos processos cognitivos. Bairral (2021) destaca que a convergência e a ubiquidade presentes nesses dispositivos possibilitam que o indivíduo e o coletivo se movimentem dialeticamente por meio da interação. Essa interação se reconfigura não apenas entre o sujeito e a máquina, mas também entre indivíduos e outros indivíduos, não necessariamente limitada ao próprio dispositivo, mas em diferentes espaços percorridos por eles. Para o autor, a subjetividade transita entre o individual e o coletivo, onde a fronteira[15] entre eles é tênue.

O uso de *tablet*, assim como de *smartphones*, na educação matemática, pode ter relevância de natureza cognitiva e epistemológica, uma vez que esses dispositivos proporcionam uma variedade de ferramentas e de recursos que auxiliam os alunos e as alunas a aprender de maneira experimental e sensitiva. Cognitivamente, esses dispositivos são considerados interativos e, portanto, envolventes. Além da mobilidade, conforme sinalizada anteriormente, oferecem uma variedade de estímulos visuais e auditivos que podem estimular a atenção e a memória dos usuários.

Um exemplo é o aplicativo GeoGebra (GG), que possibilita que os estudantes mergulhem em um ambiente dinâmico para (re)construir, observar, manipular, explorar e validar ou refutar conjecturas. Dessa forma, o binômio (DMcTT+GG) apresenta elementos interativos e dinâmicos que podem contribuir para o engajamento e a motivação dos(as) estudantes para aprender.

Epistemologicamente, o uso de *tablet* e *smartphones* também pode influenciar a maneira como as pessoas compreendem e conhecem o mundo. Influenciados pela cultura e pela Educação formal, a mobilidade, a conectividade, a ubiquidade e a convergência desses

[15] Em Bairral (2021), a noção de fronteira emerge na dimensão da contemporaneidade, intricada à característica da mobilidade, a qual não se desfaz, mas se redesenha.

dispositivos introduzem novos cenários, repletos de símbolos, signos e significados, para os usuários. Isso proporciona novas maneiras de construir conhecimento, enriquecendo as experiências educacionais.

Em práticas educativas que envolvem DMcTT+CG, por exemplo, entendemos ser relevante considerar e valorizar os toques na tela, porque eles estabelecem outra linguagem, cujas particularidades trazem implicações em nossos processos cognitivos. Bairral (2017) destaca que "da mesma forma que usamos os gestos para nos comunicar, as manipulações que fazemos na tela de um dispositivo móvel constituem uma forma de transparecer e materializar o pensamento no ato comunicativo, para favorecer uma interação" (p.106).

O autor ressalta ainda que os toques nem sempre são acompanhados pela fala. Eles podem ser feitos diretamente na tela, ou seja, tocando-a para interagir com o dispositivo, ou a partir dela, usando a tela como uma plataforma para realizar a ação sem tocá-la diretamente. Esses toques envolvem movimentos variados, frequentemente combinados, e constituem um sistema simbólico multifacetado. Em ambos os casos, são imagéticos, simbólicos e não se limitam a meros movimentos. São contextualmente situados e possuem intencionalidade. Portanto, é crucial considerar a conjunção de gestos, manipulações com a tela ou a partir da tela, palavras, sentenças, frases, registros diversos, construções em aplicativos etc., pois eles constituem um sistema linguístico único que não pode ser totalmente expresso apenas em termos cinestésicos. Quando combinados com aspectos sociais e cognitivamente situados, esses elementos têm um impacto significativo no pensamento (Bairral, 2017).

Nesse sentido, concebemos os toques como ações que constituem um novo campo de manifestação da linguagem e da cognição. São movimentos novos e diferentes que fazemos com nossas mãos ou dedos e que passam a compor e transformar nosso fluxo de imagens, de interação e de pensamento. Cabe sinalizar que as manipulações constituem toques de diferentes modos, toques simples ou duplos, deslizamentos de tela, toques para fazer um zoom etc.

Portanto, concordamos com Bairral (2017) que as manipulações em tela constituem uma nova forma de manifestação da linguagem e passam a fazer parte da nossa cognição corporificada. Embora a possibilidade de tocar na tela não seja recente, a mobilidade, o tipo de sensibilidade e a performance, oferecidos por certos dispositivos, são novidades e podem ter impactado significativo na forma e no modo de pensar. Compreendemos que essas mudanças geram inovações porque fazem parte de um processo criativo.

Na implementação de tarefas geométricas que envolvem o uso de dispositivos móveis com toques em tela, o sujeito tem a oportunidade de interagir constantemente por meio de uma variedade de ações, (re)construções, desencadeamentos, percepções, representações e (co)evocações. Sabemos que o toque, como tecnologia, não é recente, mas a nossa percepção ao tocar a tela é. Além do mais, cada forma de manuseio na ou com a tela proporciona mapeamentos diferentes em nosso cérebro. Esses podem ser de sensibilidade, de espacialidade ou de continuidade de manuseio direto no objeto ou a partir dele (Bairral, 2017).

A observação, a exploração, a verificação, a formulação de hipótese(s) e o refinamento conceitual ou de propriedades de figuras geométricas são estratégias de raciocínio importantes no processo de ensino e aprendizagem, podendo ser desenvolvidas com recursos mais convencionais, como lápis, papel, quadro branco e livro didático, ou com DMcTT+CG, por exemplo. Todos esses recursos geram descobertas e aprendizagem, porém de maneiras distintas. No caso do DMcTT+GG, a ambiência dinâmica, por meio da manipulação *touchscreen*, corporificada, oferece possibilidades para analisar os tipos de toques, as estratégias e as ferramentas para a construção de figuras.

Os DMcTT não são apenas meios para alcançar um determinado fim. Eles constituem, juntamente com outros recursos semióticos[16], a dimensão expansiva do nosso corpo. Portanto, não pensamos a partir deles apenas, mas também com eles. Esse conjunto dinâmico de objetos e relações, incluindo dinâmicas entre objetos, propicia a emergência de diversos modos de construir, explorar, convencer e raciocinar geometricamente. Todos esses modos devem ser valorizados igualmente na matemática escolar (Bairral, 2021).

A combinação de fala, escrita e manipulação na tela deve ser vista em uma dialética inerentemente instável, isto é, implica em um processo de desenvolvimento no qual esses elementos interagem de maneira dinâmica e em constante mudança, variando de sujeito para sujeito. Da mesma forma, a dialética entre instabilidade (construção, manipulação e exploração), repouso (verificação, análise e conjectura) e recomeço (desafio adicional ou correção de erros) torna-se essencialmente prospectiva no aprendizado com dispositivo móvel (Bairral, 2017).

No caso específico de cometer erros e corrigi-los durante o processo de aprendizagem, isso potencializa a experiência, pois os(as) estudantes percorrem caminhos diferentes para a resolução de um problema, o qual, aliás, nem sempre tem ou precisa ter uma única solução. Podemos citar dois casos observados em relação às medidas de contornos de imagens de quatro

[16] Tais recursos serão abordados no tópico 2.2.3, mais adiante.

quadriláteros com lados opostos paralelos impressos na Ficha 3 (Apêndice 3), utilizando os instrumentos régua e transferidor.

Com relação às quantidades de comprimentos especificadas, foram registradas: uma, quatro e cinco. Ao perguntar sobre essas quantidades, as justificativas foram: (a) na primeira, mencionaram ter registrado uma medida porque ao medir as outras acharam o mesmo valor; (b) na segunda, falaram que acharam quatro medidas para cada figura, devido às medidas das linhas; e (c) na última, não se lembravam o porquê.

Na medição dos ângulos internos, o relato foi a utilização do transferidor para a visualização da abertura com ele. Uns não conseguiam rodar o transferidor para o lado certo, outros tiveram problemas em colocar um lado da figura no zero e o outro lado no outro, e teve gente que encontrou dificuldade em centralizar essa ferramenta na posição adequada. No entanto, um compartilhou uma possível solução: utilizou a régua em cima do transferidor para verificar a medida dos ângulos, depois de posicionar corretamente o transferidor.

Em ambos os casos citados anteriormente, a interação permitiu a reconfiguração na maneira de medir e esclareceu o que deveria ser medido de fato. Inclusive, pontuando, para quem ainda estava com dúvidas, as ferramentas adequadas para cada tipo de medição, visto que havia estudantes que tinham pulado essa parte da tarefa ou registrado as medidas de comprimento em vez dos ângulos internos.

Bairral (2021) afirma que através das manipulações em tela, que são mais do que gestos, o pensamento de quem interage com ela torna-se concreto. Ao compartilhar e observar os movimentos dos usuários, novas interações surgem, constituindo um novo campo de significação e produção de conhecimento.

Identificar e analisar o tipo de manipulação é de interesse para esta pesquisa. Dessa forma, ela pode fornecer elementos que contribuam tanto para a aprendizagem de conceitos de quadriláteros quanto para a natureza da prática pedagógica, como, por exemplo, tarefas que utilizam DMcTT+CG em sala de aula. Além disso, pretendemos analisar como os discentes organizam suas estratégias de raciocínio na resolução dessas tarefas, visando potencializar as habilidades dos aprendizes na exploração, na elaboração de conjecturas e na construção de diferentes meios para classificá-las, materializando-as por meio de diversas formas de comunicação, como escrita, pictórica, gestual, manipulação na tela de um dispositivo móvel etc.

2.3 Recursos pedagógicos –Tarefas e toques em tela como recursos pedagógicos e semióticos

No contexto escolar, entendemos que a elaboração, a implementação e a (re)avaliação de tarefas na área da educação são processos cruciais para o sucesso da aprendizagem dos alunos e das alunas. Elas devem ser construídas por atividades que envolvam os indivíduos no auxílio do desenvolvimento de habilidades[17], de conhecimentos e de valores entendidos como importantes.

2.3.1 Considerações para o design de tarefas

A elaboração de tarefas pressupõe a definição clara dos objetivos de aprendizagem e a identificação dos recursos necessários para classificá-los. É fundamental que os objetivos sejam específicos, mensuráveis e alinhados ao currículo. Além disso, a tarefa deve apresentar um desafio adequado ao nível de entendimento dos estudantes, proporcionando um equilíbrio entre dificuldade e acessibilidade.

O nosso primeiro contato teórico com a ideia de tarefas ocorreu em sincronia com o nosso grupo de pesquisa GEPETICEM[18]. A leitura de Cyrino e Jesus (2014) nos auxiliou a refletir sobre a importância das tarefas nas práticas pedagógicas. Conforme destacam essas autoras, "as tarefas podem se tornar sinônimo de listas de exercícios, nas quais o trabalho dos alunos se limita a resolvê-las de forma mecânica" (Cyrino; Jesus, 2014, p. 753). Esse tipo de tarefa, frequentemente, é o mais utilizado por docentes ao apresentar um conteúdo para que os estudantes o reproduzam. No entanto, é importante destacar que não há necessariamente um problema nisso, desde que o objetivo seja esse. "À vista disso, os(as) docentes precisam ter clareza que, ao selecionar e organizar tarefas, devem contemplar processos cognitivos relativos à compreensão, ao estabelecimento de estratégias e de procedimentos e à validação" (Silva; Madureira, 2022, p.3).

Silva e Madureira (2022) compartilham da compreensão de que a tarefa é uma proposta feita pelo(a) docente para ser aplicada em sala de aula, com o objetivo de direcionar a atenção dos discentes para uma determinada ideia a ser alcançada. Eles também destacam a importância de analisar as potencialidades das tarefas, fazer adaptações conforme necessário, planejar a implementação, organizar recursos e, quando apropriado, explorar novas ferramentas

[17] No contexto geral, consideramos habilidades como aptidões desenvolvidas ao longo do processo escolar, abrangendo práticas curriculares, cognitivas e socioemocionais.
[18] http://www.gepeticem.ufrrj.br/sobre-o-grupo/

disponíveis.

Quando nos referimos a tarefas no contexto educacional, estamos abrangendo uma ampla variedade de propostas, tais como problemas, atividades, exercícios, projetos, jogos, experiências e investigações. Cada uma dessas formas de tarefas tem suas características e objetivos específicos, mas todas têm em comum o propósito da aprendizagem. Elas são oferecidas pelos professores e pelas professoras que podem ser adaptadas e direcionadas para diferentes grupos, considerando suas necessidades, interesses e contextos de aprendizagem.

É importante destacar que os(as) docentes têm liberdade de selecionar e adaptar as tarefas de acordo com as necessidades e características de seus alunos e de suas alunas. Isso significa que as tarefas podem ser individualizadas para atender às necessidades específicas de cada indivíduo, levando em consideração o seu conhecimento prévio, habilidades e interesses. Além disso, as tarefas também podem ser direcionadas para subgrupos dentro de uma turma, considerando as diferenças de aprendizagem entre os indivíduos.

Podemos afirmar que as tarefas implementadas junto aos estudantes estão intrinsecamente ligadas ao processo de aprendizagem deles. Resumidamente, a tarefa é a proposta de trabalho apresentada pelo educador e pela educadora a seus discentes, enquanto a atividade é a resposta do aluno e da aluna, ou seja, o que esses indivíduos realizam para cumprir o que foi solicitado (Gusmão, 2019).

Pensando nisso, Gusmão (2019) sugere que as tarefas devem levar em consideração as ideias matemáticas importantes, os conhecimentos prévios dos(das) estudantes e os objetivos de aprendizagem do currículo, *maximizando-o, sempre que possível*[19]. Dependendo do tipo de tarefas, elas não apenas influenciam as aprendizagens dos alunos e das alunas, mas também afetam a forma como esses indivíduos percebem a matemática.

A configuração do design de tarefas baseia-se nas considerações mencionadas anteriormente. Além disso, é crucial considerar as classificações das tarefas, que se fundamentam no tipo de raciocínio envolvido, nas formas de representação utilizadas, nos processos de comunicação, na autonomia e nas demandas cognitivas que elas podem desenvolver. Tarefas cujas respostas não exigem estabelecimento de relações entre conceitos envolvidos são denominadas tarefas fechadas (Gusmão, 2019). Geralmente, essas tarefas possuem uma única resposta correta e estão mais focadas na aplicação de procedimentos e

[19] Grifo nosso para que os professores e as professoras avaliem tanto os objetos do conhecimento quanto as habilidades propostas no currículo, de forma a não se limitarem, mas sim ampliarem as aprendizagens de conteúdos matemáticos, sempre que houver possibilidades.

técnicas pré-determinadas. Elas tendem a ter um formato mais estruturado, com respostas objetivas, e não oferecem muita flexibilidade ou espaço para diferentes abordagens.

Por outro lado, as tarefas abertas permitem múltiplas respostas, diversas representações, maior autonomia e envolvem processos de comunicação. Elas estimulam os indivíduos a buscar diferentes soluções, a considerar diferentes perspectivas e a justificar suas escolhas.

Stein e Smith (2000) discutem a necessidade de ir além da simples aplicação de tarefas em sala de aula e enfatizam a importância de analisar e refletir sobre como essas tarefas podem melhorar a compreensão dos(as) discentes e as estratégias de ensino dos professores e das professoras. Além disso, elas abordam a importância da colaboração entre discentes para discutir e analisar as tarefas utilizadas em sala de aula. As autoras destacam a ideia de trabalho em equipe de professores como uma abordagem em que os educadores se reúnem para analisar, adaptar e desenvolver tarefas matemáticas que se alinhem aos objetivos educacionais e às necessidades dos alunos e das alunas.

De fato, autores como Stein e Smith (2000) convidam-nos a refletir sobre a importância das tarefas matemáticas como ferramenta para promover a reflexão dos(as) docentes e para melhorar a prática do ensino da matemática, enquanto Gusmão e Font (2020) enfatizam a importância de considerar as necessidades de aprendizagem e o desenvolvimento das habilidades matemáticas.

Considerando esses aspectos, é importante ressaltar que um design de tarefa eficaz é aquele que combina o pensamento matemático com os conceitos e habilidades matemáticas, estimulando a curiosidade dos(as)estudantes e encorajando-os(as) a explorar e a desenvolver suas intuições. Além disso, também é relevante considerar a avaliação por parte dos(as) docentes durante a elaboração e implementação dessas tarefas, garantindo sua qualidade e alinhamento com os objetivos a serem alcançados.

2.3.2 Quadriláteros em design de tarefas

Dentro do conjunto universo dos quadriláteros, há diversos tipos que podem ser explorados no design de tarefas. Isso ocorre porque cada tipo de quadrilátero possui características e singularidades distintas, tornando-o relevante para diferentes situações de aprendizagem. É fundamental que os alunos e as alunas tenham, pelo menos, uma noção da existência desses tipos para compreender as particularidades de cada um nos momentos apropriados. Nesse contexto, torna-se necessário considerar duas abordagens no ensino e na aprendizagem de quadriláteros: a classificação e a definição.

Ao explorarmos o trabalho sobre a classificação de quadriláteros proposta por Villiers (1994), notamos que ele divide as figuras em três subgrupos distintos, simplificando as diferentes formas existentes. Essa classificação possibilita uma abordagem clara e didática dos diversos tipos de quadriláteros. Na Figura 5, apresentamos um exemplo ilustrativo dessa divisão, que mostra, de maneira simplificada, os diferentes grupos.

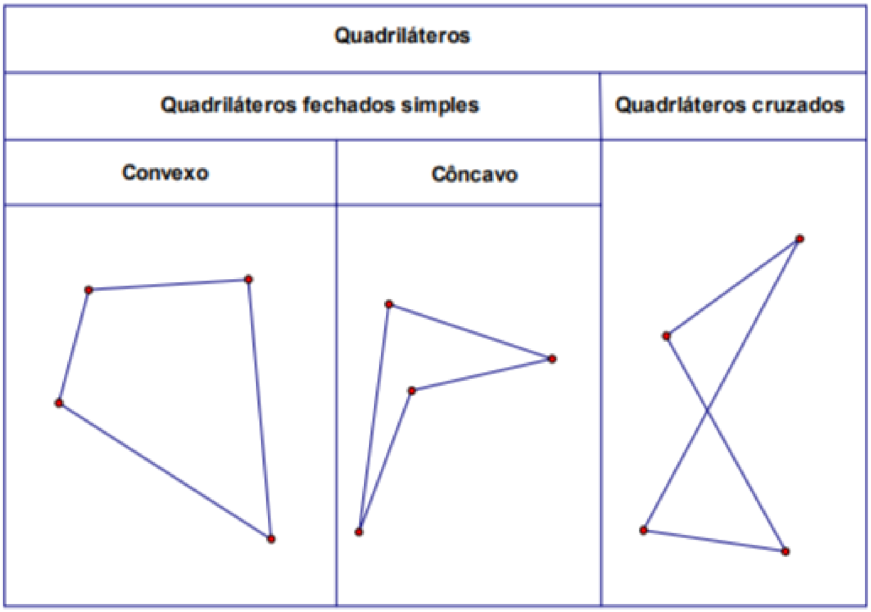


Figura 5 - Divisão de quadriláteros a partir de Villiers (1994)
Fonte: Elaborada pelo autor

Na figura acima, podemos observar dois subgrupos pertencentes à família de quadriláteros fechados simples, convexo e côncavo, nos quais os lados se encontram apenas nos vértices. O primeiro é composto pelos quadriláteros convexos, em que todos os ângulos internos são menores que 180°. O segundo é formado pelos quadriláteros côncavos, que possuem pelo menos um ângulo interno reflexo (maior que 180° e menor que 360°). Ambos os subgrupos são tratados com relevância para a compreensão das suas propriedades. No último subgrupo, não menos importante, encontramos os quadriláteros cruzados, que possuem um cruzamento interno formando dois conjuntos distintos de um par de lados opostos que se interceptam.

É importante destacar que a compreensão e a classificação dos quadriláteros não se limitam apenas a essa divisão proposta por Villiers. Existem outras abordagens de classificação, como, por exemplo, considerar quadriláteros com e sem os lados se interceptando. Assim, a escolha da classificação dependerá dos objetivos educacionais e das necessidades específicas dos(as) estudantes em seus processos de aprendizagem.

A partir das contribuições de Villiers (1994), o processo de construção de conceitos relacionados a essas figuras ampliou-se ao explorar as possibilidades de classificação dos paralelogramos, especificamente na investigação das duas abordagens de classificação: a classificação por partição e a classificação hierárquica. Isto é, duas representações esquemáticas sobre paralelogramos.

Na classificação hierárquica, os atributos que definem os paralelogramos são organizados em uma estrutura que condiciona características em comum, em que os conceitos mais específicos formam subconjuntos dos conceitos mais gerais. Por outro lado, na classificação por partição, essas figuras são agrupadas sem apresentar interseções, ou seja, sem propriedades em comum. Isso remete a uma organização das figuras em apenas uma categoria específica, sem sobreposição. Na Figura 6, ilustramos um recorte que traduz essas classificações.

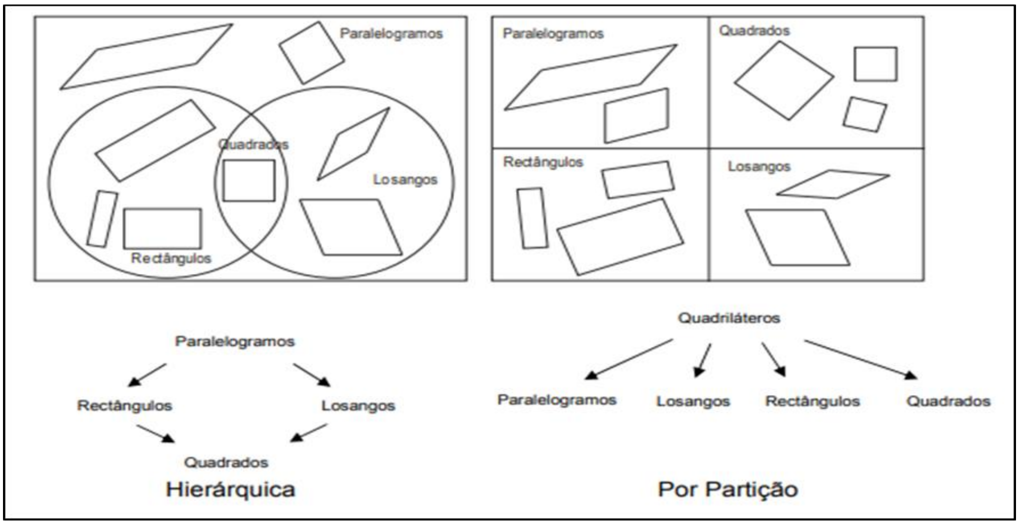


Figura 6 - Classificação de quadriláteros
Fonte: Recorte de Villier (1994)

No modelo de classificação hierárquica, como mencionado anteriormente, os retângulos e os losangos são considerados subconjuntos dos paralelogramos. Essa abordagem permite visualizar as relações de inclusão entre os diferentes tipos de quadriláteros, destacando as propriedades comuns e as características distintivas de cada subconjunto. É importante ressaltar que esse modelo de classificação é amplamente utilizado nos livros didáticos brasileiros e adotado pela maioria dos(as) docentes no ensino de quadriláteros.

De outro modo, o modelo de classificação por partição considera as características individuais dos quadriláteros sem necessariamente relacionar as propriedades em comum entre eles. Nessa representação esquemática, as propriedades dos quadriláteros podem ser exploradas por meio da investigação e análise das figuras, permitindo aos discentes conjecturarem e descobrirem as propriedades compartilhadas por meio da exploração ativa[20].

Entendemos que ambas as abordagens têm suas vantagens e contribuições para a compreensão dos paralelogramos. Nesse sentido, ao considerar esses dois modelos de classificações, acreditamos ser importante não se limitar a uma única representação esquemática envolvendo esses tipos de quadriláteros. Desse modo, é possível enriquecer os processos de ensino e aprendizagem, proporcionando aos estudantes uma compreensão mais abrangente e significativa dessas figuras.

Ampliar o conceito de objetos matemáticos, especificamente os geométricos, pode demandar subjetividades e a definição deles requer atributos específicos. Nesse sentido, entendemos que a compreensão sobre a natureza das definições é relevante tanto no conhecimento do objeto em estudo quanto na capacidade de definir, principalmente as que advêm de tarefas que fazem uso do Ambiente de Geometria Dinâmica.

No Brasil, é comum encontrarmos, em livros didáticos ou em apostilas educacionais[21], definições de quadriláteros expressas de forma concisa, muitas vezes replicadas por docentes aos seus alunos e alunas, o que afeta tanto a maneira como os estudantes veem as definições quanto a maneira como os professores ensinam. Govender e Villiers (2004) assinalam que essa abordagem estruturada pode facilmente levar a uma percepção comum, mas falsa, de que existe apenas uma descrição para cada objeto definido em matemática.

Com isso, os professores e as professoras que começam o conteúdo com as definições de objetos geométricos trazem uma falsa impressão para os(as) estudantes de que elas são dadas a priori na natureza, ao invés de conduzi-los(las) a perceberem que essas definições matemáticas não existem sem antes ter havido um processo humano de experiência e de comprovação, de modo que tudo o que podemos fazer é “descobri-las”[22]. Nesse sentido, “o fato de que as definições não são descobertas, mas “invenções” humanas, com o objetivo principal de uma comunicação matemática precisa, não é abordado” (Govender e Villiers, 2004, p.35, tradução nossa).

---

[20] Ação em que o aluno e a aluna realizam a investigação com o objetivo de construir, transformar e aprimorar os seus conhecimentos, tornando-se protagonistas das suas aprendizagens, em que o(a) docente desempenha o papel de mediador.

[21] Materiais didáticos elaborados por um ou por uma equipe de docentes para serem utilizados, geralmente em sala de aula, cujos objetivos principais são compactar objetos de estudo e tornar o material mais acessível financeiramente. Na maior parte dos casos, as apostilas educacionais são utilizadas em colégios particulares ou em cursinhos preparatórios, principalmente em cidades do sudeste.

[22] Grifo dos autores (Govender e Villiers, 2004, p.35).

Diante do exposto, concordamos com esses autores que as definições em geometria devem ser econômicas e não devem conter informações dispensáveis. Ademais, devemos ter ciência de que pode existir mais de uma definição alternativa para o mesmo objeto geométrico. A condição para que essas definições sejam validadas é conter informações suficientes, relacionadas a propriedades, axiomas ou teoremas, para garantir apenas os elementos do conjunto que queremos definir e nenhum outro a mais. Neste caso, a (re)configuração no design de tarefas consegue suprir essa demanda, devido à possibilidade de os indivíduos se relacionarem, a partir de conhecimentos prévios, com modelos ou experiências vivenciadas, cuja finalidade seja classificá-los em algum estágio do processo de definição do objeto geométrico. Cabe destacar que existem diferentes definições para os elementos geométricos, mas que precisamos ser fiéis às definições que adotamos.

A definição de quadriláteros, assim como outros objetos geométricos, emerge a partir de conceitos. Contudo, Govender e Villiers (2004) descrevem três tipos de definições: (a) corretas, que podem ser econômicas ou antieconômicas; (b) incompletas; e (c) incorretas. Apesar das duas últimas não serem validadas como uma definição adequada, acreditamos que elas podem auxiliar na fronteira dos conceitos para conduzir os indivíduos a perceberem as definições econômicas – que contêm apenas propriedades necessárias e suficientes – ou antieconômicas – que, além de informações redundantes, têm propriedades suficientes.

Assim sendo, os alunos e as alunas devem estar cientes de que uma descrição de um objeto geométrico, por exemplo, deve conter propriedades necessárias e suficientes. Uma forma de validar ou não uma definição, expressada por eles e elas, é construir o objeto de acordo com a descrição para ver se ela realmente resulta na figura desejada. Inclusive, poderão avaliar, durante o processo, se essa descrição é uma definição econômica ou antieconômica. Nesse contexto, o AGD pode ajudar tanto na validação quanto na avaliação da descrição, isto é, na (re)formulação da definição de quadriláteros específicos, por exemplo.

Tanto as classificações como as definições envolvendo quadriláteros serviram de alicerce para a ampliação do conhecimento em relação a essas duas temáticas, as quais serão empregadas nas análises. Conceber a definição como algo arbitrário, em que pode haver definições diferentes ou alternativas corretas para um mesmo conceito estudado, como, por exemplo, ao definir um trapézio como um quadrilátero com pelo menos um par de lados opostos paralelos, ou como um quadrilátero tendo exatamente um par de lados opostos paralelos. No caso da primeira definição, um paralelogramo também é um trapézio, mas na segunda, não é. Diante disso, a depender da definição dada a um quadrilátero, há implicação na forma de classificação.

2.3.3 Tarefas e recursos tecnológicos na configuração de signos

Na implementação de tarefas, os(as) docentes podem empregar uma variedade de recursos pedagógicos, como quadro branco, apresentações de *slides*, recursos digitais interativos, jogos educativos, livros didáticos, tecnologias de compartilhamento online, modelos e manipulativos, fichas ou folhas de tarefas, entre outros. Esses elementos devem estar integrados ao design de tarefas, com o propósito de oferecer oportunidades para que os(as) estudantes explorem, experimentem e validem o objeto de estudo. As atividades promovidas por meio desses recursos podem ser realizadas tanto de forma individual quanto em grupo, utilizando diferentes abordagens como discussões, apresentações, trabalhos de pesquisa, entre outras estratégias.

Na revisão de literatura apresentada no Capítulo I, deparamo-nos com alguns estudos que apresentam implementações de tarefas envolvendo instrumentos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem, especialmente no contexto da geometria. Dalcin e Molfino (2012), por exemplo, exploraram o uso de lápis, de papel e do GeoGebra em computadores para a resolução de tarefas que visavam aprofundar a compreensão das propriedades e características dos quadriláteros. Este estudo foi conduzido com estudantes do primeiro ano da faculdade de matemática, proporcionando uma abordagem não convencional para classificar quadriláteros. Os resultados revelaram que os alunos foram capazes não apenas de conceber novas famílias de quadriláteros, como aqueles com três lados ou três ângulos iguais, mas também de justificar a inexistência de outras categorias, como os quadriláteros com quatro lados iguais e apenas três ângulos iguais.

Bairral e Silva (2018) propuseram uma série de tarefas centradas no desenvolvimento do conhecimento conceitual, na identificação e classificação, e nas propriedades dos quadriláteros. Essas atividades foram conduzidas usando o FreeGeo em *smartphone*s, envolvendo uma turma do segundo ano do Ensino Médio. Durante as tarefas, foram observadas interações entre os estudantes, bem como entre os estudantes e os dispositivos. Os discentes manipulavam ativamente suas construções, observavam regularidades específicas para cada figura e derivavam novos significados a partir de suas próprias conclusões.

Henrique (2021), ao trabalhar com estudantes do oitavo ano do Ensino Fundamental, abordou tarefas relacionadas a retas paralelas interceptada por uma transversal, incorporando o

GeoGebra em *smartphones*. Destaca-se, em seu trabalho, a ênfase na investigação da construção e do desenvolvimento conceitual, além da identificação de metáforas relacionadas a essa temática. As contribuições e singularidades do AGD, bem como sua funcionalidade em dispositivos com tela sensível ao toque, aclarada por ele, ampliaram significativamente nossa compreensão sobre a formação de signos.

A pesquisa conduzida por Assis (2020) apresentou uma sequência de tarefas que incorporava dispositivos móveis, especificamente *tablet*, no processo de construção do entendimento conceitual de isometria com aprendizes do primeiro ano do Ensino Médio. Além de contribuir para o ensino de geometria, a pesquisa destacou as potencialidades dos toques em tela no contexto da aprendizagem. Ao reconhecer as manipulações em telas como signos, Assis enaltece os artefatos *tablet*-GeoGebra-tarefa, atribuindo-lhes a capacidade de instigar raciocínio lógico, fomentando pensamentos estratégicos na resolução de tarefas e revelando singularidades no processo de aprendizagem em isometria.

A análise de uma sequência didática proposta por Filho (2007), em colaboração com outras educadoras, revelou um enfoque na construção de evidências relacionadas aos quadriláteros, indo além das meras propriedades. Nela, observamos que algumas atividades incorporavam o uso de dispositivos tecnológicos. Na fase inicial, a atenção voltou-se para a classificação dos quadriláteros, explorando suas semelhanças e diferenças. Nas etapas subsequentes, a introdução do *Cabri Géomètre* em um ambiente computacional visou reconhecer as propriedades dos quadriláteros notáveis e sistematizar as definições.

A integração da tecnologia de Geometria Dinâmica em algumas dessas tarefas contribuiu pragmaticamente para a construção de evidências, graças a sua abordagem predominantemente indutiva. A natureza indutiva dessas abordagens sugere que elas têm o potencial de serem aplicadas de maneira eficaz no âmbito da Educação Básica.

Todos os estudos mencionados anteriormente geraram representações simbólicas por meio da aplicação de tarefas que incorporam o AGD em dispositivos digitais. Contudo, é relevante destacar que reconhecemos as pesquisas conduzidas por Assis (2020) e Henrique (2021) como as que exploraram a perspectiva semiótica no contexto do desenvolvimento de conceitos geométricos. Isso foi alcançado através da utilização de alguns artefatos mediadores, como DMcTT, AGD, folhas de tarefa, gestos, expressões verbais e manipulação direta na/com a tela.

O conceito de mediação semiótica refere-se à maneira como ferramentas, símbolos e signos atuam como auxílios para que os alunos e as alunas internalizem conceitos matemáticos e desenvolvam seu pensamento (Bussi e Mariotti, 2008). Em outras palavras, manifesta-se por meio do papel dos artefatos e dos signos no processo de aprendizagem em Educação Matemática. Nesse contexto, a contribuição dos artefatos vai além do nível prático, estendendo-se ao nível cognitivo. No que diz respeito aos signos, sua utilização visa explorar os processos semióticos, direcionando-os para a evolução dos conceitos matemáticos.

Bussi e Mariotti (2008) destacam a importância de explorar o sistema de relações entre artefato, tarefa e conhecimento matemático. Elas ressaltam que um artefato está intrinsicamente ligado a uma tarefa específica, buscando fornecer uma solução apropriada. Paralelamente, esse mesmo artefato está associado a um conhecimento matemático particular. Desse modo, torna-se evidente uma dupla relação semiótica, artefato-tarefa e artefato-conhecimento específico.

De maneira mais abrangente, os artefatos desempenham um papel fundamental na transição entre a esfera da prática e a esfera intelectual, e vice-versa. Podemos considerar o artefato como um dos principais catalisadores da evolução e do progresso, facilitando a interação entre a aplicação prática e a compreensão conceitual no contexto do conhecimento matemático. Sintetizamos essa ideia na Figura 7.

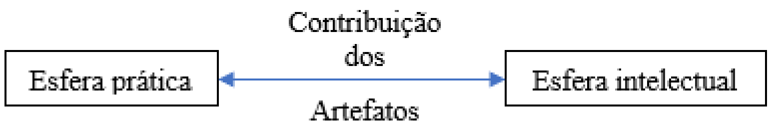


Figura 7 - Contribuição dos artefatos
Fonte: Elaborada pelo autor

A ideia de contribuição dos artefatos, conectando as duas esferas, sugere a utilização de ferramentas não apenas para realizar uma tarefa específica, mas também para a construção de novos significados relacionados ao uso prático dessas ferramentas. Essa abordagem pressupõe que, sob a orientação dos(as) docentes, os(as) estudantes podem gerar e/ou aprimorar significados enquanto interagem com as ferramentas. Assim, qualquer artefato pode ser considerado uma ferramenta de mediação semiótica, desde que seja (ou concebido para ser) intencionalmente empregado pelo professor e pela professora para mediar um conteúdo matemático por meio de uma intervenção didática planejada, conforme discutido por Bussi e Mariotti (2008).

Concordamos com as autoras que o processo de construção do conhecimento matemático não está diretamente ou simplesmente vinculado à prática ou ao mero uso de artefatos. Dois exemplos ilustrativos desse fenômeno incluem o emprego do pantógrafo no estudo dos polígonos e o uso do compasso na definição do círculo, conforme relatado por elas. O pantógrafo, nesse contexto, pode ser utilizado para reproduzir polígonos em diferentes proporções, enquanto o compasso é empregado para desenhar círculos. Ambos os artefatos promovem experiências práticas, sendo o primeiro de cobrir (ou contornar) e o segundo com base em formas redondas.

Compreender abstratamente o polígono fechado simples como uma figura geométrica plana limitada por uma sequência finita de segmentos de reta, na qual os ângulos internos formados por eles podem classificá-los em dois tipos – convexo, se todos os ângulos internos forem menores que 180°, e côncavo, se pelo menos um ângulo interno for maior que 180° - representa um salto conceitual que transcende a experiência sensorial imediata. O mesmo desafio é enfrentado ao conceber o círculo como um conjunto de pontos equidistantes do centro.

Essa transição da esfera prática para a intelectual implica a capacidade de generalizar e raciocinar dedutivamente sobre as propriedades dos polígonos ou círculos. Em ambos os casos, é necessário o desenvolvimento de um processo cognitivo mais complexo, que pode ser atenuado com a construção de signos.

Percebemos que, na Educação Matemática, a noção de mediação semiótica é amplamente utilizada. No entanto, é inovadora em relação aos artefatos, cuja contribuição das ferramentas integra as tarefas escolares na promoção de signos, especialmente na área da matemática. Bussi e Mariotti (2008) afirmam que:

> além de considerar um artefato (seja um ábaco ou uma calculadora de bolso) uma poderosa prótese que os alunos possam se apropriar para resolver determinadas tarefas, um artefato pode ser explorado pelo professor como uma ferramenta de mediação semiótica para desenvolver signos matemáticos genuínos, desvinculados do uso do artefato, mas mantendo com ele um vínculo semiótico profundo. (p. 777, tradução nossa).

Na perspectiva de Vygotsky, os signos representam uma categoria específica de símbolos que carregam consigo um significado social e culturalmente compartilhado. Esses signos adquirem sua significância por meio das interações sociais e da cultura em que estão imersos. A relação direta dos signos com a linguagem torna-os instrumentos para representar conceitos que são compartilhados por uma comunidade.

Tomemos como exemplo as placas de trânsito, que são paradigmáticos signos. Essas placas possuem um significado culturalmente compartilhado que indica ações específicas a serem tomadas por motoristas. A placa (Figura 8) com a imagem de um triângulo invertido acondicionada em uma estrada, por exemplo, carrega um significado socialmente acordado – *dê a preferência* – assinalando ao condutor a obrigatoriedade de dar preferência ao veículo que circula na via em que vai entrar ou cruzar, devendo reduzir a velocidade ou parar.

Todavia, se o mesmo objeto fosse apresentado em uma aula de geometria, especificamente no Virtual Math Teams com GeoGebra, para tratar de semelhança de triângulos, conforme abordada na pesquisa de Brito (2022), o significado seria diferente, devido ao contexto situado e à intencionalidade desse artefato na produção de significados. A semelhança desse objeto na geometria trataria da igualdade na correspondência dos ângulos internos e da proporcionalidade dos lados correspondentes, enquanto no trânsito estaria relacionada com placas parecidas nas estradas e rodovias. Nesse contexto, reafirmamos que "a mediação semiótica se constitui como um processo de construção de significados, mediante a apropriação de signos produzidos através da interação com o outro" (Assis, 2020, p. 71).

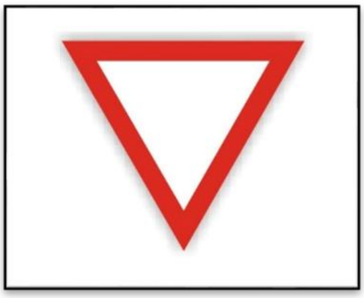


Figura 8 - Placa de sinalização de trânsito "dê a preferência"
Fonte: Google imagens

Em Educação Matemática, os signos de artefatos podem desempenhar um papel fundamental no desenvolvimento do processo semiótico, centrado no uso do artefato por meio da relação tarefa-artefato. Essa interação é finalizada com o propósito de construir conhecimento, uma vez que os signos dos artefatos expressam a relação entre a tarefa e o conhecimento.

Nessa perspectiva, os artefatos se tornam mediadores essenciais para a transformação de significados, facilitando a compreensão e a internalização de conceitos matemáticos. A dupla relação semiótica com um artefato, conforme denominada por Bussi e Mariotti (2008), é caracterizada como potencial semiótico. Isso ocorre porque os significados pessoais estão intrinsecamente ligados ao uso do artefato, especialmente em relação ao objetivo de estudo, ao passo que os significados matemáticos podem estar associados tanto ao artefato quanto ao seu uso.

Dessa forma, ocorre uma polissemia compartilhada dos signos, ou seja, existe signo pivô que atua entre os processos de significados pessoais e os significados matemáticos. Essa relação é adaptada e representada por Assis (2020) na Figura 9.

Figura 9 - Representação da polissemia dos signos
Fonte: Assis (2020, p.70)

É importante ressaltar que os signos que surgem das atividades com os artefatos são elaborados socialmente, cuja principal característica é que seu significado mantém um forte vínculo com as operações realizadas (Bussi e Mariotti, 2008). Toda tarefa que visa ao desenvolvimento de conceitos ou de provas matemáticas, utilizando artefatos, especialmente os tecnológicos, como um AGD, no processo de ensino e aprendizagem, particularmente no contexto da geometria, conforme evidenciado nas pesquisas mencionadas anteriormente, impulsiona a produção e a elaboração de signos.

Essas atividades, por meio de recursos como tarefa e tecnologias digitais, podem ser conduzidas tanto de forma individual quanto em grupo para promover a produção – criação de representações visuais ou símbolos – e a elaboração – envolve a interpretação e transformação dessas representações para aprofundar a compreensão dos conceitos matemáticos – de signos. Assim sendo, diferentes meios semióticos, como a escrita, a fala, a representação pictórica, gestual, a manipulação na tela de um dispositivo móvel, entre outros, estão disponíveis para a produção e elaboração de signos, seja de maneira espontânea ou explicitamente exigida pela própria tarefa.

A evolução dos signos, correspondente à transição de significados pessoais, impregnados pelo contexto do artefato no ambiente para significados matemáticos conscientes, não é um processo trivial, espontâneo ou garantido. Por isso, o papel de orientação do(a) docente é crucial. Além do desenho da tarefa, o(a) professor(a) desempenha um papel ativo ao participar das atividades, observar e explorar as indicações semióticas do contexto para tomar decisões durante as interações. Assim,

> o principal objetivo da ação do professor em uma discussão matemática é promover a transição para signos matemáticos, levando em conta as contribuições individuais e explorando as potencialidades semióticas decorrentes do uso do artefato específico. (BUSSI e MARIOTTI, 2008, p. 755, tradução nossa).

Em termos mais simplificados, o(a) docente atua como facilitador(a), utilizando o artefato para mediar o conteúdo matemático entre os discentes. Esse artefato funciona como uma ferramenta de mediação semiótica, permitindo a elaboração de uma variedade de significados que estão interconectados com outros signos.

Assis e Bairral (2022) ressaltam a importância dos signos pivô, destacando-os como uma categoria especial que desempenha um papel crucial na edificação do conhecimento matemático. Além disso, propõem a integração dos toques na tela como um recurso adicional ao conjunto semiótico, especialmente no contexto do aprendizado matemático. Embasados nos domínios construtivo e relacional, os autores defendem que as manipulações na tela podem desempenhar uma função fundamental no desenvolvimento cognitivo dos(as) estudantes, por meio da utilização de AGD, que se articulam durante a interação.

Estudos indicam que esses domínios de manipulação não são independentes; ao contrário, eles se entrelaçam durante a interação dos(as) estudantes com o ambiente. O domínio construtivo envolve a criação e a construção de objetos geométricos no ambiente, engajando os indivíduos na manipulação direta de elementos geométricos, como arrastar vértices, construir linhas e criar figuras. Isso proporciona a oportunidade de explorar propriedades geométricas por meio da construção de objetos.

Na condição do domínio relacional, as atividades abrangem a exploração das relações e propriedades que emergem das construções geométricas. Dessa maneira, os estudantes podem conjecturar, investigar e analisar as conexões entre diferentes elementos, como ângulos, comprimentos de segmentos e relações de congruência e semelhança.

No contexto desses domínios, em termos de pensamento geométrico, verificamos que Bairral et al. (2015) e Arzarello et al. (2014) foram uns dos pioneiros em suas análises de experimentos de ensino utilizando o programa Construtor Geométrico. Eles sinalizaram avanços para as manipulações básicas ou ativas a partir da tela, respectivamente, denominadas por construtiva e relacional.

Pesquisas posteriores a esses autores, com outros Ambientes de Geometria Dinâmica e outros dispositivos, como o GeoGebra e o *smartphone*, têm sinalizado que, no domínio relacional, as manipulações propiciam um refinamento no pensamento matemático e que ambos os domínios, construtivo e relacional, estão entrelaçados entre si (sinalizado anteriormente), isto é, o processo no domínio relacional passa, primeiramente, pelo domínio construtivo.

Ainda nessa linha de raciocínio, trabalhos mais recentes, como o de Assis (2020) e o de Henrique (2021), especificaram esses domínios diretamente, ao contrário de Madureira (2023), que citou somente domínios de manipulações para a temática de quadriláteros, no sentido de trazer significados para a aprendizagem. Em todas essas pesquisas, há evidências de produção e de elaboração de signos a partir desses domínios, o que nos revela uma implicação direta entre os domínios e os signos.

Assis e Bairral (2022) defendem que "no constante movimento do raciocínio geométrico, em ambos os domínios, a visualização, a representação e a conceituação se desenvolvem a partir de signos emergentes dos sujeitos negociadores" (p. 426). Enquanto no domínio construtivo o propósito está mais nas construções e nas medições, no relacional o sujeito manuseia para refinar suas ideias a partir das ações feitas no âmbito construtivo. A aprendizagem nesses domínios é um movimento não linear a qual se desenvolve articulando simultaneamente as diferentes ações (construções, medições, refinamentos, justificações etc.) nesses dois âmbitos.

Ainda no estudo realizado por esses autores, foram destacados toques em telas, com características de signos pivô, expressos em uma modalidade semiótica que veicula signos matemáticos por meio de artefatos específicos, no caso, a interação tarefa-*tablet*-GeoGebra. Os toques nas telas dos(as) discentes, com reflexões que transmigram do domínio construtivo para o relacional, permitiram que esses indivíduos desenvolvessem uma cadeia de argumentação e raciocínio para solucionar a tarefa proposta (Assis e Bairral, 2022). A Figura 10 reproduz a ideia apresentada por esses autores ao considerarem os toques em telas como um recurso semiótico adicional a ser contemplado.

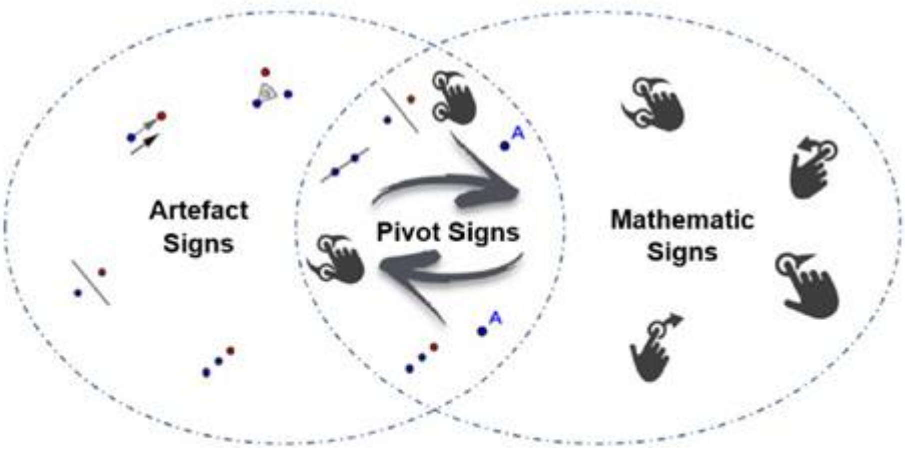


Figura 10 - Representação da polissemia dos signos por meio dos toques em tela
Fonte: Assis e Bairral (2022, p.439)

A representação da polissemia proporcionada pelos toques sugere uma concepção inovadora de signos geométricos caracterizados por uma dinâmica interconectada, em contraste com a abordagem estática e segmentada, frequentemente encontrada em livros didáticos convencionais. Esta perspectiva oferece uma abordagem renovada para o estudo de objetos geométricos, ultrapassando os limites dos tradicionais axiomas, corolários e postulados.

Ao considerar uma tarefa que utiliza DMcTT+GG, em que o ícone funciona como um signo do artefato, a linha de inversão, considerada um signo matemático, emerge como um objeto geométrico a ser explorado por meio de toques, embora não se restrinja exclusivamente a eles (Assis e Bairral, 2022). Nesse processo sincrônico e mesclado, os toques se entrelaçam com outros recursos semióticos, como quando os(as) aprendizes utilizam as mãos para representar de forma tangível o que construíram na tela, ou empregam termos como “mover” e “arrastar”[23]. Além dessa sincronicidade, acentuada pela dinâmica do dispositivo, é crucial perceber esse processo mesclado como sendo de natureza dialética, conforme descrita anteriormente.

A construção de cadeias semióticas é um dos objetivos das intervenções dos professores e das professoras, e os signos pivô, originados por meio de toques sensíveis à tela, também representam uma classe especial de signos, desempenhando um papel crucial na edificação do conhecimento matemático. Atuando como pontes entre diferentes conceitos ou representações matemáticas, os signos pivô são elementos-chave que auxiliam os(as) estudantes a estabelecer conexões entre informações aparentemente distintas, promovendo o desenvolvimento de um entendimento mais abrangente dos objetos geométricos.

As tarefas que incorporam a abordagem DMcTT+GG proporcionam uma experiência visual dinâmica, exibindo uma sucessão temporal de imagens em movimento que demonstram eventos específicos em um espaço determinado. Esse espetáculo visual permite que os toques na tela adquiram status de símbolos significativos. A exploração desses artefatos pode contribuir para o desenvolvimento de recursos didáticos eficazes, fundamentados em análises semióticas, com o intuito de facilitar a compreensão dos indivíduos em relação aos signos matemáticos e aos conceitos correspondentes, por meio da construção e da utilização de signos pivô.

Assim sendo, tarefa-DMcTT-GG se integra aos artefatos, complementando as ferramentas tradicionais, como régua e transferidor, que têm sido e continuam sendo úteis na abordagem de ensino e aprendizagem de quadriláteros, por exemplo. No entanto, essas ferramentas convencionais não proporcionam uma experiência imersiva, dinâmica e concreta na investigação das propriedades dessas figuras, o que dificulta a promoção de signos,

[23] Grifamos para destacar que ambos os termos são amplamente utilizados ao manipular objetos geométricos em Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), diretamente na tela, por meio de gestos intuitivos.

especialmente o pivô.

A partir dos referencias indicados, cabe resumir que:

(a) As intervenções pedagógicas podem ser uma estratégia importante para aprimorar as práticas pedagógicas, promovendo interação contínua entre os próprios envolvidos e entre envolvidos e os dispositivos empregados, gerando conhecimento sobre o tema proposto. O uso de dispositivos digitais móveis com toques em tela mostra-se relevante para superar desafios na educação, especialmente no ensino e na aprendizagem de matemática.

(b) A cognição corporificada se manifesta por gestos, falas, escrita e toques em tela, sendo essencial para a expressão do pensamento. *Tablets* e *smartphone*s, considerados interativos, proporcionam estímulos visuais e auditivos, favorecendo a aprendizagem experimental e sensitiva. A mobilidade desses dispositivos contribui para uma abordagem cognitiva e epistemológica, estimulando a atenção e a memória dos usuários.

(c) O design de tarefas, o planejamento docente e os toques na tela constituem mediadores semióticos e são manifestações concretas dos pensamentos dos envolvidos (docente, discente, docente-discente e discente-discente), expressando signos matemáticos que se agregam aos signos dos artefatos utilizados. Essa interação entre pensamentos individuais, coletivos e dispositivos influencia diretamente os processos de ensino e de aprendizagem.

No próximo capítulo, abordaremos a descrição da intervenção pedagógica, considerando a metodologia da pesquisa empregada. Nesse contexto, serão apresentados tanto os métodos adotados pelo professor quanto os empregados pelo pesquisador durante as implementações de tarefas sobre quadriláteros. O objetivo é fornecer uma visão detalhada das estratégias e abordagens utilizadas ao longo do processo de ensino e aprendizagem.

CAPÍTULO III – METODOLOGIA: Descrição da intervenção pedagógica

Este capítulo apresenta a intervenção pedagógica, por meio de tarefas com a utilização do GeoGebra, para o ensino e a aprendizagem de quadriláteros em dispositivos móveis, neste caso, *tablet*, com discentes do sexto ano do Ensino Fundamental (EF). Decerto, a palavra "intervenção", num primeiro momento, pode ecoar como anulação de autonomia ou interferência por parte dos sujeitos do contexto, porém, interpretamos como Assis (2020), no que se refere à pesquisa de caráter intervencionista, que "não entendemos como uma forma de engessar o processo ou abreviar situações que possam emergir em possíveis interações entre os interlocutores" (p.75). No nosso caso, trata-se de uma intervenção no contexto natural de ensino do professor (sua sala de aula) abordando um conteúdo prescrito no currículo (quadriláteros).

3.1 O método da intervenção baseado na atuação do professor

As dinâmicas das aulas eram planejadas exclusivamente pelo autor, diferentemente das tarefas implementadas, e seguiam um padrão específico dividido em até três momentos distintos. O primeiro momento consistia na apresentação de informações e orientações sobre o que ocorreria durante a aula. No segundo momento, ocorria a distribuição de materiais e mediações relacionadas às tarefas propostas. O terceiro momento, quando existia, era dedicado à realização de uma roda de conversa.

No início de cada aula, as informações e orientações eram compartilhadas com os(as) discentes, por meio de anotações no quadro branco, com a intenção de revelar as propostas do dia. Esse momento também servia para destacar eventuais casos, como mudança de posição da dupla na sala, sinalizar tarefas pendentes por parte de cada estudante ou até mesmo solicitar contribuições ativas por parte dos envolvidos.

Em uma sala de aula com abordagem investigativa, compreendemos que os alunos e alunas devem ser ativos(as) e, se possível, protagonistas do seu aprendizado. Isso pode envolver a participação na resolução de tarefas, o auxílio a um colega de classe com dúvidas, a exposição de algum raciocínio ou pensamento matemático ou, simplesmente, uma resposta às solicitações dos envolvidos. Dessa forma, para uma turma de sexto ano, consideramos viável abordar essas questões, por meio de distribuições e recolhimentos de materiais didáticos, como fichas e *tablets*, ou outros materiais eventualmente utilizados, como réguas, transferidores e carregadores dos dispositivos.

As fichas eram reproduzidas antecipadamente na escola, armazenadas em uma pasta específica, e também estavam em posse do professor-pesquisador, assim como as cópias utilizadas pelos(as) discentes. Essa prática garantiu que não houvesse problemas com alunos e alunas sem a ficha reproduzida ou resolvida. As fichas com as respostas dos(as) aprendizes foram entregues ao final da última aula da intervenção pedagógica.

O GeoGebra foi instalado em quinze *tablets* pelo autor, contudo, na maioria das vezes, apenas dez deles foram utilizados. Além disso, a manutenção e o carregamento desses dispositivos estavam sob a responsabilidade do professor-pesquisador, que os transportava da sua residência para a sala de aula e vice-versa, após o término do uso.

Nas mediações docentes, a postura adotada consistia em provocar tentativas de construções e manipulações na tela, estimular raciocínios e pensamentos geométricos, e buscar respostas comprovadas (por meio de domínios relacional e construtivo ou aspecto pictórico) ao longo de toda a implementação das tarefas. Dessa forma, a cada dúvida ou surgimento de novos elementos, essas questões eram compartilhadas com a turma e registradas, posteriormente, no diário de campo. Esses registros serviram como base para ajustes nas tarefas propostas ou para a (re)configuração das tarefas que ainda seriam implementadas.

A roda de conversa foi concebida ao longo dos primeiros meses de implementação das tarefas, mais precisamente ao término da resolução da ficha, com propostas de ambientação das ferramentas do GeoGebra. O professor-pesquisador identificou a necessidade de avaliar, de maneira formativa, os conceitos relacionados aos quadriláteros percebidos pelos envolvidos ao término de cada ficha. Para isso, foi dada a oportunidade para que o máximo de alunos e alunas resolvessem as questões propostas e, quando estava próximo da roda de conversa acontecer, era avisado aos discentes, os quais concordaram com a sugestão.

Ao todo, foram realizadas quatro rodas de conversa envolvendo a aprendizagem de quadriláteros. Para a realização dessa ação, eram elaboradas perguntas relacionadas aos conceitos desenvolvidos na sala de aula, dentro do planejamento do dia. Essas perguntas eram transcritas no quadro para que todos na sala de aula pudessem ler. É importante ressaltar que houve o remanejamento de duas rodas de conversa, a pedido dos próprios discentes, em virtude da não finalização das fichas.

A dinâmica empregada nessa avaliação formativa consistia em o professor fazer perguntas e os(as) estudantes responderem. No entanto, as perguntas eram direcionadas ao máximo de indivíduos possíveis até se esgotarem as possibilidades de respostas. Dependendo das respostas dos envolvidos, o autor realizava provocações para que os(as) discentes buscassem justificativas nas anotações das fichas ou as confirmassem no GeoGebra, possibilitando refutar, complementar ou validar os conceitos explorados. Importante ressaltar que a participação na roda de conversa não gerava nota quantitativa; apesar disso, teve uma boa adesão por parte dos alunos e das alunas.

Os problemas apresentados pelos dispositivos digitais utilizados na sala de aula envolviam: (a) desligamento do equipamento por falta de recarga - o que aconteceu uma única vez – e tempo excessivo de funcionamento (ligado), o que ocorreu duas vezes; (b) fechamento da tela do GeoGebra, com maior ocorrência nas duas primeiras aulas com o dispositivo; e (c) paralisação da telagravação, devido ao toque aleatório no botão de pausar a gravação, o que ocorreu pouquíssimas vezes, não causando prejuízo na coleta de dados.

Neste item, buscamos detalhar a ambiência da intervenção pedagógica em uma sala de aula com discentes do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública. Destacamos a descrição dos métodos de ensino aplicados, fornecendo justificativas para a adoção das diversas ações específicas planejadas e implementadas com foco na atuação do docente. Em seguida, apresentaremos descrições sobre o método de pesquisa propriamente dito, abordando os discentes envolvidos, as tarefas abordadas, a produção de dados e as construções geométricas empregadas.

3.2 Discentes que tocaram a tela

Este trabalho está vinculado ao projeto de pesquisa intitulado "*construindo e analisando práticas educativas em educação matemática com dispositivos touchscreen*"[24], financiado pelo CNPq, sob a responsabilidade do orientador desta tese. Para a implementação na unidade escolar, foram elaborados dois termos[25], um para realização e outro para participação na pesquisa. Ambos foram assinados, respectivamente, pela diretora em exercício e pelos responsáveis dos alunos e alunas envolvidos(as).

As considerações éticas foram adotadas na implementação das tarefas, envolvendo a entrega de consentimento assinado pelos responsáveis dos discentes, bem como a garantia de confidencialidade na utilização dos dados para fins exclusivamente científicos. O documento especifica que nomes serão mantidos em sigilo e não serão divulgados sob nenhuma

[24] O parecer do comitê se encontra no anexo A.
[25] Os termos se encontram nos apêndices 4 e 5.

circunstância durante o desenvolvimento ou a publicação desta pesquisa.

No segundo semestre de 2021, foi planejado o conteúdo a ser abordado nesta pesquisa, bem como o ano de escolaridade e a escola onde as tarefas seriam implementadas. Nesse contexto, ficou acordado que a escola Manoel de Araújo Dantas, localizada no bairro Canto do Rio, no município de Seropédica, onde o autor atua como professor concursado regente, seria o local de realização da pesquisa. Com isso, no final de 2021, foi solicitado à direção da escola que, no ano seguinte, o autor fosse alocado em pelo menos uma turma do sexto ano com a regência em geometria, isso porque a grade curricular em vigência divide a matemática em duas partes, sendo que a matemática é contemplada com quatro tempos máximos de cinquenta minutos cada, enquanto a geometria tem apenas dois tempos.

A escola Manoel de Araújo Dantas, durante o período de implementação das tarefas com quadriláteros por meio de fichas, dispunha de poucos recursos tecnológicos digitais, especificamente uma TV de 40 polegadas e um projetor de slides (data show). Uma das demandas relativas às tarefas implementadas era o uso de dispositivos móveis digitais, como *tablets* e smartphones, para que os discentes pudessem interagir tocando a tela. Devido a essa necessidade, contamos com a colaboração do GEPETICEM, que, por meio do seu coordenador, também orientador desta tese, concedeu quinze *tablets* e, no caso da escola, se comprometeu a efetivar as impressões das fichas.

Esta pesquisa foi implementada durante o período de abril a novembro de 2022 e contou com a coparticipação de 18 discentes inicialmente, mas foi finalizada com 23, em virtude da chegada de outros estudantes no mês de maio. A faixa etária desses indivíduos era de 11-12 anos, formando juntos uma turma, entre quatro, do sexto ano do Ensino Fundamental, na qual o autor teve o privilégio de trabalhar. Essa turma se tornou especial não apenas porque os seus integrantes fizeram parte da pesquisa, mas também pelo fato de serem recém-chegados à escola. Isso ocorreu devido à oferta de vagas na escola, que compreende do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental, além do retorno integral das aulas presenciais devido à pandemia da COVID-19[26], no biênio 2020 e 2021.

Em fevereiro de 2022, logo no primeiro encontro com essa turma, foi esclarecido para todos os presentes que eles e elas fariam parte de uma pesquisa de doutorado relacionada ao tema de quadriláteros. Com isso, o ambiente da sala de aula teria alguns recursos não habituais,

[26] Causada pelo vírus SARS-CoV-2.

como uma câmera posicionada em um lugar estratégico e *tablet* para que os presentes pudessem usar durante as aulas. Dessa forma, solicitamos a contribuição de cada um em relação aos cuidados com os equipamentos e na preservação das fichas que cada um receberia, considerando a possibilidade do seu uso em mais de uma aula.

Como a implementação das tarefas começou dois meses depois, a ansiedade tomou conta da turma, principalmente em relação ao uso do dispositivo móvel com tela sensível ao toque. Aproveitamos a oportunidade para perguntar quem tinha *tablet* ou *smartphone* e se conheciam ou tinham ouvido falar do GeoGebra. A ideia era que os(as) estudantes pudessem ter acesso a esses artefatos para já irem se ambientando e, com isso, reduzirem a ansiedade. Do total dos participantes, apenas dois tinham os dispositivos móveis, porém somente um se interessou em baixar o aplicativo. Além disso, ninguém conhecia o GeoGebra.

O papel dos(as) discentes nesta pesquisa não se resume em resolver tarefas propostas com o uso de artefatos, como, por exemplo, tocar a tela e fazer anotações. A cada aula, diferentes duplas entregavam as fichas e os *tablets* para as respectivas duplas, nas quais os *tablets* tinham numerações que identificavam os usuários. Eles/elas solicitavam a nossa intervenção, caso acontecesse algo inesperado, como o fechamento da tela do aplicativo ou o desligamento do aparelho. Acionávamos a telagravação, mas a dupla tinha que monitorar se havia paralisação na gravação da tela do dispositivo e nos chamar para resolver o problema. Ao final da aula, outra dupla recolhia as fichas, e cada membro da dupla entregava, organizadamente, o dispositivo usado.

Durante o processo de implementação, foram identificados três estudantes analfabetos ou semianalfabetos. Contudo, esse fato não impediu cada um deles de participar na resolução de tarefas, ou seja, construíram, manipularam, observaram, falaram, gesticularam e anotaram na forma pictórica. Essas tarefas implementadas serão abordadas no tópico seguinte, em que o *design* se configurou em várias etapas.

Para a análise dos dados, nos concentramos em uma dupla específica que fez uso da malha quadriculada no GeoGebra durante a realização das tarefas propostas. No entanto, os raciocínios e pensamentos de outros estudantes que interagiram, direta ou indiretamente, com essa dupla, também foram considerados nesta análise.

3.3 As tarefas elaboradas e implementadas

(Re)pensar, (re)elaborar, decidir e (re)aplicar um conjunto de atividades que favorecem a aprendizagem de conteúdos da Matemática são ações que demandam uma atenção especial dos professores e das professoras, visto que as características dessas atividades precisam estar adequadas aos objetivos a serem alcançados. Talvez, por esse motivo, o orientador desta tese sugeriu que essas ações fossem organizadas em parceria, gerando reconhecimento e aprovação por todos os envolvidos, o que culminou com a produção de materiais para dois programas de Pós-Graduação, PPGEDUC[27] (Doutorado) e PPGEDUCIMAT[28] (Mestrado Profissional), cujos autores se reuniram pelo menos uma vez por semana, de forma programada e virtualmente, para estudos e/ou produções.

Em concomitância com os estudos em um dos encontros no grupo de pesquisa GEPETICEM[29], ocasião em que havíamos programado discussões referentes a três textos relacionados às “tarefas para intervenção pedagógica na pesquisa de campo”, concluímos que Cyrino e Jesus (2014) seriam a base teórica para adequações de tarefas relativas a estudos de quadriláteros. A elaboração do design de tarefas relacionadas aos polígonos de quatro lados se constituiu de colaborações, tanto diretas quanto indiretas, ao longo do ano de 2021.

A colaboração direta se deu entre o autor desta tese e um mestrando, ambos participantes assíduos do grupo de pesquisa, e professores atuantes no ambiente escolar que ministravam aulas para discentes do sexto ao nono ano do Ensino Fundamental. Por outro lado, a colaboração indireta envolveu as contribuições fornecidas pelo orientador desta tese e pelos participantes do GEPETICEM. Essas contribuições eram analisadas e, quando relevantes, resultavam em reconfigurações no design das tarefas. Além disso, os testes com as tarefas eram realizados pelos próprios elaboradores de modo a encontrar possíveis equívocos.

As fichas que continham as tarefas selecionadas para implementação nas pesquisas de campo, seja de mestrado ou doutorado, eram as mesmas, decididas em consenso pelos criadores, mas aplicadas em turmas e em dias diferentes. Com isso, as experiências vivenciadas em cada implementação eram compartilhadas e, quando identificadas possíveis lacunas, eram realizados ajustes.

---

27 Programa de Pós-Graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares - UFRRJ.
28 Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática – UFRRJ.
29 http://www.gepeticem.ufrrj.br/sobre-o-grupo/

A ideia de produzir fichas surgiu a partir de dois pontos essenciais. Primeiro, buscamos descrever as tarefas propostas com base no design, fornecendo instruções claras e direcionadas para os(as) discentes. Dessa forma, eles e elas teriam um guia detalhado de como realizar cada atividade, explorar os conceitos dos quadriláteros e desenvolver as habilidades necessárias. Além disso, outra intenção importante foi permitir que os(as) estudantes fizessem anotações do que entenderam em relação a cada atividade. Com isso, proporcionamos um espaço para que cada indivíduo acompanhasse seu próprio progresso, refletisse sobre o que aprendeu e avançasse em seu próprio ritmo.

O período de *design* das tarefas estendeu-se de março a outubro de 2021, fundamentado nas colaborações mencionadas anteriormente e na análise prévia das fichas implementadas. Essas análises prévias começaram com duas fichas[30], contendo tarefas organizadas, testadas pelo menos duas vezes, implementadas e avaliadas. O esquema na Figura 11 oferece uma visão de como se desdobrou o design das tarefas abordando polígonos de quatro lados.

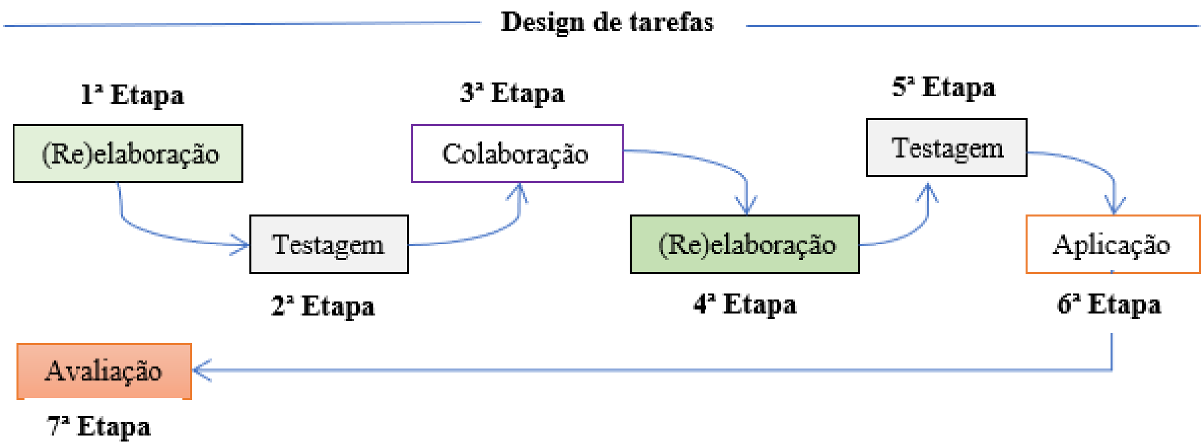


Figura 11 - Um exemplo de tarefa e suas diferentes versões
Fonte: Elaborada pelo autor

Nas sete etapas apresentadas, enfatizamos a colaboração de outros especialistas, mencionados anteriormente, o que possibilitou o enriquecimento das tarefas e a consideração de eventuais incompreensões. Além disso, a avaliação, com o *feedback* dos(as) estudantes, contribuiu para ajustar o design de acordo com as demandas emergentes, sendo um aspecto crucial do processo. Reconhecemos que o ciclo de design não se encerra com a avaliação das tarefas. Neste caso específico, a conclusão foi necessária devido ao prazo estipulado para a pesquisa de campo e a elaboração deste trabalho. No entanto, isso deixa espaço para retomar as etapas indicadas.

[30] Ficha 1 (Sondagem) - contendo tarefas sobre ideias gerais dos quadriláteros - e Ficha 2, conhecendo algumas ferramentas do GeoGebra, com adaptação da folha de ícones de Assis (2020).

Os desafios enfrentados na elaboração e na contribuição para o design de tarefas incluíram o planejamento do tempo disponível para as reuniões. Apesar dos encontros online, diversas demandas concorrentes, como compromissos pessoais, preparação de aulas para outras turmas e estudos das disciplinas do programa, precisavam ser atendidas. Para lidar com essa questão, optamos por agendar dias e horários específicos para as reuniões e utilizar o *Google Drive* para compartilhamento de materiais. Esse método permitiu o registro de contribuições e anotações, garantindo que ambos estivessem cientes do que cada um estava planejando, visando a culminação no design de tarefas relacionadas a quadriláteros.

Ao "término" desse processo de design, avaliamos que ocorreram aprendizagens colaborativas relacionadas às tarefas, abrangendo a concepção, a elaboração e a implementação. Além disso, destacamos a compreensão das potencialidades do GeoGebra na construção, na manipulação e na exploração de quadriláteros. Identificamos, também, as dificuldades enfrentadas em sala de aula, seja com fatores internos ou externos, ou ainda com a aquisição de materiais e de ferramentas.

A implementação das tarefas, por meio de fichas, estava inicialmente programada para 12 encontros, sendo que cada encontro teria a duração de 80 minutos, com início em 05 de maio de 2022. No entanto, devido à ecologia de aprendizagem emergente, o número de encontros mais que dobrou, totalizando 25, e foi concluído somente em 01 de novembro de 2022. É importante ressaltar que a aplicação das fichas para os alunos e as alunas foi uma parte do processo de design (rever a Figura 11), ocorrendo concomitantemente com as outras etapas. Neste caso, elaboramos um quadro com a temporalidade da (re)elaboração e da (re)aplicação das tarefas, para delinear o período dessas ações.

Quadro 5 - Temporalidade da (re)elaboração e da (re)aplicação das tarefas

Ficha	**Mês** / **Ação**	**Mar.**	**Abr.**	**Mai.**	**Jun.**	**Jul.**	**Ago.**	**Set.**	**Out.**	**Nov.**
1	(Re)elaboração									
2										
3										
4										

5										
6										
1	(Re)aplicação									
2										
3										
4										
5										
6										

Fonte: Elaborada pelo autor.

Apoiado no cronograma apresentado no quadro, esclarecemos que as cores se repetem tanto na (re)elaboração quanto na (re)aplicação das tarefas, para melhor orientar o leitor sobre o(s) período(s) em que essas atividades ocorreram. Por exemplo, as Fichas 1 e 2 foram (re)elaboradas entre os meses de março e abril. No entanto, ambas foram aplicadas durante o mês de abril. No caso da Ficha 3, foi (re)elaborada entre os meses de abril e maio, mas só foi aplicada entre os meses de abril e junho. A conclusão de cada ficha ocorreu quando a maioria dos envolvidos tiveram a oportunidade de realizar as atividades.

A escolha do tema quadriláteros emergiu da reflexão sobre dois fatores: a progressão automática bienal, causada pela pandemia, e o componente curricular de Geometria. Este último, delineado pela Secretaria Municipal de Educação de Seropédica, em conformidade com a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), priorizou as habilidades relacionadas ao conteúdo, consideradas fundamentais para o ensino e a aprendizagem durante o período da pesquisa.

No que concerne ao primeiro fator, optamos por adotar um conteúdo que integrasse, de forma direta ou indireta, possíveis aprendizagens geométricas prévias, demandando conhecimentos de complexidade mínima. Quanto ao segundo fator, observamos que quase 90% dos objetos de conhecimento em geometria plana euclidiana abordavam conceitos como ponto, reta, plano, ângulos, unidades de medidas, polígonos, entre outros. Diante disso, avaliamos os polígonos, no contexto do estudo de quadriláteros, como uma alternativa adequada, escolhendo esse tema para a integração das tarefas. Os objetivos gerais e o período de realização de cada ficha estão detalhados no Quadro 6.

Quadro 6 - Objetivos e período de realização das Tarefas

Ficha	**Objetivos**	**Período de realização**
01	Identificar as ideias sobre quadriláteros; descobrir objetos onde é possível relacionar imagens de quadriláteros; pontuar a respeito do interesse pelas atividades.	05/04/22 a 12/04/22
02	Ambientar a área do GeoGebra, por meio de *tablet*, e explorar as suas ferramentas; diagnosticar possíveis construções.	12/04/22 a 19/04/22
03	Utilizar instrumentos tecnológicos (régua, transferidor e *tablet*+GeoGebra) para aferir medições; explorar conceitos de lados e de ângulos internos dos quadriláteros; Manipular quadriláteros, bem como conjecturar relações entre os lados e os ângulos internos; perceber características semelhantes e não semelhantes entre os quadriláteros propostos; avaliar a aprendizagem, sobre os ângulos internos e os lados de alguns quadriláteros, e a vontade de executar esse tipo de tarefa.	26/04/22 a 14/06/22
04	Construir quadriláteros com pelo menos um par de lados paralelos, a partir de duas retas paralelas cotadas por uma transversal; manipular, identificar, visualizar e escrever os ângulos internos dos quadriláteros; buscar relações entre os ângulos opostos e adjacentes, a soma dos ângulos internos e a soma dos ângulos adjacentes internos; conjecturar a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero; avaliar a aprendizagem em relação aos lados e aos ângulos internos de um quadrilátero.	21/06/22 a 16/08/22
05	Conceituar quadriláteros com pelo menos um par de lados paralelos; avaliar a aprendizagem de quadriláteros com pelo menos um par de lados paralelos.	23/08/22 a 27/09/22
06	Constatar semelhanças e diferenças nas imagens de quadriláteros com pelo menos um par de lados paralelos; agrupar essas imagens de acordo com suas características; conceituar diagonais de um quadrilátero; construir, manipular, identificar, visualizar e escrever as características das diagonais.	11/10/22 a 01/11/22

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com um olhar sequencial no quadro anterior, percebemos as peculiaridades configuradas nos objetivos de cada tarefa. Nas duas primeiras, efetivadas em três encontros, as atividades foram condicionadas a respostas abertas (Gusmão, 2019), possibilitando que os estudantes expressassem seus pensamentos em relação a quadriláteros e às ferramentas do GeoGebra. Além disso, eles tiveram o primeiro contato com dispositivos móveis digitais para realizar manipulações na tela. Devido às respostas curtas e genéricas provenientes dessas atividades, as três seguintes, realizadas em dezoito encontros, foram mais direcionadas, ou seja, voltadas para os elementos que conceituavam quadriláteros. Vale destacar que a tarefa três solicitava o uso dos instrumentos tecnológicos (régua, transferidor e *tablet*+GeoGebra), mas sem compará-los. Por outro lado, a tarefa cinco contemplava estratégias para criar possibilidades de visualização relacionadas a conceitos de alguns quadriláteros. Por fim, a última tarefa, além de proporcionar opções em relação aos tipos de agrupamentos, hierárquico ou particional (Villiers, 1994), explorou as características das diagonais de alguns quadriláteros, sem muito aprofundamento, em quatro encontros.

O autor desta tese, também docente regente da turma, dividiu o tempo de cada encontro para melhor atender à fluidez e à organização das aulas. Inicialmente, as frações temporais estavam associadas: (a) à frequência e à orientação geral, momentos de (re)arrumação das duplas, reflexões sobre a tarefa do dia e anotações no quadro, contextualizando as ideias emergentes dos envolvidos; (b) às distribuições de artefatos e à orientação individual, incluindo a entrega de folhas com a tarefa e instrumentos tecnológicos; e, somente após a conclusão da Ficha 2, que surgiu (c) a roda de conversa, destinada às sínteses, tanto do assunto explorado quanto da aprendizagem a ele relacionada, realizada sempre no final de uma aula ou no término de uma tarefa.

As tarefas foram realizadas em duplas ou, quando existia uma quantidade ímpar de discentes, individualmente. No entanto, a ambiência favorecia a interação, onde os indivíduos se sentiam à vontade para manifestar possíveis dúvidas, descobertas ou aprendizagens. Cada estudante recebeu uma ficha para expressar suas ideias relacionadas ao estudo de quadriláteros e, quando era necessário utilizar artefatos tecnológicos (*tablet*+GeoGebra, régua e transferidor), esses eram distribuídos, um por dupla, para serem compartilhados entre os pares. Esse processo desencadeou um conjunto de ações por parte dos indivíduos, que, mobilizados por um mesmo objetivo, foram registradas por diversos instrumentos, os quais serão especificados mais adiante.

Os trabalhos de Bairral e Silva (2018), Assis (2020) e Henrique (2021) foram referências fundamentais para a elaboração e a implementação das tarefas, que possibilitaram o desenvolvimento de conceitos geométricos por meio da manipulação em dispositivos móveis com toques na tela. A Ficha 2, "Ambientar a área do GeoGebra e explorar as suas ferramentas", inclusive, foi adaptada a partir da folha de ícones proposta por Assis (2020). Assim, foram aplicadas 20 tarefas para a coleta de dados desta pesquisa, mas destacaremos 15 delas para análise, devido ao surgimento da malha quadriculada durante a realização das atividades. O Quadro 7 apresenta essas tarefas, com seus objetivos específicos, que farão parte da análise de dados.

Quadro 7 - Tarefas e seus objetivos específicos

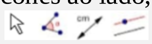
Ficha	Tarefas	Objetivo específico
04	Você deverá construir um quadrilátero, tomando como base um par de retas paralelas cortadas por uma reta transversal. Para isso, abra o aplicativo GeoGebra onde você encontrará estas figuras. Utilizando somente as ferramentas abaixo, faça o que se pede.  a) Construa um quadrilátero com somente dois lados iguais. Depois, escreva o que você fez e anote, no quadro abaixo, o que observou em relação aos ângulos internos. Com base no quadro acima, calcule a soma dos ângulos internos dos quadriláteros especificados abaixo. Em seguida, escreva o que você observou. b) Construa um quadrilátero com todos os lados diferentes. Escreva o que você fez e, preenchendo o quadro abaixo, anote o que observou em relação aos ângulos internos. Observando o quadro anterior, calcule a soma desses ângulos especificados no quadro abaixo e registre. Em seguida, escreva o que você observou. c) (Desafio) Construa um quadrilátero com todos os lados com as medidas iguais. Em seguida, sem fazer a conta, responda: Qual o valor da soma dos ângulos internos A+D? E da soma B+C? Qual a soma dos ângulos internos desse quadrilátero? Agora, você tentará construir quadriláteros com dois pares de retas paralelas, ainda tomando como base um par de retas paralelas cortadas por uma transversal. Para isso, você deverá seguir as seguintes etapas: I- Selecionar a ferramenta  . II- Tocar na reta BC e depois no ponto A. III- Selecionar a ferramenta  , em seguida tocar nos pontos onde essas retas se interceptam (cruzam). IV- Selecionar as ferramentas dos lados e dos ângulos. V- Manipule livremente a figura. a) Escreva as suas observações em relação aos lados.	Construir e manipular quadriláteros: (a) cujos lados possuem a mesma medida; identificar os ângulos suplementares; e constatar 360° na soma dos ângulos internos; (b) cujos lados são paralelos; identificar padrões tanto nos lados quanto nos ângulos internos opostos; e constatar 360° na soma dos ângulos internos. Construir, manipular e observar os ângulos internos e os lados a fim de buscar relações com quadriláteros com pelo menos dois ângulos internos retos e um par de lados paralelas.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
b) Escreva as suas observações em relação aos ângulos internos.

Ainda tomando como base um par de retas paralelas cortadas por uma transversal, você continuará a construir quadriláteros com dois pares de retas paralelas, mas terá que seguir as etapas:

I- Selecionar a ferramenta  .
II- Tocar no ponto A, duas vezes consecutivas.
III- Selecionar a ferramenta  , em seguida tocar nos pontos onde essas retas se interceptam (cruzam).
IV- Selecionar as ferramentas dos lados e dos ângulos.

a) Construa um quadrilátero com todos ângulos internos iguais e com pelo menos dois lados iguais. Escreva as medidas destes ângulos e destes lados. O que você conclui em relação a essas medidas?
b) (Desafio) Construa um quadrilátero com todos ângulos internos iguais e com todos os lados iguais. Escreva as medidas desses ângulos e destes lados. O que você conclui em relação a essas medidas?

Tomando como base a tarefa de hoje, bem como as anteriores, escreva o que você tem aprendido sobre os lados e os ângulos internos de um quadrilátero.
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>05</td>
<td>
Antes de fazer esta tarefa, você terá que abrir o GeoGebra. Nele encontrará uma família de quadriláteros.
Usando somente os ícones ao lado, identifique os seguintes quadriláteros:


(A) Quadrado; (B) Retângulo; (C) Losango; (D) Paralelogramo; (E) Trapézio isósceles; (G) Trapézio escaleno
- Movimente livremente a figura. O que você observa de interessante
em relação à quantidade de pares de lados paralelos?
em relação às medidas dos lados?
em relação às medidas dos ângulos internos?

Tomando como base a atividade anterior, marque um X em cada quadrilátero que apresenta as seguintes características.
<table>
<tr><th rowspan="2">CARACTERÍSTICAS</th><th colspan="7">QUADRILÁTEROS</th></tr>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th>E</th><th>F</th><th>G</th></tr>
<tr><td>Com pelo menos um par de lados paralelos</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Com dois pares de lados paralelos</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Com pelo menos dois lados iguais</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Com todos os lados iguais</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Com somente dois ângulos iguais</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Com todos os ângulos iguais</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
Tomando como base o quadro acima e as movimentações das figuras no GeoGebra, responda:
a) Um paralelogramo pode ser considerado um trapézio? Justifique/explique/comente a sua resposta.
b) E no caso do paralelogramo, ele pode ser considerado um retângulo? Ou um quadrado? ou um losango? Justifique/explique/comente a sua resposta.
c) Já o quadrado, será que ele pode ser considerado um retângulo ou um losango? Justifique/explique/comente a sua resposta.
d) Dentre os quadriláteros mencionados, existe algum outro que possui as mesmas características? Justifique/explique/comente a sua resposta.

Com a realização das atividades anteriores, escreva algo que você considera que aprendeu (ou ainda está em dúvida) sobre:
(a) quadrado; (b)retângulo; (c)losango; (d)paralelogramo; (e)trapézio.
</td>
<td>Explorar os lados paralelos e as medidas dos lados e ângulos internos; anotar as observações em relação a essas particularidades.</td>
</tr>
</table>

06	A palavra diagonal te faz lembrar? Comente/desenhe. Agora, usando somente os ícones abaixo explore a(s) diagonal(is) das seguintes figuras, seguindo a sequência apresentada em cada quadrilátero.  (A) Quadrado; (B) Retângulo; (C) Losango; (D) Paralelogramo (genérico); (E) Trapézio isósceles - Construa segmento(s) pertencente(s) à figura, que não sejam os seus lados. - Verifique o comprimento do(s) segmento(s) construído(s). - Encontre o ponto médio do(s) segmento(s) construído(s). - Verifique o ângulo formado por esse(s) segmento (s). - Movimente livremente a figura, observe e responda: Quantas diagonais são possíveis construir? E o que podemos afirmar em relação a essas medidas? Na diagonal, o que podemos afirmar em relação à distância entre o ponto médio e o vértice? Quantos ângulos são formados pelas diagonais? E o que podemos afirmar em relação a essas medidas? Tem alguma observação que queira acrescentar em relação à(s) diagonal(is) construída(s)? As mesmas conclusões feitas no trapézio isósceles também servem para o trapézio escaleno? E para o trapézio retângulo? Explique/comente/desenhe.	Explorar e verificar padrões relacionados às diagonais de alguns quadriláteros com pelo menos um par de lados paralelos, incluindo comprimentos e ângulos formados.

Fonte: Elaborada pelo autor

A malha quadriculada do GeoGebra surgiu espontaneamente, pela primeira vez, em uma tarefa na qual os alunos deveriam utilizar um par de retas paralelas cortadas por uma reta transversal para construir quadriláteros específicos com todos os lados de medidas iguais. Contida na Ficha 4, essa situação foi identificada como um desafio, uma vez que já estava prevista no design, especificamente na etapa de testagem. Madureira (2023), ao utilizar a mesma ficha em sua análise, não identificou o uso nem a menção desse artefato.

Após a "descoberta" desse signo (Assis e Bairral, 2022; Assis 2020; e Bussi e Mariotti, 2008) pelo aluno Estevão, notou-se o seu emprego não apenas na Ficha 4, mas também nas Fichas 5 e 6, por, pelo menos, três duplas. Com base nisso, e com o intuito de promover um efeito didático[31], procederemos à análise dos momentos em que uma dupla empregou a malha quadriculada para solucionar as tarefas propostas em cada ficha específica.

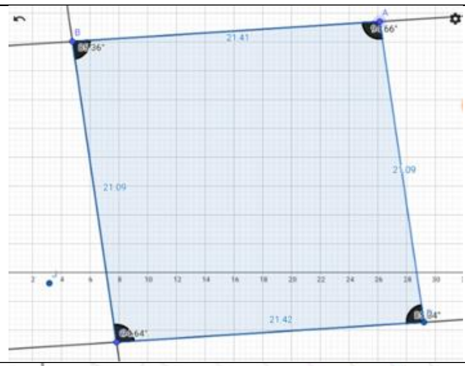
Até o momento da finalização da redação da tese, o GG apresenta quatro tipos de malhas: principal, principal e secundária, polar e isométrica. No entanto, ao exibir três das opções de malha, juntamente com os eixos (conforme o Quadro 8), Estevão optou por utilizar

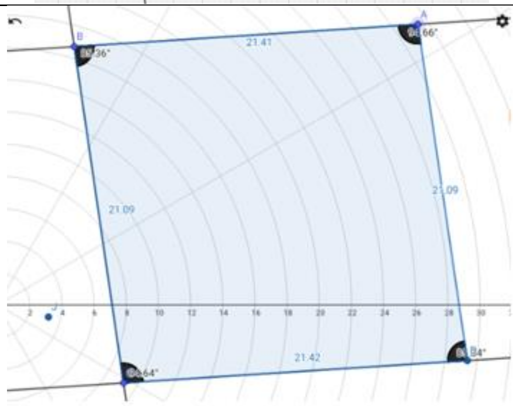
[31] Consideramos como situações que podem se materializar na sala de aula em função de um saber e caracterizam um momento importante, no que diz respeito à continuidade da aprendizagem escolar.

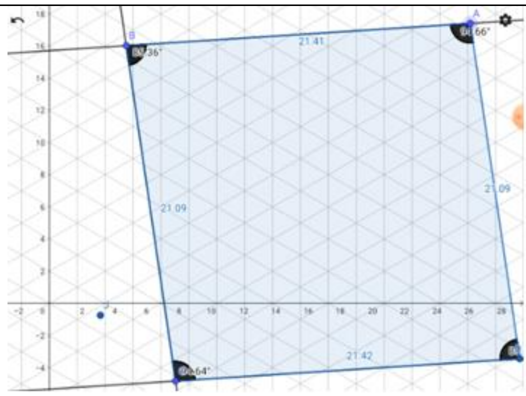
a malha principal e secundária para construir o quadrilátero com todos os lados com as medidas iguais.

Quadro 8 - Imagens das malhas habilitadas no GeoGebra

<table>
<tr><td>Principal e secundária

</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Polar

</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Isométrica

</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Arquivo do autor.

No quadro anterior, observamos as opções de grades que podem ser utilizadas para a construção de figuras geométricas. Contudo, despertou nossa curiosidade o uso da malha principal e secundária, habilitada pelo aluno, e a principal, não presente nesse momento, que será abordada também na análise de dados. Essas malhas são notáveis devido a sua composição por linhas horizontais e verticais que se cruzam em intervalos regulares, formando quadrados uniformes.

No tópico seguinte, descreveremos como ocorreu a coleta de dados e suas implicações na análise de signos que emergem a partir de interações entre indivíduo-dispositivo e indivíduo-indivíduo.

3.4 A produção de dados

Com a ideia sobre as tarefas e com os referenciais teóricos que se utilizam de AGD para manipulação e exploração de quadriláteros, (re)elaboramos atividades com a intenção de contribuir não apenas com a melhoria do ensino e da aprendizagem em geometria, mas também com o objetivo de identificar algumas singularidades na aprendizagem. Com esse propósito, utilizamos como estratégia para coletas de dados: (a) as gravações de áudio e vídeo; (b) os registros do pesquisador; (c) as respostas dos alunos em relação às atividades e (d) as telagravações.

As gravações de áudio e vídeo eram realizadas por uma câmera acoplada a um tripé em um local estratégico da sala de aula, de modo a não atrapalhar a passagem dos envolvidos e a maximizar o ângulo de captura das imagens. Essa ferramenta foi cedida pelo coordenador do Grupo GEPETICEM, também orientador desta pesquisa, e ficava posicionada na quina da sala de aula, de forma frontal aos discentes.

A câmera capturava o áudio produzido internamente na sala de aula e a imagem dos movimentos ou deslocamentos da maioria dos envolvidos. Seu acionamento ocorria no início de cada aula, quando a maioria dos estudantes estava presente na sala, mas antes do início efetivo da aula, e seu desligamento acontecia depois que todos os coparticipantes já haviam saído da sala. As gravações de cada aula eram transferidas para um computador e renomeadas, de forma a facilitar as identificações para futuras consultas. Após esse procedimento, eram excluídas da memória da câmera.

As imagens e os áudios, capturados durante as implementações das tarefas, enriqueciam os registros diários feitos pelo autor. Por exemplo, a identificação de falas ou gestos de determinado estudante, por meio das interações, a inserção de reflexões sobre as atividades realizadas, o *design* da tarefa e as possibilidades de (re)organização das dinâmicas, como mediações, trocas e localização de duplas, entre outros aspectos.

O diário de campo também era utilizado para registrar o progresso de cada atividade, realizada por cada aluno e aluna, identificado nas fichas, além do coletivo. Em algumas fichas dos(as) aprendizes, eram sinalizadas as tarefas que deveriam ser (re)feitas por estarem em branco ou conterem algo incompreensível. As anotações realizadas nas fichas por eles e elas funcionaram como um "termômetro" em relação à produção percebida (se com muita ou pouca dificuldade) e como um "temporizador" para acompanhar o avanço ou a reaplicação das fichas.

As observações ou entendimentos, por parte de cada discente, identificados nas fichas, se originaram, em sua maioria, das manipulações e medições de polígonos convexos de quatro lados por meio do GeoGebra em *tablet*. Dessa forma, para acompanharmos todo o processo de raciocínio e pensamento na resolução dessas tarefas e não somente ficarmos com a finalização do processo, utilizamos a telagravação, um recurso de gravação que, além do áudio, captura imagens na ou a partir da tela do próprio dispositivo digital.

O aplicativo *XRecord*, que é gratuito, foi escolhido e instalado em cada *tablet*, pelo autor, para realizar a telagravação durante as implementações. Ele era acionado no momento em que o dispositivo era entregue ao aprendiz ou quando ocorria alguma interrupção, e encerrado quando era devolvido ao autor. Assim como nas gravações de áudio e vídeo, as telagravações eram transferidas para um computador, renomeadas para facilitar a identificação dos usuários para futuras consultas e, em seguida, deletadas da memória do dispositivo. Cabe pontuar que esse recurso, que pode ser operado a partir do próprio *smartphone* ou *tablet*, já foi empregado em práticas com tarefas geométricas, conforme identificado em pesquisas como as de Madureira (2023), Henrique (2021) e Assis (2020).

Em síntese, utilizamos uma triangulação de dados, que inclui a gravação de áudio, imagens e toques síncronos, tanto individualmente quanto da dupla; as gravações de áudio e vídeo do coletivo; as anotações individuais nas fichas dos(as) estudantes; e o diário de campo do autor. Essa abordagem visa obter uma compreensão mais abrangente e consistente para a validação dos resultados desta pesquisa.

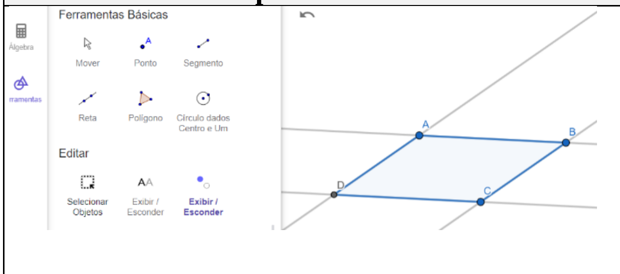
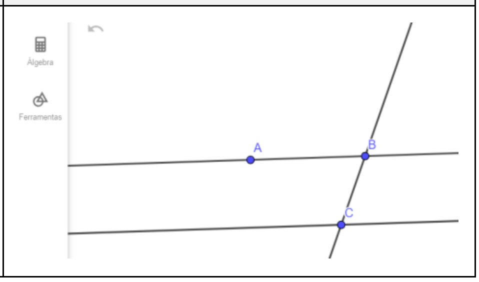
3.5 Construção de quadriláteros no GeoGebra

No desenvolvimento das tarefas para a aprendizagem de quadriláteros convexos, surgiu a necessidade de apresentar construções geométricas predefinidas para que os alunos e alunas pudessem realizar as atividades propostas. Essas tarefas abrangiam a transformação de quadriláteros arbitrários, garantindo a presença de pelo menos um par de lados opostos paralelos, bem como a construção de quadriláteros considerando a existência de um par de retas paralelas cortadas por uma transversal. Além disso, foram construídos quadriláteros específicos, aqueles com pelo menos um par de ângulos internos adjacentes suplementares para identificação e conceituação por meio da exploração.

Considerando o exposto, decidimos elaborar essas construções na plataforma do GeoGebra[32], uma vez que ela oferece a capacidade de armazenar as construções e compartilhá-las por meio de links[33]. No caso específico das tarefas conduzidas em sala de aula, as construções – um par de retas paralelas cortadas por uma transversal e quadriláteros convexos, com pelo menos um par de retas paralelas – foram acessadas pelo *smartphone* do autor e transferidas via *bluetooth* para os *tablets* dos(as) estudantes, os quais foram devidamente testados antes do início das aulas.

Nas Fichas três e quatro, cujo foco principal residia na manipulação do quadrilátero existente e na construção dele para exploração das relações entre os lados e os ângulos internos, foram disponibilizadas construções prévias de um quadrilátero com dois pares de lados opostos paralelos e um par de retas paralelas cortadas por uma transversal, conforme detalhado no Quadro 9.

Quadro 9 - Imagens de construções prévias de figuras geométricas no GG

Quadriláteros com dois pares de lados paralelos	**Par de retas paralelas cortadas por um transversal**
	

Fonte: Print do GeoGebra.org do autor

No quadrilátero com lados paralelos do Quadro 9, é possível observar uma das construções geométricas que o gera. Utilizando apenas as ferramentas <Reta>, <Reta Paralela>,

[32] https://www.GeoGebra.org/
[33] https://www.GeoGebra.org/classroom/vderq2md

<Interseção de Dois Objetos> e <Polígono>, foram realizados os seguintes passos sequenciais: construção da reta AB, criação da reta paralela a AB, definição da reta que passa pelos pontos B e C, estabelecimento da reta paralela à BC e que contém o ponto A, e, por fim, a determinação do ponto D, pertencente às retas que passam pelos pontos A e C. Após a construção do polígono ABCD, as retas paralelas foram ocultadas na construção utilizando a ferramenta <Exibir/Esconder>, deixando, dessa forma, a figura disponível para uso na tarefa em que os(as) discentes deveriam realizar transformações no quadrilátero.

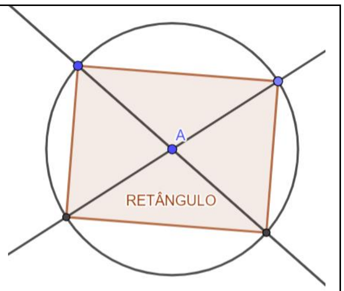
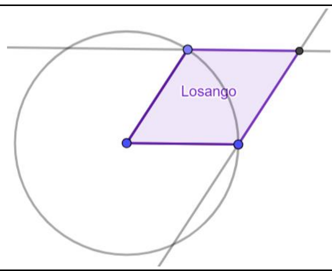
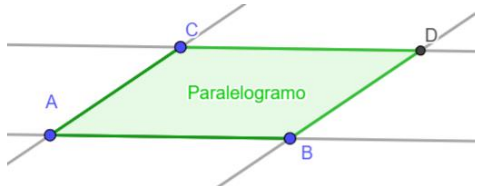
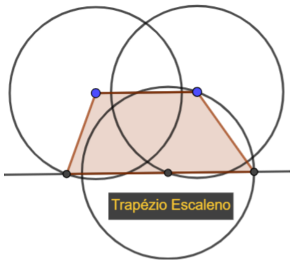
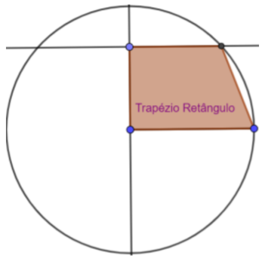
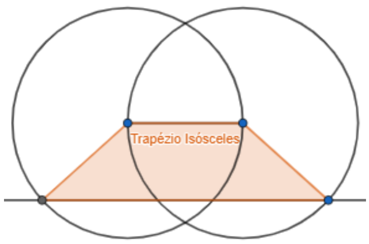
A construção do par de retas paralelas cortadas por uma transversal foi sugerida no trabalho de Henrique (2021), no qual projetamos a criação de quadriláteros, por parte dos(as) aprendizes, cujos vértices pertenciam a essa construção, em que as orientações estavam especificadas na ficha. O propósito era explorar e manipular o polígono de modo a identificar não apenas as formas e as relações dos lados, mas também as relações entre os ângulos internos. Para realizar essa construção, utilizamos as ferramentas <Reta> e <Reta Paralela> do GeoGebra. Inicialmente, construímos a reta AB; em seguida, a reta paralela à reta AB e finalizamos com a reta BC.

Ao criarmos quadriláteros cujos vértices interceptavam o par de paralelas cortadas por uma transversal, buscamos proporcionar a manipulação de figuras que não apenas possuíam pelo menos um par de lados paralelos, mas também um par de ângulos internos retos, conforme as orientações fornecidas na Ficha 4.

Para conceituar quadriláteros com pelo menos um par de lados opostos paralelos, foram construídas e nomeadas no GG: quadrado, retângulo, losango, paralelogramo e trapézios. Os(as) aprendizes deveriam explorar, observar e anotar tanto a quantidade de lados paralelos quanto as medidas e as relações identificadas entre elas, de acordo com as orientações na Ficha cinco. No Quadro 10, especificamos as figuras construídas e as ferramentas do GG utilizadas para as construções.

Quadro 10 - Imagens de construções no GG de quadrilátero com lados opostos paralelos

Ferramenta(s)	**Construções**
<Polígono Regular>	

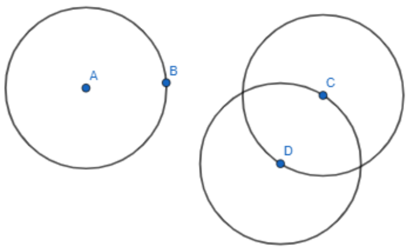
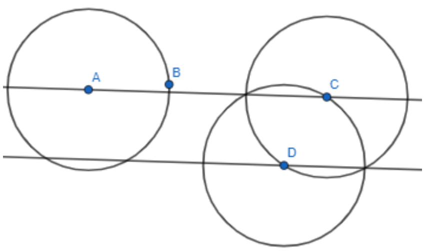
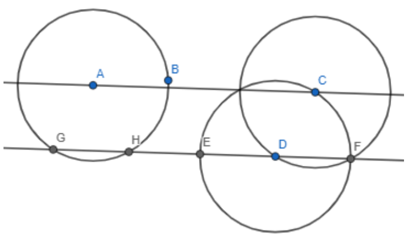
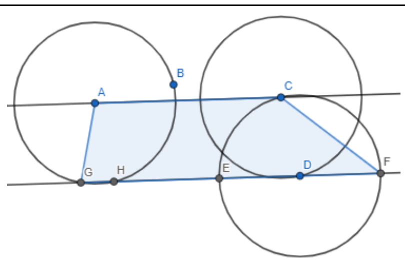
<Círculo dados o Centro e Um>; <Reta>; <Ponto em Objeto>; e <Polígono>	
<Círculo dados o Centro e Um>; <Segmento>; <Reta Paralela>; <Interseção de Dois Objeto> e <Polígono>	
As mesmas mencionadas anteriormente	
<Círculo dados o Centro e Um>; <Compasso>; <Reta Paralela>; <Interseção de Dois Objeto> e <Polígono>	
<Segmento>; <Compasso>; <Reta Paralela>; <Reta Perpendicular>; <Interseção de Dois Objeto> e <Polígono>	
<Segmento>; <Compasso>; <Reta Paralela>; <Ponto em Objeto> e <Polígono>	

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao observar as imagens dos quadriláteros no quadro anterior, consideramos as construções do quadrado e dos trapézios como as que demandaram, respectivamente, pouca complexidade (ou nenhuma) e média complexidade. No caso da figura quadrada, usamos como estratégia a ferramenta <Polígono Regular>, conforme especificado anteriormente. Ao tocar na área do GeoGebra, em dois pontos distintos, apareceu uma janela para colocar a quantidade de vértices da construção pretendida. Já nos trapézios, além das construções de circunferências e de retas, foi necessário selecionar pontos estratégicos que envolviam tanto ponto(s) pertencentes às figuras quanto ponto(s) de interseção entre elas.

No trapézio escaleno, inicialmente, construímos três circunferências semelhantes, sendo que duas delas são secantes, de modo que o centro de uma deve pertencer à circunferência da outra e vice-versa. Em seguida, criamos duas retas, uma AC e a outra paralela a AC que passa pelo ponto D. Posteriormente, marcamos os pontos de interseção entre as circunferências externas e a reta paralela construída, finalizando com a construção do polígono ACFG. Para um detalhamento mais completo da construção dessa figura, elaboramos o Quadro 11, com alguns detalhes das construções.

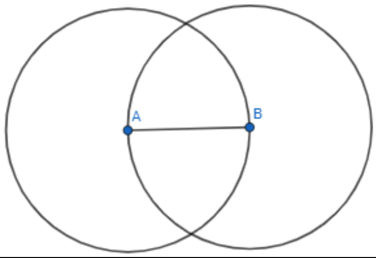
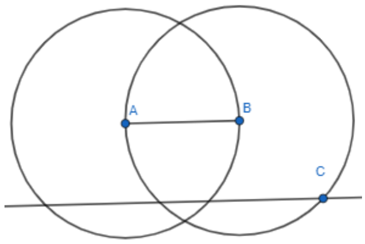
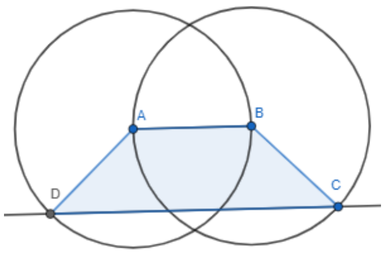
Quadro 11 - Imagens de construções do trapézio escaleno no GG

Construções	**Comentários**
	Utilizamos a ferramenta <Círculo dados o Centro e Um> para construir a circunferência de centro A e ponto B pertencente a ela; e a ferramenta <Compasso> para criar as circunferências de centros C e D, cujos raios são AB.
	Realizamos a criação das retas AC e uma reta paralela a AC que contém o ponto D.
	Utilizamos a ferramenta <Interseção de Dois Objetos> e tocamos na reta paralela e, em seguida, nas circunferências que possuem pontos em comum com ela.
	Com a ferramenta <Polígono>, construímos a figura ACFG.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com duas circunferências e uma reta paralela a um segmento, conseguimos construir um trapézio isósceles, garantindo que o raio da circunferência seja da mesma medida do segmento construído. Seguimos as seguintes estratégias (Quadro 12): (a) construímos o segmento AB; (b) com a ferramenta <Compasso>, criamos duas circunferências de raio AB, uma com centro em A e outra com centro em B; (c) construímos uma reta paralela ao segmento AB, contudo secante às circunferências construídas; (d) marcamos um ou dois pontos de interseção entre a reta construída e as circunferências, sendo que o(s) ponto(s) deve(m) ser exterior(es) à fronteira da interseção das circunferências; e (e) construímos a figura de vértices ABCD.

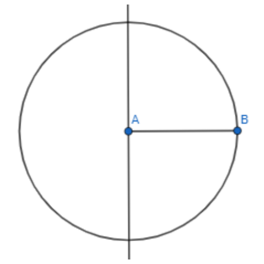
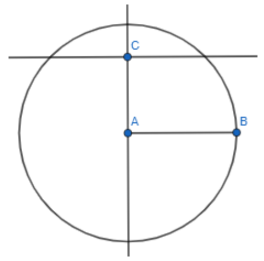
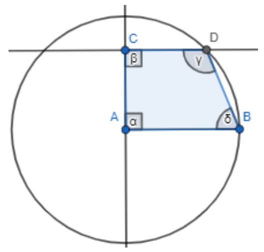
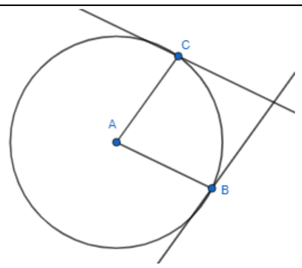
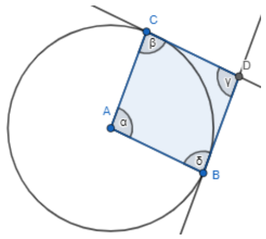
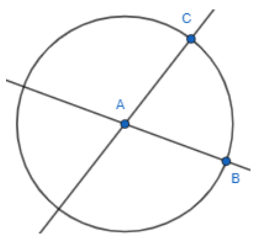
Quadro 12 - Imagens de construções do trapézio isósceles no GG

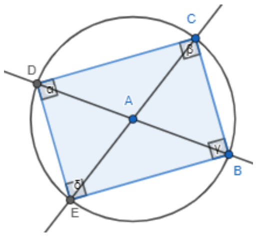
Construções	**Comentários**
	A construção envolveu a criação do segmento AB e das circunferências, sendo uma com centro em A e outra com centro em B.
	Foi traçada uma reta paralela ao segmento AB, que também era secante às circunferências, com um ponto de interseção externo à área de interseção das circunferências.
	Neste caso, foi construído apenas um ponto de interseção entre a reta e a circunferência, conforme mencionado anteriormente, e depois disso, o polígono ABCD foi formado.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Com uma circunferência e duas retas, alcançamos as construções do trapézio retângulo, bem como do losango e do retângulo. No trapézio, é necessário que uma reta seja perpendicular ao raio, enquanto a outra é paralela a ele. No losango, basta as duas serem paralelas ao raio, enquanto no retângulo ambas são concorrentes no centro da circunferência. O Quadro 13 apresenta as imagens das construções desses quadriláteros, acompanhadas de algumas observações.

Quadro 13 - Imagens de construções do trapézio retângulo, losango e retângulo no GG

Construções		**Observações**
Trapézio Retângulo		A construção do trapézio retângulo ABCD envolveu a criação do segmento AB e, em seguida, com <Compasso>, uma circunferência com raio AB. Posteriormente, foi traçada uma reta perpendicular ao raio que passa pelo centro da circunferência.
		Em seguida, foi construída uma reta paralela ao raio, onde o ponto C também pertence à reta perpendicular.
		Para finalizar, o ponto D foi construído com <Ponto em Objeto> e a figura ABCD foi concluída.
Losango		Para a construção do losango ABCD, inicialmente, foi criada uma circunferência com a ferramenta <Circulo dados Centro e Um>. Em seguida, dois raios, AB e AC, foram criados e duas retas foram construídas, sendo uma paralela ao segmento AB e outra paralela a AC.
		O quadrilátero ABCD foi finalizado marcando o ponto de interseção entre as retas construídas, com toques nos pontos evidenciados.
Retângulo		A construção do retângulo BCDE envolveu o uso da ferramenta <Circulo dados Centro e Um> para criar a circunferência. Em seguida, duas retas foram construídas, sendo uma AB e outra concorrente a AB no centro da circunferência. O toque evidenciou um ponto de interseção entre essa reta e a circunferência.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>
</td>
<td>Os outros dois pontos de interseção entre as retas e a circunferência foram marcados com <Ponto em Objetos>, finalizando o retângulo de vértices BCDE.</td>
</tr>
</table>

Fonte: Elaborada pelo autor.

Todas essas construções apresentadas anteriormente foram concebidas de maneira a permitir que os(as) estudantes explorassem, manipulassem, visualizassem, conjecturassem e validassem as propriedades dos quadriláteros com pelo menos um par de lados opostos paralelos, utilizando toques estratégicos na tela. É importante salientar que as estratégias utilizadas para a construção desses polígonos não são únicas, como exemplificado pela construção geométrica do quadrado com a utilização de uma circunferência e duas retas perpendiculares concorrentes no centro.

No próximo capítulo, apresentaremos a análise e a discussão dos resultados provenientes do processo de implementação de tarefas sobre quadriláteros, nos quais os(as) estudantes expressaram seus raciocínios geométricos ao tocar na tela, fazer anotações, gesticular e falar. Essas ações foram fundamentadas na triangulação de dados, envolvendo diversas idas e vindas, a fim de validar os resultados obtidos.

CAPÍTULO IV – Quando a malha entra em cena no aprendizado de Quadriláteros

No decorrer deste e do próximo capítulo, abordaremos recortes de interações decorrentes da implementação de tarefas realizadas no período de março a novembro de 2022. Analisamos o uso da malha quadriculada na resolução de atividades envolvendo o estudo de quadriláteros com os alunos do sexto ano do Ensino Fundamental. Para isso, utilizamos gravações de áudio e vídeo, telagravações, escritas de alguns discentes nas fichas e o nosso diário de campo. Portanto, nesta seção, o objetivo é descrever e analisar os signos que emergem a partir das interações entre os indivíduos envolvidos e entre os indivíduos e o dispositivo, bem como alguns desdobramentos específicos, como toques, ferramentas, fala e escrita, no contexto da resolução de tarefas propostas em sala de aula.

4.1 Toque na malha

Alguns estudantes, na resolução de tarefas sobre quadriláteros, neste caso, para explorar os ângulos internos, utilizaram espontaneamente a malha quadriculada para abordar situações-problema relacionadas ao desenvolvimento de conceitos de quadriláteros, por meio do GG+*tablet*, mesmo sem nunca termos mencionado esse artefato para eles/elas.

Essa malha foi introduzida pela primeira vez em uma atividade na qual os alunos e as alunas deveriam usar um par de retas paralelas cortadas por uma reta transversal para construir quadriláteros específicos, com todos os lados de medidas iguais. É importante mencionar que essa tarefa foi identificada como um desafio na ficha numerada como quatro para fins de organização das implementações, conforme especificado no capítulo anterior.

Após a "descoberta" desse signo, notamos o seu emprego não apenas na Ficha 4, mas também nas Fichas 5 e 6, por pelo menos três duplas. Com base nisso, e com o intuito de promover um efeito didático, procedemos à análise dos momentos de interações (discente-discente, discente-dispositivo e discente-docente), em que uma dupla empregou a malha quadriculada para solucionar as tarefas propostas em cada ficha específica. Essa abordagem visa aprofundar as reflexões sobre o uso desse recurso para o desenvolvimento de conceitos de quadriláteros.

O uso da malha quadriculada na resolução de tarefas para o desenvolvimento de conceitos geométricos com o GG não é novidade, pois as pesquisas de Assis (2020) e Brito (2022) abordam esse artefato, respectivamente, no estudo de isometria e em semelhanças de triângulos. A novidade, neste caso, está na centralidade da emergência desse signo na aprendizagem de quadriláteros, pelos discentes, utilizando ficha-GG+*tablet* (Bairral e Assis, 2022).

Particularmente, a pesquisa de Madureira (2023), que também investigou o aprendizado de quadriláteros, focou as estratégias desenvolvidas pelos estudantes, por meio de experimentações, ao utilizarem as Fichas de 1 a 4 (consulte o Quadro 6 - objetivos e período de realização das tarefas). Fato é que as tarefas da Ficha 4, que foram o limite da análise em seu trabalho, são também o ponto de partida da nossa análise, mas com foco na promoção e contribuição de significados da malha quadriculada. Portanto, é relevante descrever como ocorreu a introdução e a subsequente utilização desse artefato.

Conforme indicado no capítulo anterior, as tarefas da Ficha 4 tinham como objetivo relacionar os ângulos internos de figuras geométricas que apresentassem pelo menos um par de lados paralelos. A tarefa que resultou na apresentação inicial e no posterior emprego da malha quadriculada pode ser visualizada no Quadro 14.

Quadro 14 - Tarefa 1(c) da Ficha 4 e seus objetivos específicos

Tarefa 1(c)	**Objetivos específicos**
Você deverá construir um quadrilátero, tomando como base um par de retas paralelas cortadas por uma reta transversal. Para isso, abra o aplicativo GeoGebra, onde você encontrará essa construção. Utilizando somente as ferramentas abaixo, faça o que se pede. c)  **(Desafio)** Construa um quadrilátero com todos os lados com as medidas iguais. Em seguida, sem fazer a conta, responda: ➢ Qual o valor da soma dos ângulos internos A+D? E da soma B+C? ➢ Qual a soma dos ângulos internos desse quadrilátero?	Construir e manipular quadriláteros cujos lados possuem a mesma medida; identificar os ângulos suplementares; e constatar 360° na soma dos ângulos internos.

Fonte: Registro capturado da ficha.

O desafio ilustrado no quadro consistia em construir um quadrilátero em que os lados tivessem a mesma medida. Manuela, após várias tentativas, declarou ser impossível esta construção. Ao retomar a atividade, ela justifica sua resposta dizendo que quando tentava manipular o quadrilátero não conseguia construí-lo com todos os lados cujas medidas fossem iguais. Assim como Manuela, Bruna e Estevão também enfrentaram dificuldade para a construção do quadrilátero. Já a dupla Charles e Eduarda conseguiu construir o quadrilátero após algumas tentativas frustradas.

Estevão e a dupla Charles e Eduarda também enfrentaram dificuldades na construção desse tipo de quadrilátero. Dentre eles, a dupla conseguiu construir primeiro. Em seguida, Charles tentou ajudar Bruna, enquanto a Eduarda, a dupla Fábio e Cauã, mas sem sucesso. Bruna, mais uma vez, expressou que achava impossível construir a figura. Após isso, reforçamos que era um desafio e que Eduarda e Charles tinham conseguido. Sugerimos que ela passasse para a próxima atividade e depois voltasse à construção. Logo após a nossa sugestão, Estevão sorriu e disse que tinha conseguido construir o quadrilátero. Ao verificar sua construção, ficamos surpresos por ele ter usado a malha quadriculada do GG. Sorrindo, mencionamos para a turma que ele havia encontrado uma estratégia para facilitar a construção e solicitamos que ele a compartilhasse com os demais colegas da classe.

A malha principal e secundária, utilizada por Estevão, composta por linhas horizontais e verticais, que se cruzam em intervalos regulares, formando quadrados uniformes maiores e menores, contribui para a criação de figuras com detalhes mais precisos. Dessa forma, a malha principal auxilia no posicionamento geral, enquanto a secundária viabiliza a colocação exata de elementos menores ou mais complexos.

Todavia, a malha principal, outro tipo de malha disponível no GG, formada por linhas horizontais e verticais, que se cruzam em intervalos regulares para criar quadrados uniformes, não foi ativada por Estevão. Apesar de essa malha também ser capaz de facilitar tanto a construção quanto o posicionamento preciso do quadrilátero, permitindo um alinhamento e um dimensionamento rigorosos dos elementos da figura, ele escolheu não utilizá-la. Essa decisão pode ter sido influenciada por sua visualização e comparação das três opções de malha habilitadas: principal e secundária, polar e isométrica, evidenciadas no capítulo anterior.

Durante a manipulação da figura construída, na área habilitada com os eixos e a malha quadriculada, Estevão expressou: "Eu tive a melhor ideia de todas. Eu vou ser um gênio!". E, ao nos chamar, acrescentou: "Tio, eu coloquei a malha para ficar melhor. Foi uma boa ideia!".

Essas observações sugerem a possibilidade de que ele tenha identificado uma relação específica entre as grades e o quadrilátero com todos os lados iguais, o que demonstra algum domínio de manipulação.

Ao compartilhar com a turma que Estevão havia descoberto uma abordagem que poderia auxiliar na construção de quadriláteros com todos os lados iguais, alguns colegas manifestaram interesse, como evidenciado abaixo:

> **Bruna:** “Como você fez?”
> **Estevão:** “No canto da tela, tem uma engrenagem.”
> **Bruna:** “Tem uma configuração!”
> **Estevão:** “Você pode colocar os pontos exatamente nas esquinas dos quadrados.”
> **Bruna**: “Ah, tá! Em cima.”

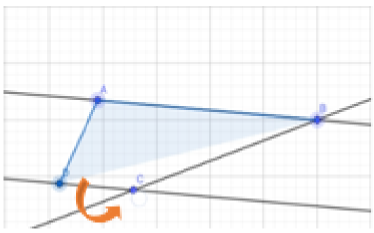
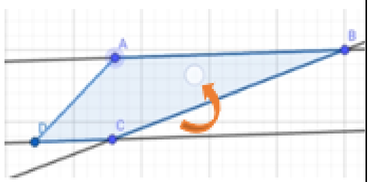
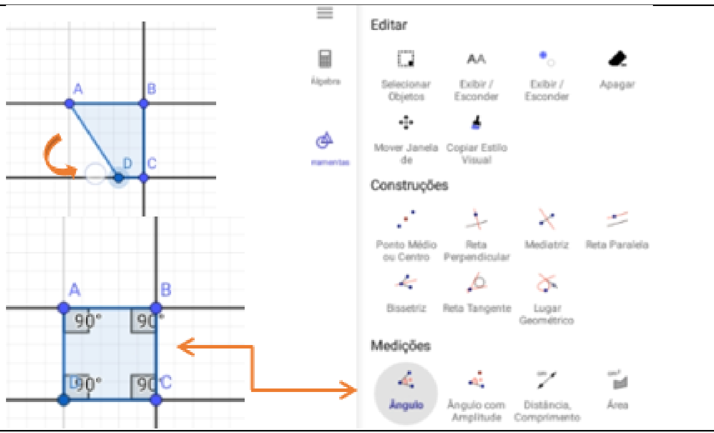
Ao demonstrar a construção do quadrilátero para alguns colegas, por meio de toques na tela, Estevão optou por não utilizar os eixos, mostrando apenas a malha principal e secundária. Antes mesmo que ele concluísse a demonstração, Eduarda comentou que havia tentado usar a malha, mas não tinha entendido. Ela explicou que dois lados da figura ficavam iguais e os outros dois lados ficavam diferentes. Estevão respondeu: “Não se você posicionar no mesmo quadrado!”, possivelmente fazendo referência à grade quadriculada. Vale ressaltar que não há indícios de que Eduarda tenha usado qualquer tipo de malha antes de Estevão.

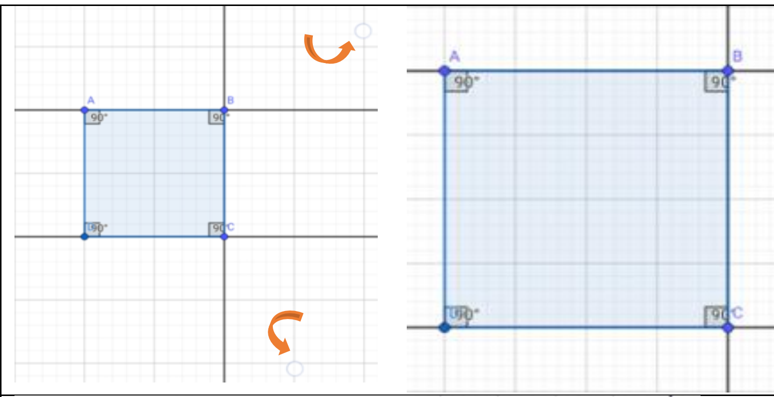
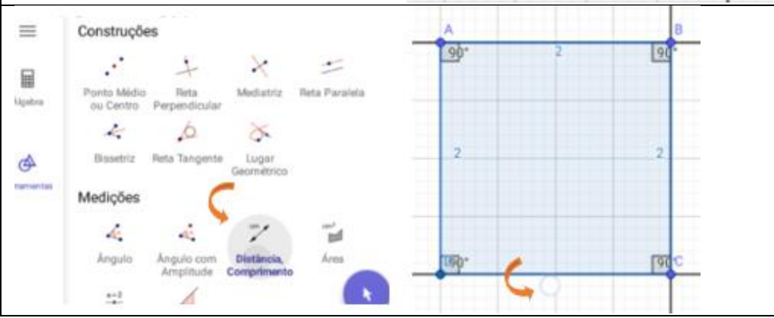
Esse tipo de tarefa (conforme Quadro 14), que emprega o GG+*Tablet* para a construção de quadriláteros com base em um par de retas paralelas cortadas por uma reta transversal, se destaca pela exploração de relações entre ângulos, abordando conceitos como ângulos opostos e ângulos adjacentes. Esse enfoque é pouco comum em estudos com quadriláteros e, quando abordado, geralmente é baseado em figuras estáticas no papel ou quadro. Além disso, essas tarefas exploram processos geométricos como manipulação, argumentação, justificação e validação, que ultrapassam as expectativas do currículo escolar. Conforme destacado por Henrique (2021), esse tipo de abordagem “rompe a lógica Euclidiana, possibilitando uma abordagem descentralizada da hierarquia e permitindo, inclusive, a construção de novos conceitos” (p.58). Um exemplo disso seria definir os polígonos com quatro ângulos internos ou ângulos internos replementares como quadriláteros.

A construção da figura com todos os lados de mesma medida por Estevão ocorreu de maneira espaçada e sequencial, com intervalos de tempo entre os toques. Nesse processo, ele executou diversas ações, incluindo a ativação de ferramentas e a ampliação da figura. No início, Estevão seguiu a sequência de toques: <Exibir Malha><Polígono><pontos nas

retas><Mover><vértice A><vértice C><vértice D><Ângulo>. Posteriormente, após ampliar a figura, ele realizou as seguintes ações: <Distância><lado AD><lado AB><lado BC><lado CD>. No Quadro 15, é possível observar alguns passos desse sequenciamento de toques.

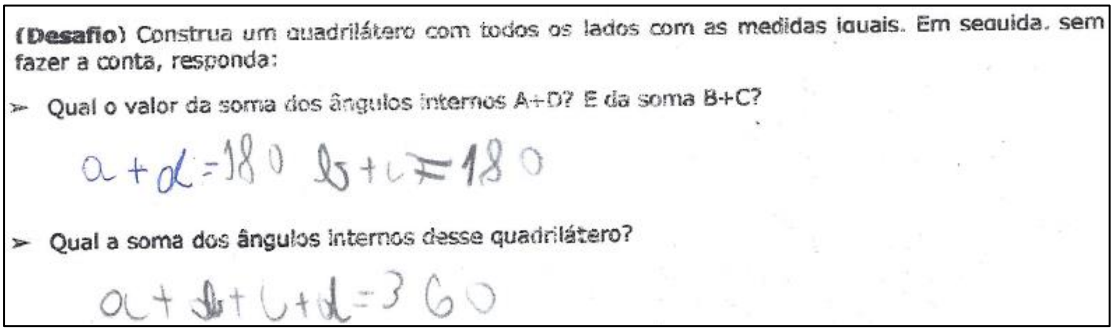
Quadro 15 - Imagens dos toques para construção do quadrilátero

Toques	Visualização na tela	Considerações
<Exibir Malha> <Polígono>		Hablita a malha antes de construir o quadrilátero e, em sequência, utiliza a ferramenta polígono.
<pontos nas retas><Mover>	 	Sleciona um ponto (D) em uma das retas paralelas e utiliza os outros existentes para cosntruir a figura. Depois, move a figura de modo que os seus lados coincidam com um dos quadrados da malha.
<vértice A> <vértice C> <vértice D> <Ângulo>		Movimenta os vértices da figura utilizando como base o quadrado da malha. Em seguida, verifica os ângulos internos com toque na área interna da construção.

Ampliação		Demonstra preferência em ampliar a figura.
<Distância>		Exibe as medidas dos lados com toques específicos.

Fonte: Arquivo do autor.

A ideia inicial de Estevão de construir um quadrilátero com todos os lados medindo o mesmo valor, ao posicionar os lados da figura em um mesmo quadrado da malha, foi confirmada. As ferramentas sugeridas e a abordagem escolhida por ele, como ilustrado anteriormente, contribuíram para a construção do pensamento geométrico em relação a essa figura. Essa conclusão se torna mais evidente nas afirmações feitas por ele: "Deu tudo certinho.", "É exatamente trezentos e sessenta.”, “Noventa, noventa, noventa, noventa." Essa ideia também foi replicada em sua ficha, como mostrado na Figura 12.



(Desafio) Construa um quadrilátero com todos os lados com as medidas iguais. Em seguida, sem fazer a conta, responda:

➢ Qual o valor da soma dos ângulos internos A+D? E da soma B+C?

a + d = 180   b + c = 180

➢ Qual a soma dos ângulos internos desse quadrilátero?

a + b + c + d = 360

Figura 12 - Soma dos ângulos internos da figura com os quatro lados iguais
Fonte: Recorte da ficha de Estevão.

Ao observar a estrutura da resposta sobre a soma dos ângulos internos, seja na fala ou na escrita desse aluno, que utiliza a linguagem matemática, surgem dúvidas quanto ao seu entendimento da unidade dos ângulos. Isso acontece porque o GeoGebra utiliza o símbolo 90° (noventa graus) para representar as medidas dos ângulos internos, e a resposta desse aluno levanta suspeitas quanto à representatividade dos valores 180 (cento e oitenta) e 360 (trezentos e sessenta) como números naturais ou como medidas dos ângulos.

Caso os conceitos de quantificação e abertura[34] não estejam plenamente compreendidos pelos(as) discentes, isso pode levar a erros de raciocínio e, consequentemente, a definições geométricas equivocadas, como, por exemplo, quadriláteros que apresentam medidas de lados e ângulos com o mesmo valor. Dessa forma, é necessário que o indivíduo compreenda que a observação da quantificação implica a atribuição de valores numéricos a medidas de comprimento, que podem ser exatas ou aproximadas. Simultaneamente, a noção de abertura deverá estar associada à amplitude do ângulo, onde ângulos agudos são mais fechados, enquanto ângulos obtusos são mais abertos.

A conclusão de Estevão a respeito da soma entre os ângulos internos, conforme sugerida na Fficha 4, originou-se da construção de um único quadrilátero, no qual os lados tinham uma medida de 2 unidades de comprimento. Isso ocorreu porque ele acabou por ampliar e reduzir a figura, em vez de mover os vértices dela para criar outros quadriláteros com medidas variadas. Essa estratégia pode ter gerado a sensação de que ele estava observando diferentes quadrados, todos com a mesma unidade de medida, devido à presença do tipo de malha utilizada, principal e secundária.

Ao levar em consideração o exposto anteriormente, identificamos os domínios construtivo e relacional manifestados, respectivamente, pela dupla Charles e Eduarda, que realizaram apenas a manipulação no quadrilátero, e por Estevão, que fez a manipulação da figura utilizando a malha como recurso. Contudo, não podemos garantir que Estevão estava ciente de que havia realmente construído uma figura com as propriedades de um quadrado, apesar de ter mencionado a palavra "quadrado" mais de uma vez ao se referir à malha quadriculada. Além disso, não podemos concluir que ele fez conexões entre o tipo de figura construída e as medidas dos lados iguais e os ângulos internos, nem se relacionou esses elementos com as somas dos ângulos propostas na tarefa (colaterais internos e suplementares), como uma das propriedades de quadriláteros com lados opostos paralelos. Neste caso, permanece(m) incerto(s) o(s) significado(s) que esse tipo de grade tinha para o aluno.

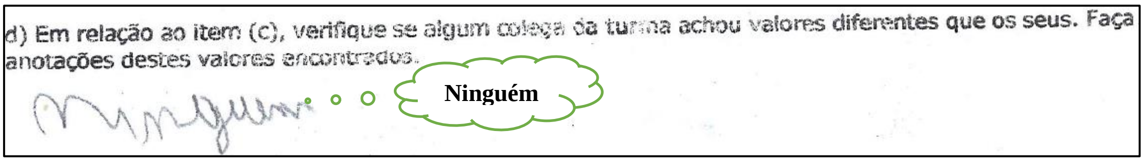
A única certeza evidente é a estratégia utilizada por Estevão para construir uma figura

[34] Estamos atribuindo a quantificação e a abertura, nesse caso específico, valores que representam medidas de comprimento e de ângulo, respectivamente.

com quatro lados iguais, através da malha quadriculada, evidenciando que ela é um tipo de signo que transita entre GG+*tablet* e a construção de um quadrilátero específico. Essa situação é semelhante à identificada por Brito (2022) na construção de triângulos semelhantes. Tal convicção foi destacada durante a conversa com Eduarda após a conclusão da tarefa proposta, conforme o diálogo a seguir:

Eduarda: "Fazendo nessa linha reta dá certo?"
Estevão: "Sim! Você coloca exatamente no quadradinho."

Estevão teve a oportunidade de comparar sua atividade com as dos outros colegas da classe, buscando identificar e anotar possíveis discrepâncias nas respostas. No entanto, ele não encontrou tais divergências, conforme relatado por ele na ficha (Figura 13).


d) Em relação ao item (c), verifique se algum colega da turma achou valores diferentes que os seus. Faça anotações destes valores encontrados.

Ninguém

Ninguém

Figura 13 - Resposta após a comparação das atividades
Fonte: Recorte da ficha de Estevão.

Quando consideramos a resposta fornecida pelo estudante, não podemos afirmar se ele se concentrou apenas nos valores indicados na ficha, conforme especificado, ou se também levou em consideração as medidas dos lados da figura e as parcelas dos ângulos internos. No GG, a visualização dos ângulos internos é representada por um símbolo que se assemelha a um pequeno quadrado situado no vértice do ângulo, destacando a medida de 90°. Diante disso, permanece a dúvida quanto ao reconhecimento por parte de Estevão das características do quadrado, ou seja, que todos os lados têm a mesma medida e que os ângulos internos são semelhantes.

Diante do surgimento da malha, até aqui, observamos que ela foi significativa não apenas para Estevão, que compartilhou a existência desse artefato enfatizando "você pode colocar os pontos exatamente nas esquinas dos quadrados", mas para todos os seus colegas de classe. Através do domínio relacional, "Sim! Você coloca exatamente no quadradinho", conseguiram destravar a resolução da tarefa proposta, possibilitando a continuidade sequencial delas. Além disso, a grade teve um significado, ao mostrar que era possível construir quadriláteros com todos os lados de medidas iguais, algo que antes parecia impossível, mesmo antes de verificar as medidas dos lados.

Em contrapartida, o uso desse signo possibilitou que os alunos e as alunas relacionassem a característica do quadrilátero de lados iguais com as medidas de ângulos internos, que também eram iguais. Apesar disso, observaram que não houve alteração nos valores das somas 180° e 360°, encontrados em outros tipos de quadriláteros já explorados, como argumentado por Estevão: "Deu tudo certinho.", "É exatamente trezentos e sessenta.”, “Noventa, noventa, noventa, noventa”. Vale ressaltar que essas características são propriedades suficientes para definir um quadrado.

4.2 A utilização da malha quadriculada para resolução da tarefa 1 na Ficha 4

No quarto dia da continuação da implementação da Ficha 4 (construir quadriláteros com pelo menos um par de lados paralelos, a partir de duas retas paralelas cotadas por uma transversal), Fernando, que havia faltado a aula anterior em que Estevão fez uso da malha quadriculada e compartilhou a ideia com outros colegas da sala, formou uma dupla com Daniela, uma aluna recém transferida de outra turma, devido à falta do seu parceiro habitual, Walace, que não estava presente naquele dia. Fernando precisava escrever na ficha suas observações sobre a tarefa 1, a qual envolvia a construção de quadriláteros a partir de duas retas paralelas cortadas por uma transversal.

Durante a realização das atividades em duplas, observamos que um número significativo de estudantes tinha dúvidas, sendo comum a confusão entre as medidas dos lados e dos ângulos, e vice-versa. Além disso, constatamos que a maioria encontrava dificuldades em verificar essas medidas por meio de toques na tela. No caso das medidas dos lados, os toques eram na área interna ou complementar do polígono ou, ainda, nos seus vértices. Já as medidas dos ângulos eram verificadas em espaços que não compreendiam dois lados adjacentes ou três vértices consecutivos, ou na área do polígono, apesar de estarem utilizando as ferramentas específicas para essa finalidade. Essa situação sugere uma possível falta de compreensão dos conceitos relacionados a essas medidas, o que complicava as investigações e observações.

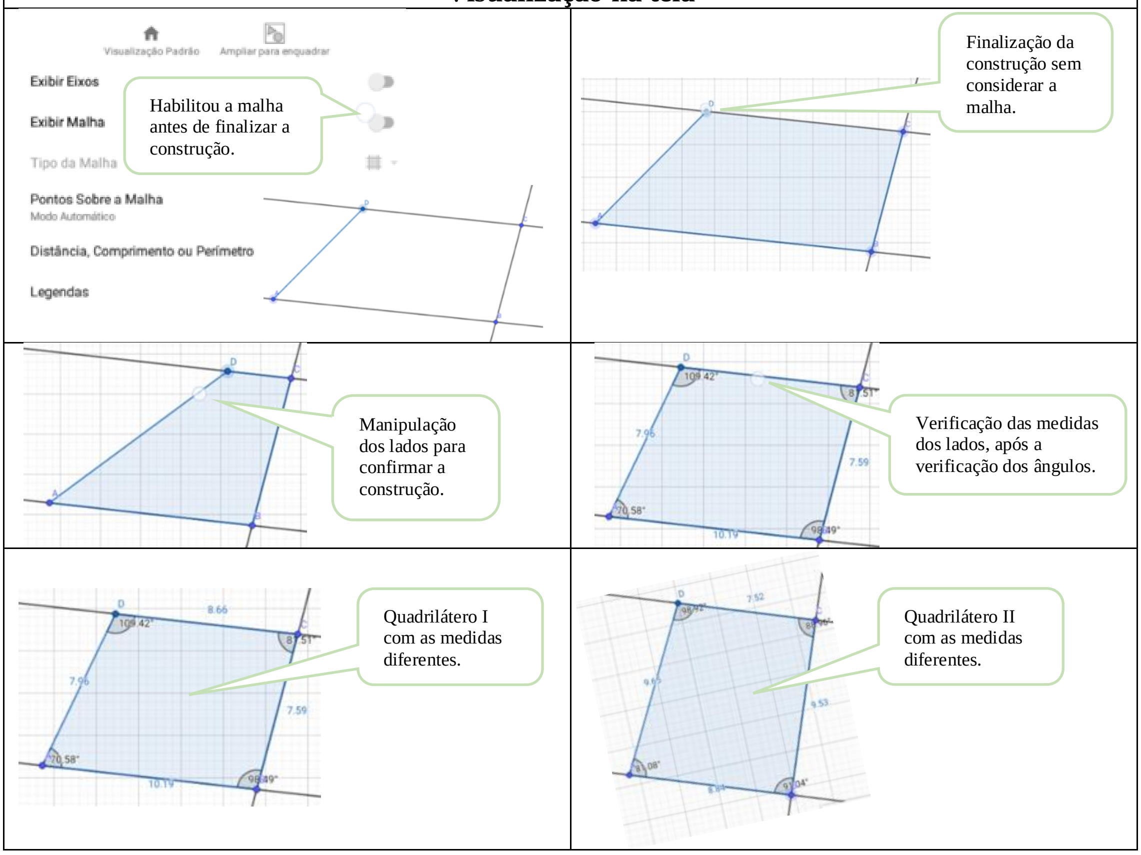
Outro aspecto identificado foi a dependência das instruções fornecidas para resolver cada tarefa, o que sugeria que as duplas não estavam interpretando adequadamente o que estava escrito na ficha sobre as tarefas. Isso, por sua vez, reduzia a autonomia dos estudantes no processo.

Por outro lado, alguns estudantes tomavam a iniciativa de pedir ajuda ou oferecer ajuda uns aos outros. Um exemplo disso foi o caso de Bruna, que solicitou auxílio a Fernando para verificar os ângulos internos e se dirigiu até a mesa dele com sua construção no dispositivo. Fernando indicou a ferramenta que ela deveria usar e onde tocar na tela para visualizar esses ângulos de uma vez. Enquanto observava os ângulos, Bruna perguntou a Fernando: “O que eu observo para escrever?” Fernando respondeu: “O que você observa aí?” Nesse momento, parecia que ela não estava identificando as características dos ângulos internos (ângulos opostos com a mesma medida) ou talvez não sabia o conceito da região angular.

Fernando, que estava trabalhando com Daniela, sentiu a necessidade de construir um quadrilátero com medidas diferentes em todos os lados para poder cumprir as instruções de escrever suas observações conforme solicitado. Enquanto ele estava construindo a figura, Estevão o interrompeu e pediu que ele habilitasse a malha. Apesar de Fernando ter dito que não achava necessário, Estevão ativou a malha principal e secundária, acrescentando: “Estou querendo ajudar”. Inicialmente, a recusa de Fernando pode indicar desconhecimento da ferramenta ou sugerir que ela não era relevante para aquele momento. No entanto, ele deixou a malha habilitada e prosseguiu com a construção da figura desejada, mantendo a malha em segundo plano. O Quadro 16 ilustra as ações de Fernando e Estevão.

Quadro 16 - Ações tomadas na construção de quadriláteros com medidas dos lados diferentes

Visualização na tela



Fonte: Arquivo do autor.

Durante a construção da figura com todos os lados de diferentes medidas, cinco ações se destacaram: (a) toques simultâneos; (b) a grade como signo, (c) a atenção dedicada à confirmação dos vértices do quadrilátero sobre as retas, (d) a verificação das medidas dos lados para posterior validação e (e) a necessidade de criar duas figuras distintas.

Os toques simultâneos ocorreram quando Estevão habilitou a malha e, por Fernando, na construção do quadrilátero utilizando a ferramenta <Polígono>. Esses tipos de toques já foram sinalizados por Bairral (2017) e identificados por Assis (2020), sendo que, neste caso específico, o signo representado pela malha tem um significado especial para Estevão, pois, até o momento, ele a utilizou para construir um tipo de quadrilátero. O que não ocorreu com Fernando, pelo fato de continuar a construção sem levar em consideração a grade habilitada pelo colega. Na Figura 14, está representada a habilitação da malha, feita por Estevão, no momento em que Fernando construía o lado AD do polígono.

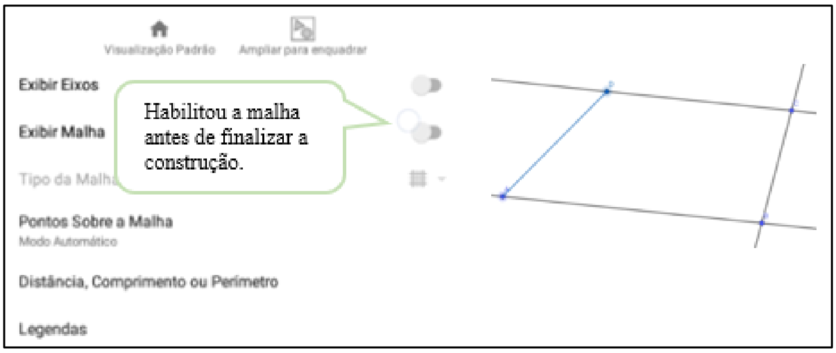


Figura 14 - Toques simultâneos: habilitação e construção
Fonte: Arquivo do autor

Estevão, ao manipular os lados e vértices do quadrilátero, antes de confirmar as medidas, e posteriormente verificar essas medidas com toques específicos na tela - tocando na área do quadrilátero para verificar os ângulos internos e nos segmentos para analisar os lados - cria uma sensação de confiança na construção, consolidando um possível domínio prático e cognitivo (Bussi e Mariotti, 2008). Essa abordagem é reforçada pela combinação das ferramentas utilizadas com os toques estratégicos na interface do GG.

No entanto, foi observado que ele não percebeu quando completou a construção do quadrilátero proposto na tarefa (quadrilátero I), continuando a manipulação. Após um intervalo de tempo, ele então transformou a figura em outra (quadrilátero II) com as mesmas características (Figura 15) para, finalmente, realizar as somas dos ângulos internos e registrar na ficha. Em um primeiro momento, poderíamos pensar que Fernando estava usando a manipulação para construir um polígono com as mesmas características, mas não foi o caso, conforme observado na telagravação.

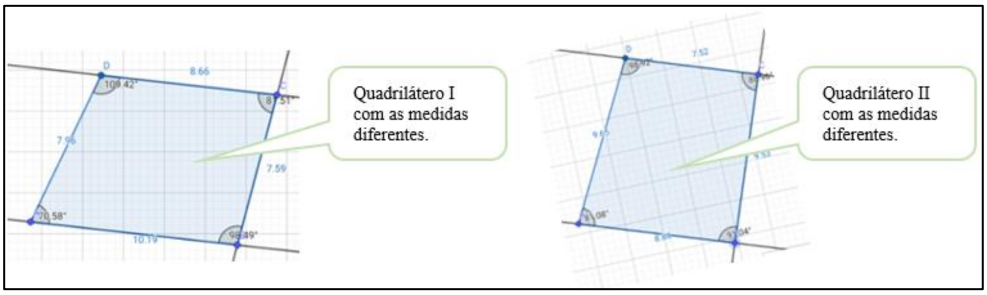


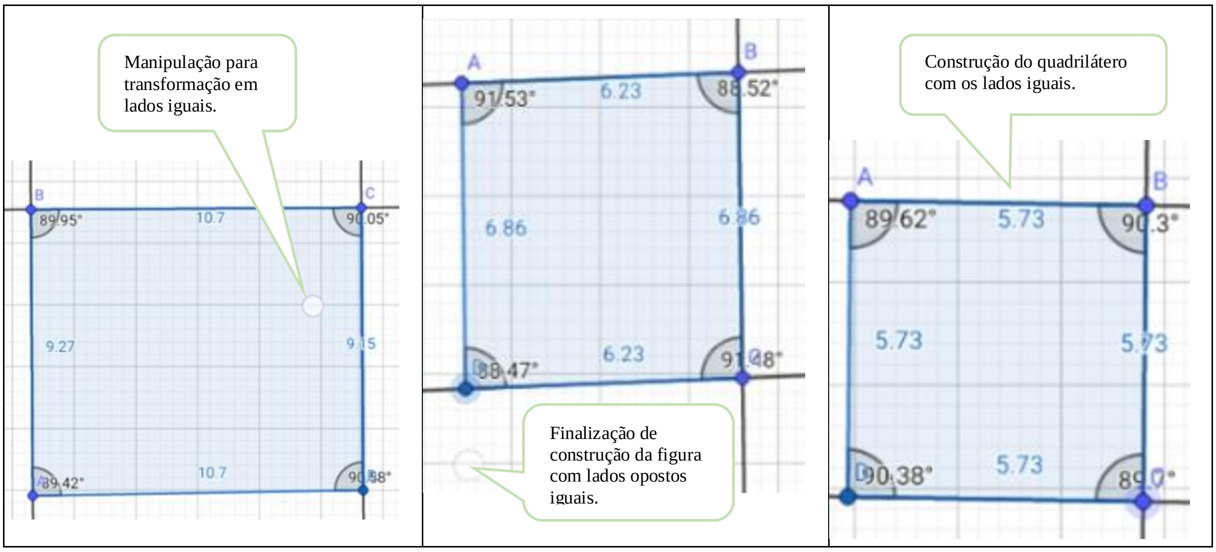
Figura 15 - Quadriláteros I e II com todas as medidas diferentes
Fonte: Arquivo do autor

O uso da malha quadriculada na manipulação e na exploração do polígono com quatro lados de medidas diferentes se revelou como um símbolo sem significado expressivo para a construção da figura neste momento. Isso deixa uma curiosidade em aberto sobre o nível de compreensão de Fernando em relação ao seu uso.

No contexto do processo de transformação de quadriláteros com lados de diferentes medidas em quadriláteros com lados iguais, na tarefa desafiadora (Quadro 14), Fernando continuou a adotar a estratégia de manipular os lados e os vértices do quadrilátero, sem evidência de relação com a grade quadriculada. Isso levou à criação de duas figuras distintas: uma com lados opostos de igual medida e outra com todos os lados iguais. No entanto, essa abordagem de transformação das figuras resultou em pelo menos um erro conceitual, relacionado aos paralelogramos, conforme ilustrado no Quadro 17.

Quadro 17 - Tentativas de construções de quadriláteros com todos os lados iguais

Visualização na tela



Fonte: Arquivo do autor.

Na conclusão da construção do quadrilátero com lados opostos iguais (segunda imagem do Quadro 17), Fernando acreditou que tinha cumprido a tarefa, o que foi identificado em sua conversa com o autor.

> **Fernando**: “Lados é isso aqui! Certo?”
> **Autor**: “Sim.”
> **Fernando**: “Isso aqui é ângulo! Certo?”
> **Autor**: “Exato.”
> **Fernando**: “Está pedindo para fazer todos os lados iguais. Tá certo?”
> **Autor**: “Sim! Mas reveja as medidas dos lados.”
> **Fernando**: “Tá tudo igual!”
> **Autor**: “Tem certeza de que estão todas iguais?”
> **Fernando**: “Não estão iguais? Este aqui e este aqui...” (tocando na tela com o lápis nos segmentos opostos). “Está certo!”
> **Autor**: “Não! Por que essa medida é igual a essa?” (tocando nos segmentos adjacentes)
> **Fernando**: “Ah! Essa medida tem que estar igual a essa!”
> **Autor**: “Exatamente! Note que você construiu com dois pares de lados iguais.”

Considerando a experiência narrada no processo de construção do quadrilátero e o diálogo apresentado anteriormente, parece que os símbolos representativos das medidas dos lados opostos não foram suficientes para compreender que a figura construída não possuía todos os lados iguais. Isso pode ter ocorrido devido à demora em manipular a figura ou, talvez, à dificuldade de alcançar o objetivo sem recorrer a outro recurso.

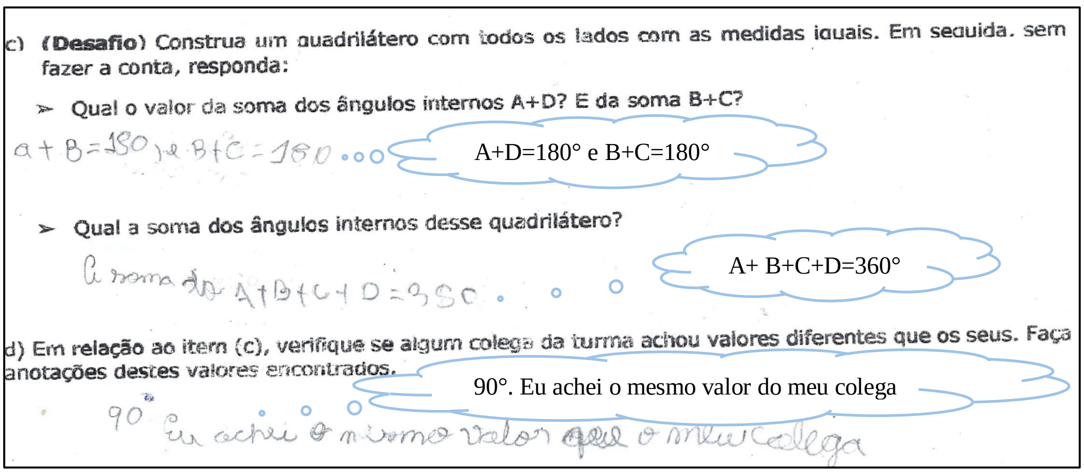
"Por um, por dois, por dois pontos não estou conseguindo!", exclamou Fernando ao tentar transformar o quadrilátero com todos os lados iguais, sem aparentemente relacionar sua ação com a grade. Nesse momento, ficou evidente a impressão de que, para ele, a função da grade era simplesmente a de "decoração do fundo de tela", isto é, sem significado. Após algum tempo, a priori, ele havia alcançado o seu objetivo e exclamou: "Aê! Consegui. Graças a Deus!", em referência à terceira imagem no Quadro 17.

Manuela, que anteriormente havia questionado se ele havia conseguido construir a figura, recebeu a notícia de Fernando sobre o seu sucesso. No entanto, quando ela verificou a construção, sua resposta foi: "Não está valendo por causa da linha que tem que ficar assim" (movimentando a mão direita em diagonal). Apesar disso, Fernando continuou realizando a construção para que eu a avaliasse. Mais tarde, Estevão visualizou essa mesma construção de Fernando e, apontando, exclamou: "Não é assim. Ali está cortado. É assim!" (possivelmente se referindo à justaposição das retas que contêm os lados e a malha). A resposta de Fernando foi: "Não estou entendendo nada".

O não entendimento de Fernando, a partir dos apontamentos dos seus colegas Estevão e Manuela, pode ser justificado pela observação de Madureira (2023) em relação à congruência nos quadriláteros. Ou seja, "ter o mesmo formato e ângulo" (p.72), expressado pelo movimento da mão em diagonal por Manuela (McNeill, 2005) ou pela justaposição dos lados com a grade sinalizada por Estevão (Assis e Bairral, 2022), não foi suficiente para que Fernando assimilasse que a construção estava finalizada.

Quando chegamos à mesa de Fernando, afirmamos que a construção estava correta, observando apenas as medidas dos lados, sem considerar a possibilidade de arredondamento das medidas com duas casas decimais. Naquele momento, Fernando se virou para sua colega e disse: "Viu Manuela, estava correto." No entanto, essa afirmação não era verdadeira devido à suspeita de que os ângulos opostos não eram iguais.

A não identificação imediata do erro na transformação da figura levou Fernando a continuar com as atividades, somando os ângulos internos e verificando se algum colega encontrou valores diferentes do dele, para então registrar as anotações conforme a Figura 16.


c) **(Desafio)** Construa um quadrilátero com todos os lados com as medidas iguais. Em seguida, sem fazer a conta, responda:

➢ Qual o valor da soma dos ângulos internos A+D? E da soma B+C?

a + B = 180 ; e B+C = 180

➢ Qual a soma dos ângulos internos desse quadrilátero?

a soma do A+B+C+D = 360

d) Em relação ao item (c), verifique se algum colega da turma achou valores diferentes que os seus. Faça anotações destes valores encontrados.

90° Eu achei o mesmo valor que o meu colega

Fonte: Recorte da ficha de Fernando.

Figura 16 - Respostas da soma dos ângulos internos e da anotação de valores

Nos registros da Figura 16, podemos observar a reprodução dos símbolos da soma e das letras para representação dos somatórios, acompanhados do sinal de igualdade, algo que não havia sido apresentado anteriormente. As trocas da letra “D” por “B” (escreveu A+B em vez de A+D) podem ter ocorrido devido à sequência do alfabeto. A substituição do dígito “6” pelo “5” (na soma de todos os ângulos internos) provavelmente foi um descuido do aluno. O símbolo que representa aberturas em graus, presente somente na escrita de “90°”, sugere a transição do numeral para a especificação de ângulos que pode ser potencializada a partir da representação das aberturas indicadas no GG.

Em uma conversa entre Fernando e Estevão sobre a verificação dos valores encontrados para a finalização da tarefa, item (d) da Figura 16, identificamos as seguintes falas:

> **Fernando:** “Provavelmente você achou valores diferentes do meu. Me mostra rapidão?”
> **Estevão:** “Noventa, noventa, noventa... dois, dois, dois...”
> **Fernando:** “Qual foi a soma dos valores?”
> **Estevão:** “180 e 360.”
> **Fernando:** “Caraca! Foi o mesmo que o meu.”
> **Fernando:** “A+D=180, B+C=180 e A+B+C+D deu a mesma coisa que o seu.”

As ideias observadas no diálogo entre os alunos vão além dos somatórios equivalentes. Há conceito dos ângulos internos (A, B, C e D) e a caracterização, até o momento, dos 360° em relação a sua soma nos quadriláteros com todos os lados iguais formados por um par de retas paralelas cortadas por uma transversal, caracterizados como losangos. Além disso, o diálogo ratifica os registros incoerentes, como a troca de letras e de dígitos especificados na ficha.

Apesar da divergência entre as medidas dos ângulos internos encontradas pelos dois alunos, parece que Fernando não encontrou problemas em relação à sua construção, mesmo tendo apresentado e calculado medidas em formato decimal. É possível que ele tenha se concentrado apenas nas medidas dos lados, assim como o autor, o que poderia ter impedido que revisões necessárias fossem percebidas.

A construção da terceira figura, representada no Quadro 17, serviu como um exemplo esclarecedor para identificar o erro na transformação de uma figura com lados diferentes em outra com lados iguais. Nessa ocasião, chamamos a atenção dos alunos e das alunas para observarem duas situações específicas após a finalização desse tipo de quadrilátero, como as medidas dos lados e dos ângulos internos opostos, que devem ser iguais. Embora a malha quadriculada tenha estado presente nessa transformação, em nenhum momento mencionamos o uso dela nessa discussão.

As ações de Fernando levantam questionamentos sobre a necessidade de manter a malha quadriculada habilitada durante todo o processo de construção, considerando também a possibilidade de desativá-la. Isso se deve ao fato de que não foi identificada sua utilidade em nenhum momento, apesar de Manuela e Estevão terem feito referências indiretas à grade.

Durante a discussão em grupo sobre as tarefas de construção e transformação de quadriláteros a partir de duas retas paralelas cortadas por uma transversal, que incluem figuras com diferentes configurações de lados (dois lados iguais, todos os lados diferentes e todos os lados iguais - Ficha 04), isto é, quadriláteros com pelo menos um par de lados paralelos – trapézios e paralelogramos – examinamos as respostas dos(as) discentes para compreender suas interpretações em relação à identificação e à soma dos ângulos internos desses quadriláteros. O Quadro 18 ilustra as perguntas provocadas inicialmente e no decorrer da roda de conversa que surgiram com eles e elas em posse da ficha, do *tablet* e das instruções das tarefas no quadro branco, bem como o diálogo entre os participantes.

Quadro 18 - Perguntas e diálogos a partir das construções de quadriláteros

Perguntas	Diálogo
Os quadriláteros construídos eram todos iguais?	**Alunos(as)**: Não. **Autor**: Mas porque não? **Manuela**: Cada um tem a sua medida. **Fernando**: Tem diferença nos lados, são iguais ou são diferentes. **Autor**: Com essa ideia dos lados, quantos quadriláteros existem? **Alunos(as)**: Muitos. **Autor**: Se pensando nos quadriláteros com somente dois lados iguais, vocês acham que todos construíram o mesmo quadrilátero? **Alunos(as)**: Não. **Autor**: Isso significa que podemos concluir que existem uma imensidão de quadriláteros? **Alunos**: Sim
A soma dos ângulos internos dos quadriláteros, seja qual for a medida dos seus lados, A+D ou B+C?	**Alunos(as)**: Cento e oitenta. **Fernando**: Menos de cento e oitenta. **Kayke**: Mais de cento e oitenta.
Em que posição os ângulos internos estão? (foi feito um desenho no quadro de um quadrilátero e solicitado para que observassem no GG)	**Kayke**: Lá em cima e lá em baixo, respondeu. **Fernando**: Dimensão 1 e dimensão 2. **Autor**: Mas um em cima e outro em baixo, estão relacionados com o que na figura? **Fernando**: Com o lado. **Autor**: Sim, mas no mesmo lado ou em lados diferentes? **Alunos(as)**: Em lados diferentes.

	Autor: Esses dois ângulos (A e D) estão em lados diferentes? **Alunos(as)**: Não! No mesmo lado. **Autor**: E qual o valor da soma de todos os ângulos internos dos quadriláteros? **Alunos(as)**: Trezentos e sessenta. **Fernando**: Achei um com menos trezentos e sessenta. **Kayke**: Achei trezentos e sessenta.

Fonte: Arquivo do autor.

As perguntas em sequência, destacadas no quadro, se complementam para a formação dos conceitos quantitativos e das relações existentes entre as posições e a soma dos ângulos internos dos quadriláteros. Apesar de a malha quadriculada ter sido utilizada como estratégia durante a transformação das figuras, não houve nenhuma menção dela no diálogo entre os participantes, aumentando a suspeita de que ela seja um signo Pivô, tanto na construção quanto na manipulação dos polígonos, para os(as) discentes.

A quantidade de quadriláteros construída na sala de aula fica evidente pelas declarações "não" quando se referem a não serem as mesmas figuras porque "cada um tem a mesma medida", "tem diferença nos lados, são iguais ou são diferentes". Além disso, ao considerar a afirmação "muitos", parece que não restaram dúvidas no entendimento da infinidade de quadriláteros existentes, mesmo que estejamos falando apenas dos quadriláteros com pelo menos um par de lados paralelos.

A análise da soma dos ângulos internos específicos, em que foram encontrados valores iguais, menores ou maiores do que 180°, nos leva a observar os somatórios apresentados, como 360° e valores menores que 360°. Isso nos permite conjecturar que a construção de Fernando estava correta, ou seja, os vértices do seu quadrilátero pertenciam às retas dadas como base para a construção, enquanto a construção de Kayke possivelmente apresentava pelo menos um vértice que não pertencia a essas retas. As constatações de Fernando, ao encontrar somatórios próximos de 180° e 360°, sugerem que o aluno pode ter observado um dos valores incorretos, mesmo considerando que o GeoGebra realiza arredondamentos nas medidas dos ângulos internos. Por outro lado, somatórios maiores que 180° e iguais a 360° indicam a construção de uma figura sem nenhum lado paralelo.

À face do exposto, observamos interações entre os envolvidos e entre o indivíduo e o dispositivo com a ação de mobilidade (Bairral, 2021), como a ida de Bruna à carteira de Fernando para mostrar sua construção e perguntar: “O que eu observo para escrever?” e Fernando responder: “O que você observa aí?”. Além disso, os processos de transformações se apresentaram em dois níveis, prático – com a manipulação da figura em domínio construtivo – e cognitivo – com o raciocínio de congruência, apresentado por meio de gestos, manifestado por Manuela, e o toque, realizado por Estevão.

Quanto às ideias observadas nos lados e ângulos, por meio do processo exploratório, emergiram perímetro, caso semelhante à pesquisa de Madureira (2023), arredondamento das medidas dos lados pelo aplicativo e as palavras dimensão 1 e dimensão 2, por Fernando. Esses conceitos que emergiram não era algo planejado, mas sim esperado, devido à ocorrência de outros fatos apresentados em pesquisas anteriores que utilizam DMcTT+AGD. No entanto, acreditamos que os planejados se destacaram nas falas "cada um tem a sua medida", "tem diferença nos lados, são iguais ou são diferentes", "cento e oitenta" e "trezentos e sessenta", que são propriedades mais que suficientes para definir quadriláteros. Com isso, o GG+*tablet* se faz candidato na contribuição da mediação semiótica no desenvolvimento de conceitos de quadriláteros.

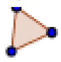
CAPÍTULO V – Manipulações e mediações semióticas

Dentro deste capítulo, analisaremos os resultados obtidos na relação entre artefatos, signos e aprendizagem, no contexto da construção e da manipulação de alguns quadriláteros. As tarefas implementadas deflagraram processos que não sabemos onde terminam, destacando-se na emergência de toques e mediações; no processo de produção e elaboração de signos; e na potencialização da malha quadriculada na exploração dessas figuras.

5.1 Toques que contribuem nas mediações

Na aula seguinte, Fernando estava em dupla com Costa e tinha a responsabilidade não apenas de resolver a tarefa 2 da Ficha 4 (Quadro 19), mas também de orientar seu novo parceiro sobre a dinâmica das aulas, uma vez que o anterior havia sido transferido para outra escola.

Quadro 19 - Tarefa 2 da Ficha 4 e seus objetivos específicos

Tarefa 2	Objetivos específicos
Agora, você tentará construir quadriláteros com dois pares de retas paralelas, ainda tomando como base um par de retas paralelas cortadas por uma transversal. Para isso, você deverá seguir as seguintes etapas: I- Selecionar a ferramenta  II- Tocar na reta BC e depois no ponto A. III- Selecionar a ferramenta  em seguida tocar nos pontos onde essas retas se interceptam (cruzam). IV- Selecionar as ferramentas dos lados e dos ângulos. V- Manipule livremente a figura. a) Escreva as suas observações em relação aos lados. b) Escreva as suas observações em relação aos ângulos internos.	Construir e manipular quadriláteros cujos lados são paralelos; identificar padrões tanto nos lados quanto nos ângulos internos opostos; e constatar 360° na soma dos ângulos internos.

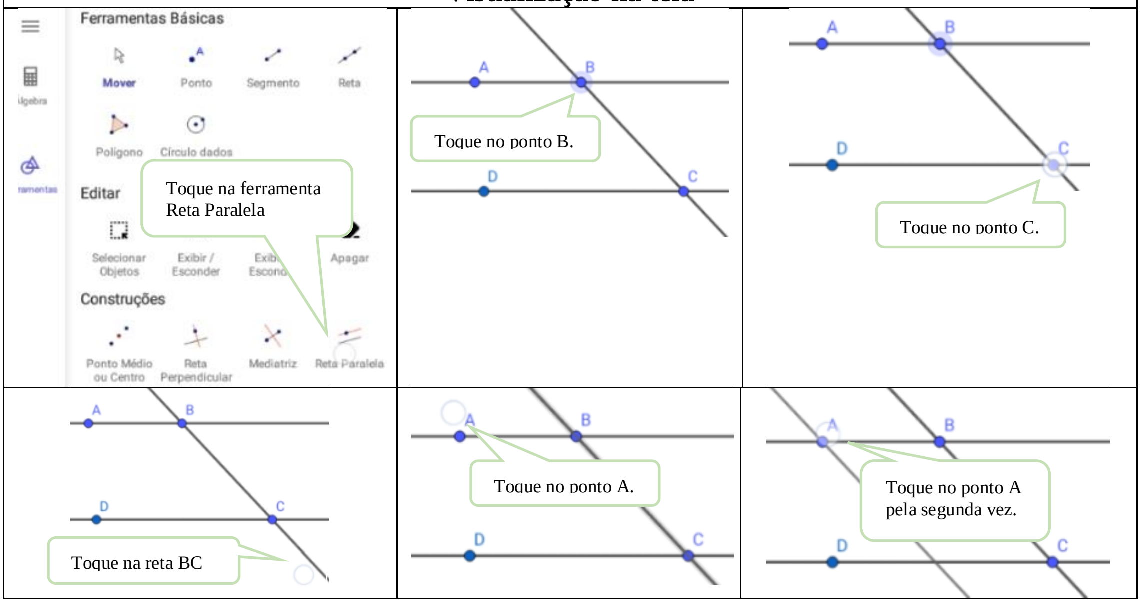
Fonte: Registro capturado da ficha.

A nova tarefa indicava a necessidade de usar uma ferramenta adicional, a reta paralela, conforme identificado no quadro 7. Isso permitiria explorar a classe dos paralelogramos, principalmente em relação aos seus lados e ângulos internos. Na construção da dupla, sem o auxílio da malha, Fernando e Costa tinham como objetivo construir um quadrilátero com todos os lados medindo 12,6 centímetros, como identificado na fala de Fernando: "Eu quero que todos fiquem com 12,6”.

No entanto, antes disso, a dupla estava enfrentando dificuldades para construir uma reta nova que deveria passar pelo ponto A e ser paralela à reta BC. Essa dificuldade ocorreu devido à sequência incorreta de toques, que envolveu "<Reta Paralela> <ponto B> <ponto C> <ponto A>" em vez de "<Reta Paralela> <reta BC> <ponto A>", os quais poderiam ser efetuados somente com toques simples ou a combinação do simples com o arrastar (Bairral, 2017). Essa sequência foi corrigida após nossa orientação. A ordem das operações na construção da reta paralela pode ser reconhecida no Quadro 20.

Quadro 20 - Construção da reta paralela à reta BC

Visualização na tela



Fonte: Arquivo do autor.

Na sequência da primeira linha do quadro, constatamos que a dupla não enfrentou dificuldades ao identificar a ferramenta “Reta Paralela”. Isso se deve ao fato de a imagem presente na ficha coincidir com a representação no aplicativo, facilitando a associação de signos tanto no GeoGebra (GG) quanto na disciplina de matemática (Bussi e Mariotti, 2008). Em relação à substituição do toque na reta BC pelos toques nos pontos B e, posteriormente, C, compreendemos que a nomenclatura "BC" induziu a dupla a interpretar que deveria tocar em cada ponto sequencialmente, como evidenciado nas segunda e terceira imagens da primeira linha do quadro 8. Vale ressaltar que toques simples ou combinados (simples+arrastar) poderiam igualmente ser realizados seguindo a sequência "<ponto A><Reta BC>" para construir uma reta que passe pelo ponto A e seja paralela à reta BC.

Após receber a orientação do autor, o processo de construção da reta transcorreu sem contratempos, como evidenciado na sequência da segunda linha do Quadro 20, embora o aluno tenha tocado duas vezes no ponto A - o que é diferente de toque duplo (Bairral, 2017) - em vez de uma. Talvez ele não tenha percebido o surgimento da reta que passa por esse ponto. Esse episódio é considerado comum, considerando que foi a primeira vez que a dupla utilizou a ferramenta na prática e que seus integrantes deveriam ter conhecimentos prévios. Por exemplo, após selecionar a ferramenta “Reta Paralela”, ao tocar na reta, ela fica mais destacada em relação às outras (observe a imagem da segunda linha e segunda coluna) para sinalizar que haverá a construção de uma reta paralela a ela com qualquer toque na área de construção do GG.

Em contrapartida, ao seguir os passos da dupla na criação do quadrilátero, depois da utilização da ferramenta “Reta Paralela”, presenciamos, novamente, por meio dos toques <Polígono><pontos nas retas><Ângulo>< Distância><Mover>, a habilidade com as ferramentas necessárias para a sua construção e que, porventura, ajudariam nas observações sugeridas na tarefa.

A concentração da dupla estava em deixar todos os lados iguais, incentivada por Fernando, supostamente condicionada ao desafio da tarefa 1(c) – construir um quadrilátero com os lados iguais – o que não era um problema. No entanto, dessa forma, eles não conseguiriam conjecturar ou visualizar que esse tipo específico de quadrilátero possui lados opostos com as mesmas medidas (congruentes).

Desprovido do suporte da malha e sem demandar excessivo tempo, Fernando empregou a estratégia da manipulação para transformar o quadrilátero inicial em outro com dimensões de 12,6 centímetros, conforme ilustrado na Figura 17. Esse feito provocou comentários e discussões entre os membros da dupla.

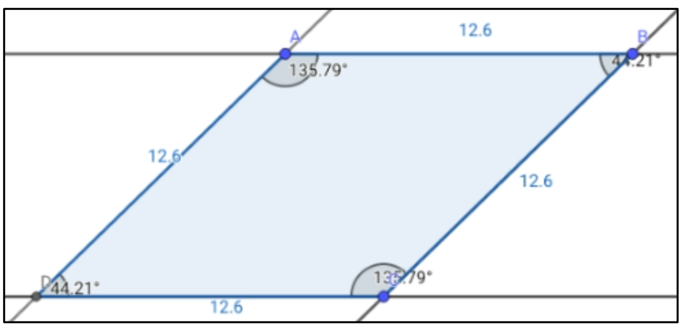


Figura 17 - Quadrilátero com dois pares de lados paralelos e com todos os lados iguais a 12,6
Fonte: Arquivo do autor.

> **Costa**: “O que você fez?”
> **Fernando**: “Não sei explicar.”
> **Consta**: “Quando está assim, um é maior que o outro.”
> **Fernando**: “Estou observando que...”
> **Costa**: “Você está percebendo que B e D são os mesmos e que A e C são os mesmos?”
> **Fernando**: “É... e os lados são iguaizinhos.”
> **Costa**: “Tu bota a medida 12,6 a medida da altura. A e B é a mesma coisa e o B e D são as mesmas coisas.”
> **Fernando**: “Sendo que A e B e o C e D eles têm que ser as medidas dos ângulos. Aqui são as medidas dos lados.”

Diante do exposto e, com base em dados anteriores, é notório que quadriláteros com dois pares de lados paralelos podem ser transformados em figuras com quatro lados iguais em menos tempo de manipulação do que quadriláteros com apenas um par de lados paralelos. Talvez isso justifique a não utilização ou a não busca pela malha quadriculada pela dupla.

Outro ponto observado é a identificação da característica de que, a princípio, há pares de medidas iguais, conforme a indagação de Costa: "Você está percebendo que B e D são os mesmos, e que A e C são os mesmos?". Nessa pergunta, não fica claro se o aluno reconhece essas medidas como ângulos internos, apesar de o símbolo do aplicativo evidenciar as aberturas. A situação fica ainda mais confusa quando ele menciona: "Você bota a medida 12,6; a medida da altura. A e B são a mesma coisa, e o B e D são as mesmas coisas.", visto que a "altura" mencionada por ele evidencia a relação com o lado, enquanto a declaração "A e B são a mesma coisa" permanece subjetiva.

Fernando, por sua vez, surpreende com sua fala: "Sendo que A e B, e o C e D, eles têm que ser as medidas dos ângulos. Aqui são as medidas dos lados." Ao conseguir fazer a distinção entre o que seriam ângulos internos e o que seriam lados, para o seu colega, entendemos que ele se contradisse ao mencionar "não sei explicar". Essa aparente contradição sugere que houve uma interpretação de signos (Bussi e Mariotti, 2008), por parte de Fernando, derivada dos toques em ferramentas específicas do GeoGebra, acrescentadas das observações e vivências acumuladas nas aulas anteriores.

Quando nos aproximamos da dupla para verificar o que seus integrantes haviam construído, solicitamos que eles refizessem a construção, pois entendemos que se tratava de outra tarefa e, consequentemente, estaria incorreta. Ao começar a construção do zero, com o mesmo objetivo de igualar as medidas dos lados, desta vez a 13,8 centímetros, Fernando, após dois minutos de manipulação da figura, pediu ajuda a Costa, que, em questão de segundos, conseguiu atingir esse objetivo.

As estratégias utilizadas pela dupla para transformar a figura em um quadrilátero com quatro lados iguais envolviam a manipulação dos vértices A, B e C, e do lado AB, com predominância de toques de arrastar no lado e no vértice C. Isso ocorria porque ao mexer no lado AB, sucediam alterações nas medidas dos quatro ângulos internos e nos lados adjacentes BC e AD, que eram equivalentes devido à propriedade dos lados paralelos. O mesmo acontecia ao manipular o vértice C. Ambos os toques estavam diretamente relacionados à calibração das medidas, sendo um em relação aos lados adjacentes e o outro em relação aos ângulos internos. O interessante é que essas calibrações estão imbricadas, ocorrem em intervalos de tempo diferentes e podem ser visualizadas no GG.

Costa, ao observar o outro quadrilátero transformado (Figura 18), novamente sem o auxílio da grade, fez o seguinte comentário para sua dupla: "A mesma coisa do que antes. As formas são as mesmas coisas. Não é? Estou certo?". A resposta de Fernando foi: "Tá certo".

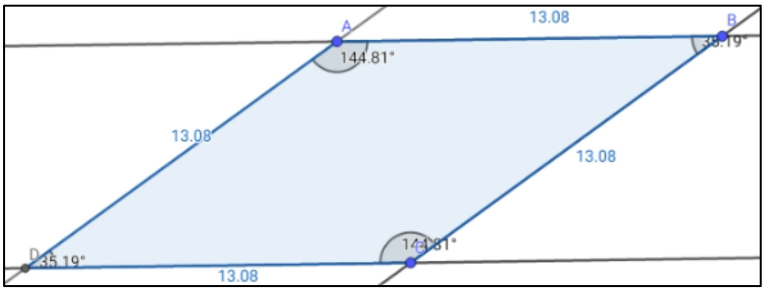


Figura 18 - Quadrilátero com dois pares de retas paralelas e com todos os lados iguais a 13,08
Fonte: Arquivo do autor.

A fala de Costa, acima transcrita, referindo-se tanto aos lados quanto aos ângulos internos opostos iguais, e a concordância de Fernando quanto a isso, restringe-se a um caso particular de quadriláteros, no caso a família do losango, afastando-se dos demais quadriláteros com a mesma propriedade sobre os ângulos opostos congruentes.

Adicionalmente, ao considerar a linha temporal entre a declaração de Costa e a fala de Fernando sobre as suas interpretações dos signos matemáticos, percebemos que o raciocínio expresso na declaração "a mesma coisa do que antes. As formas são as mesmas coisas. Não é? Estou certo?" se assemelha à ideia de congruência previamente discutida na fala "ter o mesmo formato e ângulo você já conseguiu", conforme analisado por Madureira (2023). Esta semelhança sugere a presença de uma noção prévia de congruência estabelecida. Cumpre salientar que a concepção de congruência de quadriláteros não se alinha necessariamente com o raciocínio de Costa (revisitar Figuras 17 e 18), mas sim com a integração dos domínios de manipulação construtiva e relacional, os quais podem ou não estar vinculados à congruência.

Nesse contexto, é imperativo justificar esse tipo de raciocínio.

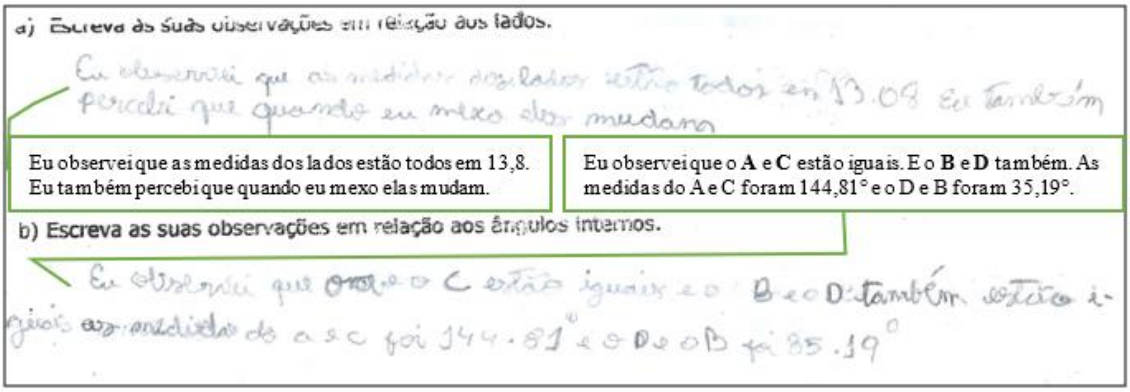
Ao levarmos em consideração as duas construções feitas pela dupla, nas quais Fernando e Costa limitavam a visualização apenas a quadriláteros com todos os lados iguais, percebemos a necessidade de orientá-los sobre algumas observações durante a manipulação da figura projetada. Durante o processo de manipulação contínua da figura, em que Costa manipulava os vértices, sugerimos que ele pausasse o toque para, em seguida, analisar as medidas. À vista disso, os envolvidos dialogaram da seguinte forma:

> **Autor**: "O que está acontecendo?"
> **Fernando**: "Está diferenciando as medidas?"
> **Autor**: "Sim, mas todos eles são diferentes? Observe!"
> **Autor**: "Olhem além do alcance."
> **Autor**: "Manipule um pouco. Pare e tire a mão!"
> **Autor**: "Olhem os lados. Estão vendo alguma coincidência? Sim ou não?"
> **Fernando**: "Esses dois lados aqui são iguais e esses aqui também."
> **Autor**: "Mexe novamente para verificar se isso irá acontecer."
> **Fenando**: "Também são iguais."
> **Autor**: "Mexe em outro ponto para perceber se é ou não exclusividade do ponto C."
> **Fernando**: "Eles são iguais."
> **Autor**: "Mexe em outro. Explora todos e observa!
> **Fernando**: "Eles são iguais."
> **Costa**: "O ponto D não consigo mexer! Nos outros é a mesma coisa.
> **Costa**: "É tudo a mesma coisa, cara. Que interessante! Nunca pensei que ia ficar assim."

Diante do exposto, fica evidente a importância das mediações do(a) docente, do dispositivo e do tempo necessário para que um indivíduo compreenda algo que está sendo sinalizado. A sequência sucessiva das nossas falas, como "Olhem além do alcance" e "Olhem os lados. Estão vendo alguma coincidência?", combinadas com a ação dinâmica no dispositivo, quando eles manipularam os pontos estratégicos, possibilitou que a dupla chegasse a novas conclusões em relação aos quadriláteros com dois lados paralelos. Isso inclui a percepção de que existem dois pares de lados iguais, como destacado na fala de Fernando, que mencionou "Esses dois lados aqui são iguais e esses aqui também", e na de Costa, que afirmou "É tudo a mesma coisa, cara".

Desse modo, passamos a encarar o GG+*tablet* como um mediador semiótico no qual o docente explora tanto os termos de significados matemáticos quanto os termos de significados pessoais. Isso é particularmente relevante, uma vez que a mediação semiótica não é acionada automaticamente (Bussi e Mariotti, 2008).

Na ficha pertencente a Fernando não encontramos comentários sobre os dois lados da figura serem iguais, o que não reduz a potencialidade das mediações ocorridas. O diálogo entre os envolvidos e a escrita “eu também percebi que quando eu mexo elas mudam” evidenciam raciocínio geométrico em relação aos lados. A Figura 19 apresenta os comentários desse aluno em relação ao que foi observado tanto nos lados quanto nos ângulos internos do quadrilátero com dois pares de lados paralelos, além do cuidado ou da transição para a escrita geométrica desses ângulos.


a) Escreva as suas observações em relação aos lados.

Eu observei que as medidas dos lados estão todos em 13,8. Eu também percebi que quando eu mexo elas mudam.

Eu observei que o **A** e **C** estão iguais. E o **B** e **D** também. As medidas do A e C foram 144,81° e o D e B foram 35,19°.

b) Escreva as suas observações em relação aos ângulos internos.

Figura 19 - Respostas sobre as observações em relação aos lados e aos ângulos internos
Fonte: Recorte da ficha do Fernando.

Na troca de experiências entre os envolvidos na tarefa dos quadriláteros com dois pares de lados paralelos, paralelogramos, em que o uso da malha já fazia parte do contexto de algumas duplas, ocorreu a discussão em relação às observações dos lados e dos ângulos internos. Com isso, presenciamos menções a "dois pares de números iguais" e "estão se copiando", conforme o esboço do Quadro 21.

Quadro 21 - Reflexões em relação às observações de paralelogramos

Reflexões	Diálogo
Em relação aos lados.	**Manuela**: Já tinha um lado no meio. Todos iguais! **Gustavo**: Estava mais fácil de construir o quadrilátero. **Eduarda**: Nem todas as coisas são iguais. **Natali**: Tem dois pares de números iguais? **Autor**: Onde estão esses dois pares de números iguais? Qual a posição delas? **Manuela**: Paralelos. **Autor**: Tem uma outra forma de identificá-los? **Alunos**: Um de frente para o outro.
Em relação aos ângulos internos.	**Fernando**: A e C são iguais. **Alunos(as)**: Eles são iguais. **Estevão**: Estão se copiando. **Alunos(as):** Estão de frente um para o outro.
A soma dos ângulos internos.	**Autor**: E qual a é a soma desses ângulos que não estão de frente, também chamados ângulos adjacentes? **Autor**: cento e oitenta. **Autor**: E a soma de todos os ângulos internos? **Alunos(as)**: Trezentos e sessenta.

Fonte: Arquivo do autor.

As reflexões expostas anteriormente expressam características que pertencem ao contexto dos quadriláteros, e as expressões "dois pares de números iguais" e "estão se copiando" são duas delas que fazem alusão, respectivamente, a ideias de lados e de ângulos internos. A primeira expressão foi utilizada para posicionar os lados, progredindo para lados paralelos, colocando-os um em frente ao outro. Em contrapartida, a segunda permaneceu no cenário dos ângulos internos, pois, na ocasião, a sequência das falas relacionadas a eles carregava uma sensação de complementação, visto que "A e C são ângulos iguais", "estão se copiando" e, além disso, "estão de frente um para o outro".

O fechamento das considerações anteriores ocorre nas emergências dos toques, sejam simples, duplos, de arrastar ou combinados, nos domínios de manipulações construtivo e relacional. Nessas interações, tornaram-se possíveis as construções dos paralelogramos específicos, conforme inicialmente almejado: "Eu quero que todos fiquem com 12,6", em um intervalo de tempo menor do que em transformações anteriores: "Estava mais fácil de construir o quadrilátero".

Quanto às mediações, destacamos duas: a do docente, que desempenha o papel de intermediar a evolução dos signos conceituais para a atividade com os artefatos, conduzindo em direção aos signos matemáticos, por meio de discussões matemáticas; e a dos artefatos, representados por ficha+GG+*tablet*, que auxiliaram os alunos e as alunas a internalizar conceitos sobre figuras de quatro lados, sendo dois a dois deles paralelos. Nesse contexto, propomos considerar o GG+*tablet* como um mediador semiótico. Isso se fundamenta na exploração, argumentação e justificação de algumas propriedades dessas figuras, por meio de toques, falas e escritas, como exemplificado por: (a) "Eu percebi que A e C são iguais e B e D também"; (b) "Estão de frente um para o outro"; (c) "Cento e oitenta" e (d) "Trezentos e sessenta", sendo essas propriedades mais que suficientes para definir o paralelogramo.

5.2 Toques na malha para transformar

O uso da malha para a dupla Fernando e Costa começou a fazer sentido na tarefa em que foi necessário construir quadriláteros após a construção de uma reta perpendicular nas paralelas cortadas por uma transversal. O desafio para eles era transformar o quadrilátero construído em um com pelo menos dois lados iguais e todos os ângulos internos iguais. A orientação para essa tarefa, denominada como 3, bem como os seus objetivos específicos, podem ser visualizados no Quadro 22.

Quadro 22 - Tarefa 3 da Ficha 4 e seus objetivos específicos

Tarefa 3	Objetivos específicos
Ainda tomando como base um par de retas paralelas cortadas por uma transversal, você continuará a construir quadriláteros, mas terá que ir as etapas: I- Selecionar a ferramenta  II- Tocar no ponto A, duas vezes consecutivas. III- Selecionar a ferramenta  , em seguida tocar nos pontos onde essas retas se interceptam (cruzam). IV- Selecionar as ferramentas dos lados e dos ângulos. a) Construa um quadrilátero com **todos ângulos internos iguais** e com **pelo menos dois lados iguais**. Escreva as medidas destes ângulos e destes lados. O que você conclui em relação a essas medidas? b) **(Desafio**) Construa um quadrilátero com t**odos os ângulos internos iguais** e com **todos os lados iguais**. Escreva as medidas desses ângulos e destes lados. O que você conclui em relação a essas medidas?	Construir, manipular e observar os ângulos internos e os lados a fim de buscar relações com quadriláteros com pelo menos dois ângulos internos retos e um par de lados paralelas.

Fonte: Registro capturado da ficha.

Embora a dupla tenha usado a ferramenta “Reta Perpendicular” pela primeira vez em uma tarefa, não encontramos indícios de que eles tiveram dificuldades. Pode ser que o desenho na ficha tenha ajudado a localizar a ferramenta no dispositivo, já que são semelhantes. Além disso, o GG indica os nomes de cada ferramenta disponível.

Da construção à manipulação da figura, foram quase dezessete minutos na tentativa de resolver a tarefa. Foi então que solicitaram ajuda, alegando que havia dois ângulos de noventa graus e eles queriam que os outros dois ficassem iguais. Perguntamos se já haviam manipulado ao máximo, tanto os vértices quanto aos lados. Fernando respondeu que eles estavam de um lado para o outro, tentando de várias maneiras, mas que não tiveram sucesso. Nesse momento, indagamos se ele se recordava da estratégia que Estevão usara para construir quadriláteros com todos os lados iguais. Estevão, que estava sentado à sua frente, entrou na conversa dizendo:

> **Estevão**: “A malha!”
> **Fernando**: “O que é malha?”

Nesse momento, Estevão assumiu o protagonismo enquanto nós observávamos a interação entre ele e a dupla. Estevão, depois de girar o dispositivo e habilitar a malha principal e secundária no *tablet* da dupla, começou a manipular a figura. Durante esse processo, que culminou com a construção de uma figura com os lados iguais a 2 centímetros, em apenas 20 segundos, a dupla começou a se manifestar com as seguintes falas:

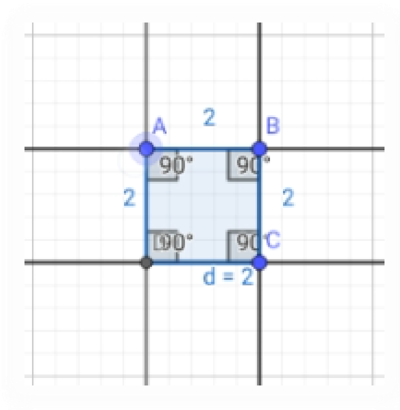
> **Fernando**: “Ah!!! Olha só. Boa estratégia mesmo.”
> **Fernando**: “Eu não acredito que esse moleque fez isso.”
> **Costa**: “Nós ficamos umas duas horas tentando fazer isso.”
> **Fernando**: “Caraca!”
> **Costa**: “Tu usa hacker?!”

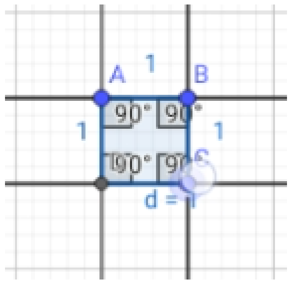
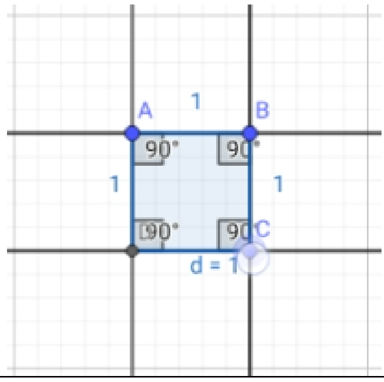
Em seguida, na nossa ausência, Fernando, ao desfazer a transformação realizada por Estevão na figura, propôs que Costa refizesse a manipulação para confirmar se ele tinha aprendido. Aceitando o desafio, Costa transformou a figura em um quadrado de lado igual a 1 centímetro, em aproximadamente 1 minuto. Durante o período em que Costa estava manipulando não apenas a figura, mas também a área do GG, alterando, assim, a escala da área do desenho e impactando diretamente a figura e a grade, a dupla conversou:

> **Fernando**: “É menor.”
> **Costa**: “É bem menor que isso?”
> **Costa**: “É um quadrado só?”
> **Fernando**: “Isso!”
> **Costa**: “Eu consegui diferente dele. O dele ficou tudo dois e o meu ficou tudo um.”

Fernando, ao perceber que a tarefa desafiava a transformação da figura em todas as medidas de lados iguais, assumiu o controle completo da manipulação, desfazendo a de Costa, mesmo depois do colega ter alegado que já estava tudo igual. Essa ação realizada por Fernando durou cerca de 22 segundos, alcançando a transformação de um quadrado com 1cm de lado, coincidentemente, a mesma medida de lado da figura feita por Costa. Os quadrados construídos por cada um desses alunos, por meio de signos, bem como as especificações de seus elementos, podem ser conferidos no Quadro 23.

Quadro 23 - Quadrados e seus elementos

Aluno	Visualização na tela	Considerações
Estevão		Quadrado de lado 2 centímetros com área igual a 25 unidades de quadrados menores com toques de zoom.

Costa		Quadrado de lado 1 centímetro com área igual a 25 unidades de quadrados menores com toques de zoom.
Fernando		Quadrado de lado 1 centímetro com área igual a 25 unidades de quadrados menores com toques de zoom.

Fonte: Arquivo do autor.

Todas as figuras apresentadas no Quadro 23 foram elaboradas levando em consideração os requisitos da Tarefa 3. No entanto, notou-se que, ao incorporar o uso da malha, os alunos começaram a atribuir significados específicos a esse artefato, como, por exemplo, a obtenção de todos os ângulos internos retos. Nessa ocasião, focaram exclusivamente na exploração de quadriláteros com todos os lados iguais, deixando outras formas, como retângulos não quadrados, para serem abordadas em um momento posterior.

De fato, as figuras com quatro lados cujos vértices pertencem a um par de retas paralelas cortadas por duas transversais, em que uma das transversais é perpendicular, pertencem a uma classe de quadriláteros em que existem pelo menos um par de lados paralelos. Neste caso, estamos falando dos trapézios retângulos - um par de lados paralelos e todos os lados com medidas diferentes, dos losangos que são quadrados - dois pares de lados paralelos com todos os lados e ângulos internos iguais, e dos retângulos - dois pares de lados paralelos com os lados e os ângulos internos opostos com as mesmas medidas.

Possivelmente, na tarefa anterior, os alunos Estevão, Fernando e Costa optaram por focar na figura quadrada, sem evidências de dificuldades para transformações em retângulos não quadrados com o uso da malha, uma vez que todos os ângulos internos são retos. Isso não descarta a possibilidade de considerar que estavam em um processo de transição entre os signos dos artefatos e os signos geométricos, especificamente por meio da grade, utilizando o signo Pivô (Assis e Bairral, 2022).

Para Fernando, o uso da grade facilitou a transformação da figura em quatro lados iguais. Isso pode ter ocorrido devido ao tempo que ele e os outros dois colegas gastaram na transformação dela, o que possivelmente o motivou a dizer a Manuela que "assim fica muito mais fácil com a malha", concordando com Estevão, que mencionou que "se você fizer tudo certinho no quadrado, fica tudo certinho".

Percebemos que a explicação de Estevão sobre a necessidade de fazer "tudo certinho no quadrado" teve como base sua experiência anterior com os signos (rever Quadro 3, linha 3, coluna 2). Nessa ocasião, ele manipulou os vértices da figura para coincidirem com os pontos de interseção de um dos quadrados menores da malha principal. Essa manipulação resultou na sobreposição da figura com os segmentos que delimitam essa parte específica da malha. Importante notar que essa área da malha é composta por cinco divisões iguais, tanto na horizontal quanto na vertical, constituindo uma malha secundária com segmentos menores que delineiam 25 unidades de quadrados menores.

Coincidentemente ou não, Costa e Fernando seguiram os passos observados quando Estevão realizou a transformação da figura, entretanto, eles mantiveram o lado da figura igual a 1cm. Apesar de ambas as figuras quadradas terem lados medindo um, identificamos uma diferença entre elas: o toque de zoom. Essa característica está alinhada com os signos Pivô, uma vez que eles emergem dentro de um contexto social e cultural compartilhados. Nesse contexto, as pessoas desenvolvem convenções e acordos tácitos sobre os possíveis significados desses signos. Os signos Pivô têm uma natureza ambígua e podem ser interpretados de maneiras diversas por diferentes indivíduos. No entanto, essas interpretações variadas tendem a ter um certo grau de similaridade ou conexão (Bussi e Mariotti, 2008).

O toque de zoom está intrinsecamente relacionado às escalas das malhas. No caso da principal e da secundária, quando no modo automático, há alteração das medidas de seus segmentos horizontais e verticais, de forma proporcional, dando a impressão de que estamos aumentando ou diminuindo a figura. Na realidade, o que acontece na prática é um aumento ou uma redução na quantidade de quadrados, inteiros e/ou fracionados, na área da figura construída a partir de um intervalo de tempo ou de quantitativos do toque de zoom.

Quando comparamos as três imagens no Quadro 23, percebemos que elas aparecem com 25 quadradinhos em sua área. No entanto, apesar de um quadrado ter um lado com uma medida diferente dos outros dois, se não levarmos em consideração as escalas em que cada um foi construído, isso pode levar os(as) discentes a concluir que eles possuem a mesma área, ou seja, que são quadrados iguais, especialmente se estiverem visíveis somente os ângulos internos. Nesse caso, o(a) docente precisa informar a seus alunos e alunas que a premissa de ter todos os ângulos internos congruentes não é suficiente para afirmar que dois quadrados ou mais são iguais. Ou seja, que possuem a mesma área.

A sequência das falas de Costa – "é bem menor que isso", "é um quadrado só" e "eu consegui diferente dele. O dele ficou dois e o meu ficou tudo um" – evidencia a intensão de seguir os passos do processo de transformação feita por Estevão para obter o mesmo quadrado. Contudo, eles foram surpreendidos quando perceberam que os lados de sua figura eram iguais a um, o que eles não identificaram como um problema.

Ao visualizarmos os quadrados de Costa e Fernando, em que um aparenta ser maior que o outro, apesar de terem o mesmo comprimento de lado e de estarem na mesma escala, identificamos ocorrências de intervalos de toque de zoom na área de construção do GG que podem ser contínuos ou intercalados. Esse intervalo de toque corresponde ao intervalo de tempo e à forma com que os dedos do indivíduo tocam a tela do *tablet*. Com isso, ocorre alteração entre as distâncias na dimensão IR^2 de forma proporcional; ou seja, para haver uma mudança na escala dos segmentos da malha, serão necessários um quantitativo ou intervalo de toques de zoom consideráveis ou limitantes.

Ao considerar o que foi apresentado anteriormente, é possível identificar um processo de produção e elaboração[35] de signos que envolve a criação e a utilização de diversas formas de representação para transmitir conceitos matemáticos por meio das interações observadas. Isso fica particularmente evidente no uso das ferramentas do GeoGebra em *tablet*, as quais foram empregadas na manipulação das figuras com base na malha quadriculada para atingir o objetivo proposto. Nesse contexto, notamos a exploração dos lados e dos ângulos internos da figura construída, com um par de lados paralelos e dois ângulos internos retos, como meio de justificar as suas propriedades. Isso sugere uma evolução dos signos, indo além da mera congruência de quadriláteros.

[35] Com base em Bussi e Mariotti (2008), interpretamos que a produção de signos diz respeito à criação de representações visuais ou símbolos, enquanto a elaboração de signos envolve a interpretação e a transformação dessas representações para aprofundar a compreensão dos conceitos matemáticos.

5.3 Toques que revelam e classificam

A Ficha cinco era composta de tarefas que perpassavam pela nomenclatura de quadriláteros com pelo menos um par de lados paralelos. Os(as) estudantes puderam relacionar os nomes dessas figuras com algumas das suas características, quantidade de lados paralelos e medidas dos lados e ângulos internos, além de investigar quadriláteros que possuíam propriedades específicas em comum. No Quadro 24, especificamos a tarefa 1 em que os(as) discentes utilizaram ferramentas específicas para explorar algumas características dos quadriláteros nomeados e disponibilizados no GeoGebra.

Quadro 24 - Tarefa 1 da Ficha 5 e seus objetivos específicos

Tarefa 1	Objetivos específicos
Antes de fazer esta tarefa, você terá que abrir o GeoGebra. Nele encontrará uma família de quadriláteros. Usando somente os ícones ao lado, identifique os seguintes quadriláteros:  (A) Quadrado; (B) Retângulo; (C) Losango; (D) Paralelogramo; (E) Trapézio isósceles; (F) Trapézio retângulo; e (G) Trapézio escaleno - Movimente livremente a figura. O que você observa de interessante: ➢ Em relação à quantidade de pares de lados paralelos? ➢ Em relação às medidas dos lados? ➢ Em relação às medidas dos ângulos internos?	Explorar os lados paralelos e as medidas dos lados e ângulos internos; anotar as observações em relação a essas particularidades.

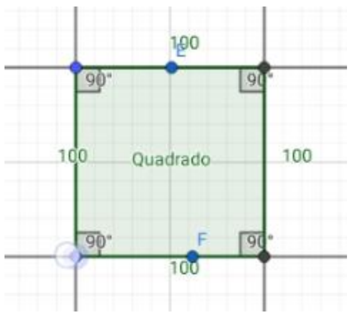
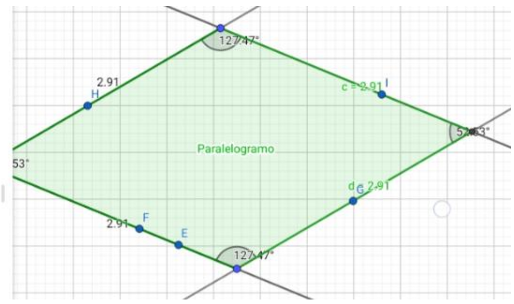
Fonte: Registro capturado da ficha.

A ilustração dos signos das ferramentas a serem utilizadas no GeoGebra, conforme o quadro anterior, desempenhou um papel fundamental na facilitação da resolução da tarefa pelos(as) estudantes, sendo impulsionada por dois fatores que julgamos relevantes: a facilidade de identificação no aplicativo e a familiaridade adquirida em tarefas anteriores. Três dessas ferramentas, em particular, remetem à ideia de conceitos geométricos essenciais para explorar certas especificidades dos quadriláteros. São elas: "Ângulo", que se relaciona à abertura; "Distância (Comprimento)", relacionada à unidade de medida em centímetros; e a ferramenta "Retas Paralelas", que se relaciona a dois segmentos sem ponto em comum. Esses signos são compartilhados, pois, por um lado, estão associados à execução da tarefa, especialmente relacionada ao artefato utilizado, e, por outro lado, podem estar vinculados ao conteúdo que se pretende mediar (Bussi e Mariotti, 2008).

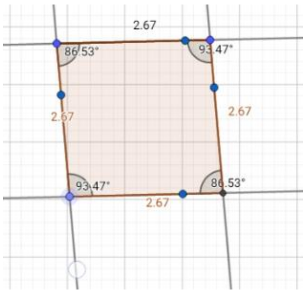
A dupla de estudantes, Costa e Fernando, além de usar as ferramentas especificadas na ficha, habilitou a malha principal e secundária ao explorar as sete figuras disponibilizadas nos dispositivos. No entanto, não conseguimos identificar elementos suficientes para afirmar que a grade foi importante na resolução da tarefa, uma vez que não houve comentários significativos entre os envolvidos, em relação à grade, e as manipulações parecem ter sido realizadas de forma aleatória, ou seja, sem uma relação clara com a malha principal e secundária.

Dentre os sete quadriláteros[36] explorados pela dupla com a grade como símbolo, três deles chamaram a atenção. O primeiro foi um quadrado em que Costa desafiou Fernando a manipulá-lo de forma que os lados ficassem iguais a 100cm. O outro foi um paralelogramo que, durante a manipulação de Fernando, se transformou em um losango que também não era um quadrado. E, por fim, um trapézio isósceles, que Costa também transformou em um losango que não era um quadrado, causando uma surpresa, para ele, que se concretizou na seguinte fala para a sua dupla: "Olha o que caiu!". No Quadro 25, foram especificadas essas três figuras e algumas observações relacionadas a elas.

Quadro 25 - Observações em relação a alguns quadriláteros com pelo menos um par de lados paralelos

Visualização na tela	Observações
	Quadrado com lados iguais a 100cm, composto por 4 quadrados da grade, mas sem considerar a grade.
	Losango não quadrado, transformado a partir de um paralelogramo, mas sem relação com os quadrados da malha.

[36] Quadrado; Retângulo; Losango; Paralelogramo; Trapézio isósceles; Trapézio retângulo; e Trapézio escaleno.

	Losango não quadrado, transformado a partir de um trapézio isósceles, sem relação com os quadrados da grade.

Fonte: Arquivo do autor.

O quadrado de lado 100cm (com efeitos de toques de zoom), ilustrado no quadro anterior, resultou dos toques de zoom na área de construção do GG. No entanto, Fernando não levou em consideração os quadrados da malha principal e secundária. Uma das hipóteses levantadas seria que as medidas dos lados e dos ângulos internos já eram iguais antes da manipulação para concluir o desafio proposto por Costa. Vale ressaltar que essa situação é diferenciada das outras em que houve toques de zoom para diminuir ou aumentar as medidas dos lados dos quadriláteros.

O paralelogramo que foi transformado em um losango não quadrado poderia, se fosse utilizada a grade, condicionar retângulos quadrados e retângulos não quadrados. Para formar retângulos quadrados, os lados adjacentes do paralelogramo deveriam coincidir com os lados dos quadrados da malha principal e secundária, de modo que a quantidade desses lados fosse a mesma. No caso dos retângulos não quadrados, essas quantidades de lados não deveriam ser iguais, isto é, um lado deveria ser maior que o outro.

O trapézio isósceles que também foi transformado em um losango não quadrado poderia ter sido transformado em um losango quadrado, caso a dupla tivesse utilizado a malha para isso. Os pontos de interseção das retas paralelas na malha principal seriam uma boa estratégia para realizar essas transformações. Se dois vértices do trapézio isósceles estivessem coincidentes com dois pontos de interseção pertencentes à mesma reta, a transformação resultaria tanto em losangos quadrados quanto em losangos não quadrados. Da mesma forma, essas figuras seriam criadas se os vértices não estivessem na mesma reta, mas ainda assim coincidissem com os pontos de interseção das retas da grade.

O uso da malha quadriculada como signo nas transformações do paralelogramo e do trapézio isósceles poderia ter potencializado as investigações sobre os quadriláteros que compartilham propriedades comuns, caso a dupla tivesse buscado relacioná-lo durante as manipulações. Essas propriedades se relacionariam à reflexão sobre a palavra "família", discutida anteriormente pelos envolvidos, antes de iniciarem as tarefas da Ficha 4.

Na discussão sobre a palavra "família", os(as) estudantes haviam mencionado várias ideias associadas a ela, como nome, sobrenome, aparência, jeito, marcas no corpo (como sinais de nascença - muitos mencionaram que tinham), tipo sanguíneo, DNA, entre outras. A partir dessas contribuições, destacamos que a ideia de “características”, mencionada por um dos envolvidos, faz parte do contexto familiar, o que engloba todos os critérios mencionados anteriormente. Portanto, havia a possibilidade de formar ideias de "famílias" de quadriláteros com algumas particularidades, como ter pelo menos um par de lados paralelos ou ter dois pares de lados paralelos e todos os ângulos internos iguais, por exemplo.

Na Ficha 6, que continha uma tarefa relacionada à exploração e à verificação das diagonais de alguns quadriláteros, como as dos paralelogramos e as dos trapézios, a dupla habilitou a malha principal e secundária em todas as construções disponibilizadas no GG. No entanto, na investigação das diagonais das figuras com dois lados opostos paralelos, não foram encontradas evidências de sua importância. Os detalhes dessa tarefa e seus objetivos específicos podem ser vistos no Quadro 26, a seguir.

Quadro 26 - Tarefa 3 da Ficha 6 e seus objetivos específicos

Tarefa 3	Objetivos específicos
O que a palavra "diagonal" te faz lembrar? Agora, usando somente os ícones abaixo, explore a(s) diagonal(is) das seguintes figuras, seguindo a sequência apresentada em cada quadrilátero.  (A) Quadrado; (B) Retângulo; (C) Losango; (D) Paralelogramo e (E) Trapézio isósceles; - Construa segmento(s) pertencente(s) à figura, que não sejam os seus lados. - Verifique o comprimento do(s) segmento(s) construído(s). - Encontre o ponto médio do(s) segmento(s) construído(s). - Verifique o ângulo formado por esse(s) segmento (s). - Movimente livremente a figura, observe e responda:	Explorar e verificar padrões relacionados às diagonais de alguns quadriláteros com pelo menos um par de lados paralelos, incluindo comprimentos e ângulos formados.

Fonte: Registro capturado da ficha.

No design dessa tarefa envolvendo as diagonais, não levamos em consideração direcionar o uso da grade no GeoGebra, apesar de estarmos cientes do seu significado nos estudos sobre quadriláteros e da sua importância para um grande número de alunos(as) na sua utilização. Nesse sentido, incluímos duas ferramentas novas que os estudantes deveriam utilizar para explorar as diagonais das figuras: o "Ponto Médio ou Centro" e o "Segmento".

Essas duas ferramentas, essenciais para a construção das diagonais e de seus centros, possibilitaram a todos os envolvidos diferenciar diagonais de lados dos quadriláteros, já que ambos são segmentos que unem dois vértices da figura. Inicialmente, a dupla teve a oportunidade de expressar suas ideias a respeito da palavra "diagonal", por meio de pictogramas no espaço destinado na ficha, na qual interpretamos como segmentos na horizontal para um e em diagonal para o outro. Essas ideias podem ser apreciadas na Figura 20.

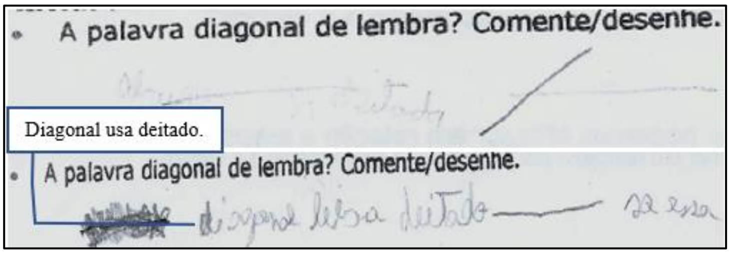


Figura 20 - Respostas da dupla relacionada a palavra diagonal
Fonte: Recorte das fichas de Fernando e Costa.

Ao examinarmos as respostas dos alunos em suas respectivas fichas, acreditamos que houve um compartilhamento de ideias a respeito da palavra "diagonal", visto que na ficha de Fernando há vestígios de resposta semelhante à de Costa. Tal fato não representa problema algum, já que isso era previsto e sinalizado, uma vez que a tarefa era em dupla, mas a resposta deveria ser individual, de acordo com as observações pessoais acerca dos quadriláteros.

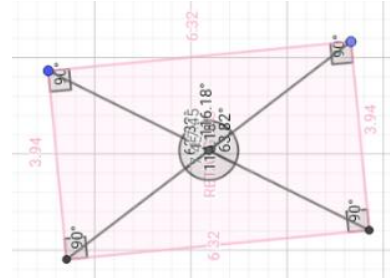
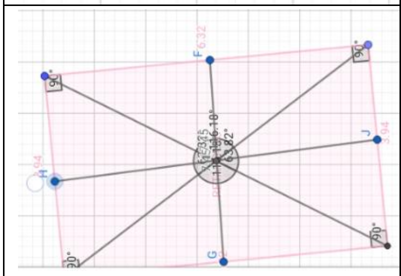
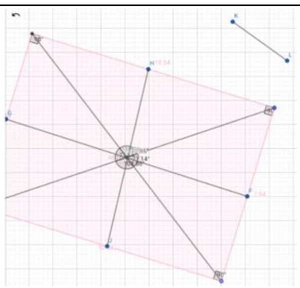
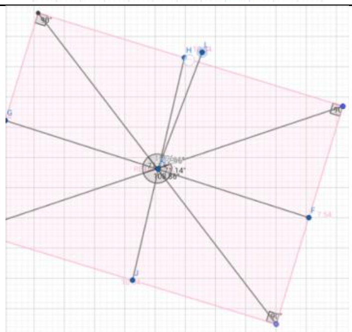
Ao considerarmos o período em que os alunos e as alunas realizaram atividades com figuras de quatro lados e o desenho que fizeram do que seria uma diagonal, mesmo sem estar inserido no contexto dos quadriláteros, a princípio, podemos interpretar que a ideia de diagonal não representa uma figura geométrica específica, ou, caso contrário, pode representar um lado dessas figuras.

A malha quadriculada poderia ter ajudado a dupla Costa e Fernando em relação às dúvidas concernentes às diagonais do retângulo, por exemplo, caso ela tivesse um significado para eles nesse contexto. A construção das diagonais e o quantitativo relacionado a elas levantou um debate entre os envolvidos sobre o que é um vértice e o que constitui uma diagonal no retângulo. Para Fernando, existem duas diagonais no retângulo, enquanto para Gustavo existem quatro.

Fernando argumenta que a diagonal tem relação com o ponto médio e o vértice, no entanto, não identifica os vértices do retângulo. Costa se baseia em uma de nossas falas de que as diagonais são segmentos que "ligam" dois pontos do quadrilátero, mencionada na orientação para a turma. Diante dessas dúvidas e levando em consideração o que eles haviam produzido nos dispositivos, a dupla foi orientada a visualizar os vértices como pontos formados pela interseção dos lados do quadrilátero, enquanto as diagonais seriam representadas por segmentos que “ligam” dois vértices do quadrilátero.

No período de discordância entre Costa e Fernando sobre o quantitativo de diagonais, observamos construções de segmentos denominados diagonais por essa dupla, que podem ser visualizadas no Quadro 27, a seguir, juntamente com algumas observações.

Quadro 27 - Visualização na tela, fala dos alunos e observações em relação a segmentos ditos diagonais

Visualização na tela	Fala dos alunos	Observações
	**Costa**: Existem quatro diagonais. **Fernado**: Não! Essas e essas são as mesmas. **Costa**: Você não está entendendo. **Costa**: Olha aqui. Presta atenção na malha. **Costa**: Não tem essas duas diagonais aqui. Existem mais duas que não é assim.	Fernando levou em considração os quatro segmentos das diagonais cujas extremidades são o ponto médio e os vértices.
	**Fernando**: Isso não é uma diagonal. **Costa**: É sim!	Costa cosntrói dois segmentos que passam pelo ponto médio das diagonais, cujas extremidades pertencem aos lados opostos do retânglo.
	**Fernando**: Isso não é uma diagonal! **Fernando**: Diagonal é assim.	Fernando constrói um segmento KL semelhante ao seu desenho que representou a sua ideia inicial sobre diagonal.
	**Costa**: Diagonal... **Costa**: Entendeu? **Fernando**: Não!	Costa manipula o segmento KL de forma que suas extremidades coincidam com o ponto médio da diagonal e com o ponto H, do segmento HJ construído por ele.

Fonte: Arquivo do autor.

Os pensamentos manifestados pela dupla sobre as diagonais eram evidentes na visualização da tela, conforme demonstrado no quadro anterior. Isso solidifica os conceitos em relação a esse elemento geométrico, uma vez que as diagonais do retângulo guardam uma relação com os vértices da figura, isto é, as distâncias entre o ponto médio e os vértices são as mesmas. Por outro lado, é compreensivo afirmar que as diagonais são segmentos que conectam dois pontos do quadrilátero. A interpretação feita por Costa, no entanto, não levou em consideração os pontos caracterizados como vértices, o que o levou a construir, consciente ou inconscientemente, dois segmentos cujas extremidades são os pontos médios dos lados.

A malha principal e secundária estava presente o tempo todo no processo de construção e manipulação dos segmentos para explorar as diagonais do retângulo. No entanto, em nenhum momento, os envolvidos procuraram relacioná-las com as ideias de diagonais, apesar de Costa ter mencionado "Olha aqui. Presta atenção na malha" (linha 1, coluna 2 – Quadro 26) e de ter realizado toques de zoom para aumentar a quantidade de quadrados da grade na área do retângulo (comparar a linha 1 com a linha 2, ambas na coluna 1– Quadro 26).

Esse episódio, de não relacionar as grades do GG como símbolo, nos remete à Ficha de sondagem, mais especificamente à tarefa em que os(as) estudantes deveriam registrar a imagem de um objeto em que fosse possível identificar pelo menos um quadrilátero na área da escola, após terem realizado a atividade acerca do que eles entendiam sobre quadriláteros. Manuela e seu par registraram a janela da sala de aula (Figura 21), que lembrava ou poderia lembrar a configuração das malhas quadriculadas do GG. Isso porque as alunas fizeram parte do grupo que utilizou a malha em vários momentos da atividade, além de terem interagido muito com a dupla Costa e Fernando. No entanto, não encontramos indicadores de comentários ou relação com a imagem registrada por elas.

Figura 21 - Recorte da imagem registrada pela dupla
Fonte: Arquivo do autor.

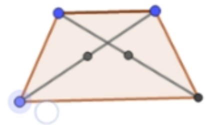
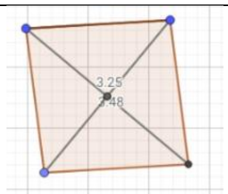
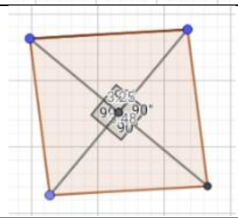
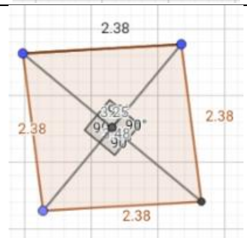
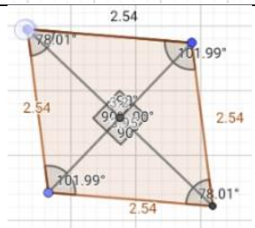
Ao escrever na ficha "eu escolhi uma janela", na observação sobre a imagem registrada na Figura 21, a aluna desconsiderou a grade de proteção, apesar de estar na frente da janela, conforme o ângulo de visão. Se observarmos o esboço de quatro linhas que se fecham, sobre as quais poderiam formar um quadrado (ideia inicial da malha), podemos especular que a grade de proteção não representava um signo específico naquele momento, mesmo que essas linhas desenhadas simbolizassem os perímetros da janela e da grade, ambas em seu total ou em partes. Entendemos que o papel dessa grade é semelhante ao das malhas quadriculadas no processo de discussão entre Costa e Fernando, relacionado às diagonais, mas sem considerá-las.

Na tarefa em que Fernando manipulou o trapézio isósceles, cuja medida de uma das bases era congruente com a dos lados oblíquos, ele acreditava que a figura visualizada na tela poderia ter a forma de um quadrado, após ter coincidido os pontos médios das diagonais, mas sem a apresentação das medidas dos lados e dos ângulos internos. Tal evidência nos chamou atenção e sugerimos, então, o uso da malha para eventuais comprovações, já que ela se mostrou representativa em transformações de quadrados em tarefas antecedentes para a dupla, como mencionado anteriormente.

Por sua vez, Fernando seguiu as seguintes estratégias: (a) habilitou a malha principal e secundária, mas não fez uso dela de maneira a relacioná-la com o suposto quadrado; (b) com a ferramenta “Comprimento”, verificou as medidas do comprimento das diagonais e constatou que elas eram diferentes; (c) utilizando a ferramenta "Ângulo", visualizou as medidas dos ângulos formados pelas diagonais, processo que demandou três toques em pontos específicos - ponto médio e dois vértices do quadrilátero – no qual encontrou ângulos retos; (d) retomou a ferramenta “Comprimento” e constatou as medidas dos lados, percebendo que todas eram iguais; e (e) novamente com o instrumento “Ângulo”, conseguiu visualizar na tela do dispositivo os ângulos internos da figura, em que os opostos eram congruentes.

A partir das estratégias mencionadas anteriormente, elaboramos o Quadro 28, com as imagens do quadrilátero visualizado na tela do *tablet*, de acordo com as ações tomadas. Isso nos permitirá indicar os possíveis quadriláteros que poderiam ser configurados, levando em consideração as manipulações desse aluno. Dessa forma, poderemos verificar se as experiências anteriores de transformar quadriláteros com pelo menos um par de lados paralelos influenciaram ou não na hipótese de que a união entre os dois pontos médios do trapézio isósceles representaria um quadrado.

Quadro 28 - Visualização na tela, observações das manipulações e possíveis quadriláteros transformados

Visualização do quadrilátero	**Observações das manipulações**	**Possíveis quadriláteros**
	Movimento de um vértices de forma que os pontos médios das diagonais coincidam.	Quadriláteros que possuem um par de lados opostos paralelos.
	Verificação dos comprimentos das diagonais.	Paralelogramo qualquer ou Losango não quadrado.
	Constatação dos ângulos formados pelas diagonais.	Losango não quadrado.
	Verificação dos comprimentos dos lados.	Losango não quadrado.
	Constatação dos ângulos internos.	Losango não quadrado.

Fonte: Arquivo do autor.

A ação voluntária de unir os dois pontos do trapézio, ou seja, tender a zero a mediana de Euler[37], fez com que os lados oblíquos da figura se tornassem paralelos. Com isso, era inevitável que a transformação feita por Fernando se configurasse como um paralelogramo, conforme indicado na linha 1 do Quadro 28.

As medidas diferentes dos comprimentos das diagonais já eram elementos suficientes para descartar a hipótese de que se tratava de um quadrado, ainda mais quando ele registrou na ficha que o quadrado "tem 2 diagonais que são iguais". No entanto, ele não o fez. A estratégia

[37] Também conhecida por mediana do trapézio cuja medida é equivalente à metade da diferença entre as bases do trapézio.

de continuar a investigar as medidas, alinhada à fala inicial do aluno - "poderia ser considerado o formato de um quadrado" - nos levou a concluir que ele não estava interessado em afirmar se era ou não uma figura específica, mas sim em manipulá-la de forma a transformá-la. Portanto, a experiência do aluno não se concentrava em determinar se era ou não um quadrado, mas sim em manipular para provocar transformações.

Na linha 5, do quadro anterior, observamos uma imagem que representa um toque (indicado por um círculo translúcido) em um dos vértices do losango não quadrado, sugerindo a intenção do aluno de transformá-lo em um quadrado. De acordo com ele, "só não se parece com um quadrado por causa de que os ângulos não são iguais a noventa graus, mas os lados são todos iguais". Diante dessa situação, sugerimos a Costa que ele tentasse transformar o quadrilátero presente na tela em um quadrado e a Fernando que mencionasse para ele as ideias necessárias para se obter uma figura quadrada.

> **Fernando**: "Para ser um quadrado precisa ter os ângulos internos iguais com noventa graus"
> **Fernando**: "Aqui pô. Coloca na malha!"

Costa manipulou a figura de forma a alinhar os vértices dela com os pontos de interseção dos feixes de paralelas que formam a malha principal e secundária. Após ter ouvido a fala de Fernando, mencionada anteriormente, o seu objetivo foi alcançado de modo que a área da figura ficou equivalente à área de quatro quadrados da grade (Figura 22).

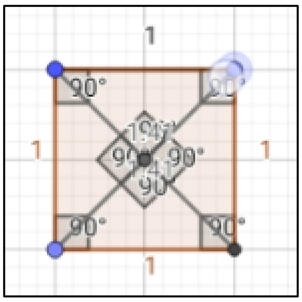


Figura 22 - Quadrado de lado 1 com os ângulos das diagonais
Fonte: Recorte da telagravação.

O surgimento do quadrado representado na figura anterior foi motivado por diversos fatores, incluindo a curiosidade de unir os pontos médios das diagonais, o ambiente digital propício, os domínios de manipulação, a representação e o uso da grade como signo. Ao utilizar o GeoGebra em conjunto com o *tablet*, a dupla conseguiu manipular os pontos médios, de modo que a distância de Euler fosse reduzida a zero. Isso se revelou algo surpreendente para todos os envolvidos, desencadeando processos cognitivos (Bairral, 2021), uma vez que nunca poderiam imaginar que, a partir desse movimento, seria possível obter figuras com lados opostos paralelos. Mais um caso inesperado manifestando-se de maneira a contribuir não apenas para os conceitos, mas também para a definição e a classificação de quadriláteros, conforme Villiers (1994) e Govender e Villiers (2004).

No contexto da manipulação de quadriláteros construídos a partir de um par de retas paralelas cortadas por uma transversal, os indivíduos tinham conhecimento de como arrastar os vértices e os lados da figura para transformá-los em outras figuras de maneira transversal às classes. No entanto, ao considerar os pontos médios das diagonais pertencentes a esses tipos de quadriláteros, só precisaríamos manipulá-los, ou seja, aumentar ou diminuir as distâncias de Euler para alcançar os objetivos.

Podemos afirmar que a malha quadriculada, como signo, e os pontos médios das diagonais tiveram uma representatividade significativa para a dupla na exploração dessa atividade. Desde a sua "descoberta", a malha esteve presente em vários momentos na resolução de tarefas, e sempre que necessário a (co)evocavam (Bairral, 2021), principalmente para relacioná-la a quadriláteros com lados perpendiculares ou para moldar quadriláteros de acordo com as medidas dos lados, produzindo um efeito semelhante ao dos pontos médios das diagonais em figuras com um par de lados paralelos.

Ao levarmos em consideração os artefatos empregados nas tarefas 5 e 6, mapeamos alguns deles que consideramos importantes, como as palavras "ligam" e "família", representação pictórica, ferramentas do GeoGebra (Segmento, Ângulo, Distância e Ponto Médio, Mover), malha quadriculada e os toques em tela. Esses elementos, em conjunto, produziram signos e, consequentemente, significados pertinentes para a aprendizagem de quadriláteros com pelo menos um par de lados opostos paralelos.

No processo de construção da diagonal, os significados de "ligam" e o aspecto pictórico, desenhado tanto por Costa quanto por Fernando, contribuíram para evitar a construção de segmentos de retas cujas extremidades estivessem na área da figura, o que seria uma das possibilidades interpretadas pelo enunciado - construa segmento(s) pertencente(s) à figura, que não sejam os seus lados. Quanto ao signo Pivô, representado pela malha, nem sempre servirá de ponte entre os signos das ferramentas do GG e os signos matemáticos. Contudo, quando (co)evocados, são tão importantes quanto às manipulações nas transformações das figuras, como o fato delas atravessarem as ideias de congruências, perpassando pelas classificações hierárquicas ou particionais.

5.4 Toques que geram novos conhecimentos na malha

A malha principal e secundária no GG em *tablet*, no modo automático, designa alguns padrões em seu design que vão além de dividir uma determinada área da malha principal em partes iguais e isso pode gerar novos conhecimentos, a partir de algumas configurações, como, por exemplo, os valores dos perímetros iguais a 2.10^n, 4.10^n ou 8.10^n (com $n \in Z$) para os menores quadrados da malha principal e 4.10^{n-1}, 8.10^{n-1} ou 16.10^{n-1} (com $n \in Z$) para os menores quadrados da malha secundária.

Esses perímetros estão imbricados, visto que a moldura do menor quadrado da grade principal compõe-se, no máximo, de áreas com 25 quadradinhos congruentes, conforme mencionado anteriormente. A relação das quantidades de quadrados menores nas áreas das malhas bem como a de seus perímetros podem ser vistos na Tabela 1.

Tabela 1

Tabela 1 - Quantidade de quadrados menores, perímetro e razão entre os perímetros

Malha	Quantidade de quadrados menores nas malhas	Perímetro			Razão entre os perímetros
Principal	1	2.10^n	4.10^n	8.10^n	5
Secundária	**25**	$\mathbf{4.10^{n-1}}$	$\mathbf{8.10^{n-1}}$	$\mathbf{16.10^{n-1}}$	

Fonte: Elaborada pelo autor.

A tabela anterior destaca duas relações entre os quadrados menores das grades. A primeira é a razão de 1/25, na quantidade de quadrados, e a segunda é a relação direta entre os perímetros. Se um quadrado menor da grade principal mede 2.10^n, o da grade secundária medirá 4.10^{n-1}, com uma razão entre eles de 5. Esses perímetros só serão alterados, por exemplo, para 4.10^n, na grade principal, e 8.10^{n-1}, na grade secundária, se houver toques de zoom limitantes na área de construção do GG. Visualmente, esses toques se assemelham à multiplicação desses quadrados menores das grades, no entanto, a razão entre eles continuará 5. Essas relações podem ser importantes para sinalizar se houve ou não uma mudança na escala das dimensões das figuras, potencializando a ideia do contexto de figuras iguais em AGD.

As escalas nas dimensões podem ser determinadas a partir do perímetro dos quadrados menores da malha principal, já que o lado desses quadrados é o que as define. Com isso, temos três tipos de escalas: 10^n, 2.10^n e 5.10^n (com $n \in Z$), que podem ser identificadas a partir de figuras quadradas construídas em malha principal ou em malha principal e secundária.

Nas figuras apresentadas no Quadro 23 (Quadrados e seus elementos), caso não fossem especificados os comprimentos de seus lados, poderíamos supor que seriam quadrados idênticos, devido à presença da razão 1/25 na quantidade de quadrados e aos ângulos internos retos. No entanto, ao conhecermos os lados de cada figura e constatarmos que são iguais, como ocorre nos quadrados de Costa e Fernando (retomar ao Quadro 23), podemos identificar se houve o uso de zoom e, consequentemente, alterações nas escalas. Nesse caso específico, somente foram realizados toques de zoom intercalados.

Como os três quadrados apresentam lados de 1cm e de 2cm, com suas áreas compostas por um único quadrado da malha principal, podemos dizer que os toques de zoom proporcionaram escalas igual a 1 e a 2, respectivamente. Isso ocorre porque todos os quadrados de medidas dos lados 10^n, 2.10^n e 5.10^n (com $n \in IN$) coincidem proporcionalmente com as distâncias no IR². Com a malha em uso, Fernando questiona a utilidade dos ângulos internos e Estevão responde relacionando-os aos espaços internos nas quinas de um objeto.

> **Fernando**: "Os ângulos servem para quê, Costa?"
> **Estevão**: "Para mostrar os espaços internos de cada quina de um objeto."

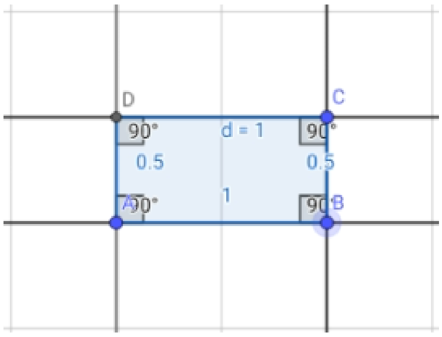
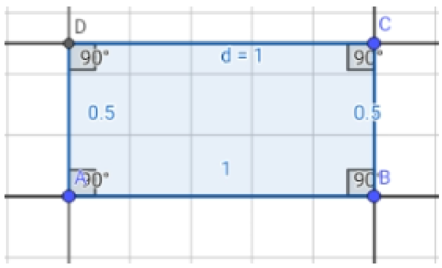
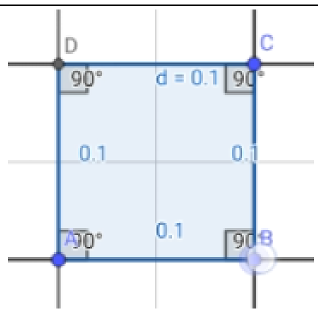
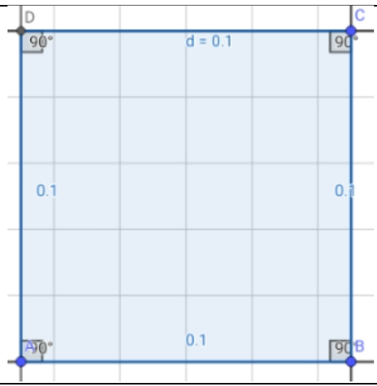
A resposta de Estevão conecta-se a um dos significados atribuídos à malha ativada no GG. Segundo ele, "a malha serve para mostrar o espaço interno de cada quina de um objeto, a depender do tipo de malha". Posteriormente, Estevão se prontificou a habilitar os outros três tipos de malha, principal, isométrica e polar, após o interesse demonstrado pela dupla.

Por outro lado, no início da exibição das grades, Fernando se questionava sobre a utilidade dos lados da malha e chegou, quase que imediatamente, à conclusão de que ela serve "para medir a distância dos comprimentos". Nesse sentido, para os envolvidos, a malha principal e secundária é relacionada a dois significados geométricos, um com os ângulos internos e o outro com a medida dos lados.

A malha principal foi habilitada por Costa pela primeira vez, auxiliando-o no processo de transformação de quadriláteros com ângulos internos retos e com pelo menos um dos lados medindo em decimal. Sua preferência por essa malha pode ser atribuída ao fato de que a "malha sem os quadradinhos pequenos" foi mencionada por Estevão no momento de sua apresentação.

Costa continuou com a mesma estratégia na transformação da figura, coincidindo os vértices do quadrilátero construído com os pontos de interseção da malha. Entretanto, ao contrário do que fez anteriormente, ele não delimitou a um único quadrado dessa grade. Além disso, acrescentou toques de zoom no final da transformação. Essas figuras podem ser observadas no Quadro 29, juntamente com a especificação da escala em que elas foram transformadas.

Quadro 29 - Quadriláteros com pelo menos dois lados em decimal em escalas

Visualização na tela	**Considerações**
	Retângulo de dimensões 0,5cm por 1cm. Escala de 0,5, sem toques de zoom.
	Retângulo de dimensões 0,5cm por 1cm. Escala de 0,2, com toques de zoom.
	Quadrado de dimensões 0,1. Escala de 0,05, sem toques de zoom.
	Quadrado de dimensões 0,1. Escala de 0,02, com toques de zoom.

Fonte: Arquivo do autor.

Os quadriláteros explorados por Costa, ilustrados no quadro anterior, alcançaram os objetivos específicos da tarefa, visto que ele conseguiu transformá-los em figuras pertencentes à família dos retângulos, com o auxílio da malha, para depois observar algumas características dessas figuras, como as medidas dos lados e os ângulos internos retos. As medidas dos lados dos retângulos em formato decimal possivelmente ocorreram devido a dois fatores: o uso da malha principal e os toques de zoom.

No caso do retângulo não quadrado, a visualização de sua área ocorreu por meio de dois quadrados, cada um com lados medindo 0,5cm, antes do toque de zoom, e por doze quadrados e meio, com lados de 0,2cm cada, ao final do toque de zoom. Enquanto a visualização da área do quadrado, antes do zoom, envolveu dois quadrados, cada um com lados de 0,05cm, e após o zoom, vinte e cinco quadrados, cada um com lados de 0,02cm. Isso sinaliza que a quantidade de quadrados da malha principal na área do quadrilátero não influencia no conceito de figuras iguais.

A forma como Costa posicionou os dois vértices do quadrilátero após os toques de zoom, sem alinhá-los aos pontos de interseção da malha (linha 2, coluna 1 do Quadro 29), chama a nossa atenção, visto que foi a primeira vez que tal fato ocorreu. Isso pode sinalizar que o aluno percebeu que as figuras são iguais independentemente da quantidade de quadrados que compõem a área dos quadriláteros.

Essas ações significativas realizadas por Costa, como o uso da malha e a manipulação do quadrilátero para resolver a tarefa proposta, reforçam a sua declaração - "Valeu! Você me ensinou muitas coisas. Um professor novo!" - dirigida a Estevão após a conclusão da apresentação das malhas para a dupla. À vista disso, ele reiniciou a construção da figura e começou a corporificar quadriláteros com os lados iguais, levando em conta a malha quadriculada e os toques de zoom, para que esses lados, dessa vez, ficassem cada vez menores.

Fernando, quando percebeu o que sua dupla estava fazendo, notou que a visualização na tela do *tablet* era a de um quadrado com lados de 0,4 cm. Foi nesse momento que ele propôs a Costa que eles deixassem os lados da figura com medidas com “zero ponto zero”, isto é, com as medidas dos lados iguais a zero. Mais uma vez, Costa aceitou o desafio e começou o processo de transformação do quadrilátero. As medidas dos lados das figuras que sofreram transformações desde o início e a quantidade de quadrados visualizados na malha, antes e depois dos toques de zoom, estão representados na Tabela 2.

Tabela 2

Tabela 2 - Medida dos lados das figuras e a quantidade de quadrados visualizados

Medida dos lados (cm)	Quantidade de quadrados		Escala na dimensão IR² em (cm) para transformação
	Antes do toque de zoom	Depois do toque de zoom	
2	2^2	4^2	0,5 : 0,5
1	2^2	5^2	0,2 : 0,2
0,4	$\mathbf{2^2}$	$\mathbf{8^2}$	**0,05 : 0,05**
0,1	2^2	5^2	0,02 : 0,02
0,02	1^2	4^2	0,005 : 0,005
0,01	2^2	0	0,005 : 0,005
0,01 (0,005)	$\mathbf{1^2}$	$\left(\frac{5}{2}\right)^2$	**0,001 : 0,001**
0	1^2	2^2	< 0,001

Fonte: Elaborada pelo autor.

Na representação anterior, notamos um efeito de "ir e voltar" no número de quadrados da malha em relação à manipulação da figura. Assim, o quadrilátero com lados de 2cm, originalmente composto por quatro quadrados, foi ampliado para dezesseis quadrados e, em seguida, manipulado para que retornasse a quatro quadrados. Como resultado desse processo, a figura anterior foi transformada em outra, com lados medindo 1cm. Esse efeito foi repetido até que eles conseguissem visualizar na tela do dispositivo uma figura com lados de comprimento igual a zero.

O uso da grade para diminuir o tamanho dos lados da figura fica evidente na terceira linha da tabela, destacado pela declaração de Fernando de que pretendia reduzir os lados a zero. Os toques de zoom permitiram que o lado da figura, originalmente com comprimento de 0,4cm, fosse subdividido em sessenta e quatro quadrados. Em consequência, ao manipular a figura para que houvesse apenas quatro quadrados da malha, os lados do quadrilátero acabariam sendo menores que 0,4cm.

Nas duas últimas linhas da tabela, encontramos duas situações que, em nossa perspectiva, mereciam ser compartilhadas e discutidas com os estudantes, pois envolviam tanto questões geométricas quanto o dispositivo GG. Em ambas as situações, aborda-se o arredondamento, que afeta as medidas dos lados da figura; nesse caso, arredondando para duas casas decimais.

O efeito observado na transformação do quadrilátero de lado 0,01cm para outro com lado 0,005cm deu a impressão de que na tela do dispositivo estávamos vendo a mesma figura, devido à implicação do arredondamento nas medidas dos lados. Como resultado do efeito "ir e voltar" e do arredondamento das casas decimais, a dupla conseguiu, por meio dos dispositivos, transformar o quadrilátero cujos lados eram iguais a zero. Isso contradiz o conceito de medidas de lados, uma vez que, na prática, um objeto não pode ter lados iguais a zero.

Ao sermos influenciados pelo efeito de "ir e voltar" nas transformações de quadriláteros cujos ângulos internos e lados são iguais, percebemos uma relação direta entre os lados dessas figuras e a quantidade, inteira ou fracionária, de quadrados da grade, a partir de uma unidade inteira. Essa multiplicação da quantidade de quadrados resulta da escala proporcional na dimensão IR^2, conforme mencionado anteriormente.

Se multiplicarmos os lados dessa figura pelas mantissas 1, 2 e 5, das três escalas, 10^n, 2.10^n e 5.10^n (com $n \in Z$), geramos uma base na qual podemos concluir a quantidade e a composição de quadrados formados pela malha quadriculada. Ao considerarmos as medidas "L" (maior ou igual a um) dos quadriláteros transformados pela dupla, a quantidade de quadrados da grade é gerada a partir de uma base geratriz $\{(L)^2, (2L)^2, (5L)^2\}$. Cada elemento dessa base é formado por uma potência quadrada cuja base deve ser multiplicada por 10^n (com $n \in IN$) se todas as bases forem menores do que dez. No caso específico de bases com valores maiores ou iguais a 10, essas devem primeiro ser divididas por 10, até que se obtenha valores iguais a um, para a formação de uma nova base geratriz, que será posteriormente multiplicada por 10^n (com $n \in IN$).

No caso dos lados iguais a 1cm, da figura transformada por Costa, a base geratriz é formada por $\{(1)^2, (2)^2, (5)^2\}$. Como a base não apresenta elementos maiores ou iguais a 10, basta multiplicar a base da potência quadrática por 10^n (com $n \in IN$) para encontrar o quantitativo de quadrados da grade. Neste caso, teremos: $(1)^2$, $(2)^2$ ou $(5)^2$ para n=0; $(10)^2$, $(20)^2$ ou $(50)^2$ para n=1; e assim por diante.

Quanto aos lados iguais a 2cm da figura, a base geratriz é formada por $\{(2)^2, (4)^2, (10)^2\}$. Como essa base apresenta um elemento igual a 10, temos que dividi-lo por 10. Com isso, geraremos uma nova base $\{(1)^2, (2)^2, (4)^2\}$, na qual, ao multiplicarmos por 10^n (com $n \in IN$) as bases das potenciais quadráticas, encontraremos um quantitativo de quadrados da malha principal correspondente a $(1)^2$, $(2)^2$ ou $(4)^2$ para n=0; $(10)^2$, $(20)^2$ ou $(40)^2$ para n=1; e assim sucessivamente.

Para os lados da figura menores que um, como 0,1cm e 0,02cm, conforme indicado na Tabela 2, a abordagem adotada foi a multiplicação por 10^n (com n ∈ IN), de modo a assegurar que os lados se tornassem maiores ou iguais a um. Dessa maneira, a manipulação dos valores na base geratriz desses lados segue o mesmo princípio aplicado aos lados maiores ou iguais a um. Ao efetuarmos essa multiplicação por 10 e 100, respectivamente, resultamos nas mesmas bases geratrizes $\{(1)^2, (2)^2, (5)^2\}$ e $\{(2)^2, (4)^2, (10)^2\}$ encontradas anteriormente para os quadriláteros com lados de 1cm e 2cm. Assim, a configuração dos quadrados na área do quadrilátero permanece inalterada.

Se, porventura, a divisão por 10 dos elementos da base geratriz resultar em um número decimal, isso acarretará na formação de uma composição fracionária de quadrados na malha principal. Tal fato se torna evidente, por exemplo, nos lados de 0,005cm (observados na linha 7, coluna 1, da Tabela 2). Nesse contexto, a representação na tela dos dispositivos poderá alternar entre quadrados inteiros e quadrados fracionários, dependendo dos toques de zoom efetuados. A Tabela 3 apresenta exemplos de medidas de lados que envolvem esse tipo de composição, bem como a base geradora dessa representação, o número de visualizações e as medidas dos quadrados em que essa visualização é possível. Iniciamos com medidas de 5cm, uma vez que geram a mesma base geratriz das medidas de 0,05cm, conforme discutido anteriormente.

Tabela 3

Tabela 3 - Medida dos lados das figuras, base geratriz, quantitativo e medidas dos quadrados visualizados

Medida dos lados (cm)	Base Geratriz		Quadrados Fracionários	
	Original	**Manuseada**	**Quantidade visualizada**	**Medida dos lados (cm)**
5	$\{(5)^2, (10)^2, (25)^2\}$	$\{(1)^2, (2{,}5)^2, (5)^2\}$	1	2,5
6	$\{(6)^2, (12)^2, (30)^2\}$	$\{(1{,}2)^2, (3)^2, (6)^2\}$	1	1,2
11	$\{(11)^2, (22)^2, (55)^2\}$	$\{(1{,}1)^2, (2{,}2)^2, (5{,}5)^2\}$	3	1,1 ou 2,2 ou 5,5
15	$\{(15)^2, (30)^2, (75)^2\}$	$\{(1{,}5)^2, (3)^2, (7{,}5)^2\}$	2	1,5 ou 7,5

Fonte: Elaborada pelo autor.

Em todas as situações apresentadas na tabela anterior, foi necessário manipular a base geratriz original devido à presença de pelo menos um elemento maior ou igual a 10. Para essas bases que incluem números decimais, a quantidade de vezes que ocorrerá a visualização de composições de quadrados fracionários também é indicada, juntamente com a medida dos lados desses quadrados.

As medidas dos lados de 5cm e 11cm levaram a bases geratrizes que envolvem um e três números decimais, respectivamente. Isso indica que, no caso da figura com lados de 5cm, haverá uma única situação em que será possível visualizar quadrados fracionários, e cada um deles terá lados medindo 2,5cm. Em contrapartida, a figura com 11cm apresenta três números decimais, o que equivale a três situações em que serão visualizados quadrados fracionários com lados de 1,1cm, 2,2cm ou 5,5cm. Essas situações ocorrerão para todos os quadriláteros com lados 5.10^n e 11.10^n (para $n \in Z$) que possuam essas mesmas características de lados iguais e ângulos internos retos.

Com base nas informações anteriormente apresentadas, podemos generalizar que todos os quadriláteros com medidas iguais a ($L.10^n$), onde $n \in Z$, apresentarão as mesmas bases geratrizes e, portanto, o mesmo quantitativo de visualizações de quadrados fracionários ou inteiros, representados por quadrados da malha com as mesmas medidas de lados. Isso ocorre independentemente do valor específico de (L), decimal ou inteiro, desde que a medida esteja na forma ($L.10^n$), onde n é um número inteiro.

Com o objetivo de destacar esses padrões, elaboramos a Tabela 4, que inclui as quatro medidas de lados das figuras transformadas pela dupla, juntamente com duas medidas adicionais. O propósito aqui é resumir a relação entre a base geratriz, a quantidade de visualizações de quadrados fracionários da grade e as medidas dos lados correspondentes. Essa tabela nos permitirá visualizar de forma clara como esses elementos estão interconectados.

Tabela 4

Tabela 4 - Relação entre base geratriz e a quantidade de visualizações de quadrados com especificações dos lados

Medida dos lados (cm)		Base Geratriz		Quadrados Fracionários	
Original	**Multiplicada por 10^n**	**Original**	**Manuseada**	**Quantidade visualizada**	**Medida dos lados (cm)**
0,02	**2**	**$\{(2)^2, (5)^2, (10)^2\}$**	**$\{(1)^2, (2)^2, (5)^2\}$**	**0**	**-**
0,1	**1**	**$\{(1)^2, (2)^2, (5)^2\}$**	**-**	**0**	**-**
0,11	1,1	$\{(1,1)^2, (2,2)^2, (5,5)^2\}$	-	3	1,1 ou 2,2 ou 5,5

1	**-**	**$\{(1)^2, (2)^2, (5)^2\}$**	**-**	**0**	**-**
2	**-**	**$\{(2)^2, (5)^2, (10)^2\}$**	**$\{(1)^2, (2)^2, (5)^2\}$**	**0**	**-**
11	1,1	$\{(11)^2, (22)^2, (55)^2\}$	$\{(1{,}1)^2, (2{,}2)^2, (5{,}5)^2\}$	3	1,1 ou 2,2 ou 5,5

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao examinarmos as medidas dos quadriláteros transformados pela dupla, conforme destacado na tabela anterior, fica evidente que, durante a manipulação da figura, seus integrantes nunca poderiam visualizar uma quantidade de composição de quadrados da grade particionada. As configurações de lados de 0,02cm e 2cm oferecem as mesmas possibilidades de visualização em termos de forma e quantidade de quadrados da malha, assim como em suas medidas. O mesmo padrão se repete para os quadriláteros com lados de 0,1cm e 1cm, bem como para aqueles com lados de 0,11cm e 11cm. É importante notar que essas generalizações se aplicam a quadriláteros que coincidem com as posições dos quadrados da grade.

As relações identificadas anteriormente na malha quadriculada, a princípio, surgiram da curiosidade de entender o efeito "ir e voltar", referente ao quantitativo de quadradinhos da grade no interior de uma figura quadrada, que gerava uma sensação visual de estar aumentando ou diminuindo essa figura. Então, a cada avanço na análise em relação aos efeitos da malha, fomos encontrando determinados padrões, conforme mencionados anteriormente, nos quais exploramos, interagimos, aprendemos individualmente e fisicamente, ou seja, corroboramos o pensamento de que "o dispositivo mexe comigo, e eu mexo com ele" (Bairral, 2021, p.87). Em síntese, a malha quadriculada, a partir da construção de uma figura quadrada, pode ser utilizada para explorar, entre outras coisas, conceitos de escala, área, perímetro, semelhança, base geratriz e sequências.

CAPÍTULO VI – Resultados e reflexões

Ao longo desta seção, discutiremos os diversos resultados analisados nos dois últimos capítulos, juntamente com algumas reflexões sobre possíveis origens de definições (Villiers, 1994) e classificações (Govender e Villiers, 2004) de quadriláteros. A finalidade é encontrar respostas para as seguintes subquestões desta tese: (i) Que funções os toques assumem na aprendizagem? e (ii) Que aspectos da aprendizagem (conceitos, propriedades, etc.) sobre quadriláteros podem ser elucidados na ambiência ficha+*tablet*+GG+toques+fala+escrita?

Ao respondermos essas duas subquestões, apresentaremos novas descobertas em relação às discutidas na revisão de literatura, especialmente no que diz respeito às potencialidades de um AGD no contexto da mobilidade e dos toques em tela. Além disso, a produção e a elaboração de símbolos, de signos e de significados, no ensino e na aprendizagem de quadriláteros, por meio de GG+*tablet*, podem trazer contribuições importantes tanto para implementações de práticas pedagógicas quanto para a literatura em Educação Matemática.

6.1 A emergência de signos na aprendizagem de quadriláteros

Na implementação de tarefas sobre quadriláteros, por meio de fichas e com a utilização do GeoGebra em *tablet*, há possibilidades de produzir e elaborar signos em cada um desses artefatos. Nas fichas, os signos são representados pelos pictogramas; no GeoGebra, são as ferramentas disponíveis; e no *tablet*, são os toques, considerando o espaço e o tempo.

Nesta discussão, concentraremos nossa atenção na malha quadriculada, uma das ferramentas do GeoGebra. Essa escolha se justifica pela ausência de análises específicas sobre o uso da malha quadriculada na revisão de literatura. Embora tenhamos encontrado referências ao uso da grade de forma natural, como em Assis (2020) e em Brito (2022), inclusive com indicações para pesquisas envolvendo o uso da malha, a reflexão desse componente é uma lacuna que pretendemos preencher nesta pesquisa.

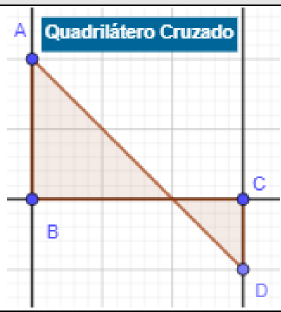
Na tarefa em que os aprendizes foram desafiados a construir um quadrilátero com todos os lados de medidas iguais, partindo da criação de um par de retas paralelas cortadas por uma transversal, a ficha apresentava signos concretizados em imagens. Esses signos se assemelhavam aos das ferramentas <Polígono>, <Ângulo>, <Mover> e <Distância> do GeoGebra. No entanto, a malha quadriculada emergiu como o signo mais crucial para a manipulação e, consequentemente, para a transformação dos quadriláteros.

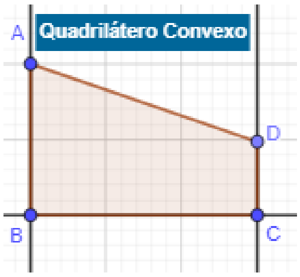
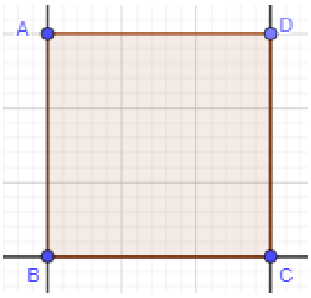
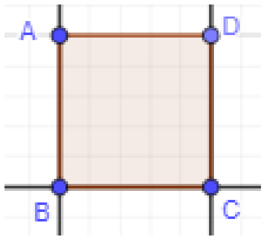
Pela primeira vez, o toque de Estevão na malha principal e secundária teve a função de contribuir para a criação de figuras com detalhes mais precisos, como a transformação de um quadrilátero com pelo menos um par de lados opostos paralelos em um com as medidas dos lados iguais. A importância da emersão desse signo pivô para Estevão é confirmada pela sua fala: “Eu tive a melhor ideia de todas. Eu vou ser um gênio.”; “Tio, eu coloquei a malha para ficar melhor. Foi uma boa ideia!”.

Com o uso da malha por meio do domínio relacional, esse aluno conseguiu transformar o quadrilátero sugerido com a estratégia em que, segundo ele, (I) “você pode colocar os pontos exatamente nas quinas dos quadrados”, referindo-se aos vértices da figura sobrepondo os pontos de interseção das retas da grade. Esse domínio fica mais evidente quando Eduarda comenta que havia usado a malha e, com isso, somente dois lados ficavam iguais, enquanto os outros ficavam diferentes. No entanto, a resposta dele foi (II) “não se você posicionar no mesmo quadrado”, fazendo alusão à sobreposição da figura construída com um quadrado específico na malha quadriculada.

As afirmações (I) e (II) feitas por Estevão remetem, respectivamente, às classificações de quadriláteros cruzados e convexos, dependendo da posição de um dos vértices, no modo particional. Se colocarmos os pontos (vértices) exatamente nas quinas dos quadrados da malha, conseguiremos transformar a figura em quadriláteros com pelo menos um par de lados paralelos, caso esses pontos não estejam alinhados. No entanto, se posicionarmos os vértices do quadrilátero no mesmo quadrado do signo pivô, teremos somente quadrados. O Quadro 30 ilustra essas três classificações levando em consideração as definições feitas a partir do signo pivô por Estevão.

Quadro 30 - Quadriláteros construídos a partir das definições feitas por Estevão

Definição a partir do signo Pivô	**Visualização na tela**	**Definição matemática**
Colocar os vértices exatamente nas quinas dos quadrados		Quadriláteros com pelo menos um par de lados opostos paralelos

<table>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Posicionar os vértices no mesmo quadrado</td><td>
</td><td rowspan="2">Quadriláteros com todas as medidas iguais</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Print de transformações no GeoGebra Geometria.

A visualização dos quadriláteros com as medidas iguais, conforme o quadro anterior, se condicionou à tela posta na horizontal, ou seja, a visualização dos seus lados opostos sempre ocupará as posições verticais e horizontais. Todavia, ao considerarmos a rotação e a mobilidade no dispositivo, essa visualização será alterada, como, por exemplo, os seus lados paralelos na diagonal (Figura 23), se porventura a tela não estiver na vertical.

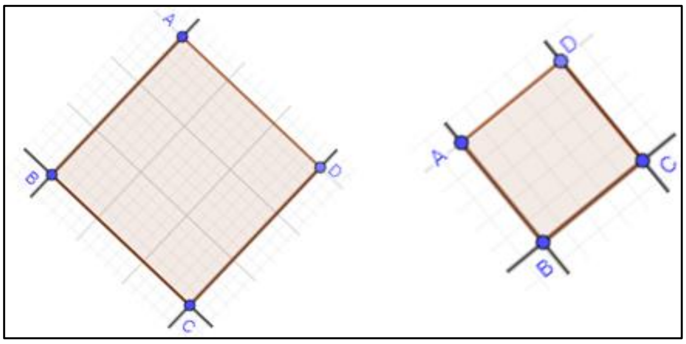


Figura 23 - Quadriláteros com todas as medidas iguais
Fonte: Recorte da telagravação.

Essa mudança no aspecto visual dessa figura é um caso particular ao se considerar a definição de posicionar os vértices no mesmo quadrado da malha. Para os quadriláteros com pelo menos um par de lados paralelos, apesar da mobilidade e da rotação, podem ser visualizados nas mesmas posições, desde que se façam as devidas manipulações.

Na tarefa em que foi necessário criar quadriláteros com todos os ângulos iguais, após a construção de uma reta perpendicular nas paralelas cortadas por uma transversal, Estevão entra em cena com toques na malha para realizar a transformação. Mais uma função do toque, especificamente em compartilhar o signo pivô, para ajudar Fernando e Costa na realização da proposta da tarefa (rever Quadro 22 - Tarefa 3 e seus objetivos específicos).

Estevão, sem pronunciar uma palavra e em uma única ação, manipulou o quadrilátero construído por Fernando, o qual exibia na tela as medidas dos ângulos internos e dos lados, além da malha quadriculada habilitada. Enquanto isso, Costa e Fernando observavam. Essa intervenção foi o bastante para compartilhar o significado do signo pivô com essa dupla, conforme expressado por Fernando: “Ah! Olha só. Boa estratégia mesmo”; e confirmado por Costa: “Tu usa hacker?!”.

Fernando desfez a transformação da figura de Estevão, que tinha os lados iguais a 2 unidades de comprimento e ângulos internos de 90°, e desafiou Costa a manipular o quadrilátero usando o signo pivô. Sob a orientação de Fernando, ele diz: “É menor”. Costa, enquanto manipula a figura, pergunta: “É bem menor que isso? É um quadrado só?” e a resposta foi: “Isso!”

O raciocínio geométrico de "um quadrado só", compartilhado pela dupla na malha quadriculada, evidencia duas propriedades que definem a figura quadrada: os ângulos internos retos, representados pelo signo do toque; e os lados iguais, conforme a afirmação de Costa: “Eu consegui diferente dele. O dele ficou tudo dois e o meu ficou tudo um”. O mais interessante é que essas propriedades elencadas não são exclusivas da quantidade unitária de quadrados do signo pivô, pois a quantidade 2^n (onde n é um número natural diferente de um) de quadrado(s) também satisfaz, desde que não esteja disposta na horizontal ou na vertical.

Com isso, o número de quadrados pode ser utilizado para classificar, tanto de forma hierárquica quanto particional, e definir os quadriláteros com lados opostos paralelos e ângulos internos iguais, visto que a quantidade de quadrados da malha está diretamente relacionada com a transformação de figuras retangulares. A Figura 23 retrata duas transformações de quadriláteros distintos levando em consideração a mesma quantidade de quadrados do signo pivô.

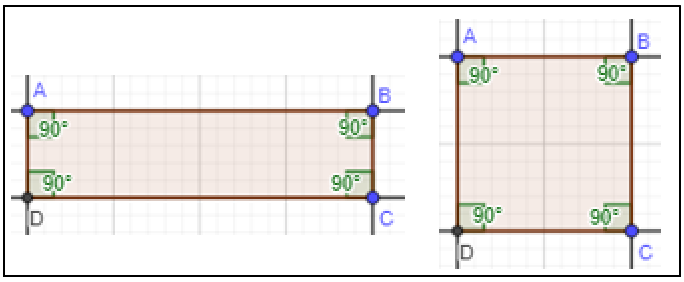


Figura 24 - Retângulo e quadrado com ângulos internos
Fonte: Recorte da telagravação.

Os toques que geram novos conhecimentos com a malha revelam, através da interação entre Fernando, Costa e Estevão, a utilidade do signo pivô em relação aos ângulos internos e aos lados. Quando questionado sobre os ângulos internos, Fernando pergunta: "Para que servem os ângulos, Costa?". A resposta de Estevão foi: "Para mostrar os espaços internos de cada quina de um objeto". Isso evidencia o protagonismo desse signo pivô no movimento entre os signos dos artefatos (GG+*tablet*) e o signo matemático (ângulos internos). Além disso, quando Fernando interpela a utilidade dos lados da malha, Estevão responde imediatamente: "Para medir a distância dos comprimentos". Essas ponderações confirmam tanto o compartilhamento dos significados da malha quadriculada quanto a sua importância na resolução de tarefas envolvendo os quadriláteros com pelo menos um par de lados opostos paralelos.

Os significados do signo pivô permitiram a esses estudantes gerar conceitos de medidas em geometria, lados e ângulos internos, que são utilizados para definições de figuras geométricas, especificamente a de quadriláteros. Essa compreensão contribui para o pensamento e o raciocínio dessas figuras. Podemos exemplificar o caso de Costa, que posicionou os dois vértices do quadrilátero, após os toques de zoom, sem alinhá-los aos pontos de interseção da malha (Figura 25).

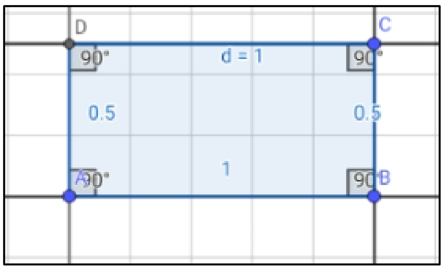


Figura 25 - Transformação do quadrilátero sem relacionar diretamente o signo pivô
Fonte: Recorte da telagravação.

A transformação do quadrilátero, realizada por Costa, expressa na figura anterior, evidencia uma primeira ação concretizada do domínio relacional, ou seja, utilizando as propriedades dos lados e dos ângulos internos de figuras com dois lados opostos paralelos.

Outro caso, também envolvendo o domínio relacional, mas com o uso direto do signo pivô, foi a transformação de um quadrado com os lados tendendo a zero. O conhecimento dos toques de zoom permitia um efeito de "ir e voltar" no número de quadrados da grade em relação à manipulação da figura. Esse feito teve dois significados importantes: tanto para os transformadores, que verificaram que é possível construir quadrados com lados tendendo a zero, quanto para o autor, que se atentou a sinalizar para futuras implementações que há o arredondamento do aplicativo em relação às medidas, além de reforçar que não existem medidas de comprimento de lados de figuras geométricas iguais a zero.

Diante dessa situação, devemos considerar também a mediação docente, e não somente a do signo pivô, para a produção e a elaboração de signos. Nesses processos, pode haver a necessidade de orientações e de ponderações nas construções, nas manipulações e nas transformações das figuras, como no caso dos discentes Fernando e Costa que, mediante as transformações, visualizaram na tela quadrados de lados menores que um, inclusive com as “medidas dos lados iguais a zero” (Figura 26).

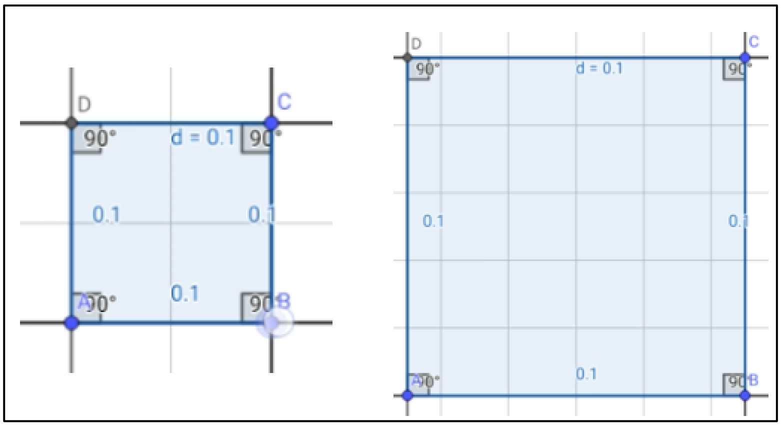


Figura 26 - Transformação de quadrados com medidas menores que um
Fonte: Recorte da telagravação.

Em resumo, este tópico discutiu a emergência de signos que surgiram na resolução de tarefas sobre polígonos convexos de quatro lados, contendo pelo menos um par de lados paralelos. Dentre eles, destacamos ângulo, comprimento, polígono e reta perpendicular, que compartilham dos mesmos significados nos artefatos (ficha e GG+*tablet*) e na matemática. Além desses signos, surgiu a malha quadriculada do GG, considerada o signo pivô, que permitiu a evolução dos signos por meio das mediações e do domínio relacional.

A partir do signo pivô, emergiram três definições que podem ser utilizadas tanto para a construção quanto para a transformação de quadriláteros com pelo menos um par de lados opostos paralelos, a saber: (a) colocar os vértices exatamente nas quinas dos quadrados; (b) posicionar os vértices nos quadrados; e (c) a quantidade de quadrados na grade.

Na primeira definição, obteremos os quadriláteros convexos, que podem ser cruzados ou não. Dentre os não cruzados, temos os trapézios e os paralelogramos. Na segunda, as figuras derivadas serão quadradas e podem ser visualizadas em diversas posições, a depender da mobilidade e da rotação da tela do dispositivo. Na última definição, oriunda da malha quadriculada, teremos figuras quadradas, desde que se considere a quantidade 2^n (n é um número natural diferente de um) de quadrados da grade e que eles não estejam dispostos na horizontal ou na vertical. Caso contrário, a figura obtida será retangular.

O significado do signo pivô, por parte dos alunos, possibilitou a exploração de conceitos relacionados às medidas das figuras com quatro lados, principalmente aquelas com ângulos internos iguais e lados opostos paralelos. Além disso, neste caso, potencializou o domínio relacional ao transformar as figuras, como no caso de explorar e manipular quadriláteros com lados próximos de zero.

No próximo item, discutiremos as medidas relacionadas aos quadriláteros e como esses conceitos influenciam na aprendizagem dessas figuras ao implementarmos tarefas com a utilização de fichas e GG+*tablets*.

6.2 As medições nos quadriláteros

Ao pensarmos em medições de um polígono qualquer, surgem ideias sobre as medidas dos lados, das diagonais (para polígonos com mais de três lados) e dos ângulos internos e externos. No caso dos quadriláteros, a discussão terá ênfase nas medidas dos ângulos internos, devido à carência de trabalhos que abordam essas medidas para a classificação e a definição dessas figuras. Além disso, os ângulos internos foram uma estratégia que emergiu por parte dos(as) estudantes na resolução de tarefas.

Na proposta da tarefa em que os(as) aprendizes construíram um quadrilátero considerando a formação de um par de paralelas cortadas por uma transversal, Estevão, após transformar a figura com auxílio da malha, efetivou primeiro a determinação dos ângulos internos e, em sequência, a medida dos lados (Quadro 15 - Imagens dos toques para construção do quadrilátero). Compreendemos que a necessidade de conhecer os ângulos internos decorre, inicialmente, de dois motivos: primeiro, porque ele já sabia que os lados eram iguais, e segundo, para concluir a proposta da tarefa em relação à soma dos ângulos internos, que, de acordo com ele "deu tudo certinho"; "é exatamente trezentos e sessenta”; “noventa, noventa, noventa, noventa".

Se tomarmos o conceito “noventa, noventa, noventa, noventa", afirmado por Estevão, ou seja, todos os ângulos internos do quadrilátero iguais, classificaremos as figuras como retângulos e losangos quadrados, conforme ilustrado na Figura 27.

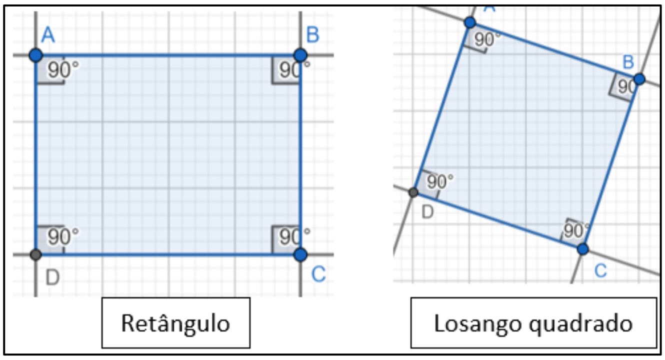


Figura 27 - Transformação de quadrados com medidas dos ângulos internos iguais
Fonte: Elaborada pelo autor.

Na proposta dessa tarefa, ainda emergiram outros dois conceitos: (a) os dois pares de ângulos suplementares, interpretados pelos alunos como ângulos “no mesmo lado”; e (b) a soma dos ângulos internos igual a “trezentos e sessenta” (linha 3, coluna 2, Quadro 18 - Perguntas e diálogos a partir das construções de quadriláteros) na exploração dos polígonos convexos de quatro lados. Com isso, a partir do primeiro conceito, poderíamos construir ou transformar quadriláteros com pelo menos um par de lados paralelos, como, por exemplo, trapézios e paralelogramos. Enquanto na segunda, definiríamos tanto polígonos convexos de quatro lados quanto os não convexos.

Na construção de paralelogramos (tarefa 2 da Ficha 4), para exploração dos seus lados e ângulos internos, Fernando decidiu deixar a figura com todos os lados iguais, conforme indicado em sua fala "eu quero que todos fiquem com 12,6”. Com isso, eles ficaram surpresos pelo fato de os lados serem iguais, porém os seus ângulos internos não (Figura 28).

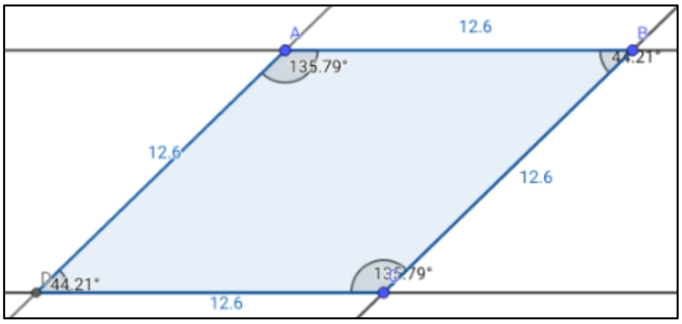


Figura 28 - Quadrilátero com os ângulos opostos e com todos os lados iguais
Fonte: Arquivo do autor.

A transformação em um quadrilátero com os lados opostos e com todos os lados iguais, para a dupla Fernando e Costa, pode ter sido uma surpresa para eles - Costa: “O que você fez?”

Fernando: “Não sei explicar.” - mas não um imprevisto na implementação da tarefa.

A pedido do autor, Fernando solicitou ajuda a Costa para refazer a construção do quadrilátero e, também, por decisão deles, transformá-lo em um com os lados iguais. Diante disso, ao observar a figura, Costa disse: "A mesma coisa do que antes. As formas são as mesmas coisas. Não é? Estou certo?" – fazendo referência aos ângulos internos opostos iguais – o que foi confirmado por Fernando: "Tá certo".

Naquela ocasião, o autor se preocupou, por meio das mediações, em destacar os lados opostos paralelos iguais da figura, uma das características dos paralelogramos. Contudo, não haveria perdas na conceituação dessas figuras se, ao invés de sinalizar esses lados, fossem priorizados os ângulos opostos iguais. Talvez, isso evitasse o espanto da dupla ao transformar a figura em um quadrilátero com os lados e os ângulos opostos iguais, conforme mencionado anteriormente. Com isso, interpretamos o raciocínio “eu percebi que A e C são iguais e B e D também”, ou seja, ângulos opostos iguais, como um novo modo de definir os paralelogramos na forma econômica, como, por exemplo, os retângulos e os losangos.

Ao adotar definições que contemplam exclusivamente os ângulos internos dos quadriláteros, em substituição à quantidade de lados paralelos, foi elaborado o Quadro 31, contendo um quantitativo relacionado às possibilidades desses ângulos, no que diz respeito aos trapézios e aos paralelogramos.

Quadro 31 - Possibilidades relacionadas aos ângulos internos de trapézios e paralelogramos

Quadrilátero \ Possibilidades	Ângulos retos (ângulos iguais)	Ângulos opostos iguais (Ângulos adjacentes não consecutivos iguais)	Ângulos agudos	Ângulos obtusos	Ângulos adjacentes consecutivos diferentes	Ângulos adjacentes consecutivos iguais	Ângulos adjacentes consecutivos suplementares	Ângulos opostos suplementares (Ângulos adjacentes não consecutivos	Ângulos opostos diferentes (Ângulos adjacentes não consecutivos diferentes)
Quadrado	4	2	0	0	0	4	4	2	0
Retângulo	4	2	0	0	0	4	4	2	0
Losango	4	2	2	2	4	0	4	0	0
Paralelogramo	4	2	2	2	4	0	4	0	0
Trapézio escaleno	0	0	2	2	4	0	2	0	2
Trapézio isósceles	0	0	2	2	2	2	2	2	2
Trapézio retângulo	2	0	1	1	3	1	2	0	2

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na visualização do quadro anterior, notamos possibilidades de características comuns entre os trapézios e os paralelogramos, tais como a presença de pelo menos dois pares de ângulos adjacentes consecutivos suplementares. Entretanto, há possibilidades de diferenças individuais, ou seja, nos trapézios, os ângulos opostos são diferentes, enquanto nos paralelogramos, os ângulos opostos são iguais. Destacamos essas situações para uma melhor identificação. Com base nisso, podemos organizar pelo menos dois esquemas com essas figuras. O primeiro esquema (Figura 29) foi organizado de forma hierárquica, de modo que os trapézios e os paralelogramos são disjuntos. Já no segundo esquema (Figura 30), um aparece como subconjunto do outro.

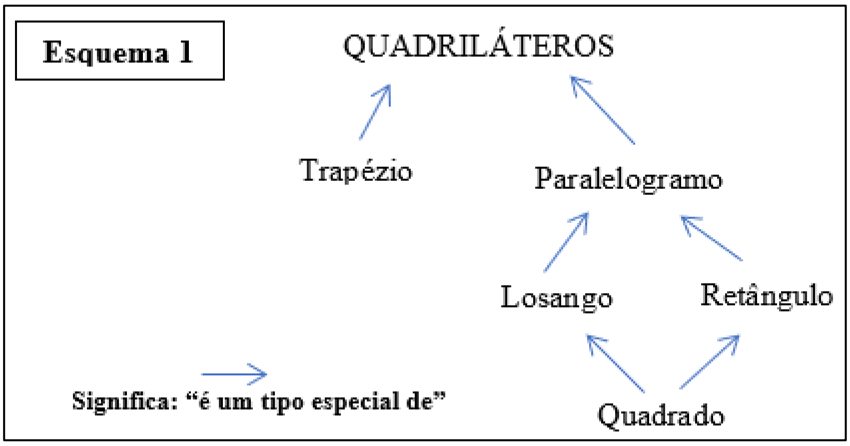


Figura 29 - Organização hierárquica com trapézio e paralelogramos disjuntos
Fonte: Elaborada pelo autor.

As definições dos trapézios e dos paralelogramos, implícitas no esquema anterior, se referem a um tipo especial de quadrilátero, com os ângulos opostos, respectivamente, não congruentes e congruentes. Por sua vez, tanto o losango quanto o retângulo são espécies de paralelogramo, devido à propriedade dos ângulos opostos. O primeiro é também uma espécie de quadrado quando todos os seus ângulos internos são iguais (retos). Este, por sua vez, ao ter todos os ângulos opostos suplementares, pode ser classificado como retângulo.

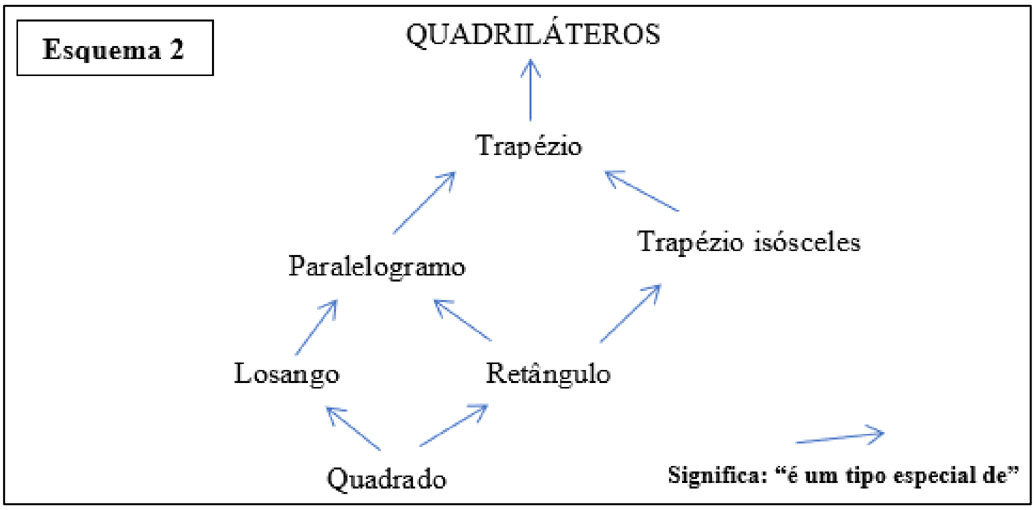


Figura 30 - Organização hierárquica com paralelogramo contido no trapézio
Fonte: Elaborada pelo autor.

No esquema 2, observamos que tanto o retângulo quanto o losango são categorias do paralelogramo, condicionados aos ângulos opostos iguais. Enquanto o retângulo também é um tipo especial de trapézio isósceles, em virtude de possuir pelo menos dois ângulos retos, o quadrado é um tipo de losango quando todos os seus ângulos são retos. No caso do paralelogramo e do trapézio isósceles, eles são considerados uma classe dos trapézios, contanto que a soma de pelo menos dois pares de ângulos adjacentes consecutivos seja suplementar.

As duas estruturas esquemáticas previamente delineadas destacam abordagens distintas na classificação e na definição de quadriláteros, priorizando medições angulares em vez das medidas dos lados. Essa perspectiva, que abrange tanto trapézios quanto paralelogramos, ainda não foi contemplada em materiais didáticos brasileiros, tampouco nas análises de pesquisas relacionadas ao tema. Com isso, estamos ampliando as possibilidades para que os(as) aprendizes possam conceituar e definir os quadriláteros abordados anteriormente.

Com base nas definições econômicas, propostas por Govender e Villiers (2004), associadas à expressão "um tipo especial de", que sugere a existência de outras figuras geométricas compartilhando a mesma definição, estruturamos hierarquicamente os quadriláteros. Destaca-se que essa organização não exclui a possibilidade de uma reorganização também sob uma perspectiva particional, conforme abordado por Villiers (1994).

Essa nova forma de abordar as classificações dos quadriláteros, com base nos ângulos internos, deve ser considerada como uma adição às já existentes, e não como uma substituição. Nesse contexto, compreendemos que estamos enriquecendo as classificações de quadriláteros, os quais se caracterizam pela condição de apresentar, no mínimo, dois pares de ângulos adjacentes consecutivos que são suplementares. Anteriormente, durante a implementação das tarefas relacionadas ao tema, tínhamos apenas a opção de identificar esses quadriláteros como figuras que possuem, no mínimo, um par de lados opostos paralelos. Isso implicava referir os paralelogramos como uma espécie de trapézio (pouco usual) ou como figuras com um par de lados opostos paralelos, para trapézios, e com dois pares de lados opostos paralelos, para os paralelogramos (mais comum).

Na tarefa relacionada às diagonais, não podemos deixar de mencionar a ação surpreendente de Fernando ao manipular os vértices do trapézio isósceles de modo a posicionar os pontos médios das diagonais de forma sobreposta, cujo objetivo era transformar essa figura em um quadrado (rever o Quadro 27 - Visualização na tela, observações das manipulações e possíveis quadriláteros transformados). Esse acontecimento reforçou a suposição de que o aluno aproveitou simultaneamente tanto da visualização geométrica, por ter enxergado uma possibilidade, quanto do domínio relacional, por efetuar toques de arrastar nos vértices.

O aspecto mais intrigante, mesmo sendo a penúltima aula da implementação das tarefas, foi que esse aluno não conduziu esse experimento para os outros dois tipos de trapézios, o isósceles e o retângulo, apesar de este último apresentar dois ângulos internos retos. Ou seja, na teoria, seria mais fácil transformá-lo em um quadrado, levando em consideração os domínios apresentados por Fernando.

Por meio da manipulação dos vértices do trapézio isósceles, Fernando alterava os ângulos agudos e obtusos, formados pelas diagonais da figura. Ao realizar o movimento de sobrepor os pontos médios dessas diagonais, ou seja, reduzir a mediana de Euler, esses ângulos se aproximavam gradualmente das mesmas medidas, até que todas alcançaram a configuração de ângulos retos, resultando, na prática, o valor da mediana igual a zero. Esse processo transformou a figura inicial em um losango.

A ação de Fernando ao conjecturar, manipular e investigar surpreendeu o autor, que, ao revisar o processo de transformação da figura por meio da telagravação, percebeu que a estratégia adotada pelo estudante amplia a aplicabilidade da transformação também para os quadrados, figura objetivada inicialmente por ele. Essa observação levou em consideração a construção geométrica utilizada na criação do trapézio isósceles durante a implementação da tarefa.

À vista disso, cogitamos a possibilidade de explorar as propriedades do trapézio isósceles e, consequentemente, as do losango e as do quadrado (Figura 31), ao considerarmos os ângulos das diagonais desse trapézio. Vale ressaltar que essa particularidade envolvendo as transformações de outras figuras não ocorre nos outros trapézios, ao considerarmos suas respectivas construções geométricas. Em outras palavras, seja qual for a manipulação executada nos vértices dos trapézios escaleno ou retângulo, essas figuras permaneceram com as mesmas propriedades.

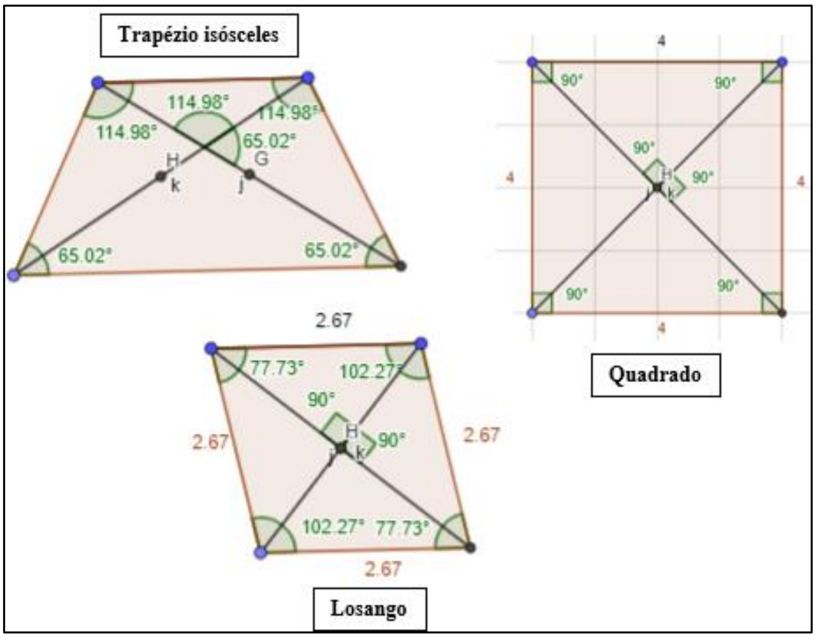


Figura 31 - Quadriláteros transformados por meio da manipulação dos vértices
Fonte: Elaborada pelo autor.

O losango e o quadrado, ilustrados na imagem anterior, caso não fossem concebidos da transformação do trapézio isósceles, permaneceriam com suas respectivas propriedades, após sequências de explorações e de manipulações, levando os(as) aprendizes, no máximo, a conjecturar que o losango é tipo especial de quadrado. Isso minimizaria a identificação de elementos comuns existentes em outros quadriláteros.

Diante do exposto até aqui, sustentamos a perspectiva de que as medições angulares se tornaram uma abordagem viável tanto para a definição quanto para a classificação dos quadriláteros, em particular, trapézios e paralelogramos. A vantagem dessa abordagem reside na forma econômica de definir, podendo abranger ou não outros quadriláteros. Isso proporciona aos estudantes a oportunidade de investigar, de conjecturar e de validar propriedades por meio de manipulações e de explorações no ambiente GG+*tablet*.

Como exemplo, elaboramos dois esquemas: um evidenciando trapézios e paralelogramos sem elementos comuns, e outro com elementos em comum, inclusive destacando o retângulo como um tipo especial de trapézio retângulo. Reforçamos que a organização dos quadriláteros depende da forma como são definidos, o que, na nossa concepção, é positivo, pois dinamiza o ensino e a aprendizagem dessa temática.

Além disso, percebemos uma potencialidade nos artefatos GG+*tablet* quando os(as) discentes consideraram os ângulos formados pelas diagonais do trapézio isósceles nas transformações de outras figuras, especialmente losangos e quadrados, por meio das manipulações de seus vértices.

Ao considerar um AGD nas transformações de quadriláteros, o mais comum ou esperado são as transformações de figuras com dois lados opostos paralelos em outras com essas mesmas características, como, por exemplo, a transformação do retângulo em quadrado. Entretanto, em nosso caso específico, destacamos a transformação de uma figura com um par de lados paralelos em outra com dois pares de lados paralelos, como foi o caso da transformação do trapézio isósceles em losangos e quadrados. Essa abordagem menos convencional oferece uma perspectiva única sobre as transformações de um tipo de quadrilátero em outros, ampliando o entendimento dos(as) discentes sobre as relações existentes entre os diferentes tipos de quadriláteros. Isso implicava referir os paralelogramos como uma espécie

6.3 Avaliação da intervenção

A intervenção pedagógica, realizada no período de março a novembro de 2022, em uma turma de sexto ano do Ensino Fundamental, utilizou quatro instrumentos para coleta de dados. Entre os registros escritos, destacam-se o diário de campo do professor-pesquisador e a ficha de respostas dos alunos e das alunas. Além disso, foram empregados dispositivos digitais, como a câmera e a telagravação. A avaliação dessa intervenção se mostra essencial para validar a eficácia dessa metodologia na prática em sala de aula, proporcionando, também, a identificação de possíveis desafios relacionados à coleta e à análise de dados utilizados para capturar os efeitos da intervenção.

O diário de campo desempenhou um papel crucial na intervenção pedagógica, sendo utilizado pelo professor-pesquisador para registrar as principais ocorrências na interação entre os participantes, incluindo tanto a interação entre professor e discente quanto entre os próprios discentes. Esse registro era realizado semanalmente e durante os intervalos entre os encontros, garantindo uma documentação que busca dar ao pesquisador mais elementos de analise, contribuindo, assim, para esclarecer confusões, lacunas e outras observações.

Essas anotações foram categorizadas em três seções principais: (a) objetivos -

descrevendo o que estava previsto acontecer na aula e se esses objetivos foram alcançados; (b) metodologia - incluindo a organização da sala, dos aprendizes e dos materiais, além das mediações pré-definidas; e (c) registros em geral - englobando anotações sobre as orientações fornecidas a cada dupla, reflexões com a turma, observações sobre estudantes ensinando estudantes e as ideias mencionadas na roda de conversa. Quando necessário, dúvidas ou confirmações sobre as interações eram verificadas nas gravações de áudio e vídeo. Essas informações proporcionaram uma visão abrangente do desenvolvimento das aulas e das interações ocorridas ao longo do período da intervenção.

O uso da câmera com tripé foi implementado a partir do terceiro encontro da intervenção pedagógica. Nos dois primeiros encontros, a sondagem sobre quadriláteros e a ambientação do GeoGebra foram registradas por meio de áudio e fotos capturadas pelo *smartphone* do professor-pesquisador. A câmera de áudio e vídeo, posicionada de forma estratégica para capturar as movimentações e conversas dos envolvidos, foi acionada em encontros subsequentes. A disposição das duplas foi organizada para maximizar a captura de imagens, levando em consideração a única opção de alimentação elétrica disponível no ambiente.

As atividades realizadas nesta tese seguiram os princípios éticos, incluindo a autorização de consentimento assinada pelos responsáveis dos alunos e a garantia de que os dados seriam tratados como confidenciais para fins exclusivamente científicos. Durante o desenvolvimento ou a publicação desta pesquisa, os nomes serão mantidos em sigilo e não serão divulgados.

A telagravação, que consistia na captura tanto da tela do *tablet* quanto do áudio da dupla que o utilizava, foi utilizada em todos os momentos em que o dispositivo foi empregado para a resolução de tarefas sobre quadriláteros. O professor-pesquisador iniciava a gravação antes de entregar o *tablet* para a dupla e a desativava após a conclusão da atividade, mantendo controle sobre ambas as ações. Isso também abrangia o gerenciamento de situações em que a gravação de tela era desligada inesperadamente por um dos membros da dupla.

O aplicativo XRecorder, responsável pela telagravação, foi essencial para rastrear os toques na tela, realizados pelas duplas, ao longo da execução das atividades no GeoGebra. Por meio dos áudios, era possível identificar quem estava manipulando a tela, mesmo durante a mobilidade. Além disso, ele registrava todos os comentários feitos pela dupla, inclusive quem estava interagindo com ela, possibilitando a análise das ações e dos pensamentos entre os envolvidos. É importante ressaltar que, das dezenas de telagravações capturadas, apenas cinco apresentaram problemas na reprodução, não comprometendo a análise da pesquisa em relação aos indivíduos mencionados no texto.

Cada integrante da turma recebeu uma ficha com tarefas contendo espaço adequado para que expressassem suas observações, raciocínios e pensamentos geométricos à medida que realizavam as atividades. A orientação para as respostas nas fichas era que fossem pessoais, visando à produção de dados para a pesquisa, e não para determinar se estavam corretas ou incorretas, apesar de estarem trabalhando em dupla e interagindo com outros membros da classe.

Além do mais, caso uma resposta na ficha fosse considerada inadequada pelo(a) aprendiz, devido ao contínuo processo de exploração das tarefas, uma nova resposta deveria ser acrescentada sem apagar a anterior. Nesse sentido, todo registro (seja por meio de escrita ou desenho) relacionado a cada tarefa sobre quadriláteros foi considerado para análise de dados, sendo necessária a descrição de alguns conforme especificado em partes do texto.

Para análise dos dados, procedemos com o mapeamento das telagravações das duplas formadas pelos estudantes, com o objetivo de identificar o uso da malha quadriculada. Posteriormente, quantificamos o seu uso em cada dupla. Ao final, observamos que duas duplas apresentaram o mesmo quantitativo, exigindo, assim, uma escolha entre elas. Optamos pela dupla que demonstrou maior frequência nas aulas ao longo de toda implementação.

Cada instrumento proporcionou insights únicos e complementares sobre as experiências dos(as) aprendizes, permitindo uma análise mais ampla e multifacetada. No entanto, utilizamos a análise da telagravação da dupla Costa e Fernando como ponto de referência e, a partir dela, estabelecemos conexões entre o diário de campo, as gravações de áudio e vídeo, e as fichas de respostas dessa dupla, assim como daqueles que interagiram com eles. Isso resultou em uma triangulação dos dados, enriquecendo a análise na compreensão do processo de aprendizagem relacionada a quadriláteros.

A triangulação temporal, que envolveu as telagravações e as gravações de áudio e vídeo, permitiu a coleta de dados intrínsecos e extrínsecos da dupla. No caso das telagravações, observamos as manipulações nos objetos geométricos, ao mesmo tempo em que ouvimos os comentários particulares da dupla. Nas gravações de áudio e vídeo, pudemos visualizar todos os movimentos de interações, tanto entre dispositivo-sujeito quanto entre sujeito-sujeito.

Ao levar em consideração a explicação anterior sobre os instrumentos de coleta de dados e os procedimentos de análise, consideramos positiva a avaliação da intervenção pedagógica como uma pesquisa em práticas de sala de aula com o uso de fichas contendo tarefas sobre quadriláteros que fazem uso do GeoGebra em *tablets*.

No próximo tópico, apresentaremos nossas considerações finais acerca das funções dos toques e dos aspectos da aprendizagem que emergiram durante a implementação de tarefas sobre quadriláteros na ambiência ficha+GG+*tablet*+toque+escrita+fala.

Conclusões

Ao defender a tese que se sustenta em olhares, construções e toques em tela, centrados na malha quadriculada e nas medições, foi necessário delinear o conteúdo a ser abordado, as ferramentas a serem utilizadas - o GeoGebra e dispositivos móveis com tela sensível ao toque - e o nível de escolaridade no qual as tarefas seriam implementadas. A partir disso, surgiu a seguinte questão de pesquisa: "Que contribuições e limitações uma ambiência com *tablet*+GeoGebra provoca no desenvolvimento conceitual de quadriláteros nos estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública?"

Para responder a essa pergunta, formulamos dois questionamentos: (i) Que funções os toques assumem na aprendizagem de quadriláteros? e (ii) Que conceitos e propriedades sobre quadriláteros podem ser elucidados na ambiência com *tablet*+GeoGebra? Acreditamos que ao buscarmos as soluções para esses questionamentos, encontraremos a resposta para a pergunta central.

Com esse propósito, descrevemos e analisamos os signos que emergem das interações entre alunos(as)-alunos(as), alunos(as)-professor ou alunos(as)-dispositivo durante a implementação das tarefas elaboradas. Além disso, mapeamos, identificamos e classificamos as funções dos toques na tela e indicamos as potencialidades e limitações do uso do *tablet*+GeoGebra na ambiência de *tablet*+GeoGebra+quadriláteros.

Dado que este trabalho se baseia na produção e na elaboração de signos, principalmente por meio de manipulações no GG+*tablets*, torna-se essencial considerar que: (a) o corpo humano é uma extensão da mente e que a mente utiliza o corpo para perceber e interagir com o mundo ao seu redor; e (b) os toques na tela (re)produzem ou manifestam a continuidade de raciocínios em resposta a instruções.

Sobre as funções dos toques

Na implementação de tarefas, os professores e as professoras podem fazer uso de uma variedade de recursos pedagógicos, incluindo os digitais com toques na tela, como *tablet* e *smartphones*, desde que estejam integrados ao design das tarefas com o propósito de oferecer oportunidades para que os alunos explorem, experimentem e validem o objeto de estudo.

Os toques na tela, que possuem diversas funções e particularidades, são pouco explorados no contexto educacional atual do Brasil, especialmente no ambiente do GeoGebra, que possibilita aos estudantes mergulhar de forma interativa para reconstruir, observar, manipular, explorar e validar ou refutar possíveis conjecturas, principalmente no caso dos quadriláteros.

Dentre as funções dos toques na ambiência GG+*tablet*, identificamos cinco delas para a aprendizagem de quadriláteros. A primeira que destacamos são as contribuições dos toques na mediação semiótica, sejam eles simples, duplos, de arrastar ou combinados, por meio dos domínios construtivo e relacional.

Por exemplo, na construção de um quadrilátero com todos os lados iguais, considerando a construção geométrica de um par de paralelas cortadas por uma transversal e a vontade de Fernando e Costa de criar uma figura com essa característica, a dupla desempenhou um domínio construtivo ao construir, primeiramente, um paralelogramo com dois pares de lados opostos iguais, mas sem reconhecer o objetivo proposto.

Ao refazer o paralelogramo, porém com dois pares de lados opostos diferentes, a dupla suspeitou que havia concluído a construção, ao achar que todos os lados possuíam as mesmas medidas. Nesse momento, tornou-se necessário a intervenção do professor para agregar a contribuição dos toques por meio do domínio relacional. Esta situação é particularmente relevante, pois a mediação semiótica não é acionada automaticamente (Bussi e Mariotti, 2008).

Outra função do toque está diretamente associada às malhas quadriculadas do GeoGebra para a construção de quadriláteros com todos os ângulos retos, ao considerar a construção de um par de paralelas cortadas por duas transversais, sendo uma delas perpendicular. A dupla, por meio da manipulação dos vértices da figura construída, visualizou a possibilidade de transformá-la em outra com os ângulos internos iguais ao sobrepor os lados dela com os lados do quadrado da malha.

Apesar de a dupla não ter transformado o quadrilátero em retângulos não quadrados, mesmo sendo um dos critérios da tarefa, entendemos que a tentativa de transformação em quadrados pela dupla sinaliza raciocínios de congruência entre as figuras, ao considerar o contexto temporal.

A função dos toques de revelar as medidas dos lados e dos ângulos internos dos quadriláteros explorados condiciona agrupamentos e organização dessas figuras, levando à sua classificação. Isso foi observado nos casos de transformações do quadrado, do paralelogramo e do trapézio isósceles, apresentados na análise.

No quadrado, os toques estratégicos evidenciaram medidas iguais tanto nos lados quanto nos ângulos internos, todos sendo retos. Já no paralelogramo e no trapézio isósceles, os toques levaram à transformação dessas figuras em losangos não quadrados. Essa mesma estratégia poderia ser ampliada para a identificação de retângulos e losangos quadrados, no caso dos paralelogramos, e de quadrados, no caso do trapézio isósceles.

A revelação desses toques não se limita apenas às medidas e às transformações; ela impulsiona o pensamento geométrico. Por exemplo, na construção e na exploração das diagonais, um par da dupla as relacionou com os vértices da figura, enquanto o outro as relacionou, também, com os lados.

Em relação às diagonais, especificamente no trapézio isósceles, Fernando conjecturou uma figura quadrada ao unir os pontos médios das diagonais. Ao manipular esses pontos na tentativa de fazer com que a mediana de Euler tendesse a zero, os toques revelaram que os lados oblíquos da figura se tornaram paralelos. Isso possibilitou a transformação do quadrado e, consequentemente, a validação da conjectura inicial de Fernando.

Em síntese, as manifestações dos toques estratégicos ampliaram as formas de classificar essas figuras, seja considerando as características dos lados (mais comumente abordadas nos livros didáticos e na prática docente), seja considerando os ângulos internos, aspecto que até então não havia sido explorado em pesquisas que tivemos contatos.

Sobre o desenvolvimento conceitual de quadriláteros

No design de tarefas sobre quadriláteros, um dos critérios era não restringir o conceito dessas figuras a uma característica específica, mas sim proporcionar oportunidades para os(as) aprendizes compreenderem a ideia da existência de uma variedade de polígonos com quatro lados, mesmo sem abordá-los diretamente. Dessa forma, durante o diálogo com a turma, ao final do processo de construção e manipulação de quadriláteros, considerando a construção geométrica de um par de retas paralelas cortadas por uma transversal, os(as) discentes foram questionados se os quadriláteros construídos eram todos iguais e qual era o valor da soma dos ângulos internos.

As falas que se destacaram foram: "cada um tem a sua medida", "tem diferença nos lados, são iguais ou são diferentes", e "trezentos e sessenta", que são características dos quadriláteros. Essas respostas evidenciam o entendimento dos(as) estudantes sobre algumas propriedades dos quadriláteros, definidos como figuras que possuem a soma dos ângulos internos igual a trezentos e sessenta graus.

É importante ressaltar que os alunos e as alunas passaram pelo processo de conceituação dos lados e dos ângulos internos da figura antes de formular os raciocínios expressos nas respostas anteriores sobre os quadriláteros, levando em consideração a condição temporal da aprendizagem deles(as). Acreditamos que se os conceitos de quantificação e de abertura não estivessem plenamente compreendidos muito provavelmente as respostas seriam diferentes.

À medida que as tarefas avançaram, esses conceitos se tornaram mais evidentes e foi inevitável o seu compartilhamento com outros indivíduos que estavam no mesmo processo, conforme identificado na interação entre Fernando e Costa: "Sendo que A e B, e o C e D, eles têm que ser as medidas dos ângulos. Aqui são as medidas dos lados" (sinalizando com apontamentos na tela).

A ação dinâmica no dispositivo, quando eles manipularam os pontos estratégicos do paralelogramo, combinada com a mediação do professor-pesquisador, possibilitou à dupla chegar a novas conclusões em relação a essa figura. Isso inclui a percepção de que existem dois pares de lados iguais, como destacado na fala de Fernando, quando mencionou: "Esses dois lados aqui são iguais e esses aqui também". E na de Costa, quando afirmou: "É tudo a mesma coisa, cara". É importante ressaltar que tais observações não foram encontradas nas fichas desses alunos, o que não diminui o desenvolvimento conceitual sobre o tema.

Nas reflexões sobre as explorações das medidas do paralelogramo, por meio de toques, falas e escritas, presenciamos: (a) “Eu percebi que A e C são iguais e B e D também”; (b) “Estão de frente um para o outro”; (c) “Cento e oitenta” e (d) “Trezentos e sessenta”, sendo todas essas características observadas no paralelogramo, o qual poderia ser definido como figuras que apresentam ângulos opostos iguais (congruentes).

No início, os conceitos relacionados ao quadrado foram evidenciados de forma atípica nas falas dos alunos, como quando questionaram: "É um quadrado só?" (referindo-se aos ângulos internos transformados por meio das manipulações) e "Eu consegui diferente dele. O dele ficou tudo dois e o meu ficou tudo um." (referindo-se a lados com as mesmas medidas). Mais tarde, em uma tarefa que envolvia a construção de diagonais, constatamos uma formulação mais elaborada a respeito dos ângulos internos, a qual indicava que "para ser um quadrado, precisa ter os ângulos internos iguais a noventa graus". Essas duas propriedades, lados e ângulos internos iguais, definem um quadrado; no entanto, diagonais perpendiculares e congruentes também o definem.

As construções e as manipulações dos objetos geométricos pelos aprendizes, durante a implementação das tarefas, evidenciaram muitas características dos quadriláteros na tela, como, por exemplo, as do quadrado (Figura 32), que sugeriram as definições elencadas anteriormente.

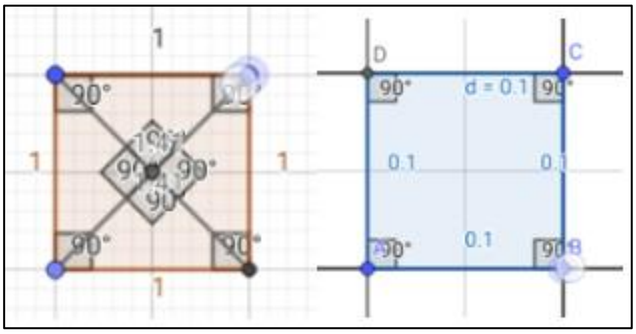
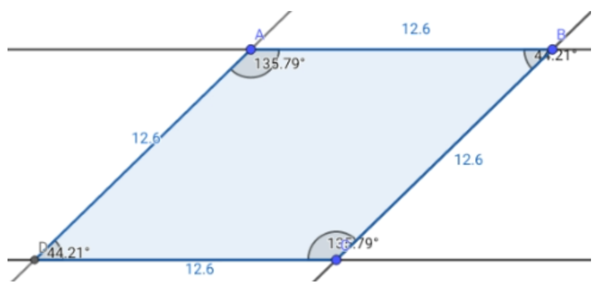
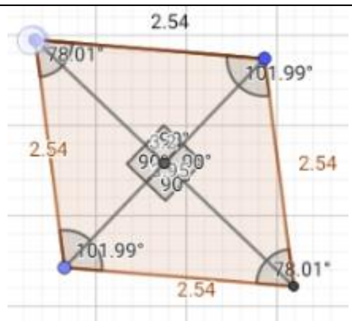
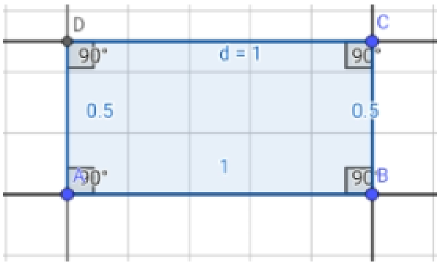
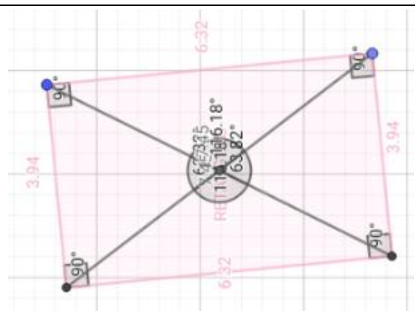


Figura 32 - Figuras quadradas com seus elementos
Fonte: Recorte da telagravação.

Essa situação não foi a única encontrada dentro do recorte analisado nesta tese; ainda temos o retângulo e o losango. Ambas as figuras apresentaram características passíveis de identificação de propriedades para conjecturar definições. No Quadro 32, expomos as imagens dessas figuras que foram visualizadas na tela do dispositivo, sem descrever seus elementos evidenciados, para que o(a) leitor(a) possa elaborar definições a partir da sua visualização.

Quadro 32 - Losangos e retângulos com seus elementos visualizados na tela

Visualização na tela	Nomenclatura
	Losango

<table>
<tr><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>
</td><td rowspan="2">Retângulo</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: Arquivo do autor.

Em resumo do que foi exposto anteriormente, percebemos que, por meio de toques, falas e escritas, houve a emergência de conceitos pertinentes aos quadriláteros com ângulos opostos congruentes, no recorte temporal da análise envolvendo a malha quadriculada do GG. Quanto às possibilidades de definir essas figuras, a partir das explorações, emergiram duas. Uma relacionada aos lados, que frequentemente é aplicada em sala de aula, e outra aos ângulos internos.

A ideia por trás dessas definições não é destacar uma sobre a outra, mas sim apresentá-las em concomitância para que os alunos e as alunas decidam qual abordagem é mais econômica para eles/elas. Esse enfoque pode incentivar os(as) aprendizes a refletirem sobre as diferentes formas de compreender e descrever as propriedades dos quadriláteros, promovendo uma compreensão mais ampla e flexível dos conceitos envolvendo essas figuras geométricas.

Sobre o uso dos signos na aprendizagem

Assim como Vygotsky, acreditamos que os signos representam uma categoria específica de símbolos que carregam consigo um significado social e culturalmente compartilhado. Esses signos adquirem sua significância por meio das interações sociais e da cultura em que estão imersos. A relação direta dos signos com a linguagem torna-os instrumentos para representar conceitos que são compartilhados por uma comunidade. Portanto, consideramos pertinente um olhar mais atento na sua produção e elaboração dentro da sala de aula em prol da aprendizagem.

No caso específico desta tese, concentramos nossa atenção na análise da malha quadriculada do GG, devido à emergência, primeiramente, da manipulação de polígonos com dois pares de lados iguais, por parte dos(as) aprendizes, e à continuidade do seu uso nas transformações de quadriláteros. Vale apontar que, nas fichas, os signos são representados pelos pictogramas; no GeoGebra, são as ferramentas disponíveis; e no *tablet*, são os toques, considerando o espaço e o tempo.

Com base em Bussi e Mariotti (2008), interpretamos que a produção e a elaboração de signos são processos mentais que podem ser contínuos ou não. Esses processos envolvem, primeiramente, a (re)criação de representações visuais ou simbólicas e, em seguida, a interpretação e a transformação dessas representações para embasar a compreensão dos conceitos geométricos envolvidos. Em outras palavras, a produção de signos diz respeito ao processo dialético de criação/seleção de elementos semióticos, como símbolos, ícones, índices, linguagem verbal e manipulação de objetos na tela ou fora dela, com o objetivo de representar conceitos geométricos de forma compreensível e comunicativa. Por outro lado, a (re)elaboração de signos refere-se ao refinamento e ao enriquecimento dos signos produzidos, através da adição de detalhes, da exploração de relações mais complexas e de ampliação de conexões entre os diferentes elementos semióticos.

Nas fichas, identificamos a produção de signos tanto nas imagens representativas das ferramentas do GG quanto nas instruções para realização das tarefas em que as ilustrações de “Mover”, “Comprimento” e “Ângulo” estavam presentes em todas as fichas analisadas. Essas imagens serviram como um manual de orientação e de identificação dos ícones disponíveis e necessários para a resolução do que era proposto, como, por exemplo, construir ou manipular objetos geométricos. O mesmo ocorria com as ferramentas "Polígono", "Paralelas", "Perpendicular", "Segmento" e "Ponto Médio" para pontuações específicas.

As representações dos quadriláteros com ângulos opostos congruentes e aqueles com dois pares de ângulos internos suplementares, acrescidas das nomenclaturas identificativas, também estão incluídas no conjunto de produção de signos. No caso das instruções contidas nas fichas, elas atravessam esse conjunto e o de elaboração de signos, as quais foram organizadas no Quadro 32 para eventuais reflexões.

Quadro 33 - Instruções que possibilitam somente a produção ou a produção e a elaboração de signos

Instruções	Produção de signos	Elaboração de signos
Determinar os ângulos internos e efetuar a soma específica entre eles.	X	
Construir quadriláteros, a partir de um par de retas paralelas cortadas por uma transversal, com: somente dois lados iguais; todos os lados diferentes; todos os lados iguais; todos os ângulos internos iguais e com pelo menos dois lados iguais; e todos os ângulos internos e lados iguais.	X	
Escreva as observações em relação aos lados e aos ângulos internos.	X	X
Abrir o GG e identificar os sete quadriláteros (nomeados) e movimentar livremente cada um deles	X	
O que observa de interessante em relação: à quantidade de lados paralelos; às medidas dos lados; às medidas dos ângulos internos.	X	X
O que te faz lembrar a palavra diagonal? Comente/escreva.	X	X
Explorar as diagonais de cada quadriláteros (nomeados) seguindo a sequência apresentada: Construa segmento(s) pertencente(s) à figura, que não sejam os seus lados; Verifique o comprimento do(s) segmento(s) construído(s); Encontre o ponto médio do(s) segmento(s) construído(s); Verifique o ângulo formado por esse(s) segmento(s).	X	
Movimente livremente a figura, observe e responda: Quantas diagonais são possíveis construir? E o que podemos afirmar em relação a essas medidas? Na diagonal, o que podemos afirmar em relação à distância entre o ponto médio e o vértice? Quantos ângulos são formados pelas diagonais? E o que podemos afirmar em relação a essas medidas? Tem alguma observação que queira acrescentar em relação à(s) diagonal(is) construída(s)?	X	X

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nas instruções das fichas, observamos, pelo quadro anterior, que há uma complementação entre a produção e a elaboração de signos. Isso significa que ambas devem estar presentes no design de tarefas para que os significados se convertam em aprendizagem.

Por exemplo, após construir a figura e movimentá-la livremente, os alunos e as alunas podem visualizar e responder (ou fazer anotações) sobre o objeto de estudo, como as medidas dos ângulos, lados e diagonais.

As representações visuais e as instruções escritas nas fichas devem fornecer informações essenciais para os(as) estudantes, permitindo-lhes compreender e executar as tarefas propostas de maneira autônoma e, se possível, empregando algum artefato matemático para minimizar eventuais dispersões.

Os signos produzidos pelo GG+*tablet* em tarefas sobre quadriláteros envolvem a interface entre o aplicativo (ferramentas, área de construção, configurações e opções) e os toques diretos na tela. Além disso, incluem os movimentos de rotação, translação e mobilidade do dispositivo. Por exemplo: (a) As construções e manipulações com o uso das ferramentas específicas para construções de quadriláteros na área do GG representam a interface; (b) A iniciativa de Estevão de girar o dispositivo e habilitar a malha quadriculada no dispositivo da dupla Costa e Fernando, para depois manipular a figura construída até transformá-la em outra com ângulos internos e lados iguais, exemplifica a rotação; (c) A ida de Bruna à carteira de Fernando para mostrar sua construção e perguntar: "O que eu observo para escrever?", ilustra a mobilidade.

Quando um objetivo proposto na tarefa é alcançado, por meio do processo de construção e manipulação, e o(a) aprendiz registra todas as estratégias tomadas e utilizadas, podemos destacar que houve a elaboração de signos. Um exemplo disso é quando Fernando manipulou a figura quadrada com 100cm de lado, desafiado por Costa, ou quando o paralelogramo manipulado por Fernando se transformou em um losango não quadrado. Esses exemplos evidenciam a elaboração de signos oriundos desses artefatos. Essas situações demonstram produções e elaborações de signos de forma contínua, favorecidas pela interação aluno-aluno e aluno-dispositivo.

Outro fato interessante foi a transformação do trapézio isósceles, por Costa, em um losango e as construções das diagonais no retângulo, por Fernando, acompanhadas da fala "Não! Essas e essas são as mesmas", ao considerar os quatro segmentos das diagonais cujas extremidades são os pontos médios e os vértices, explicando tanto a quantidade como as posições das diagonais de uma figura retangular. Essas evidências destacam a importância dos sinais visuais e verbais na comunicação dos conceitos geométricos durante o processo de aprendizagem, evidenciando possibilidades de elaboração de signos na construção do conhecimento matemático.

Com a utilização do GG+*tablet*, a malha quadriculada assumiu um papel de destaque como signo pivô no estudo dos quadriláteros. Por meio desse signo, foi possível construir figuras com todos os ângulos internos retos, tanto aquelas com dois pares de lados diferentes quanto as com dois pares iguais. Um exemplo notável é o quadrado com os lados próximos de zero, em que, devido ao arredondamento do aplicativo, a dupla acabou visualizando a medida do lado igual a zero, o que é impossível em medidas de comprimento de polígonos.

Outro destaque na utilização do signo pivô foi a validação da conjectura de Fernando em transformar o trapézio isósceles em um quadrado. A malha quadriculada possibilitou a reconfiguração de dois pares de ângulos opostos distintos em um quadrado. Esse exemplo ilustra a potência do signo pivô na manipulação, na exploração e na validação de possíveis hipóteses.

Essa variedade de signos produzidos e elaborados a partir da conjuntura ficha-GG+*tablet* reflete na complexidade da interação entre os(as) estudantes, o ambiente de aprendizagem e as ferramentas digitais, ressaltando a importância de uma análise integrada para compreender o processo de aprendizagem dos quadriláteros nesse contexto específico.

Sobre potencialidades e limitações do GG+*tablet*: perspectiva para futuros estudos

Com relação à utilização do GG+*tablet*, em situações de ensino e aprendizagem, é fundamental identificar tanto as potencialidades quanto as limitações dos recursos disponíveis. Isso garante que o seu uso seja direcionado de maneira adequada, com o objetivo de promover a construção e o desenvolvimento conceitual do tema proposto.

Na implementação de tarefas sobre o estudo de quadriláteros, utilizando o GeoGebra em *tablets*, identificamos algumas limitações relacionadas à conectividade e ao armazenamento de dados. A dependência da conexão com a internet para salvar e alocar construções foi um dos obstáculos encontrados, especialmente em ambientes escolares onde a disponibilidade de rede é instável ou limitada. Além disso, a necessidade de cadastro de usuário e o acesso ao perfil com login e senha no aplicativo podem representar uma barreira para alguns estudantes.

Para contornar essas limitações em *tablet* ou *smartphones*, sugerimos que os envolvidos (discentes e/ou docentes) façam alocações de construções diretamente no dispositivo, em pastas locais, e salvem as construções através de capturas de tela (*prints*). Outra alternativa seria utilizar aplicativos que gravam a tela do dispositivo, permitindo a captura de todas as interações e manipulações realizadas no GeoGebra durante a atividade.

As potencialidades do uso do GG+*tablet* vão além da interatividade e da visualização dinâmica de conceitos geométricos, já evidenciadas em pesquisas anteriores. A capacidade de manipular na tela, individualmente ou em colaboração, e de explorar diferentes configurações do Ambiente GeoGebra Dinâmico também promove a experimentação ativa e a descoberta de possíveis signos, contribuindo para uma compreensão mais ampla dos conceitos matemáticos.

Ao considerar as interações sujeito-sujeito e sujeito-dispositivo, principalmente no contexto da aprendizagem de quadriláteros, identificamos uma gama de atividades, como exploração, construção, visualização, validação e compartilhamento com os outros. Além disso, os movimentos na tela, como rotação, translação e deslocamento do dispositivo, também desempenham um papel significativo.

Esses dois elementos - interações e movimentos - são fundamentais para a produção e a elaboração de signos, tornando o GG+*tablet* um artefato com um potencial semiótico considerável a ser explorado em práticas pedagógicas relacionadas à temática de quadriláteros.

Diante do exposto, sugerimos a continuidade de pesquisas que explorem o uso de AGD em DMcTT na produção e na elaboração de signos, não só na geometria plana, mas também na trigonometria, geometria analítica e geometria espacial.

Embora o uso das duas malhas do GeoGebra, principal e principal e secundária, tenha sido abordado nesta tese e se mostrado como um signo pivô no desenvolvimento de conceitos sobre quadriláteros, ainda há outros tipos de malhas que merecem ser estudadas, como a trigonométrica, a isométrica e a polar.

Finalmente, o trabalho realizado, até o momento, foi concebido com foco nos(as) docentes que atuam principalmente no cotidiano da escola pública, visando desdobramentos e contribuições em prol de práticas educativas que promovam a aprendizagem.

Esperamos que os professores e as professoras da educação básica, que lecionam nas salas de aula da rede pública do Brasil e que estão comprometidos com uma educação de qualidade, tenham conhecimento, autonomia e o direito de estabelecer "pontes" entre os conhecimentos dos artefatos tecnológicos e os conhecimentos matemáticos.

REFERÊNCIAS

ASSIS, A. R. **Alunos do ensino médio realizando toques em telas e aplicando isometrias com GeoGebra**. 186f. Tese (Doutorado em Educação) – Instituto de Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica/Nova Iguaçu, 2020.

ASSIS, A. R. d., & BAIRRAL, M. A. (2022). Touches on Screen as New Signs in Blended Ways to Think Mathematically. Journal of Educational Research in Mathematics, 32(4), 423-441. doi:10.29275/jerm.2022.32.4.423

BAIRRAL, M. Tecnologias móveis, neurocognição e aprendizagem matemática. 1. ed. Campinas, SP: Mercado das letras. 2021. (série educação matemática; 16).

BAIRRAL, M. A. As manipulações em tela compondo a dimensão corporificada da cognição matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática** (**JIEEM**), v. 10, n. 2, p. 104 - 111, Londrina, PR, 2017.

BAIRRAL, M; SILVA, E. R. C. Trabalhando quadriláteros em *smartphones*: alunos de uma escola pública descobrindo e produzindo propriedades. **Debates em Educação**, v. 10, p. 164-190, 2018.

BRITO, C. S. **Licenciandos e professores de matemática interagindo no VMTcG em atividades de semelhança de triângulos**. 2022. 153 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2022.

BUSSI, M.G., & MARIOTTI, M.A. (2008). Semiotic Mediation in the Mathematics Classroom: Artefacts and Signs after a Vygotskian Perspective.

COSTA, A. P. d. (2016). A construção do conceito de quadriláteros notáveis no 6º ano do ensino fundamental: Um estudo sob a luz da teoria vanhieliana.

CYRINO, M. C. T; JESUS, C. C. Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática. **Ciência & Educação**, v. 20, p. 751-764, 2014.

DALCÍN, M.; MOLFINO, V. Clasificación particional de cuadriláteros como fuente de demostraciones y construcciones en la formación inicial de profesores. **Instituto GeoGebra São Paulo**, São Paulo, v. 1, n. 1, p.81-97, 2012.

DAMÁSIO, A. R. **O erro de Descartes**: emoção, razão e o cérebro humano. Trad. portuguesa Dora Vicente e Georgina Segurado. São Paulo: Companhia das Letras, 2014.

DAMIANI, M. F., & al., e. (2013). Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. Cadernos de Educação(45), 57-67. Retrieved from https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/caduc/article/view/3822/3074.

DUARTE, R. C. B. C.. **Utilização do GeoGebra, de *smartphone* e de reflexões escritas na construção de conceitos relacionados a retas paralelas cortadas por uma transversal.**

2018. 123 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica. 2018.

FILHO, A. F. S. **Desenvolvimento de uma sequência didática sobre quadriláteros e suas propriedades: construções de um grupo colaborativo**. 165f. Dissertação (Mestre em Ensino de Matemática) – Pontífica Universidade de São Paulo, 2007.

GOLDIN-MEADOW, S. Talking and Thinking With Our Hands. Current Directions in Psychological Science, 15(1), 34-39. 2006. https://doi.org/10.1111/j.0963-7214.2006.00402.x.

GOVENDER, Rajendran & VILLIERS, Michael. (2004). A dynamic approach to quadrilateral definitions. Pythagoras. 10.4102/pythagoras. v0i59. 130.
DOI: https://doi.org/10.4102/pythagoras.v0i59.130.

GUIMARÃES, R. C.C; VIEIRA, W; IMAFUKU, R. S; PEREIRA, E. F.M. Uso do smartphone na investigação sobre propriedades de quadriláteros notáveis. **Revista Iberoamericana de Educação Matemática**, n. 61, p. 1-20, 2021.

GUSMÃO, T. C. R. S. Do desenho à gestão de tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. 2019. In: **Anais do XVIII Encontro Baiano de Educação Matemática**. Ilhéus, Bahia. XVIII EBEM.

GUSMÃO, T. C. R. S; FONT, V**.** Ciclo de estudo e desenho de tarefas - Study and Task Design Cycle. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, [S.L.], v. 22, n. 3, p. 666-697, 9 jan. 2020.

HENRIQUE, M. P. **GeoGebra no clique e na palma das mãos: contribuição de uma dinâmica de conceitos geométricos com alunos do Ensino Fundamental**. 2017. 123 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica. 2017.

HENRRIQUE, M. P. **Metáforas e toques em tela potencializando aprendizagens discentes no estudo de retas paralelas e transversais**. 194f. Tese (Doutorado em Educação) – Instituto de Educação/Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica/Nova Iguaçu, 2021.

MADUREIRA, B. M. C. **Discentes do Ensino Fundamental interagindo e aprendendo sobre quadriláteros em atividades com smartphones**. 2023. 110 f. Dissertação. (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) –Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2023.

MARQUES, F. J. R. **Arquitetando com alunos do ensino médio argumentos sobre quadriláteros em um ambiente virtual com GeoGebra**. 2019. 106f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica. 2019.

McNEILL, D. **Hand and mind: what gestures reveal about thought**. Chicago/London: University of Chicago Press, 1992.

McNEILL, D. **Gesture and thought**. Chicago/London: University of Chicago Press, 2005.

MCNEILL, D. **Gestures of power and the power of gestures**. Urbana and Chicago: University of Illinois Press, 2008.

MOLON, J; SIQUEIRA, C. F. R; BASSO, M. V. A; FRANCO, S. R. K. Matemática Dinâmica e Raciocínio Hipotético-Dedutivo: estudo envolvendo quadriláteros com o GeoGebra. **Educação Matemática em revista**, Brasília, v. 27, p. 114-131, 2021.

SILVA, B. C. C. **Justificativa e argumentações na aprendizagem de quadriláteros: uma intervenção com papel, lápis e dispositivos móveis**. 2017. 91f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica. 2017.

_____. **Componente Curricular de Matemática** – 6° ano do ensino fundamental: Referencial Curricular / Secretaria Municipal de Educação, Esporte e Cultura. Seropédica: SMECE, 2022. p.150-154

SOBRE A BDTD. Biblioteca digital de teses e dissertações, 2023. Disponível em: <https://bdtd.ibict.br/vufind/>. Acesso em: 17 jan. 2023.

VILLIERS, Michael. The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. **FLM Publishing Association**, Vancouver, v. 14, p. 11-18, 1994.

FONTES CONSULTADAS

PANOSSIAN, M. L., & GALVÃO, M. E. E. L. (Eds.). Recursos didáticos em aulas de matemática: o proposto pelas pesquisas e o praticado (Vol. 26). Brasília, DF: SBEM-DNE (2022)

RANDOLPH, J. J. A guide to writing the dissertation literature review. **Practical Assessment, Research & Evaluation**, v. 14, n. 13, p. 2, 2009.

RICHT, A.; BENITES, V. C.; ESCHER, M. A.; MISKULIN, R. G. S. Contribuições do software GeoGebra no estudo de cálculo diferencial e integral: uma experiência com alunos do curso de geologia. **In: Anais1ª. Conferência Latino Americana de GeoGebra**, , 2012, p. 90-99.

ROCHA, V. K; OLIVEIRA; et al. Gerações e estilo de aprendizagem: Um estudo com alunos de uma universidade pública em Alagoas. **Revista Economia & Gestão**, v. 18, n. 50, p. 80-96, 2018.

TEIXEIRA, A.; RIBEIRO, Bruno. Geração Z: problemáticas do uso da internet na educação escolar. **Ciclo Revista**, v. 3, n. 1, 2018.

MANSUR, Daniel Redinz; ALTOÉ, Renan Oliveira**. Ferramenta Tecnológica para Realização de Revisão de Literatura em Pesquisas Científicas**. Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco, v.10, n. 1, p. 8-28, 2021.

DECANATO DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO. SEROPÉDICA. Manual de instruções para organização e Apresentação de dissertações e teses na UFRRJ 2006. 3° Edição. p.4-24. UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO. Disponível em: https://institucional.ufrrj.br/portalcpda/files/2011/07/manual_teses_ufrrj.pdf

MANSUR, D. R.; ALTOÉ, R. O. **BUSCad: uma ferramenta tecnológica de importação e tratamento de dados em revisão de literatura de pesquisas em educação matemática**. In: BAIRRAL, M. A.; MENEZES, R. O. Elaboração e mapeamento de pesquisas com tecnologias: olhares e possibilidades. Porto Alegre: Fi, 2023, p. 260-292.

APÊNDICE 1 – TAREFA INTRODUTÓRIA

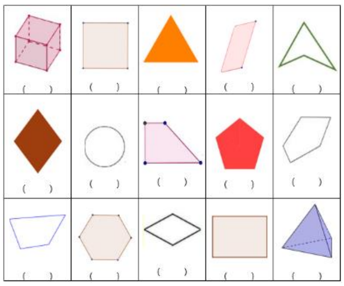
- ✓ Escreva o que você entende por quadrilátero. Dê um exemplo com desenho.

- ✓ Explore a área interna da escola e fotografe um objeto, que, na sua opinião, é possível identificar a imagem de um ou mais quadriláteros.

(a) Faça observações a respeito da fotografia do objeto escolhido.

(b) Ao comparar o desenho que você fez na atividade 1 e com a imagem da atividade 2, você consegue visualizar elementos em comum? Comente sobre isso.

- ✓ Assinale os desenhos que você considera ser um quadrilátero.



(a) Por que você marcou essas?

(b) Qual (quais) desse(s) desenhos te despertou curiosidade(s)? Por quê?

- ✓ Qual atividade de hoje você mais gostou? Por quê?

APÊNDICE 2 – TAREFA DE AMBIENTAÇÃO NO GEOGEBRA

- ✓ Conhecendo algumas ferramentas do GeoGebra Geometria

(a) Ferramentas básicas - Escreva o que você observou em cada uma das ferramentas sinalizadas.

(b) Editar - Escreva o que você observou em cada uma das ferramentas sinalizadas.

(c) Construções - Escreva o que você observou em cada uma das ferramentas sinalizadas.

(d) Medições - Escreva o que você observou em cada uma das ferramentas sinalizadas.

(e) Retas - Escreva o que você observou em cada uma das ferramentas sinalizadas.

(f) Círculos - Escreva o que você observou em cada uma das ferramentas sinalizadas.

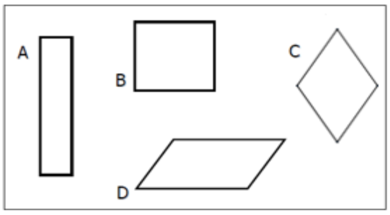
(g) Polígonos - Escreva o que você observou em cada uma das ferramentas sinalizadas.

(h) Transformar - Escreva o que você observou em cada uma das ferramentas sinalizadas.

- ✓ Caso tenha alguma ferramenta do GeoGebra que não foi mencionada, anteriormente, faça o desenho e escreva o que você observou dela.

APÊNDICE 3 – TAREFAS SOBRE QUADRILÁTEROS[38]

✓ Utilizando régua e transferidor, observe e meça os lados e os ângulos dos desenhos abaixo:



Algum(ns) desse(s) desenho(s) não é(são) quadrilátero(s)? Por quê?

(a) Agora preencha a medida dos lados de cada um deles. Escreva o que você observa em relação às medidas dos lados encontradas no quadro acima.

(b) Agora escreva a medida dos ângulos internos de cada um deles. Escreva o que você observa em relação às medidas dos ângulos encontradas no quadro acima.

(c) Você identifica alguma relação (algo em comum) entre os desenhos A, B, C e D? Comente sobre isso.

(d) Você identificou algo a mais em relação aos lados dos desenhos A, B, C e D? Comente sobre isso.

✓ Abra o arquivo do GeoGebra. Nele você encontrará a figura que parece com o desenho D. Utilizando somente as ferramentas (ícones) abaixo faça o que se pede:

(a) Usando só 

essas ferramentas será que é possível transformá-la no desenho A? Explique, comente o que você fez.

(b) Retorne a figura inicial e verifique se é possível transformá-la no desenho B? Explique, comente o que você fez.

(c) Retorne a figura inicial. Será que é possível transformá-la no desenho C? Explique, comente o que você fez.

✓ A partir do desenho D, transforme-o em um de sua preferência (dentre os desenhos A, B e C) e depois transforme-o em outro diferente do desenho D. Comente o que você fez.

✓ Baseando-se nas manipulações realizadas com as figuras no GeoGebra, você identifica alguma relação entre os desenhos A, B, C e D? Comente sobre isso, sobre alguma dúvida ou curiosidade.

✓ Escreva agora o que você achou dessa aula e o que você considera que aprendeu ou que

---

38 Tarefas elaboradas no modelo da classificação (ou hierarquização) detalhado nas páginas 95,111,119,124 e 127.

ainda tem dúvida.

✓ Você deverá construir um quadrilátero, tomando como base um par de retas paralelas cortadas por uma reta transversal. Para isso, abra o aplicativo GeoGebra onde você encontrará essa construção.

Utilizando somente as ferramentas abaixo, faça o que se pede.

(a) Construa um quadrilátero com somente dois lados iguais. Depois, escreva o que você fez e anote, no quadro abaixo, o que observou em relação aos ângulos internos.

Ângulo	Valor do ângulo
A	
B	
C	
D	

- Com base no quadro acima, calcule a soma dos ângulos internos do quadrilátero especificado abaixo. Em seguida, escreva o que você observou.

Soma	Resultado
A+D	
A+B	
B+C	
C+D	
A+B+C+D	

(b) Construa um quadrilátero com todos os lados diferentes. Escreva o que você fez e, preenchendo o quadro abaixo, anote o que observou em relação aos ângulos internos.

Ângulo	Valor do ângulo
A	
B	
C	
D	

- Observando o quadro anterior, calcule a soma desses ângulos especificados no quadro abaixo e registre. Em seguida, escreva o que você observou.

Soma	Resultado
A+D	
A+B	
B+C	
C+D	
A+B+C+D	

(c) (Desafio) Construa um quadrilátero com todos os lados com as medidas iguais. Em seguida, sem fazer a conta, responda:

- Qual o valor da soma dos ângulos internos A+D? E da soma B+C?

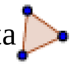
- Qual a soma dos ângulos internos desse quadrilátero?

✓ Em relação ao item (c), verifique se algum colega da turma achou valores diferentes que os seus. Faça anotações destes valores encontrados.

✓ Agora, você tentará construir quadriláteros com dois pares de retas paralelas, ainda tomando como base um par de retas paralelas cortadas por uma transversal. Para isso, você deverá seguir as seguintes etapas:

I- Selecionar a ferramenta  .

II- Tocar na reta BC e depois no ponto A.

III- Selecionar a ferramenta  , em seguida tocar nos pontos onde essas retas se interceptam (cruzam).

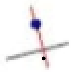
IV- Selecionar as ferramentas dos lados e dos ângulos.

V- Manipule livremente a figura.

(a) Escreva as suas observações em relação aos lados.

(b) Escreva as suas observações em relação aos ângulos internos.

✓ Ainda tomando como base um par de retas paralelas cortadas por uma transversal, você continuará a construir quadriláteros, mas terá que seguir as etapas:

I- Selecionar a ferramenta 

II- Tocar no ponto A, duas vezes consecutivas.

III- Selecionar a ferramenta  , em seguida tocar nos pontos onde essas retas se interceptam (cruzam).

IV- Selecionar as ferramentas dos lados e dos ângulos.

(a) Construa um quadrilátero com todos ângulos internos iguais e com pelo menos dois lados iguais. Escreva as medidas destes ângulos e destes lados. O que você conclui em relação a essas medidas?

(b) (Desafio) Construa um quadrilátero com todos ângulos internos iguais e com todos os lados iguais. Escreva as medidas desses ângulos e destes lados. O que você conclui em relação a essas medidas?

✓ Tomando como base a tarefa de hoje, bem como as anteriores, escreva o que você tem aprendido sobre os lados e os ângulos internos de um quadrilátero.

✓ Antes de fazer esta tarefa, você terá que abrir o GeoGebra. Nele encontrará uma família de quadriláteros.

Usando somente os ícones ao lado, identifique os seguintes quadriláteros:

(A) Quadrado 

Movimente livremente a figura. O que você observa de interessante:

- em relação à quantidade de pares de lados paralelos?
- em relação às medidas dos lados?
- em relação às medidas dos ângulos internos?

(B) Retângulo

Movimente livremente a figura. O que você observa de interessante:

- em relação à quantidade de pares lados paralelos?
- em relação às medidas dos lados?
- em relação às medidas dos ângulos internos?

(C) Losango

Movimente livremente a figura. O que você observa de interessante:

- em relação à quantidade de pares lados paralelos?
- em relação às medidas dos lados?
- em relação às medidas dos ângulos internos?

(D) Paralelogramo

Movimente livremente a figura. O que você observa de interessante:

- em relação à quantidade de pares de lados paralelos?
- em relação às medidas dos lados?
- em relação às medidas dos ângulos internos?

(E) Trapézio isósceles

Movimente livremente a figura. O que você observa de interessante:

- em relação à quantidade de pares de lados paralelos?
- em relação às medidas dos lados?
- em relação às medidas dos ângulos internos?

(F) Trapézio retângulo

Movimente livremente a figura. O que você observa de interessante:

- em relação à quantidade de pares de lados paralelos?
- em relação às medidas dos lados?
- em relação às medidas dos ângulos internos?

(G) Trapézio escaleno

Movimente livremente a figura. O que você observa de interessante:

- em relação à quantidade de pares lados paralelos?
- em relação às medidas dos lados?
- em relação às medidas dos ângulos internos?

✓ Tomando como base a atividade anterior, marque um **X** em cada quadrilátero que apresenta as seguintes características.

CARACTERÍSTICAS	QUADRILÁTEROS						
	A	B	C	D	E	F	G
Com pelo menos um par de lados paralelos							
Com dois pares de lados paralelos							
Com pelo menos dois lados iguais							
Com todos os lados iguais							
Com somente dois ângulos iguais							
Com todos os ângulos iguais							

✓ Tomando como base o quadro acima e as movimentações das figuras no GeoGebra, responda:

(a) Um paralelogramo pode ser considerado um trapézio? Justifique/explique/comente a sua resposta.

(b) E no caso do paralelogramo, ele pode ser considerado um retângulo? Ou um quadrado? ou um losango? Justifique/explique/comente a sua resposta.

(c) Já o quadrado, será que ele pode ser considerado um retângulo? ou um losango? Justifique/explique/comente a sua resposta.

(d) Dentre os quadriláteros mencionados, existe algum outro que possui as mesmas características? Justifique/explique/comente a sua resposta.

✓ Com a realização das atividades anteriores, escreva algo que você considera que aprendeu (ou ainda está em dúvida) sobre:

(a) quadrado.

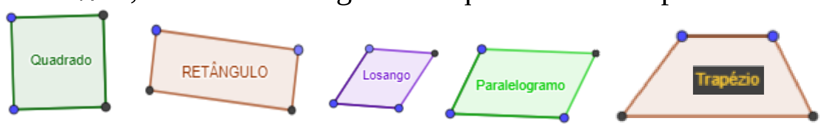
(b) retângulo.

(c) losango.

(d) paralelogramo.

(e) trapézio.

✓ A seguir, observe as imagens dos quadriláteros explorados no GeoGebra.



(Q) (R) (L) (P) (T)

Agora você tentará descobrir de qual ou quais quadrilátero(s) cada afirmativa se refere:

(a) Quadrilátero(s) com dois pares de lados paralelos, mas sem as medidas dos lados ou dos ângulos internos todos iguais.

(b) Quadrilátero(s) com dois pares de lados paralelos, mas sem as medidas de todos os lados iguais e com todos os ângulos internos iguais.

(c) Quadrilátero(s) com dois pares de lados paralelos, com todas as medidas dos lados e dos ângulos internos iguais.

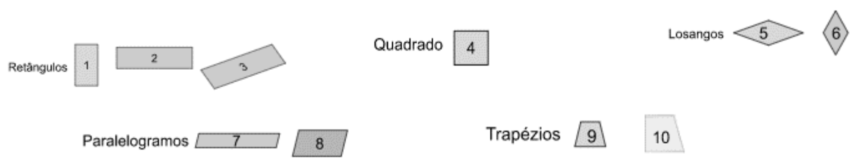
(d) Quadrilátero(s) com dois pares de lados paralelos, com todas as medidas dos lados iguais e com ângulos internos opostos iguais.

(e) Quadrilátero(s) com dois pares de lados paralelos, com pelo menos duas medidas de lados iguais e com ângulos internos opostos iguais.

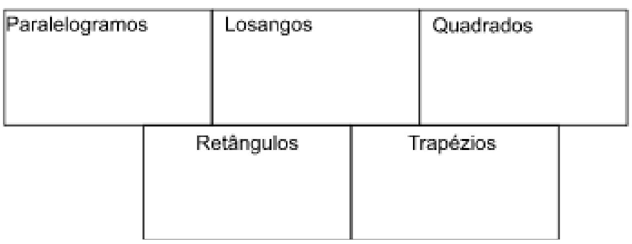
(f) Quadrilátero(s) com pelo menos um par de lados opostos paralelos.

- Verifique se um/uma colega colocou o(s) mesmo(s) quadrilátero(s). Depois, escreva aquele que está diferente do seu e comente (...)

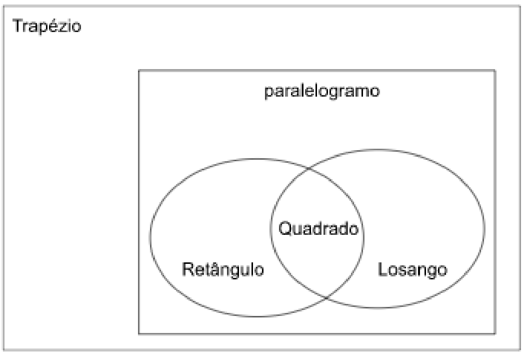
✓ Considerando a ideia dos quadriláteros que apresentam pelo menos um par de lados paralelos, você deverá escolher, entre as duas formas sugeridas, aquela que melhor se encaixa na visualização da família dos quadriláteros notáveis abaixo.



- FORMA 1



- FORMA 2



- Justifique, explique, comente a forma escolhida acima.

✓ A palavra diagonal lembra? Comente/desenhe.

✓ Agora, usando somente os ícones abaixo explore a(s) diagonal(is) das seguintes figuras, seguindo a sequência apresentada em cada quadrilátero.

(A) Quadrado

- Construa segmento(s) pertencente(s) a figura, que não sejam os seus lados.
- Verifique o comprimento do(s) segmento(s) construído(s).
- Encontre o ponto médio do(s) segmento(s) construído(s).
- Verifique o ângulo formado por esse(s) segmento(s).
- Movimente livremente a figura, observe e responda:

(a) Quantas diagonais são possíveis construir? E o que podemos afirmar em relação a essas medidas?

(b) Na diagonal, o que podemos afirmar em relação à distância entre o ponto médio e o vértice?

(c) Quantos ângulos são formados pelas diagonais? E o que podemos afirmar em relação a essas medidas?

(d) Tem alguma observação que queira acrescentar em relação à(s) diagonal(is) construída(s)?

(B) Retângulo

- Construa segmento(s) pertencente(s) à figura, que não sejam os seus lados.

- Verifique o comprimento do(s) segmento(s) construído(s).
- Encontre o ponto médio do(s) segmento(s) construído(s).
- Verifique o ângulo formado pelas diagonais.
- Movimente livremente a figura, observe e responda:

(a) Quantas diagonais são possíveis construir? E o que podemos afirmar em relação a essas medidas?

(b) Na diagonal, o que podemos afirmar em relação à distância entre o ponto médio e o vértice?

(c) Quantos ângulos são formados pelas diagonais? E o que podemos afirmar em relação a essas medidas?

(d) Tem alguma observação que queira acrescentar em relação à(s) diagonal(is) construída(s)?

(C) Losango

- Construa segmento(s) pertencente(s) à figura, que não sejam os seus lados.
- Verifique o comprimento do(s) segmento(s) construído(s).
- Encontre o ponto médio do(s) segmento(s) construído(s).
- Verifique o ângulo formado pelas diagonais.
- Movimente livremente a figura, observe e responda:

(a) Quantas diagonais são possíveis construir? E o que podemos afirmar em relação a essas medidas?

(b) Na diagonal, o que podemos afirmar em relação à distância entre o ponto médio e o vértice?

(c) Quantos ângulos são formados pelas diagonais? E o que podemos afirmar em relação a essas medidas?

(d) Tem alguma observação que queira acrescentar em relação à(s) diagonal(is) construída(s)?

(D) Paralelogramo (genérico)

- Construa segmento(s) pertencente(s) à figura, que não sejam os seus lados.
- Verifique o comprimento do(s) segmento(s) construído(s).
- Encontre o ponto médio do(s) segmento(s) construído(s).
- Verifique o ângulo formado pelas diagonais.
- Movimente livremente a figura, observe e responda:

(a) Quantas diagonais são possíveis construir? E o que podemos afirmar em relação a essas medidas?

(b) Na diagonal, o que podemos afirmar em relação à distância entre o ponto médio e o vértice?

(c) Quantos ângulos são formados pelas diagonais? E o que podemos afirmar em relação a essas medidas?

(d) Tem alguma observação que queira acrescentar em relação à(s) diagonal(is) construída(s)?

(E) Trapézio isósceles

- Construa segmento(s) pertencente(s) à figura, que não sejam os seus lados.
- Verifique o comprimento do(s) segmento(s) construído(s).
- Encontre o ponto médio do(s) segmento(s) construído(s).
- Verifique o ângulo formado pelas diagonais.
- Movimente livremente a figura, observe e responda:

(a) Quantas diagonais são possíveis construir? E o que podemos afirmar em relação a essas medidas?

(b) Quantos ângulos são formados pelas diagonais? E o que podemos afirmar em relação a essas medidas?

(c) Tem alguma observação que queira acrescentar em relação à(s) diagonal(is) construída(s)?

(d) As mesmas conclusões feitas no trapézio isósceles também servem para o trapézio escaleno? E para o trapézio retângulo? Explique/comente/desenhe.

APÊNDICE 4 – AUTORIZAÇÃO DA UNIDADE ESCOLAR

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE TEORIA E PLANEJAMENTO DE ENSINO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, CONTEXTOS CONTEMPORÂNEOS E DEMANDAS POPULARES

TERMO DE CONSENTIMENTO PARA REALIZAÇÃO DA PESQUISA

Ilma. Sra. Diretora da E. M. Manoel de Araújo Dantas

Eu, Alexander Pires da Silva, doutorando do Curso de Pós-Graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares (PPGEduc) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), e integrante do Grupo de Estudos e Pesquisas das Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática (GEPETICEM), participo projeto de pesquisa "**Construindo e analisando práticas educativas em educação matemática com dispositivos *touchscreen***", sob a coordenação do Prof. Dr. Marcelo A. Bairral.

A pesquisa tem como objetivo principal implementar tarefas utilizando *tablets* ou *smartphones*. Um dos principais benefícios da pesquisa será melhorar o aprendizado matemático de discentes e inovar nas aulas de matemática com o uso de dispositivos *touchscreen*. Os dados serão coletados mediante: questionários, auto-avaliação, filmagem em áudio e vídeo, portfolios eletrônicos, e respostas para atividades propostas. O período de coleta de dados será de **05/04/2022 a 11/06/2022** na Escola Municipal Manoel de Araújo Dantas.

Diante do exposto, solicito autorização para realizar implementações e pesquisa envolvendo discentes do sexto ano do Ensino Fundamental.

Contatos para obter maiores informações sobre a pesquisa:

- Pesquisador responsável (Orientador): Marcelo Almeida Bairral (mbairral@ufrrj.br)
  Telefone: (21) 26821841
- Professor-Pesquisador: Alexander Pires da Silva (alexander.matematica@gmail.com)
  Telefone: (21) 991156644
- Comitê de Ética da UFRRJ: (21) 2681-4707; 26821220

Seropédica, 29 de março de 2022.

Alexander Pires da Silva Matr.11686

Alessandra de Macedo Corrêa Matr.14745

Alessandra de Macedo Corrê
Diretora Geral
Matricula 14745

APÊNDICE 5 – TERMO DE CONSENTIMENTO PARA PARTICIPAR EM PESQUISA

DADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE TEORIA E PLANEJAMENTO DE ENSINO
(A DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, CONTEXTOS CONTEMPORÂNEOS E DEMANDAS POPULARES

TERMO DE CONSENTIMENTO PARA PARTICIPAR EM PESQUISA

Sr. Professor,

Eu, [redacted], abaixo assinado, autorizo o(a) menor [redacted] participar do projeto de pesquisa **Construindo e analisando práticas educativas em educação matemática com dispositivos *touchscreen*** bem como a vinculação de suas imagens, falas, respostas a atividades, apresentação de slides, encontros científicos, canais de televisão e outros meios de comunicação, caso necessário, com uso exclusivamente educacional.

A pesquisa tem como objetivo principal implementar tarefas utilizando dispositivos móveis (*tablets* ou *smartphones*). Um dos principais benefícios da pesquisa será melhorar o aprendizado matemático de discentes e inovar nas aulas de matemática com o uso de dispositivos.

Os dados serão coletados mediante: questionários, auto-avaliação, filmagem em áudio e vídeo, portfolios eletrônicos, e respostas para atividades propostas. O período de coleta de dados será de **05/04/2022** a **11/06/2022** na Escola Municipal Manoel de Araújo Dantas.

Tenha ciência de que todas as fontes serão mantidas em sigilo e não serão divulgados nomes em nenhuma circunstância durante o desenvolvimento ou publicação da pesquisa. A qualquer tempo, poderá retirar esse consentimento, sem qualquer prejuízo pessoal ou institucional e isso não acarretará custos, bem como não haverá compensação financeira pela participação.

Contatos para obter maiores informações sobre a pesquisa:

- Pesquisador responsável (Orientador): Marcelo Almeida Bairral (mbairral@ufrrj.br)
  Telefone: (21) 26821841
- Professor-Pesquisador: Alexander Pires da Silva (alexander.matematica@gmail.com)
  Telefone: (21) 991156644
- Comitê de Ética da UFRRJ: (21) 2681-4707; 26821220

Declaro que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) pelo pesquisador sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da mesma. Foi-me garantido que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade.

Nome completo do responsável: [redacted]
Telefone: [redacted]

Assinatura: [redacted] Data: 05/04/2022.

DADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE TEORIA E PLANEJAMENTO DE ENSINO
IA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, CONTEXTOS CONTEMPORÂNEOS E DEMANDAS POPULARES

TERMO DE CONSENTIMENTO PARA PARTICIPAR EM PESQUISA

Sr. Professor,

Eu, [redacted], abaixo assinado, **autorizo** o(a) menor [redacted] participar do projeto de pesquisa **Construindo e analisando práticas educativas em educação matemática com dispositivos *touchscreen*** bem como a vinculação de suas imagens, falas, respostas a atividades, apresentação de slides, encontros científicos, canais de televisão e outros meios de comunicação, caso necessário, com uso exclusivamente educacional.

A pesquisa tem como objetivo principal implementar tarefas utilizando dispositivos móveis (*tablets* ou *smartphones*). Um dos principais benefícios da pesquisa será melhorar o aprendizado matemático de discentes e inovar nas aulas de matemática com o uso de dispositivos.

Os dados serão coletados mediante: questionários, auto-avaliação, filmagem em áudio e vídeo, portfolios eletrônicos, e respostas para atividades propostas. O período de coleta de dados será de **05/04/2022 a 11/06/2022** na Escola Municipal Manoel de Araújo Dantas.

Tenha ciência de que todas as fontes serão mantidas em sigilo e não serão divulgados nomes em nenhuma circunstância durante o desenvolvimento ou publicação da pesquisa. A qualquer tempo, poderá retirar esse **consentimento**, sem qualquer prejuízo pessoal ou institucional e isso não acarretará custos, bem como não haverá compensação financeira pela participação.

Contatos para obter maiores informações sobre a pesquisa:

- Pesquisador responsável (Orientador): Marcelo Almeida Bairral (mbairral@ufrrj.br)
  Telefone: (21) 26821841
- Professor-Pesquisador: Alexander Pires da Silva (alexander.matematica@gmail.com)
  Telefone: (21) 991156644
- Comitê de Ética da UFRRJ: (21) 2681-4707; 26821220

Declaro que fui devidamente informado(a) e esclarecido(a) pelo pesquisador sobre a pesquisa, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da mesma. Foi-me garantido que posso retirar meu consentimento a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade.

Nome completo do responsável: [redacted]
Telefone: [redacted]

Assinatura: [redacted] **Data:** 29/03/**2022.**

ANEXO A – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
COMISSÃO DE ÉTICA NA PESQUISA DA UFRRJ / COMEP

Protocolo N° 604/2015

PARECER

O Projeto de Pesquisa intitulado *"Construindo e analisando práticas educativas em educação matemática com dispositivos* touchscreen" sob a responsabilidade do Prof. Marcelo Almeida Bairral, do Departamento de Teoria e Planejamento de Ensino, do Instituto de Educação, processo 23083.003202/2015-21, atende os princípios éticos e está de acordo com a Resolução 466/12 que regulamenta os procedimentos de pesquisa envolvendo seres humanos.

UFRRJ, 12/04/2016.

Jairo Pinheiro da Silva
Prof. Dr. Jairo Pinheiro da Silva
Pró-Reitor Adjunto de Pesquisa e Pós-Graduação

Jairo Pinheiro da Silva
Pro-Reitor Adjunto de
Pesquisa e Pós- Graduação
Matr. SIAPE 1109555
UFRRJ