

UFRRJ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

DISSERTAÇÃO

UMA COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO DAS
DIFERENÇAS FINITAS E O MÉTODO DAS
SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA
SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM AQUÍFEROS
COM EXTRAÇÃO DE ÁGUA ATRAVÉS DE UM
POÇO

Bryan Aoliabe Siqueira

2023



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM
MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL**

**UMA COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO DAS DIFERENÇAS
FINITAS E O MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA
SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM AQUÍFEROS COM EXTRAÇÃO DE
ÁGUA ATRAVÉS DE UM POÇO**

BRYAN AOLIABE SIQUEIRA

Sob orientação de
Wilian Jeronimo dos Santos

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre** no Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, Área de Concentração em Modelagem Matemática e Computacional.

Seropédica, RJ, Brasil
Dezembro de 2023

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Sc Siqueira, Bryan Aoliabe, 1996-
UMA COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO DAS DIFERENÇAS
FINITAS E O MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA
SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM AQUÍFEROS COM EXTRAÇÃO DE ÁGUA
ATRAVÉS DE UM POÇO / Bryan Aoliabe Siqueira. - Rio de
Janeiro, 2022.
95 f.

Orientador: Wilian Jeronimo dos Santos.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural
do Rio de Janeiro, Modelagem Matemática e
Computacional, 2022.

1. Modelagem Matemática. 2. Fluxo de Água
Subterrânea. 3. Aquíferos Confinados. 4. Método das
Diferenças Finitas. 5. Método das Soluções
Fundamentais. I. Santos, Wilian Jeronimo dos, 1984-,
orient. II Universidade Federal Rural do Rio de
Janeiro. Modelagem Matemática e Computacional III.
Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

Seropédica-RJ, 13 de dezembro de 2023.

Bryan Aoliabe Siqueira

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção de grau de **Mestre**, no Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional PPGMMC, área de Concentração em Modelagem Matemática e Computacional.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 13/12/2023

Wilian Jerônimo dos Santos Dr^o UFRRJ (Orientador, Presidente da Banca)

Carlos Andres Reyna Vera-Tudela Dr^o UFRRJ (membro interno)

Renan de Souza Teixeira Dr^o UFRRJ (membro interno)

Edivaldo Figueiredo Fontes Junior Dr^o UFRRJ (Externo ao Programa)

José Antonio Fontes Santiago Dr^o UFRJ (Externo à Instituição)



ATA N° ata/2023 - ICE (12.28.01.23)
(N° do Documento: 6700)

(N° do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 27/12/2023 11:15)

CARLOS ANDRES REYNA VERA TUDELA

PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR

DeptM (12.28.01.00.00.00.63)

Matrícula: ###336#3

(Assinado digitalmente em 27/12/2023 11:21)

EDIVALDO FIGUEIREDO FONTES JUNIOR

PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR

DeptM (12.28.01.00.00.00.63)

Matrícula: ###648#5

(Assinado digitalmente em 27/12/2023 14:04)

RENAN DE SOUZA TEIXEIRA

PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR

DeptM (12.28.01.00.00.00.63)

Matrícula: ###756#9

(Assinado digitalmente em 04/01/2024 14:13)

WILIAN JERONIMO DOS SANTOS

PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR

DeptM (12.28.01.00.00.00.63)

Matrícula: ###287#1

(Assinado digitalmente em 21/01/2024 11:15)

JOSÉ ANTONIO FONTES SANTIAGO

ASSINANTE EXTERNO

CPF: ###.###.666-##

Visualize o documento original em <https://sipac.ufrrj.br/documentos/> informando seu número: 6700, ano: 2023, tipo: ATA, data de emissão: 27/12/2023 e o código de verificação: b37b939c6d

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus e a todas as energias do bem, que me auxiliaram nesta longa jornada.

Em seguida, agradeço as pessoas mais especiais da minha vida: minha mãe, Edivalma, e meu namorado, Gabriel. Sem o apoio e paciência de vocês, tenho certeza que eu não teria chegado até aqui. Amo vocês demais!

Ao meu orientador, Professor Wilian, pelas diversas reuniões e emails e, também, por toda a paciência durante a formulação deste trabalho.

Aos meus professores preferidos, Professora Cláudia Mazza e Professor Carlos Andres, não há palavras que possam descrever o quanto vocês são necessários para o PPGMMC! Não sei o que seria deste programa sem vocês! Mesmo com muitos afazeres e compromissos, NUNCA negaram de nos atender, nos ajudar e nos dar aquela força quando estávamos prestes a desistir. Vocês são, para mim, um espelho do que é, verdadeiramente, ser Professor! Muito obrigado por toda dedicação com o ensino e com a ciência. .

Aos demais membros da banca, professor Edivaldo Fontes, José Antonio e Renan Teixeira, meus sinceros agradecimentos por terem prontamente aceitado participar deste momento. Pela vasta experiência de vocês no tema em que me propus a pesquisar, tenho certeza que o trabalho será grandemente enriquecido com suas colocações.

Aos demais Professores do PPGMMC, dos quais destaco: Professora Rosane, sempre tão disposta a ouvir e a contribuir e Professor Ronaldo, por toda a paciência em explicar um assunto diversas vezes quando não entendíamos, sempre com muito bom humor e tranquilidade.

A amiga que este curso me trouxe: Larissa, você foi peça fundamental para que eu continuasse trilhando este caminho. Obrigado por cada madrugada acordada estudando, por cada conselho, por cada: vai ficar tudo bem! Sua amizade é um presente.

Ao meu amigo Cleison, pela companhia que vem desde a graduação. Obrigado pelas diversas noites de estudo, pela cumplicidade, por todas as revisões nas minhas demonstrações e em meus trabalhos. Você é um amigo incrível e eu não sei o que seria de mim sem você.

Aos demais amigos, obrigado por terem entendido minha ausência e, também, por sempre acreditarem em mim e me instigarem a correr atrás dos meus sonhos. Vocês são minha base!

A todos que contribuíram de alguma forma para que este sonho acontecesse, meus sinceros agradecimentos!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001.

"Conheça todas as teorias, domine todas as técnicas, mas, ao tocar uma alma humana, seja apenas outra alma humana." Carl Jung

SIQUEIRA, Bryan Aoliabe. **UMA COMPARAÇÃO ENTRE O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS E O MÉTODO DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA SIMULAÇÕES NUMÉRICAS EM AQUÍFEROS COM EXTRAÇÃO DE ÁGUA ATRAVÉS DE UM POÇO**. 2023. 95f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2023.

Este trabalho apresenta duas propostas de solução numérica para a equação das águas subterrâneas em aquíferos porosos confinados. Trata-se de uma equação diferencial parcial que modela o fluxo de água subterrâneo, considerando a extração ou recarga de água através de um poço. O modelo matemático exposto neste trabalho combina a equação da conservação de massa com a Equação de Darcy. O principal objetivo é a simulação e comparação numérica utilizando dois métodos numéricos: O Método das Diferenças Finitas e o Método das Soluções Fundamentais, quando considerada a equação no formato bidimensional para ambos os métodos. Uma diferença extremamente relevante entre os dois métodos numéricos citados é que, o primeiro exige a construção de uma malha, que gera um conjunto de pontos (ou nós), interconectados, na qual são calculados os valores aproximados da função que é solução da equação diferencial. Por outro lado, no segundo método, não é requerida a construção de uma malha, sendo a solução estimada em nós livremente distribuídos no domínio, a partir da solução fundamental e das condições de contorno do problema. Dessa forma, ao final desta dissertação, busca-se apresentar as potencialidades e fragilidades encontradas em cada método, assim como, mostrar que ambos os métodos numéricos tiveram resultados satisfatórios, quando comparados entre si e com soluções analíticas, quando disponíveis, considerando as aplicações propostas.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Fluxo de Água Subterrâneo, Aquíferos Confinados, Método das Diferenças Finitas, Método das Soluções Fundamentais.

ABSTRACT

SIQUEIRA, Bryan Aoliabe. **A COMPARISON BETWEEN THE FINITE DIFFERENCE METHOD AND THE FUNDAMENTAL SOLUTIONS METHOD FOR NUMERICAL SIMULATIONS IN AQUIFERS WITH WATER EXTRACTION THROUGH A WELL.** 2023. 95p. Dissertation (Master in Mathematical and Computational Modeling). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2023.

This work presents two numerical solution proposals for the groundwater equation in confined porous aquifers. It consists in a partial differential equation that models the flow of underground water, considering water extraction or recharge through a well. The mathematical model in this work combines the mass conservation equation with Darcy's Equation. The main objective is numerical simulation using two methods: Finite Difference Method and Fundamental Solutions Method, considering the equation in a two-dimensional format. A significant difference between the two mentioned numerical methods is that the first requires mesh construction, generating a set of interconnected points (or nodes), where approximate values of the function solving the differential equation are calculated. On the other hand, in the second method, mesh construction is not required, and the solution is estimated at freely distributed nodes in the domain based on the fundamental solution and boundary conditions of the problem. Thus, at the end of this dissertation, the aim is to present the potentials and weaknesses found in each method, as well as to demonstrate that both numerical methods presented satisfactory results when compared to each other and to analytical solutions, when available, considering the proposed applications.

Keywords: Mathematical Modeling, Groundwater Flow, Confined Aquifers, Finite Differences Methods, Fundamental Solutions Method..

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Objetivos	2
1.2	Justificativa	2
1.3	Organização do Trabalho	3
2	AQUÍFEROS	4
3	MODELAGEM MATEMÁTICA	7
3.1	Equação de Darcy	7
3.2	Equação da Continuidade	8
3.3	Equação para Aquíferos Confinados	10
4	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	12
4.1	Construção da Malha	12
4.2	Série de Taylor	13
4.3	Fórmulas de Diferenças Finitas	13
4.4	Critério de estabilidade	16
5	MÉTODOS SEM MALHA	19
5.1	Definição do problema	20
5.2	O Método das Soluções Fundamentais	21
5.2.1	Solução Fundamental	21
5.2.2	Solução Homogênea	21
5.2.3	Solução Particular	22
5.3	Fragilidades do Método	23
5.4	Sistemas Mal Condicionados	23
5.4.1	Técnica de Regularização de Tikhonov	24
5.4.2	Pseudo-inversa	24
6	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS E RESULTADOS	26
6.1	Definição dos problemas	26

7 CONCLUSÃO	58
8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	60
9 APÊNDICE	63

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Ilustração dos tipos de aquíferos. Fonte: [Minas Jr - Consultoria Mineral, 2022].....	5
Figura 3.1 – Influência da elevação no nível d'água no escoamento. Fonte:[FEITOSA; AL, 2008]	7
Figura 3.2 – Influência da pressão no escoamento. Fonte:[FEITOSA; AL, 2008]	8
Figura 3.3 – Balanço de massa e volume de controle infinitesimal.	9
Figura 4.1 – Ilustração de \mathcal{M}_3 . Adaptado de [SANTANA, 1998].	13
Figura 5.1 – Representação do domínio em diferentes métodos numéricos.....	20
Figura 6.1 – MSF: Distribuição dos pontos fontes, do contorno e virtuais para o raio = 1.	27
Figura 6.2 – MSF: Distribuição dos pontos fontes, do contorno e virtuais para o raio = 2.	28
Figura 6.3 – MSF: Distribuição dos pontos fontes, do contorno e virtuais para o raio = 5.	28
Figura 6.4 – Solução analítica do problema proposto.	29
Figura 6.5 – Solução Numérica pelo MDF.	29
Figura 6.6 – Solução Numérica pelo MSF para r=1.....	30
Figura 6.7 – Solução Numérica pelo MSF para r=2.....	30
Figura 6.8 – Solução Numérica pelo MSF para r=5.....	31
Figura 6.9 – MSF: Distribuição dos pontos fontes, do contorno e virtuais para o raio = 0.5.	32
Figura 6.10 – MSF: Distribuição dos pontos fontes, do contorno e virtuais para o raio = 1.5.	32
Figura 6.11 – MSF: Distribuição dos pontos fontes, do contorno e virtuais para o raio = 4.	33
Figura 6.12 – Solução Numérica pelo MDF para $h = 0.025$	33
Figura 6.13 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 0.5$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.	34
Figura 6.14 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 1$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.	34
Figura 6.15 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 1$, quando utilizado o comando pinv e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.	35
Figura 6.16 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 1$, quando utilizado a regularização de Tikhonov e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.	35

Figura 6.17 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 1.5$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.	36
Figura 6.18 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 3$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.	36
Figura 6.19 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 4$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.	37
Figura 6.20 – Solução Numérica pelo MDF para $h = 3.125$	39
Figura 6.21 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 71$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.	40
Figura 6.22 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 75$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.	40
Figura 6.23 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 90$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.	41
Figura 6.24 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 100$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.	41
Figura 6.25 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 155$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.	42
Figura 6.26 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 210$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.	42
Figura 6.27 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 300$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.	43
Figura 6.28 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 500$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.	43
Figura 6.29 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 1000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.	44
Figura 6.30 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 5000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.	44
Figura 6.31 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 5000$, quando utilizado o comando pinv e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.	45
Figura 6.32 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 5000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.	45
Figura 6.33 – Solução Numérica pelo MDF para $h = 125$	48

Figura 6.34 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 7100$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.	49
Figura 6.35 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 7500$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.	49
Figura 6.36 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 9000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.	50
Figura 6.37 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 10000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.	50
Figura 6.38 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 15500$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.	51
Figura 6.39 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 21000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.	51
Figura 6.40 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 30000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.	52
Figura 6.41 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 50000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.	52
Figura 6.42 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 100000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.	53
Figura 6.43 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 500000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.	53
Figura 6.44 – Simulação para o MDF no tempo $t = 1$ segundo.	55
Figura 6.45 – Simulação para o MDF no tempo $t = 1$ segundo.	55
Figura 6.46 – Simulação para o MDF no tempo $t = 12200$ segundos.	56
Figura 6.47 – Simulação para o MDF no tempo $t = 12200$ segundos.	56
Figura 6.48 – Simulação para o MDF no tempo $t = 24400$ segundos.	57
Figura 6.49 – Simulação para o MDF no tempo $t = 24400$ segundos.	57
Figura 9.1 – Acesso aos pontos utilizados para a simulação do MSF.	63

Lista de Abreviações e Siglas

EDP	Equação Diferencial Parcial
MDF	Método de Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MSF	Método das Soluções Fundamentais

Lista de Símbolos

K	Condutividade Hidráulica [m/s]
T	Transmissividade [m^2/s]
b	Espessura do aquífero [m]
S	Armazenamento ou coeficiente de armazenamento [<i>adimensional</i>]
ρ	Massa específica [kg/m^3]
γ	Peso específico [N/m^3]
ϕ	Porosidade [<i>adimensional</i>]
V	Vazão específica ou velocidade aparente [m/s]
h	Carga hidráulica [m]
$\vec{\nabla}h$	Gradiente hidráulico [<i>adimensional</i>]
p	Pressão [N/m^2]
\dot{G}	Termo fonte [kg/s]
Q	Vazão [m^3/s]
\mathcal{M}_1	Malha Unidimensional
\mathcal{M}_2	Malha Bidimensional
\mathcal{M}_3	Malha Tridimensional
$\sum_{i=1}^n a_i$	Somatório: Soma dos a_i , onde i varia entre os números naturais, a partir de 1 até n , ou seja, tem-se que $\sum_{i=1}^n a_i = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

Os aquíferos desempenham um papel importante em diversas esferas, sendo elas sociais, ambientais e industriais. No âmbito social, destaca-se primariamente a capacidade de fornecimento de água potável, elemento fundamental para a saúde e o bem-estar da população. Em localidades propensas a períodos de seca ou escassez hídrica, a presença de aquíferos pode ser crucial para assegurar a segurança hídrica. Além disso, esses reservatórios subterrâneos têm um papel crucial no ciclo hidrológico, contribuindo para equilibrar a recarga e descarga de água nos ecossistemas. A biodiversidade de muitos ecossistemas aquáticos depende da água proveniente de aquíferos, proporcionando habitats únicos para diversas espécies aquáticas.

No contexto industrial, os aquíferos têm a capacidade de abastecer indústrias que dependem da água em seus processos produtivos. Os aquíferos confinados, em especial, emergem como fontes confiáveis para atender às exigências industriais. Adicionalmente, esses reservatórios podem abrigar recursos minerais valiosos, como petróleo e gás, desempenhando um papel crucial na indústria energética.

Do ponto de vista econômico, a irrigação agrícola frequentemente se vale da água retirada de aquíferos, sendo vital para a produção de alimentos em diversas regiões do mundo. Em áreas onde a beleza natural está associada a aquíferos, o turismo pode se beneficiar economicamente, gerando receitas por meio de atividades recreativas, como esportes aquáticos e ecoturismo.

Entende-se como solo uma camada da superfície terrestre que é composta por sólidos, líquidos e gases. Toda essa composição é variável nas três dimensões do espaço e, também, no tempo. Uma das preocupações da hidrogeologia, ramo da hidrologia que estuda a água subterrânea, é modelar e entender como ocorre o fluxo de um fluido no solo, tendo em vista que esses fluidos podem beneficiar diversas esferas da vida humana, conforme já destacado. Os fluidos no solo, também conhecidos como líquidos ou solução, são constantemente considerados como água do solo. Na prática, a água presente no solo nunca é pura, mas sim, uma mistura de água com sais minerais e substâncias dissolvidas [LIER, 2020]. Para fins de simplificação, durante todo este trabalho, trataremos o líquido do solo sendo a água.

É importante destacar que este trabalho não tem a intenção de aprofundar os conceitos sobre hidrogeologia ou aquíferos, mas sim, de apresentar conceitos iniciais e fundamentais para o melhor entendimento da equação diferencial governante. Para esta equação, por exemplo, é de suma importância que sejam impostas as condições de contorno (fronteira), de forma que tenha-se um denominado problema bem posto [SIQUEIRA, 2019]. Entende-se que um problema é bem posto quando cumpre as seguintes condições: tem solução, a solução é única e a solução depende continuamente das condições iniciais e de contorno.

Para os leitores que desejam aprofundar seus estudos nos conceitos de solo e hidrogeologia, recomenda-se as bibliografias [FEITOSA; AL, 2008], [SIMOES et al., 2017], [WENDLAND, 2012] e [TODD, 1989].

1.1 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho é o tratamento e a análise numérica da equação das águas subterrâneas em aquíferos confinados, na qual, considera-se um poço de extração de água, utilizando o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método das Soluções Fundamentais (MSF).

Para alcançar este objetivo principal, buscou-se previamente: (1) estudar de forma profunda os conceitos essenciais sobre solos, hidrogeologia e aquíferos; (2) exibir a lei de Darcy e motivar a construção da Equação da Continuidade; (3) deduzir e resolver numericamente a Equação das Águas Subterrâneas em duas dimensões, utilizando o MDF e o MSF; (4) realizar simulações numéricas com ambos os métodos apresentados, comparando os resultados obtidos e (5) indicar se algum dos dois métodos numéricos foi mais apropriado para o problema proposto.

1.2 Justificativa

De acordo com as mais recentes avaliações, dos 1360 quatrilhões de toneladas de água do planeta, apenas 0,8% corresponde à água doce. Dessa fração, 3% apresentam-se na forma de água superficial e 97% na forma de água subterrânea [WENDLAND, 2012]. O destaque dado às reservas hídricas subterrâneas não faz jus ao seu grande potencial para o abastecimento de água, o que, segundo [FEITOSA; AL, 2008], esta falta de relevância é justificada devido as obras serem mais baratas e não tão fotogênicas quanto as barragens e estações de tratamento construídas para a utilização das águas de superfície. Ainda, vale destacar que as águas subterrâneas, em geral, tem boa qualidade para consumo humano, visto que os mananciais subterrâneos são naturalmente protegidos dos agentes poluidores quando comparados à águas de superfície, como rios e lagos, embora, o lençol freático seja vulnerável à contaminação. Porém, quando poluídas, as águas subterrâneas são de difícil despoluição.

O trabalho interdisciplinar nos estudos das águas subterrâneas são extremamente relevantes, pois a realização de experimentos em campo nem sempre são possíveis e, caso sejam, são caracterizados por um alto custo, tempo e esforço humano. Desta forma, as técnicas numéricas e computacionais se justificam, sendo que, quando bem realizadas, apresentam previsões e contribuições importantes para o problema em questão. É evidente que todo modelo matemático passa por simplificações, principalmente em estudos iniciais, mas estes estudos possibilitam que, ao desenvolver estes modelos, possamos torná-los cada vez mais completos e robustos, representando cada vez melhor a realidade.

Para obter uma solução para a equação de interesse, é de extrema importância o uso de métodos numéricos para a sua resolução, tendo em vista que ela pode se apresentar na forma não linear, e isto dificulta a obtenção de uma solução analítica (quando pode ser obtida) ou também, quando o domínio de estudo tem uma geometria mais complexa. Diante destas informações, nesta dissertação, faz-se o uso do Método de Diferenças Finitas e do Método das Soluções Fundamentais, ambos implementados em *MATLAB*®, software de alta performance voltado para o cálculo numérico. Vale ressaltar que o código para a resolução do problema transiente, via Método das Diferenças Finitas, foi inspirado no apresentado em [SIMOES et al., 2017],

no qual algumas alterações foram realizadas. Para o problema estacionário, vale referenciar o trabalho de [CUNHA, 2000].

Referente a utilização do Método das Soluções Fundamentais, destaca-se a sua apresentação inicial dada por [KUPRADZE; ALEKSIDZE, 1964] e sua implementação proposta pela primeira vez em [MATHON; JOHNSTON, 1977], quando abordada a equação em sua forma estacionária.

1.3 Organização do Trabalho

A estrutura do trabalho é dada da seguinte forma: No capítulo 2 aborda-se noções preliminares sobre águas subterrâneas e aquíferos, com definições e, quando possível, exemplos dos conceitos. Fundamentado no capítulo anterior, algumas equações são introduzidas no capítulo 3, estas que modelam o fenômeno em estudo, sendo elas: Equação de Darcy e a Equação da Continuidade, que juntas, dão origem a Equação do Fluxo das Águas Subterrâneas.

O Método das Diferenças Finitas (MDF) que é deduzido a partir da Série de Taylor, encontra-se no capítulo 4. Também é de interesse mostrar as ideias da dedução do método e apresentar os critérios para a convergência do mesmo. No capítulo 5, discorre-se sobre o Método das Soluções Fundamentais (MSF) - método classificado como sem malha -, e, sobretudo, destaca-se o quão recente é o uso prático deste método e a sua principal diferença em relação ao MDF.

No capítulo 6, apresenta-se os resultados numéricos e gráficos obtidos com as simulações. À vista destes resultados, no capítulo 7, explora-se as conclusões acerca do estudo proposto, no qual, o destaque é um comparativo entre os métodos, onde alguns aspectos são destacados, como: dificuldade de implementação, potencialidades e fragilidades de cada método e principais diferenças entre os métodos e resultados.

Considera-se **solo** a camada externa da superfície terrestre, oriundo de rochas que sofreram ações de processos físicos, químicos e biológicos de desintegração, decomposição e recombinação, que se transformaram em material poroso com características peculiares. A porção do solo que não é ocupada por matéria mineral sólida pode ser ocupada por águas subterrâneas. Esses espaços são chamados de vazios, poros ou espaços porosos. Esses poros agem como um condutor de água e são importantes para o estudo das águas subterrâneas [TODD, 1989].

De acordo com Instituto Água e Terra [2022], aquífero é toda formação geológica em que a água possa ser armazenada e que possua permeabilidade suficiente para permitir seu escoamento. Portanto, para ser considerado um aquífero, uma rocha ou sedimento deve ter porosidade suficiente para armazenar água, e os poros ou espaços vazios possuírem dimensões suficientes para permitir que a água escoe de um lugar a outro, sob a ação de um diferencial de pressão.

O volume de água subterrânea que se pode produzir em uma determinada região dependerá das características do aquífero e da frequência da recarga [WENDLAND, 2012]. Entende-se como frequência de recarga a taxa com que a água nova e fresca é adicionada ao reservatório subterrâneo. Em termos simples, é a velocidade com que a água da superfície, como chuva ou água de superfície, penetra no solo e alcança o aquífero, repondo as reservas de água subterrânea.

É possível classificar um aquífero quanto a sua composição. Os *aquíferos sedimentares* são formados por sedimentos de granulação variada e a circulação da água ocorre através dos poros formados entre os grãos de areia, argila e silte. Esse tipo de aquífero é normalmente conhecido como aquífero poroso, sendo este o objeto de enfoque, visto que constituem os mais importantes aquíferos, devido ao grande volume de água que armazenam, e por sua ocorrência em grandes áreas [Instituto Água e Terra, 2022]. Já os *aquíferos cristalinos* são formados por rochas condensadas, solidificadas, duras e inflexíveis, e o escoamento da água ocorre nas fraturas e fissuras abertas devido ao movimento das placas tectônicas.

Os principais tipos de aquíferos são: *livres*, *suspensos* ou *confinados*. No *aquífero livre*, também conhecido como freático ou não confinado, não existe camada limitante impermeável na face superior e sua base é uma camada impermeável ou semipermeável que, por serem superficiais ou subsuperficiais, sua exploração, recarga e contaminação são facilitadas, além disso, estão submetidos à pressão atmosférica e, em geral, estão parcialmente saturados de água. Um *aquífero suspenso* é um tipo especial de aquífero livre, porém, se caracteriza por não armazenar e nem transmitir água. Já um *aquífero confinado* pode ser *drenante* ou *não drenante*. O primeiro é caracterizado por ter, pelo menos, uma camada limitante semipermeável, já o segundo, por

possuir camadas acima e abaixo do meio poroso impermeáveis, e, conseqüentemente, as condições de contorno tem fluxo nulo nessas duas faces. Além disso, cabe destacar que o aquífero confinado não drenante está submetido a uma pressão maior do que a pressão atmosférica. Devido a essa diferença entre as pressões, no caso de existência de um poço, a água pode subir ou até jorrar pela boca do poço, sem a necessidade de qualquer intervenção mecânica. Na Figura 2.1, busca-se ilustrar os diferentes tipos de aquíferos aqui detalhados.

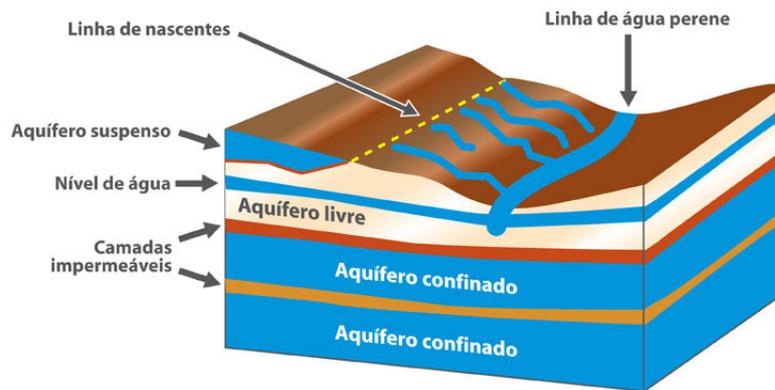


Figura 2.1 – Ilustração dos tipos de aquíferos. Fonte: [Minas Jr - Consultoria Mineral, 2022]

Os aquíferos confinados não drenantes têm enfoque nesse texto, pois segundo [FEITOSA; AL, 2008], as águas desse tipo de aquíferos são de boa qualidade para consumo doméstico, industrial e irrigação e, além disso, os autores destacam que os recursos hídricos subterrâneos tem sido amplamente ignorados, mesmo sendo a alternativa mais barata para o consumo humano.

A partir daqui, define-se alguns conceitos necessários para o bom entendimento do fenômeno em estudo. Embora possam parecer conceitos isolados, todos possuem fundamental importância para leitura fluida deste texto.

A **Condutividade hidráulica** é a taxa na qual a água se move através do solo ou rocha porosa. De acordo com [TREVISAN et al., 2009], a condutividade hidráulica do solo é uma propriedade fundamental na determinação da dinâmica da água e de solutos em solos saturados e não saturados, sendo útil na resolução de problemas relacionados à preservação do meio ambiente, da agricultura e dos recursos hídricos. Também, considera propriedades e características do meio poroso e do fluido que está escoando. É denotada por K e tem dimensões $[m/s]$.

Um aquífero é considerado **isotrópico** quando suas propriedades físicas são independentes da direção, ou seja, a condutividade hidráulica é constante e igual em todas as direções, e é dito **anisotrópico** quando ocorre o contrário, isto é, a condutividade hidráulica varia com a direção. Neste trabalho, por se tratar de um estudo inicial, considera-se os aquíferos isotrópicos, porém [FEITOSA; AL, 2008] destaca que o mais comum é a anisotropia.

Quanto a homogeneidade, entende-se que um aquífero é **homogêneo** quando todos os materiais que o formam tem a mesma condutividade hidráulica e é dito **heterogêneo** quando ocorre o contrário.

A **transmissividade** é um parâmetro hidráulico importante para se determinar a quantidade de água que flui horizontalmente por toda a espessura saturada do aquífero. É empregada em estudos bidimensionais e, para aquíferos confinados, é definida como $T = Kb$, na qual $T[m^2/s]$ é a transmissividade, $K[m/s]$ é a condutividade hidráulica e $b[m]$ é a espessura do aquífero.

O **armazenamento**, também conhecido como coeficiente de armazenamento, denotado por S , no qual, S é adimensional, é um dos parâmetros hidrodinâmicos mais importantes que caracterizam um aquífero. O armazenamento considera a capacidade de um aquífero em armazenar e transmitir um fluido, levando em conta as propriedades da água e do meio poroso.

A **massa específica** é definida como a massa dividida pelo volume que ocupa. É denotada por ρ e, dimensionalmente, é dada em (kg/m^3) . Por outro lado, o **peso específico**, é denotado por γ e, dimensionalmente, é dado em (N/m^3) , definido como a razão entre o peso e o volume do fluido.

A **porosidade** está ligada à capacidade de uma rocha, ou de qualquer outra substância sólida, em reunir fluidos. É definida como a razão entre o volume de vazios de uma amostra de solo e seu volume total. Tal quociente é adimensional e denotado por ϕ .

Por fim, a **vazão**, denotada por Q , diz respeito a quantidade de água que atravessa um poço ou sistema hidráulico durante um período determinado. Trata-se de uma medida essencial para avaliar o desempenho de poços, bombas e sistemas de distribuição de água. É dada em (m^3/s) .

O próximo capítulo tem enfoque em algumas equações importantes, que quando acopladas, dão origem a equação para aquíferos confinados.

Modelagem Matemática

3.1 Equação de Darcy

A equação de Darcy foi assim denominada em homenagem ao engenheiro Henry-Philibert-Gaspard Darcy e tem validade em escoamento em meios porosos.

Neste trabalho, para fins de simplificação, considera-se o meio poroso isotrópico e homogêneo e, então, fazendo-se valer essas simplificações, a equação de Darcy pode ser escrita como:

$$\vec{V} = -K\nabla h, \quad (3.1)$$

onde V é a vazão específica ou velocidade aparente, dada em $[m/s]$, ∇h é o gradiente hidráulico (adimensional) e K é a condutividade hidráulica, com unidade $[m/s]$. A seguir, busca-se detalhar os conceitos definidos acima.

A *Condutividade Hidráulica* K considera as características do meio, incluindo porosidade, forma, tamanho, distribuição, arranjo das partículas e as características do fluido que está escoando. Para determinar a condutividade hidráulica, pode-se fazer uso de fórmulas, métodos de laboratório ou ensaios de campo [FEITOSA; AL, 2008].

Já a carga hidráulica h indica o nível de energia em que a água se encontra. Para exemplificar o processo físico, considera-se as seguintes situações.

Na Figura 3.1 é possível observar que B possui maior quantidade de água, mas, a água escoará de A para B . Nesse caso, o que importa é o nível em que a água se encontra.

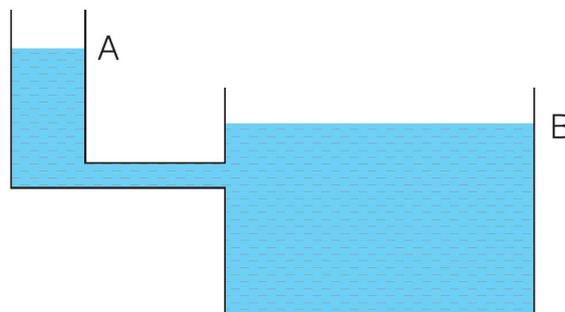


Figura 3.1 – Influência da elevação no nível d'água no escoamento. Fonte:[FEITOSA; AL, 2008]

Já na Figura 3.2, observa-se que o reservatório C está submetido a uma pressão maior do que a pressão atmosférica (e está fechado na parte superior), enquanto o reservatório D é

aberto e com pressão atmosférica. Desta forma, conclui-se que, a água irá escoar de *C* para *D*, independente da cota de *D*.

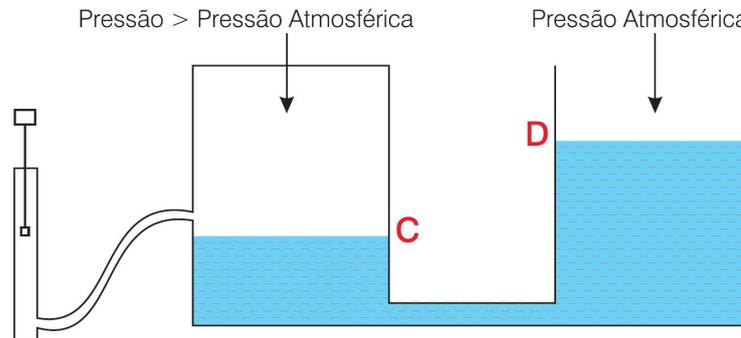


Figura 3.2 – Influência da pressão no escoamento. Fonte:[FEITOSA; AL, 2008]

Isto mostra que, o movimento da água depende da elevação do nível (z) e da pressão (p) em que está submetida. É comum que a pressão seja expressa em altura de líquido, dividindo-a pelo peso específico. Desta forma, pode-se escrever a carga hidráulica h como:

$$h = z + \frac{p}{\gamma}, \quad (3.2)$$

sendo z a altitude ou cota deste ponto [m], p a pressão [N/m^2] e γ o peso específico [N/m^3] (onde $\frac{p}{\gamma}$ é chamado de carga de pressão).

O *Gradiente Hidráulico* é uma grandeza vetorial dada por:

$$\vec{\nabla}h = \frac{\partial h}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial h}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial h}{\partial z}\vec{k}, \quad (3.3)$$

sendo a força responsável pelo movimento da água no solo e, conseqüentemente, quando essa força for igual a zero, tem-se equilíbrio (ausência de movimento de água no solo). Ainda, se faz necessário destacar que, o gradiente é tomado com sinal negativo na Equação (3.1), pois a água se move no sentido contrário ao do gradiente (ponto de maior h para menor h).

A Equação (3.1) é dada em regime estacionário, ou seja, considera que a movimentação da água em meio poroso não varia com o tempo, embora possa variar com a posição. Ocorre que, também é importante entender como o movimento da água se dá com o tempo. Sendo assim, para considerar a variação temporal, é necessário fazer o uso da lei de conservação de massa, que é descrita a seguir.

3.2 Equação da Continuidade

“ De maneira prática, a equação da continuidade diz que a variação de armazenagem da solução num certo intervalo de tempo, em um determinado comprimento de solo, pode ser determinada pela diferença entre a densidade de fluxo da solução que entra através de uma das extremidades deste comprimento e a densidade de fluxo da solução que sai na outra extremidade no intervalo de tempo considerado” [LIBARDI, 2018].

A equação da continuidade, também conhecida como conservação de massa, além de possibilitar conhecer a variação temporal do fluxo, também diz que a água não pode ser criada

nem destruída, podendo apenas ser transportada de um ponto a outro e armazenada em algum lugar.

Nesta seção, mostra-se como se dá o balanço de massa em $(x, y$ e $z)$ no espaço, assim como, em qualquer tempo $t > 0$. Para tal, considera-se um volume de controle infinitesimal e o balanço de massas construído sobre este volume de controle:

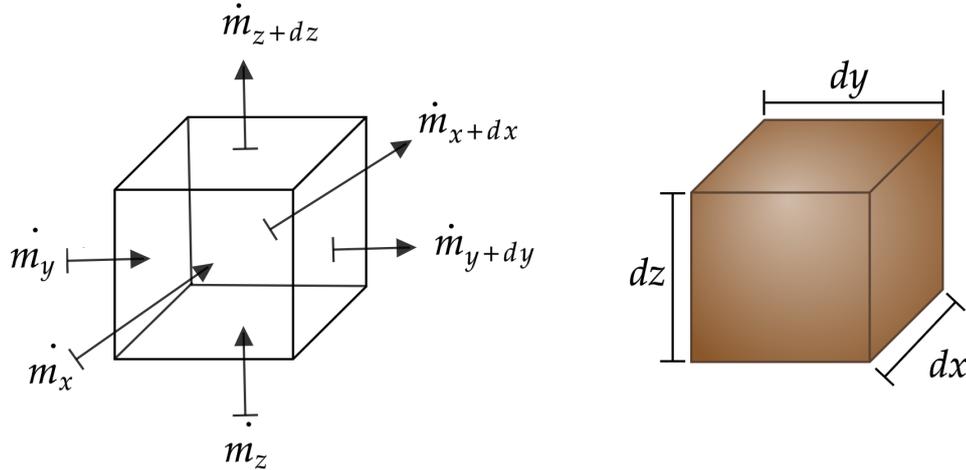


Figura 3.3 – Balanço de massa e volume de controle infinitesimal.

O balanço de massas é construído somando as contribuições em ambas as direções x , y e z . Basicamente, tomamos as massas que entram e as massas que saem, após possível variação. Sendo assim, entram nas direções x , y e z , respectivamente: \dot{m}_x , \dot{m}_y e \dot{m}_z . Considerando uma variação, saem nas respectivas direções:

$$\dot{m}_{x+dx} = - \left(\dot{m}_x + \frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} \right),$$

$$\dot{m}_{y+dy} = - \left(\dot{m}_y + \frac{\partial \dot{m}_y}{\partial y} \right),$$

$$\dot{m}_{z+dz} = - \left(\dot{m}_z + \frac{\partial \dot{m}_z}{\partial z} \right).$$

Somando as contribuições em cada uma das direções, tem-se:

$$\dot{m}_x - \dot{m}_{x+dx} = - \frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} dx,$$

$$\dot{m}_y - \dot{m}_{y+dy} = - \frac{\partial \dot{m}_y}{\partial y} dy,$$

$$\dot{m}_z - \dot{m}_{z+dz} = - \frac{\partial \dot{m}_z}{\partial z} dz.$$

Através da soma das contribuições de todas as superfícies, obtêm-se:

$$\sum \dot{m} = - \left(\frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \dot{m}_y}{\partial y} dy + \frac{\partial \dot{m}_z}{\partial z} dz \right).$$

A massa pode ser escrita em função da velocidade aparente V , da seguinte forma:

$$\dot{m}_i = \rho V_i A_i, \quad (3.4)$$

em que ρ é a massa específica do fluido [kg/m^3] e $i = x, y, z$. Então, pode-se escrever:

$$\sum \dot{m} = - \left(\frac{\partial \rho V_x}{\partial x} dy dz + \frac{\partial \rho V_y}{\partial y} dx dz + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} dx dy \right) = - \left(\frac{\partial \rho V_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho V_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho V_z}{\partial z} \right) dVol. \quad (3.5)$$

A Equação (3.5) representa as massas que entram e saem do volume de controle por unidade de tempo.

O termo fonte pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{dm}{dt} = \dot{G}, \quad (3.6)$$

também dado como massa por unidade de tempo [kg/s].

Por outro lado, a variação da massa dentro do volume de controle, por unidade de tempo, é:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) dVol, \quad (3.7)$$

onde ϕ é a porosidade.

Somando as Equações (3.5), (3.6) e (3.7), dividindo por $dVol$ e lembrando de (3.1), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) - \nabla \cdot (\rho K \nabla h) - \dot{g} = 0, \quad (3.8)$$

onde $\dot{g} = \frac{\dot{G}}{dVol}$.

Ao considerar, ainda, a massa específica constante, e lembrando que a condutividade hidráulica K também é considerada constante, pode-se escrever:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - K \nabla^2 h - \frac{\dot{g}}{\rho} = 0. \quad (3.9)$$

A Equação (3.9) é chamada de *Equação da Continuidade para a Densidade de Fluxo da Solução no Solo*, e é utilizada em caso de movimentação da água em um material poroso, homogêneo e isotrópico.

3.3 Equação para Aquíferos Confinados

Fazendo o uso da equação (3.9), que considera um solo isotrópico e homogêneo, e realizando algumas manipulações algébricas juntamente com alguns conhecimentos sobre hidráulica e aquíferos, pode-se considerar a seguinte equação diferencial parcial para quantificar a água em um aquífero:

$$\frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\dot{g}}{\rho K}, \quad (3.10)$$

ou, de forma equivalente:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{T}{S} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + \frac{\dot{g}}{\rho K} \frac{T}{S}, \quad (3.11)$$

sendo T a transmissividade [m^2/s] e S o armazenamento [*adimensional*], ambos constantes para este estudo. Para melhor entendimento das manipulações necessárias, consulte [SIMOES et al., 2017].

A Equação (3.11) se aplica para escoamentos variáveis em aquíferos confinados, isotrópicos, homogêneos e para escoamento bidimensional. O termo fonte, presente nesta equação, quando negativo, representa a extração de água do aquífero através de um poço e, quando positivo, simulação de recarga também através de um poço.

Também, pode-se desconsiderar a derivada temporal, obtendo-se uma equação estacionária, conhecida como a equação de Poisson, que tem a forma:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{\dot{g}}{\rho K}. \quad (3.12)$$

Método das Diferenças Finitas

O Método das Diferenças Finitas (MDF) é um método de resolução de equações diferenciais que se baseia na aproximação das derivadas por diferenças finitas. Esta aproximação é baseada na série de Taylor, que produz fórmulas que aproximam valores em um ponto com dependência de um ou mais pontos anteriores ou posteriores.

O Método das Diferenças Finitas é classificado como um método de domínio e, segundo [CHENG; CHENG, 2005], está entre os métodos numéricos mais utilizados para resolver equações diferenciais, ficando atrás apenas do Método dos Elementos Finitos.

4.1 Construção da Malha

Para utilizar o MDF, é necessário a criação de uma malha sobre o domínio de interesse, criando assim, pontos interconectados, nos quais serão calculados os valores da solução aproximada da equação diferencial de interesse.

Considera-se x_0, y_0 e $t_0 \in \mathbb{R}$ e h_1, h_2 e $h_3 > 0$. Para o caso unidimensional, a malha de passo (ou incremento) h_1 associada a x_0 é o conjunto de pontos \mathcal{M}_1 , dado por:

$$\mathcal{M}_1 = \{x_i = x_0 + i h_1, i = \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

Já para o caso bidimensional, a malha associada ao ponto (x_0, y_0) é construída da seguinte forma:

$$\mathcal{M}_2 = \{(x_i, y_i) = (x_0 + i h_1, y_0 + j h_2), i, j = \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

no qual \mathcal{M}_2 é o conjunto de pontos que compõe a malha.

Também pode ser necessário trabalhar com algo ainda mais geral, quando por exemplo, há uma equação diferencial em duas dimensões espaciais que varia com o tempo. A malha que seria considerada para esse caso é dada por:

$$\mathcal{M}_3 = \{(x_i, y_i, t_i) = (x_0 + i h_1, y_0 + j h_2, t_0 + k h_3), i, j = \pm 1, \pm 2, \dots \text{ e } k = 1, 2, \dots\},$$

em que \mathcal{M}_3 é o conjunto de pontos que compõe a malha.

É importante destacar que, nas construções de malhas acima, é considerado um incremento fixado, porém, eles poderiam ser variáveis conforme a necessidade do problema estudado.

A Figura 4.1 busca exemplificar os pontos da malha \mathcal{M}_3 , assim como seus níveis de tempo iniciais.

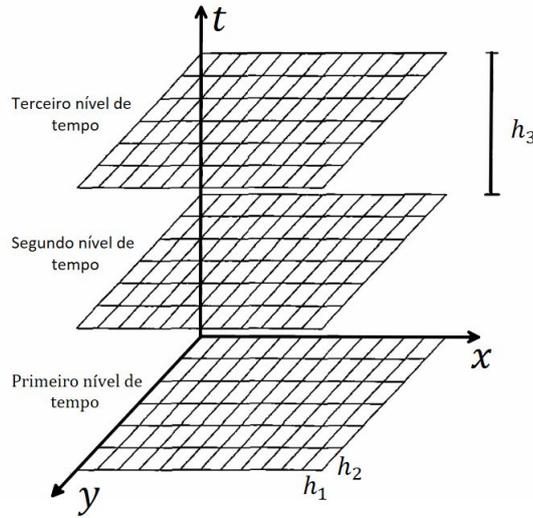


Figura 4.1 – Ilustração de \mathcal{M}_3 . Adaptado de [SANTANA, 1998].

4.2 Série de Taylor

O desenvolvimento de funções em séries de Taylor são ferramentas frequentemente utilizadas em áreas como Cálculo e Análise Numérica. Expressar funções como a soma de termos infinitos é uma estratégia muito útil, pois utilizamos tal ferramenta para aproximar funções ao redor de um ponto e além disso, pode-se aplicar os conceitos desta série para buscar soluções de equações diferenciais.

A expansão por série de Taylor de uma função f em torno de um ponto $x = x_0$ é definida pela seguinte série de potência.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (4.1)$$

Agora, tomando f de classe, pelo menos, C^{n+1} e fazendo $x - x_0 = h_1$, obtém-se, após o truncamento, a aproximação conhecida como polinômio de Taylor de ordem n :

$$f(x + h_1) = f(x) + h_1 f'(x) + \frac{h_1^2}{2!} f''(x) + \dots + \frac{h_1^n}{n!} f^{(n)}(x) + \frac{h_1^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (4.2)$$

com $x < \xi < x + h_1$.

Perceba que está sendo avaliado o valor da função f no ponto $x + h_1$ utilizando valores de uma vizinhança deste ponto. Outra observação importante é que, o último termo de (4.2) representa o erro da aproximação de $f(x + h)$ pelos primeiros n termos.

4.3 Fórmulas de Diferenças Finitas

Considerando os pontos da malha \mathcal{M}_1 , ou seja, um domínio discretizado, pode-se reescrever (4.2) como:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + h_1 f'(x_i) + \dots + \frac{h_1^n}{n!} f^{(n)}(x_i) + \dots + \frac{h_1^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad (4.3)$$

com $h_1 = x_{i+1} - x_i$ e $x_i < \xi < x_{i+1}$.

O último termo desta expressão diz respeito ao erro de truncamento. É esperado, teoricamente, que quanto mais termos, melhor a aproximação. As principais fórmulas de Diferenças Finitas provem de (4.3).

Considerando três termos em (4.3) e $h_1 = h$, têm-se:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2} f''(\xi). \quad (4.4)$$

Isolando o termo $f'(x_i)$ e considerando $\mathcal{O}(h) = \frac{h}{2} f''(\xi)$, pode-se perceber:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (4.5)$$

Dizemos que a Equação (4.5) é uma aproximação para a derivada f' conhecida como *fórmula progressiva (ou avançada)*, onde $\mathcal{O}(h)$ é o erro de aproximação. Esta fórmula tem erro de aproximação da ordem de h .

De forma análoga, ao aproximar o ponto x_{i-1} da seguinte forma (considerando também três termos em (4.3)):

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - hf'(x_i) - \frac{h^2}{2} f''(\xi),$$

no qual ξ é um valor entre x_{i-1} e x_i . Assim, há como se obter:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (4.6)$$

Dizemos que (4.6) é uma aproximação para a derivada f' conhecida como *fórmula regressiva (ou atrasada)* em que $\mathcal{O}(h) = \frac{h}{2} f''(\xi)$ é o erro de aproximação. Esta fórmula também tem erro de aproximação da ordem de h .

Agora, fazendo o uso de quatro termos em (4.3), ao aproximar x_{i+1} tem-se:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) + \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_1), \quad (4.7)$$

e para aproximar x_{i-1} :

$$f(x_{i-1}) = f(x) - hf'(x_i) + \frac{h^2}{2!} f''(x_i) - \frac{h^3}{3!} f'''(\xi_2), \quad (4.8)$$

considerando que $x_i < \xi_1 < x_{i+1}$ e $x_{i-1} < \xi_2 < x_i$.

Subtraindo (4.8) de (4.7), e após algumas manipulações, tem-se:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (4.9)$$

A Equação (4.9) é chamada de *fórmula centrada*, na qual $\mathcal{O}(h^2) = -\frac{h^2}{3!} f'''(\xi)$, $\xi \in (x - h, x + h)$. Esta fórmula tem erro da ordem de h^2 .

Até o momento, tem-se trabalhado com apenas uma variável, mas, de acordo com [CUMINATO; JUNIOR, 2013], a generalização para mais de uma variável podem ser obtidas utilizando as aproximações já conhecidas de apenas uma variável, gerando aproximações para as derivadas parciais de uma função.

Considerando os pontos da malha \mathcal{M}_2 , uma função f , pode-se obter, para as segundas derivadas em questão, as chamadas *fórmulas centradas*, com erros da ordem de h_1^2 e h_2^2 , respectivamente:

$$f_{xx}(x_i, y_j) = \frac{f(x_{i+1}, y_j) - f(x_i, y_j) + f(x_{i-1}, y_j)}{h_1^2} + \mathcal{O}(h_1^2), \quad (4.10)$$

$$f_{yy}(x_i, y_j) = \frac{f(x_i, y_{j+1}) - f(x_i, y_j) + f(x_i, y_{j-1})}{h_2^2} + \mathcal{O}(h_2^2), \quad (4.11)$$

Agora, ao considerar os pontos da malha \mathcal{M}_3 , uma função $f(x, y, t)$, traz-se as seguintes fórmulas:

$$f_t(x_i, y_j, t_k) = \frac{f(x_i, y_j, t_{k+1}) - f(x_i, y_j, t_k)}{h_3} + \mathcal{O}(h_3), \quad (4.12)$$

em que $\mathcal{O}(h_3)$ é o erro da aproximação, da ordem de h_3 . Esta é a *fórmula progressiva* para a derivada em questão.

Analogamente, apresenta-se a *fórmula regressiva*, com erro de mesma ordem:

$$f_t(x_i, y_j, t_k) = \frac{f(x_i, y_j, t_k) - f(x_i, y_j, t_{k-1})}{h_3} + \mathcal{O}(h_3). \quad (4.13)$$

Já para f_{xx} , têm-se:

$$f_{xx}(x_i, y_j, t_k) = \frac{f(x_{i+1}, y_j, t_k) - f(x_i, y_j, t_k) + f(x_{i-1}, y_j, t_k)}{h_1^2} + \mathcal{O}(h_1^2), \quad (4.14)$$

conhecida como *fórmula centrada* para a derivada em questão, com erro da ordem de h_1^2 .

Também de forma análoga:

$$f_{yy}(x_i, y_j, t_k) = \frac{f(x_i, y_{j+1}, t_k) - f(x_i, y_j, t_k) + f(x_i, y_{j-1}, t_k)}{h_2^2} + \mathcal{O}(h_2^2), \quad (4.15)$$

conhecida como *fórmula centrada* para a derivada em questão, com erro da ordem de h_2^2 .

As fórmulas apresentadas acima, constroem embasamento para a construção do método explícito, que será utilizado para resolver a Equação governante (3.11).

Primeiramente, cabe ressaltar que, para simplificar notação, em vez de utilizar $h(x_i, y_j, t_k)$ usa-se somente $h_{i,j}^n$.

Sendo assim, há a possibilidade de aproximar as derivadas presentes na Equação (3.11), desprezando a parcela do erro.

Utilizando diferenças progressivas na derivada temporal, tem-se:

$$\frac{\partial h}{\partial t} \cong \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{h_3}. \quad (4.16)$$

Utilizando diferenças centradas nos termos de derivada espacial, é possível escrever que:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \cong \frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{h_1^2}, \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \cong \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{h_2^2}. \quad (4.18)$$

Substituindo as aproximações (4.16), (4.17) e (4.18) na Equação (3.11), e ao considerar que $\frac{\dot{g}}{\rho K} \frac{T}{S} = \frac{Q}{Sh_1 h_2}$, conforme descrito e detalhado em [SIMOES et al., 2017], obtém-se:

$$\frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{h_3} = \frac{T}{S} \left(\frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{h_1^2} + \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{h_2^2} \right) + \frac{Q}{Sh_1 h_2}. \quad (4.19)$$

Isolando $h_{i,j}^{n+1}$:

$$h_{i,j}^{n+1} = \frac{T}{S} \left(\frac{h_{i+1,j}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i-1,j}^n}{h_1^2} + \frac{h_{i,j+1}^n - 2h_{i,j}^n + h_{i,j-1}^n}{h_2^2} \right) h_3 + \frac{Q}{Sh_1 h_2} h_3 + h_{i,j}^n. \quad (4.20)$$

(4.20) é a fórmula de diferenças finitas associada ao problema que foi utilizada para a implementação computacional da Equação (3.11).

Ainda, ao considerar que $h_1 = h_2$, e denotar por h , após algumas simplificações, pode-se escrever:

$$h_{i,j}^{n+1} = h_{i,j}^n + \frac{Th_3}{Sh^2} (h_{i+1,j}^n + h_{i-1,j}^n - 4h_{i,j}^n + h_{i,j+1}^n + h_{i,j-1}^n) + \frac{Qh_3}{Sh^2}. \quad (4.21)$$

Já a Equação (3.12) pode ser resolvida aproximando cada derivada espacial por (4.10) e (4.11), respectivamente, de onde pode-se obter:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \cong \frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{h_1^2}, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \cong \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{h_2^2}. \quad (4.23)$$

Sendo assim, pode-se obter:

$$\frac{h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}}{h_2^2} = -\frac{\dot{g}}{\rho K}. \quad (4.24)$$

E após algumas simplificações:

$$h_2^2 (h_{i+1,j} - 2h_{i,j} + h_{i-1,j}) + h_1^2 (h_{i,j+1} - 2h_{i,j} + h_{i,j-1}) = -h_1^2 h_2^2 \frac{\dot{g}}{\rho K}. \quad (4.25)$$

ou ainda,

$$h_1^2 h_{i,j-1} + h_2^2 h_{i-1,j} - 2(h_1^2 h_2^2) h_{i,j} + h_2^2 h_{i+1,j} + h_1^2 h_{i,j+1} = -h_1^2 h_2^2 \frac{\dot{g}}{\rho K}. \quad (4.26)$$

A Equação (4.26) é a fórmula de diferenças finitas para a Equação (3.12).

4.4 Critério de estabilidade

Como (4.21) é equivalente a (4.20), considerando as simplificações adotadas, é importante que se analise a ideia da dedução da condição de estabilidade para o método explícito, chamado critério de estabilidade de Von Neumann. Este critério associa o tamanho do passo à estabilidade do esquema numérico. Além disso, é condição necessária e suficiente para a estabilidade somente em casos lineares e para problemas de, no máximo, segunda ordem. Para casos não lineares, é condição necessária, mas não suficiente.

Admita que exista uma solução para a Equação (3.11) da forma:

$$h(x, y, t) = e^{t\lambda} e^{x\beta I} e^{y\gamma I}, \quad (4.27)$$

no qual $I = \sqrt{-1}$, β e γ são reais arbitrários, λ complexo e $\alpha = \alpha(\beta, \gamma)$ em geral complexo. Nos pontos da malha, a Equação (4.21) possui uma solução:

$$h_{i,j}^n = e^{nh_3\lambda} e^{ih\beta I} e^{jh\gamma I}, \quad (4.28)$$

Substituindo (4.28) na Equação (4.21), desconsiderando o termo fonte, e fazendo $\sigma = \frac{Th_3}{Sh^2}$, tem-se:

$$\begin{aligned} e^{(n+1)h_3\lambda} e^{ih\beta I} e^{jh\gamma I} &= e^{nh_3\lambda} e^{ih\beta I} e^{jh\gamma I} + \sigma(e^{nh_3\lambda} e^{(i+1)h\beta I} e^{jh\gamma I} + e^{nh_3\lambda} e^{(i-1)h\beta I} e^{jh\gamma I} \\ &\quad - 4(e^{nh_3\lambda} e^{ih\beta I} e^{jh\gamma I}) + e^{nh_3\lambda} e^{ih\beta I} e^{(j+1)h\gamma I} + e^{nh_3\lambda} e^{ih\beta I} e^{(j-1)h\gamma I}). \end{aligned}$$

Manipulando os expoentes e lembrando da igualdade (4.28), pode-se obter:

$$e^{h_3\lambda} h_{i,j}^n = h_{i,j}^n + \sigma(e^{h\beta I} h_{i,j}^n + e^{-h\beta I} h_{i,j}^n - 4h_{i,j}^n + e^{h\gamma I} h_{i,j}^n + e^{-h\gamma I} h_{i,j}^n).$$

Sabendo que $h_{i,j}^n$ é diferente de zero, pois é o produto de exponenciais, pode-se fazer:

$$e^{h_3\lambda} = 1 + \sigma(e^{h\beta I} + e^{-h\beta I} - 4 + e^{h\gamma I} + e^{-h\gamma I}).$$

Da identidade de Euler, segue que:

$$e^{I(h\beta)} = \cos(h\beta) + I\text{sen}(h\beta),$$

$$e^{-I(h\beta)} = \cos(h\beta) - I\text{sen}(h\beta),$$

$$e^{I(h\gamma)} = \cos(h\gamma) + I\text{sen}(h\gamma),$$

$$e^{-I(h\gamma)} = \cos(h\gamma) - I\text{sen}(h\gamma),$$

E daí:

$$e^{h_3\lambda} = 1 + \sigma(\cos(h\beta) + I\text{sen}(h\beta) + \cos(h\beta) - I\text{sen}(h\beta) - 4 + \cos(h\gamma) + I\text{sen}(h\gamma) + \cos(h\gamma) - I\text{sen}(h\gamma)).$$

Cancelando alguns termos:

$$e^{h_3\lambda} = 1 + \sigma(2\cos(h\beta) - 4 + 2\cos(h\gamma)). \quad (4.29)$$

Utilizando a identidade trigonométrica:

$$\text{sen}^2(nx) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2nx),$$

que é equivalente a:

$$\frac{1}{2}\cos(2nx) = \frac{1}{2} - \text{sen}^2(nx).$$

Fazendo $2nx = h\beta$, tem-se $nx = \frac{h\beta}{2}$. Então,

$$\frac{1}{2}\cos(h\beta) = \frac{1}{2} - \text{sen}^2\left(\frac{h\beta}{2}\right).$$

Multiplicando ambos os lados da equação por 4, obtém-se:

$$2 \cos(h\beta) = 2 - 4\text{sen}^2\left(\frac{h\beta}{2}\right). \quad (4.30)$$

Analogamente, é possível obter:

$$2 \cos(h\gamma) = 2 - 4\text{sen}^2\left(\frac{h\gamma}{2}\right). \quad (4.31)$$

Substituindo na Equação (4.29) as igualdades (4.30) e (4.31), obtém-se:

$$e^{h_3\lambda} = 1 + \sigma \left(2 - 4\text{sen}^2\left(\frac{h\beta}{2}\right) - 4 + 2 - 4\text{sen}^2\left(\frac{h\gamma}{2}\right) \right).$$

$$e^{h_3\lambda} = 1 + \sigma \left(-4\text{sen}^2\left(\frac{h\beta}{2}\right) - 4\text{sen}^2\left(\frac{h\gamma}{2}\right) \right).$$

$$e^{h_3\lambda} = 1 - 4\sigma \left(\text{sen}^2\left(\frac{h\beta}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{h\gamma}{2}\right) \right).$$

De acordo com [SANTANA, 1998], para que haja estabilidade, é necessário que $|e^{h_3\lambda}| \leq 1$. Disto segue:

$$-1 \leq 1 - 4\sigma \left(\text{sen}^2\left(\frac{h\beta}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{h\gamma}{2}\right) \right) \leq 1,$$

Olhando para a primeira desigualdade, veja que:

$$-1 \leq 1 - 4\sigma \left(\text{sen}^2\left(\frac{h\beta}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{h\gamma}{2}\right) \right),$$

que pode ser escrito de forma equivalente da seguinte forma:

$$-1 + 4\sigma \left(\text{sen}^2\left(\frac{h\beta}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{h\gamma}{2}\right) \right) \leq 1,$$

e assim,

$$4\sigma \left(\text{sen}^2\left(\frac{h\beta}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{h\gamma}{2}\right) \right) \leq 1 + 1 = 2,$$

$$\sigma \left(\text{sen}^2\left(\frac{h\beta}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{h\gamma}{2}\right) \right) \leq \frac{2}{4},$$

$$\sigma \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\text{sen}^2\left(\frac{h\beta}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{h\gamma}{2}\right) \right)}.$$

Note que o maior valor que $\left(\text{sen}^2\left(\frac{h\beta}{2}\right) + \text{sen}^2\left(\frac{h\gamma}{2}\right) \right)$ pode assumir é 2. Sendo assim:

$$\sigma \leq \frac{1}{4},$$

ou de outra forma:

$$\begin{aligned} \frac{Th_3}{Sh^2} &\leq \frac{1}{4}, \\ h_3 &\leq \frac{S}{4T} h^2. \end{aligned} \quad (4.32)$$

A Equação (4.32) é o critério de estabilidade para o problema, desconsiderando o termo fonte.

Cabe destacar que um método explícito foi utilizado tendo em vista a sua simplicidade de implementação e uma primeira possibilidade de comparação com o MSF.

Métodos Sem Malha

Os métodos sem malha são métodos de resolução de equações diferenciais que não dependem, obrigatoriamente, da definição de uma malha interconectada. Estes métodos podem ser aplicados a problemas na forma forte [SALLES, 2015] e também, na forma fraca, como pode ser visto em [LEITAO, 2010]. Quando aplicados sobre problemas na forma fraca, em alguns casos, é necessário a criação de uma malha, principalmente na fase de integração, porém, a qualidade delas não é fundamental para a solução que será obtida, o que difere do MDF, por exemplo.

Segundo [ROQUE, 2007], as primeiras referências aos métodos sem malha surgem nos anos 30; no entanto, o primeiro método sem malha a ser desenvolvido de forma consistente surgiu apenas nos anos 70. Desde lá, não se percebeu avanços significativos no estudo do método, haja vista a ausência de publicações que utilizam ou proponham alterações no método. Somente na década de 90 uma variação do método foi proposta. O trabalho de [LEITAO, 2010], por exemplo, foi o primeiro a tratar do assunto na Universidade do Estado do Rio de Janeiro, no ano de 2010.

Existem diversos métodos para a resolução de Equações Diferenciais Parciais. Entre os mais conhecidos, estão o Método das Diferenças Finitas (MDF) [CUMINATO; JUNIOR, 2013], Método dos Elementos Finitos (MEF) [DIAS et al., 2009] [FISH; BELYTSCHKO, 2009] e Método dos Elementos de Contorno (MEC) [BREBBIA et al., 1984]. Eles se diferem, principalmente, quanto a forma de discretizar o domínio.

Como mencionado no capítulo anterior, o MDF trabalha sobre a forma forte, ou seja, na forma diferencial do problema. Sua dedução e implementação são relativamente mais simples se comparados ao MEF e ao MEC, porém, devido à necessidade de criação de uma malha estruturada, ele não se adapta bem a domínios curvos.

Já o MEF, a discretização do domínio gera uma malha (não necessariamente estruturada), dando origem a diversos elementos, e é conhecido por se adaptar bem em domínios irregulares ou curvos. Vale destacar, também, que este método trabalha sobre a forma fraca, ou seja, uma forma integral equivalente a forma diferencial.

O MEC, conhecido como um método de fronteira, também trabalha com a equação na forma integral e apenas a discretização do contorno é necessária. Um dos diferenciais deste método é a redução da dimensão espacial em sua equação integral, levando a sistemas menores, menos necessidade de memória do computador e uma computação mais eficiente, especialmente em problemas envolvendo domínios homogêneos e infinitos. No entanto, no MEC exige-se o conhecimento da solução fundamental do operador diferencial associado à equação governante.

Uma alternativa às abordagens tradicionais são os métodos sem malha, onde são distribuídos pontos (ou nós) sobre o domínio e fronteira de interesse, e a solução é calculada em cada um destes pontos. Existem abordagens dos métodos sem malha para problemas na forma forte e, também, fraca, conforme já citado acima. Neste trabalho, abordaremos um método para problemas na forma forte, utilizando o Método das Soluções Fundamentais [GOLBERG, 1994].

Veja na Figura 5.1, a representação do domínio em diferentes métodos numéricos, sendo: malha não estruturada para o MEF, malha estruturada para o MDF, nuvem de nós para os Métodos Sem Malha e discretização do Contorno para o MEC.



Figura 5.1 – Representação do domínio em diferentes métodos numéricos.

5.1 Definição do problema

O objetivo desta parte do trabalho é resolver a Equação (3.12). Mais detalhadamente, pretende-se resolver a parte homogênea da referida equação com o MSF, e a parte não homogênea utilizando o Método das Soluções Particulares [GOLBERG, 1994], conforme descrito no decorrer deste capítulo.

Considera-se, inicialmente, a seguinte equação.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{\dot{g}}{\rho K}. \quad (5.1)$$

Note que (5.1) é a equação de Poisson. Aqui, pretende-se obter a solução geral da equação citada, fazendo uso da solução fundamental do operador diferencial ∇^2 .

O fato da equação de Poisson ser uma equação diferencial não homogênea faz com que seja necessário determinar uma solução particular da equação diferencial que adicionada à solução da equação homogênea associada, que satisfaz às condições de contorno correspondentes,

resulta na solução geral da equação diferencial não homogênea [GOLBERG, 1994]. O termo fonte presente na Equação (5.1) será considerado como uma fonte pontual.

5.2 O Método das Soluções Fundamentais

O Método das Soluções Fundamentais (MSF) é um método numérico livre de malha usado para estimar soluções de sistemas regidos por equações diferenciais parciais em um domínio, a partir de um conjunto de condições de contorno de um problema bem definido. Segundo essa metodologia, a solução fundamental do operador diferencial é aplicada a pontos do contorno relacionados a pontos de uma fronteira fictícia [NETO, 2020].

Para utilizar-se do Método das Soluções Fundamentais, é necessário conhecer a solução fundamental do problema. A solução de problemas regidos pela equação de Laplace ou Poisson (ou adaptações destas) são bastante difundidos na literatura, visto que a solução fundamental destes problemas é conhecida [BREBBIA et al., 1984].

5.2.1 Solução Fundamental

A definição usual da "função" Delta de Dirac é:

$$\delta(x - \xi) = \begin{cases} 0, & x \neq \xi \\ \infty, & x = \xi \end{cases} \quad (5.2)$$

Com a seguinte propriedade:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) f(x) dx = f(\xi), \quad (5.3)$$

para toda função f contínua em $x = \xi$.

Seja \mathbb{L} um operador linear diferencial. Dizemos que u^* é uma solução fundamental para o operador \mathbb{L} se,

$$\mathbb{L}[u^*] = -\delta(x - \xi), \quad (5.4)$$

em que δ é a distribuição delta de Dirac centrada no ponto ξ . Neste caso, a função u^* está definida em \mathbb{R}^n , exceto no ponto singular da solução fundamental, ξ .

Fisicamente, pode-se associar a solução fundamental ao resultado de um estímulo unitário, ou um impulso, aplicado no ponto fonte ξ , considerando um meio infinito governado caracterizado pelo linear diferencial \mathbb{L} .

A solução fundamental para as equações mais conhecidas (equação do calor, equação da onda, equação de Laplace e equação de Helmholtz) podem ser encontradas em [BASÍLIO, 2019].

5.2.2 Solução Homogênea

Considerando na Equação (5.1) $\dot{g} = 0$, obtém-se

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0, \quad (5.5)$$

ou seja, a equação de Laplace. Este é o problema homogêneo associado à Equação (5.1).

Para resolver (5.5) utilizando o MSF, admite-se soluções da forma da seguinte combinação linear.

$$h_{h_i} = \sum_{j=1}^N u_{ij}^* c_j, \quad (5.6)$$

onde h_h é a solução homogênea no ponto de colocação x_i do contorno, j representa o ponto fonte ξ_j da fronteira fictícia, u^* é a solução fundamental, c são as constantes à determinar e N é o número de fontes virtuais (fictícias), que pode ser igual ou menor que o número de nós do contorno. A solução fundamental do operador de Laplace tem a forma:

$$u^* = -\frac{1}{2\pi\rho K} \ln(r(\xi, x)), \quad (5.7)$$

onde r é a distância euclidiana entre o ponto campo x e o ponto fonte ξ .

A ideia geral do método é trabalhar somente com a solução fundamental dependendo da distância entre pontos. Considerando condições de contorno do tipo Dirichlet (potencial prescrito), conhece-se inicialmente os valores da solução no contorno do problema. Além disso, a distância de cada um dos pontos do contorno até as fontes virtuais pode ser facilmente calculada, sendo, assim, possível resolver um sistema linear para obter os coeficientes c_j através da Equação (5.6).

Após obtenção dos coeficientes c_j , calcula-se o valor da solução fundamental entre cada ponto do domínio e os pontos da fronteira fictícia e então, obtém-se a solução no ponto interior especificado.

É importante destacar que a fronteira fictícia é construída para contornar as singularidades que aparecem na solução fundamental, visto que na ausência desta fronteira, a distância de um ponto até ele mesmo seria zero e, então, a solução fundamental não estaria definida para este ponto.

5.2.3 Solução Particular

Quando a equação em estudo é não homogênea, é necessário determinar uma solução particular do problema. Para o caso em que o termo fonte é uma fonte pontual, considera-se $\dot{g} = Q\delta(x - \xi)$ na Equação (5.1) e, então, a solução particular fica sendo dada como segue.

$$h_p = -\frac{Q}{2\pi\rho K} \ln(r(\xi, x)) \quad (5.8)$$

Determinada a solução particular, é necessário fazer alguns ajustes no problema homogêneo associado, para então obter a solução geral do problema.

O problema homogêneo associado, neste caso é dado por:

$$\frac{\partial^2 h_h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_h}{\partial y^2} = 0,$$

que deve ser resolvido com as condições de contorno modificadas, sendo elas:

$$h_h = \bar{h} - h_p,$$

onde \bar{h} é a condição de contorno do problema não homogêneo (original), h_p são os valores obtidos no contorno com a solução particular e h_h são as condições de contorno para simulação do problema homogêneo.

A solução geral do problema é então: $h = h_p + h_h$, para todos os pontos do domínio e contorno, que pode ser determinada após a solução do problema homogêneo associado via MSF.

5.3 Fragilidades do Método

O Método das Soluções fundamentais, assim como qualquer outro método numérico usado de forma irresponsável, demonstra algumas fragilidades em seu funcionamento, como mostram os autores [BASÍLIO, 2019], [RAMOS, 2016], [SANTURIO, 2015], [LOMEU, 2016], [CARRILLO, 2020], [MEDEIROS, 2001], [SILVA et al., 2022] e [AUGUSTIN, 2015]. Sendo assim, destaca-se as principais limitações comuns:

- A escolha da fronteira fictícia insere uma incerteza na aplicação do método;
- As matrizes geradas pelo método, em geral, são mal condicionadas, fazendo-se necessário o uso de técnicas de regularização;
- A metodologia para aplicação do método apresenta comportamento instável;
- A acurácia parece independe do mal condicionamento da matriz;
- A acurácia do método varia de acordo com o número de pontos virtuais adotados, bem como a distância adotada entre os nós do domínio e os nós fonte;
- Um resultado de convergência geral ainda é desconhecido;

Embora tenha-se incertezas, todos os testes numéricos realizados neste trabalho utilizarão a fronteira fictícia sendo um círculo, disposto no ponto central do domínio de análise, como feito por [MEDEIROS, 2001] para problemas potenciais.

Já o número de pontos fontes será igual ao número de pontos de colocação, por apresentarem melhor precisão, conforme abordado em [MEDEIROS, 2001] e [FALCHETTO, 2015].

Por fim, os raios utilizados para a construção da fronteira fictícia serão diversificados e comparados com a solução analítica e alguns outros parâmetros.

5.4 Sistemas Mal Condicionados

Dizemos que um sistema linear é *mal condicionado* quando a solução das equações é muito sensível a pequenas mudanças nos coeficientes [FRANCO, 2006].

O grande problema em resolver sistemas mal condicionados é a instabilidade da solução. Se, dado um sistema linear $Ax = b$, A e/ou b forem medidas experimentais e, portanto, sujeitas a erros, qualquer pequena variação em seus elementos acarretará bruscas alterações no vetor solução [CAMPOS, 2007].

O mal condicionamento está relacionado ao fato de que a matriz dos coeficientes é quase singular (seu determinante é muito próximo de zero).

O retorno recebido dos algoritmos de cálculo que acusam matrizes não invertíveis, está relacionado ao limite imposto por índices de condicionamento e não à real impossibilidade de inversão [NETO, 2020].

Medir a singularidade de uma matriz utilizando o seu determinante não constitui uma boa prática, pois, um determinante pequeno não indica, necessariamente, a ocorrência de um mal condicionamento. Um determinante pode ser pequeno quando, por exemplo, as entradas das matrizes são pequenas. Sendo assim, usa-se o *número de condicionamento ou condição* para analisar a influência de perturbações dos dados de entrada na solução do sistema [CUNHA, 2000].

O *número de condição* de uma matriz é dado por $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$,

onde $\|\cdot\|$ é uma norma matricial.

Se $\kappa(A)$ for aproximadamente igual a unidade, a matriz é considerada bem condicionada e, se $\kappa(A)$ for muito maior que a unidade, a matriz é considerada mal condicionada, e por consequência, estaremos lidando com um sistema mal condicionado. Para minimizar o efeito do mal condicionamento numérico na solução do sistema resultante da aplicação do MSF, é necessário utilizar alguma técnica de regularização de matrizes, que tem como objetivo que uma solução mais precisa seja obtida [BASÍLIO, 2019].

5.4.1 Técnica de Regularização de Tikhonov

Uma das formas de contornar o problema de mal condicionamento é utilizar a técnica de regularização de Tikhonov. Estudos realizados anteriormente, mostraram que, para o MSF, a técnica se mostra eficaz, como pode ser visto em [BASÍLIO, 2019], [CARRILLO, 2020], [RAMOS, 2016], [SANTURIO, 2015] e [LOMEU, 2016].

Para obter-se uma solução estável para a o sistema $Ax = b$, deve-se resolver, de forma equivalente:

$$(A^T A + \lambda I)\mathbf{x} = A^T \mathbf{b},$$

onde A^T é a transposta da matriz A , I é a matriz identidade e λ é o parâmetro de regularização. O trabalho de [BASÍLIO, 2019] trata numericamente a equação de Poisson e cita que uma boa escolha seria considerar $\lambda = 10^{-8}$, sendo assim, as simulações aqui apresentadas serão realizadas com este parâmetro de regularização.

Nas simulações realizadas com o MSF, tendo em vista o mal condicionamento das matrizes e também, os alertas emitidos pelo programa desenvolvido quanto a quase singularidade da matriz dos coeficientes e a possibilidade de resultados imprecisos, alguns testes numéricos foram realizados utilizando a técnica de regularização.

5.4.2 Pseudo-inversa

A solução de um sistema linear do tipo $Ax = b$, com a matriz A quadrada e não singular, é dada por $x = A^{-1}b$, ou seja, neste caso, o sistema é consistente e determinado (há solução e é única). No entanto, existem sistemas lineares do tipo $Ax = b$ em que a matriz A não é quadrada ou apresenta posto incompleto. Uma possibilidade para resolver problemas deste tipo é utilizar a pseudoinversa de Moore-Penrose, que é uma matriz que pode atuar como uma substituição parcial da matriz inversa nos casos em que ela não existe.

Seja A uma matriz real de ordem $m \times n$. Dizemos que a matriz real A^+ de ordem $n \times m$ é a inversa de Moore-Penrose de A , ou simplesmente pseudo-inversa de A , se as condições a seguir forem satisfeitas:

- (I) $AA^+A = A$.
- (II) $A^+AA^+ = A^+$.
- (III) AA^+ é simétrica, ou seja, $(AA^+)^T = AA^+$.
- (IV) A^+A é simétrica, ou seja, $(A^+A)^T = A^+A$.

Vejamos, agora, como a pseudoinversa pode ajudar a resolver sistemas consistentes indeterminados (infinitas soluções) e inconsistentes (não há solução).

Define-se como **problema de mínimos quadrados** a busca pela melhor aproximação de um sistema linear $Ax = b$, quando não é possível encontrar uma solução exata, o que ocorre quando há mais equações do que incógnitas (sistema consistente e indeterminado) ou quando

as equações são inconsistentes (sistema inconsistente). O objetivo do método dos mínimos quadrados é minimizar a norma euclidiana da diferença $Ax - b$.

Teorema 1. *Se A é uma matriz $m \times n$ de posto $r < \min(m, n)$, então o vetor*

$$\mathbf{x} = A^+\mathbf{b},$$

minimiza $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2^2$. Além disso, se \mathbf{z} é qualquer outro vetor que minimiza $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|_2^2$, então $\|\mathbf{z}\|_2 > \|\mathbf{x}\|_2$.

Demonstração: Para prova, veja [LEON, 2019]. □

Para os casos em que a matriz possua posto incompleto, faremos a resolução do sistema linear utilizando a pseudo-inversa utilizando o comando `pinv` do Matlab.

Simulações Numéricas e Resultados

6.1 Definição dos problemas

Nesta seção, detalha-se os problemas que serão simulados, geometrias utilizadas, distribuição dos pontos fonte no contorno e domínio, assim como, a disposição das fontes virtuais.

O número de condicionamento de cada uma das matrizes será apresentado, sendo este induzido pela norma-2, assim como, os erros em comparação com a solução analítica (quando houver) utilizando as normas 2 e infinita, calculadas conforme descrito em [BURDEN et al., 2017].

O computador utilizado para as simulações computacionais foi um laptop com sistema operacional Windows 11, 64 bits, com processador Core i5-1135G7, décima primeira geração, memória ram de 8 gb e HD SSD 256 gb.

A solução apresentada pelos dois métodos numéricos, quando houver ausência da solução analítica, nos casos em que couber esta comparação, serão discutidas apresentando-se os valores máximos da diferença (em módulo) das soluções, buscando-se retratar o quanto uma solução se distancia da outra.

O objetivo, em ambas as simulações, é comparar o comportamento do MSF em relação ao MDF, visto que é um dos métodos mais utilizados na atualidade para resolver equações diferenciais parciais, conforme já referenciado.

Todos os programas utilizados, assim como, a descrição dos pontos utilizados, serão disponibilizados ao final deste trabalho. Os programas que utilizam o MSF informam o usuário, de forma automática, o número de condicionamento da matriz associada ao sistema e o raio utilizado.

Os sistemas lineares foram resolvidos utilizando-se os comandos \- barra invertida, *pinv* do software utilizado e, também, a regularização de Tikhonov.

Os raios foram considerados a partir do centroide do domínio dos problemas.

Problema 1: Considera-se

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x, y) = 0,$$

para (x, y) no conjunto $R = \{(x, y) \mid 0 < x < 0,5, 0 < y < 0,5\}$, com as condições de contorno

$$h(0, y) = 0, h(x, 0) = 0, h(x, 0,5) = 200x \text{ e } h(0,5, y) = 200y.$$

A solução analítica do problema exposto é $h(x, y) = 400xy$, conforme descreve [BURDEN et al., 2017].

Para o MDF, utilizou-se incremento fixo igual a 0,1 em ambas direções de discretização. Para o MSF, considerou-se 20 pontos sobre o contorno e fronteira fictícia e, também, 16 pontos internos ao domínio.

Ainda, é importante destacar que, neste caso, o erro de truncamento para o MDF é zero a cada passo, ou seja, a solução analítica é igual a solução numérica com o MDF, salvo por pequenos arredondamentos do computador. Esse fato se dá pois:

$$\frac{\partial^4 h}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 h}{\partial y^4} = 0.$$

Este problema foi desenvolvido para a validação do código, assim como, para verificar o comportamento dos métodos numéricos.

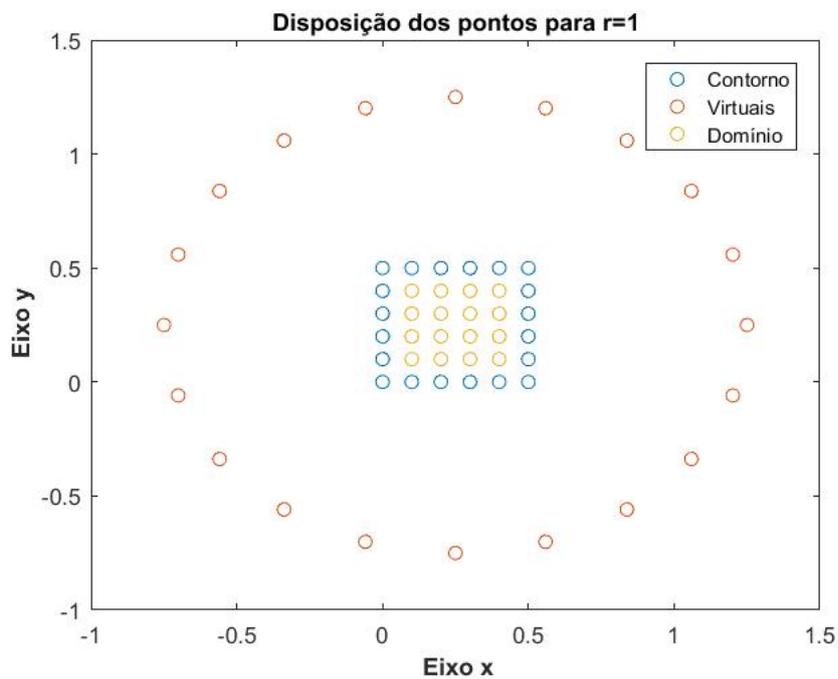


Figura 6.1 – MSF: Distribuição dos pontos fontes, do contorno e virtuais para o raio = 1.

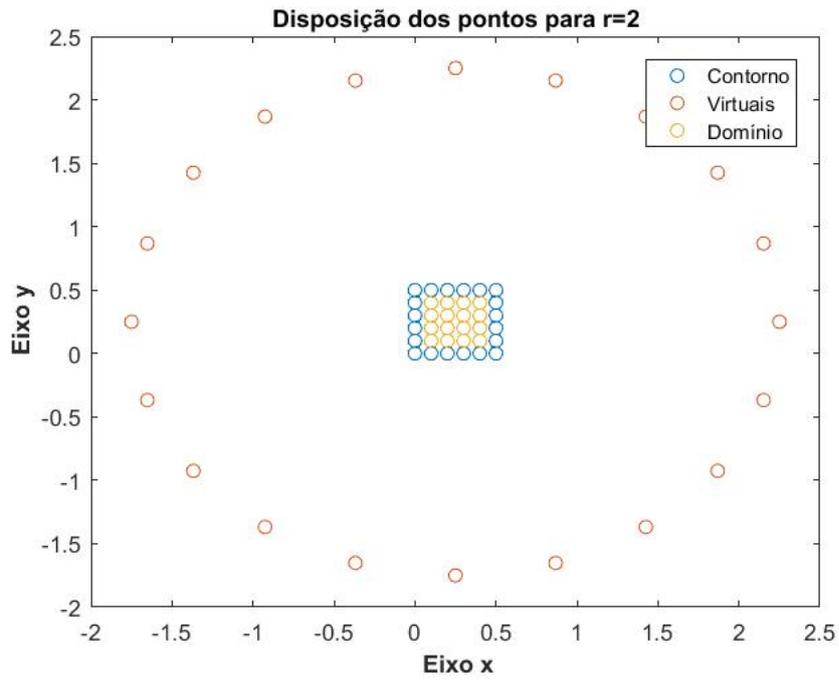


Figura 6.2 – MSF: Distribuição dos pontos fontes, do contorno e virtuais para o raio = 2.

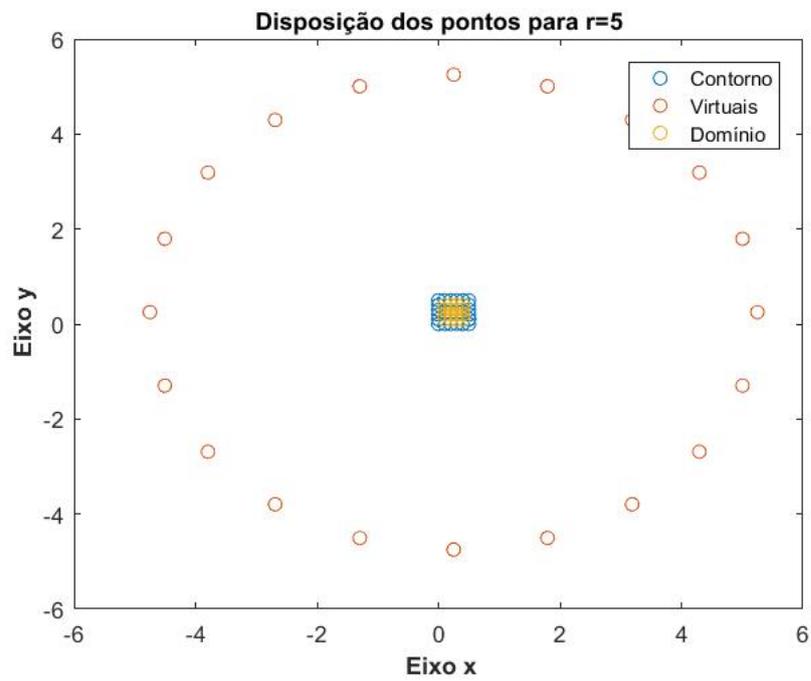


Figura 6.3 – MSF: Distribuição dos pontos fontes, do contorno e virtuais para o raio = 5.

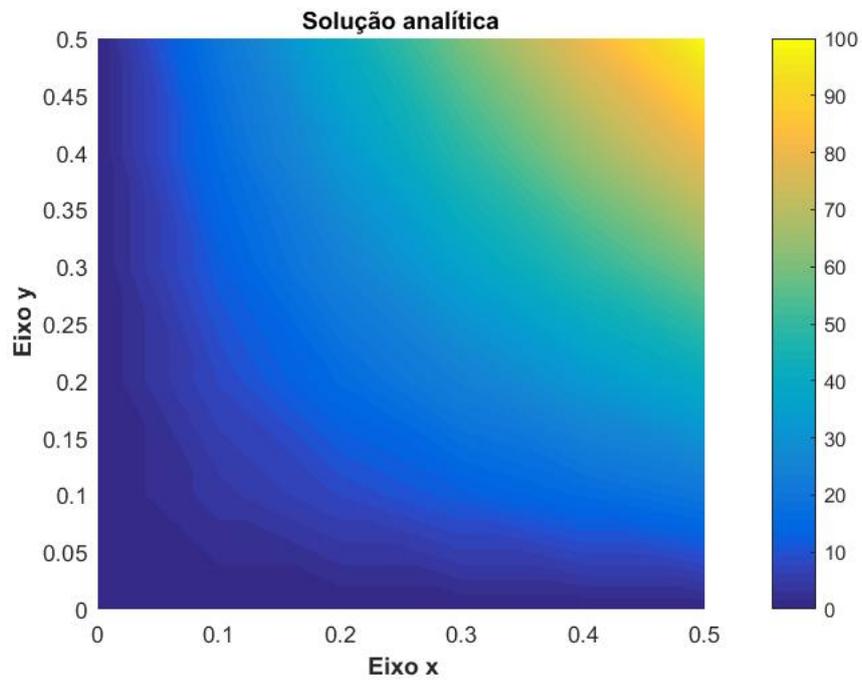


Figura 6.4 – Solução analítica do problema proposto.

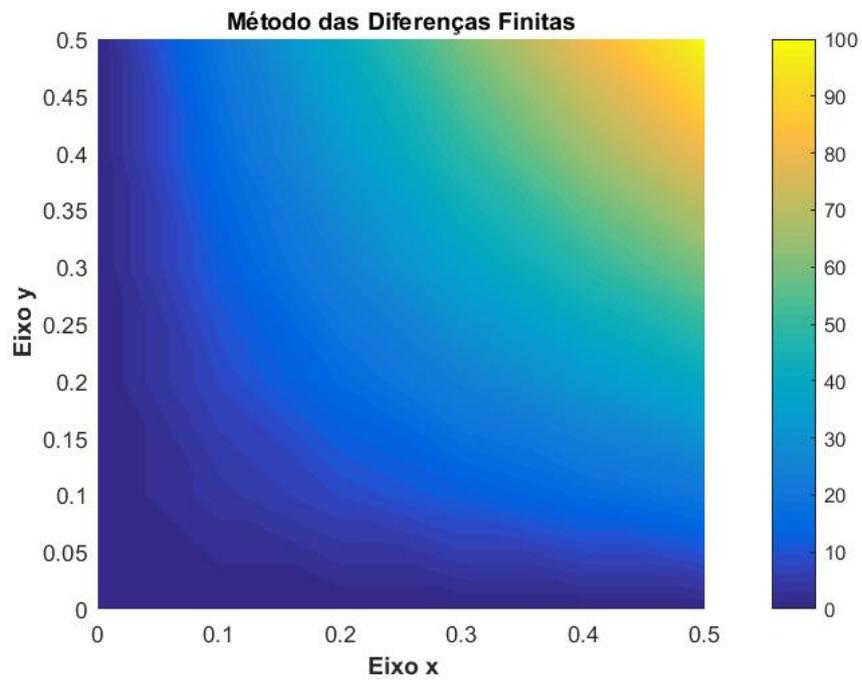


Figura 6.5 – Solução Numérica pelo MDF.

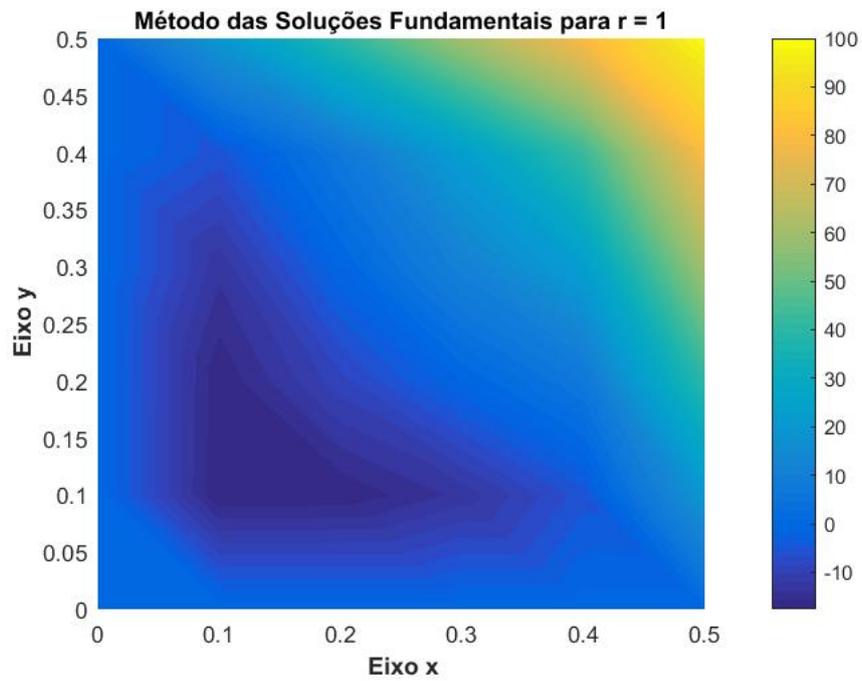


Figura 6.6 – Solução Numérica pelo MSF para $r=1$.

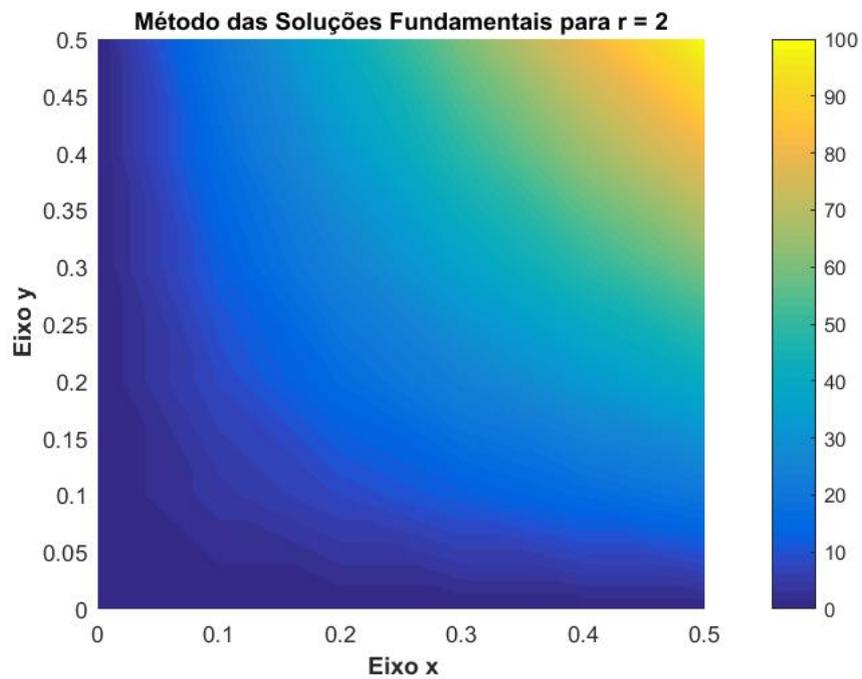


Figura 6.7 – Solução Numérica pelo MSF para $r=2$.

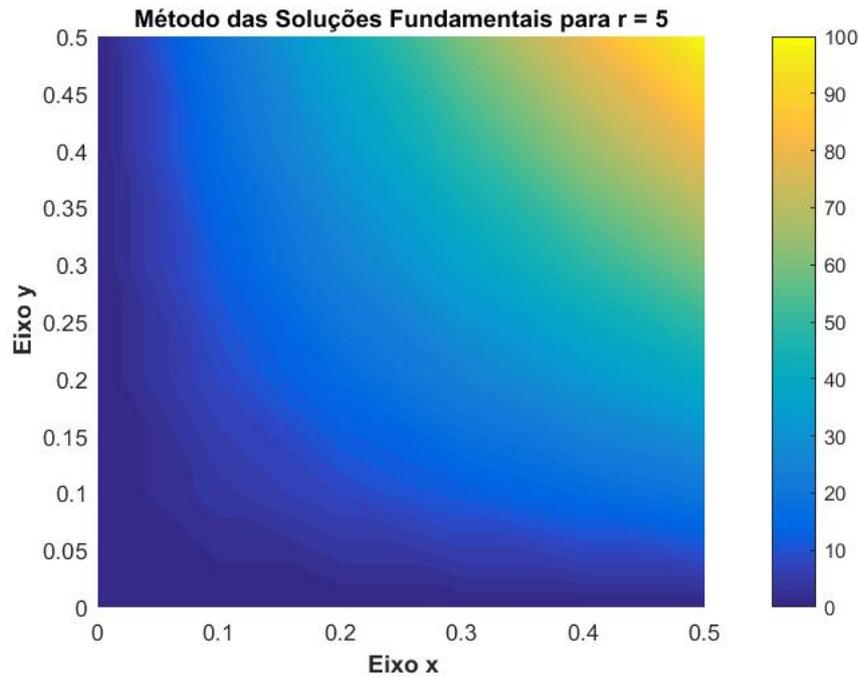


Figura 6.8 – Solução Numérica pelo MSF para r=5.

Abaixo, tem-se uma tabela comparativa com aspectos relevantes para a análise dos métodos numéricos. Os dados apresentados foram calculados pelo programa desenvolvido.

-	MDF h = 0.1	MSF r = 1	MSF r = 2	MSF r = 5
Norma-2	$1.588822e - 14$	$9.731602e + 01$	$5.081074e - 06$	$1.801272e - 04$
Norma-∞	$7.105427e - 15$	$2.529778e + 01$	$2.335209e - 06$	$8.140299e - 05$
Número de Condicionamento da Matriz do Sistema	$9.472136e + 00$	$2.274756e + 16$	$4.886088e + 18$	$2.365520e + 17$

Problema 2: Considera-se

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{\dot{g}}{\rho K}, \quad (6.1)$$

para (x, y) no conjunto $R = \{(x, y) \mid 0 < x < 0,6, 0 < y < 0,6\}$, com as condições de contorno $h(0, y) = 0, h(x, 0) = 0, h(x, 0,6) = 200x$ e $h(0,6, y) = 200y$. O termo fonte, presente na parte direita da equação, é considerado como pontual, aplicado no centro do domínio. Utiliza-se os parâmetros $Q = 0.06755$ e $K = 10^{-3}$, para o teste numérico.

Para o MSF, considerou-se 96 pontos sobre o contorno, 529 pontos distribuídos sobre o domínio e 625 pontos para o cálculo da solução particular. Quanto ao número de pontos na fronteira fictícia, simulou-se dois cenários: o primeiro, com o mesmo número de pontos sobre o contorno e, o segundo, com a metade de pontos utilizados no contorno. Em cada cenário, variou-se o tamanho dos raios, buscando analisar a sensibilidade do método a este parâmetro.

Para o MDF, utilizou-se incremento/passo $h = 0.025$ fixo em ambos os eixos.

Abaixo, busca-se mostrar a disposição dos pontos para alguns dos raios utilizados.

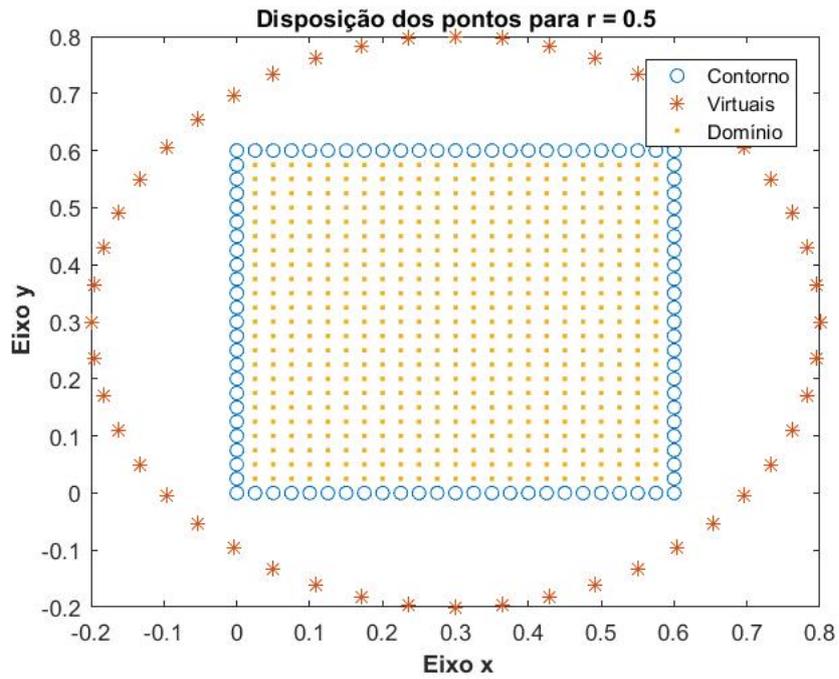


Figura 6.9 – MSF: Distribuição dos pontos fontes, do contorno e virtuais para o raio = 0.5.

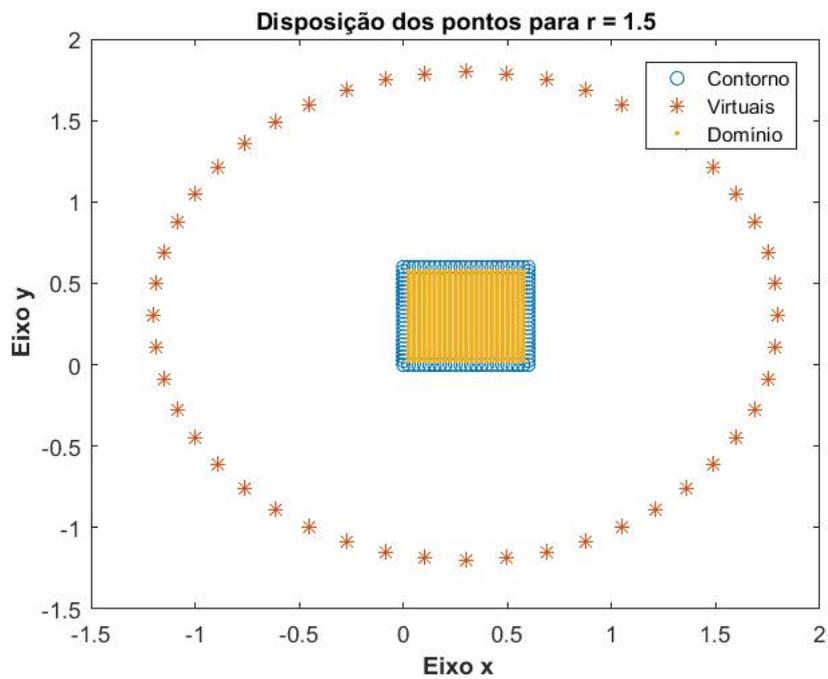


Figura 6.10 – MSF: Distribuição dos pontos fontes, do contorno e virtuais para o raio = 1.5.

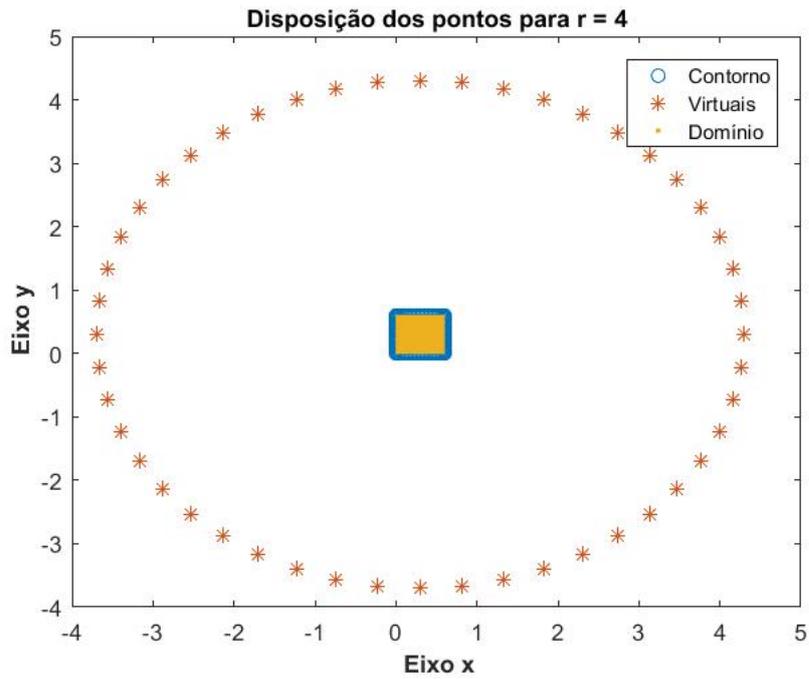


Figura 6.11 – MSF: Distribuição dos pontos fontes, do contorno e virtuais para o raio = 4.

Os gráficos das soluções numéricas são dados abaixo, omitindo-se alguns para os casos em que, graficamente, não é possível perceber diferença nos resultados.

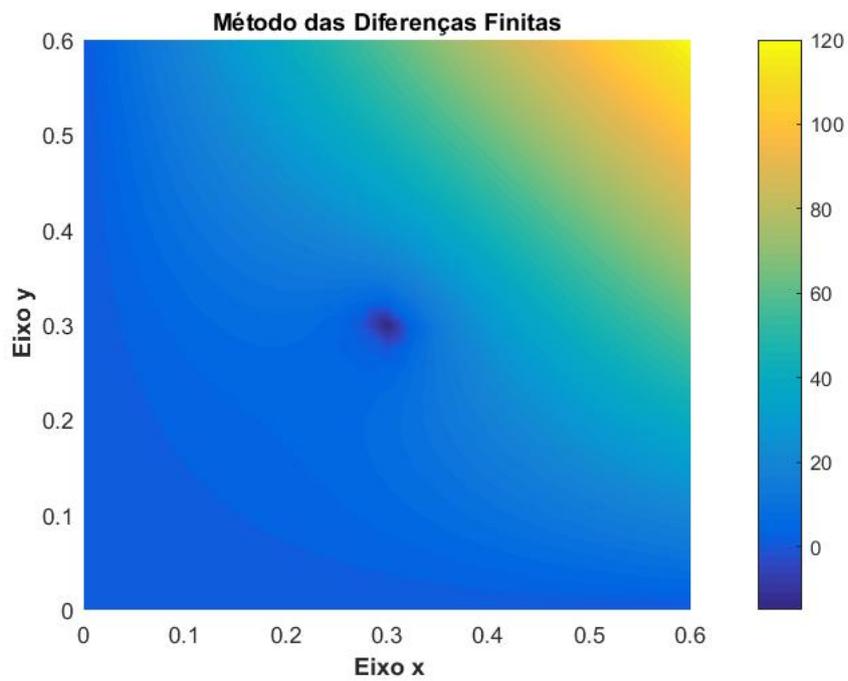


Figura 6.12 – Solução Numérica pelo MDF para $h = 0.025$.

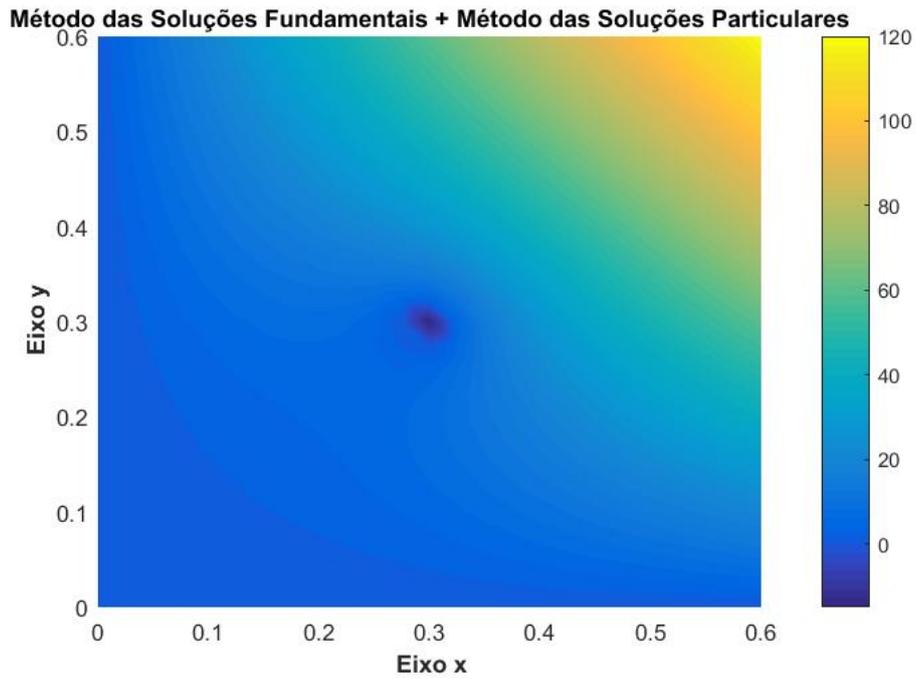


Figura 6.13 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 0.5$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.

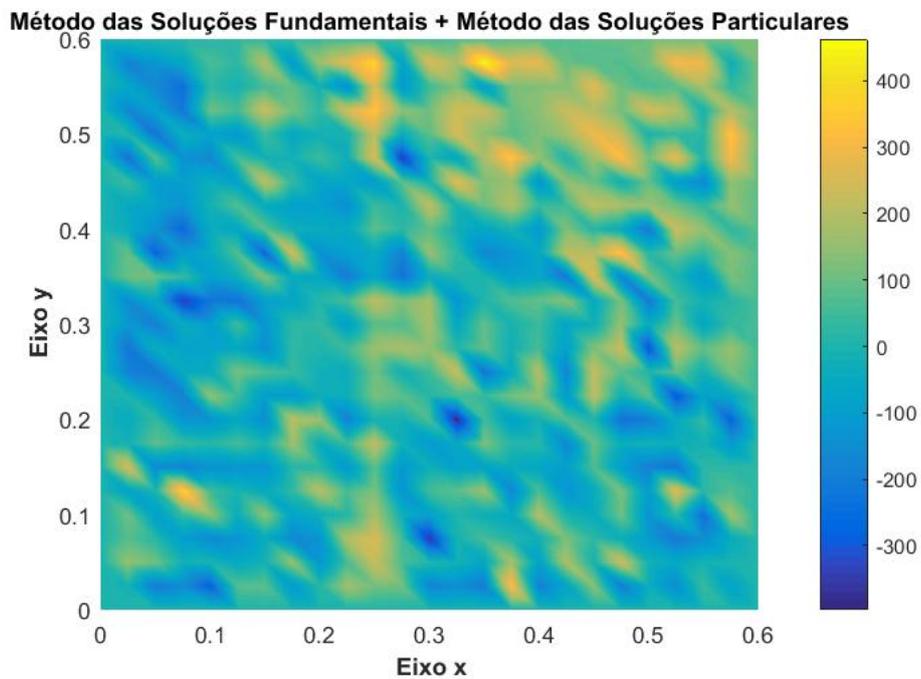


Figura 6.14 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 1$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.

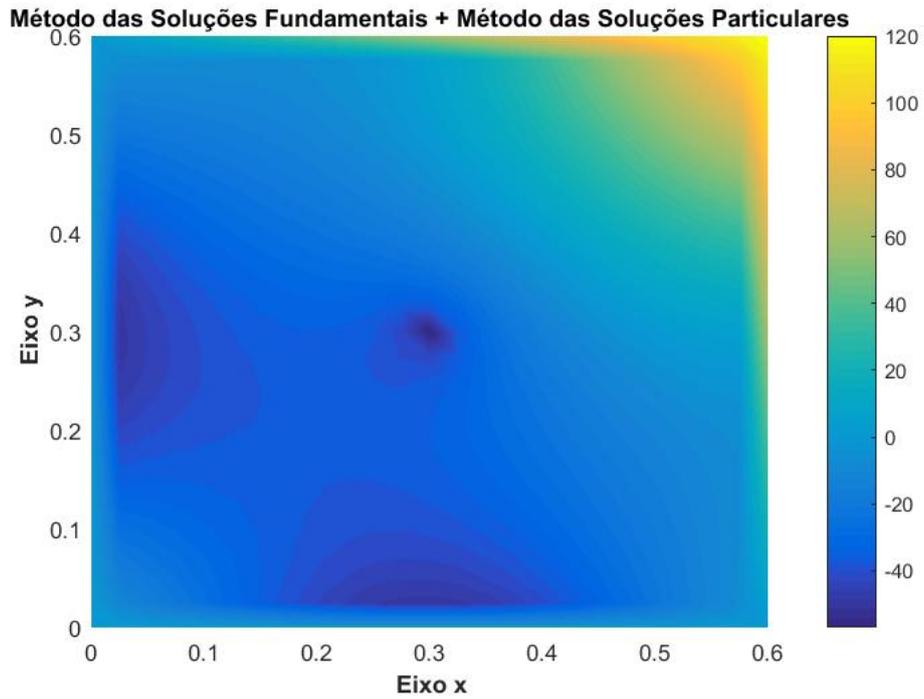


Figura 6.15 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 1$, quando utilizado o comando `pinv` e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.

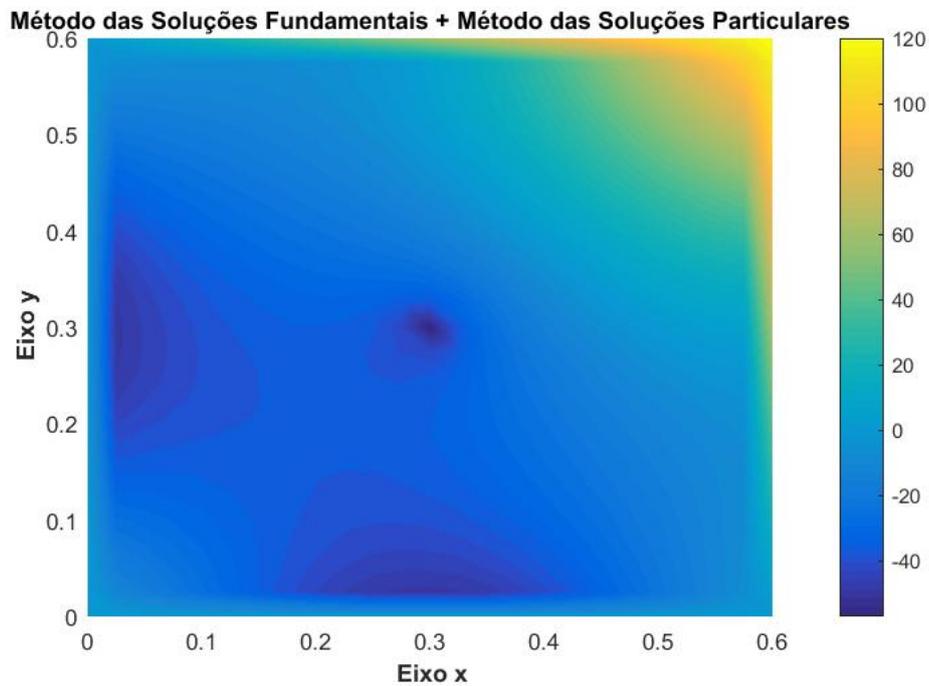


Figura 6.16 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 1$, quando utilizado a regularização de Tikhonov e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.

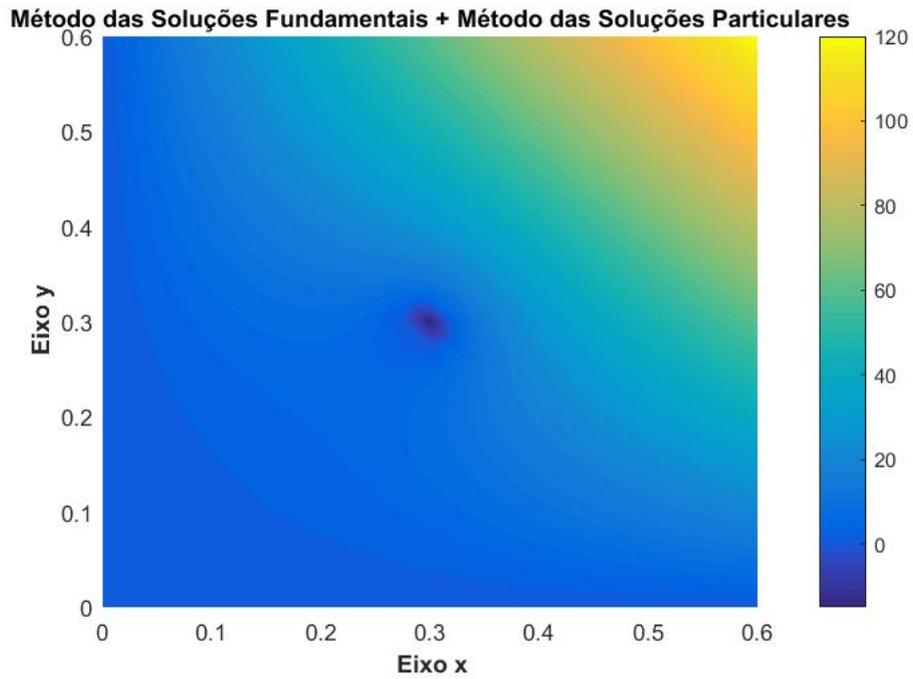


Figura 6.17 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 1.5$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.

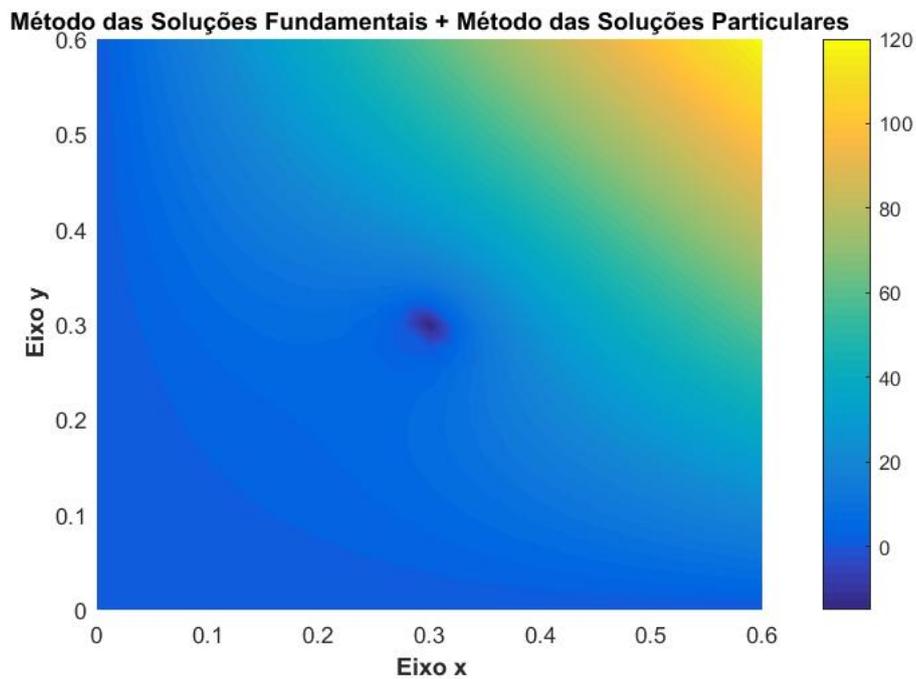


Figura 6.18 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 3$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.

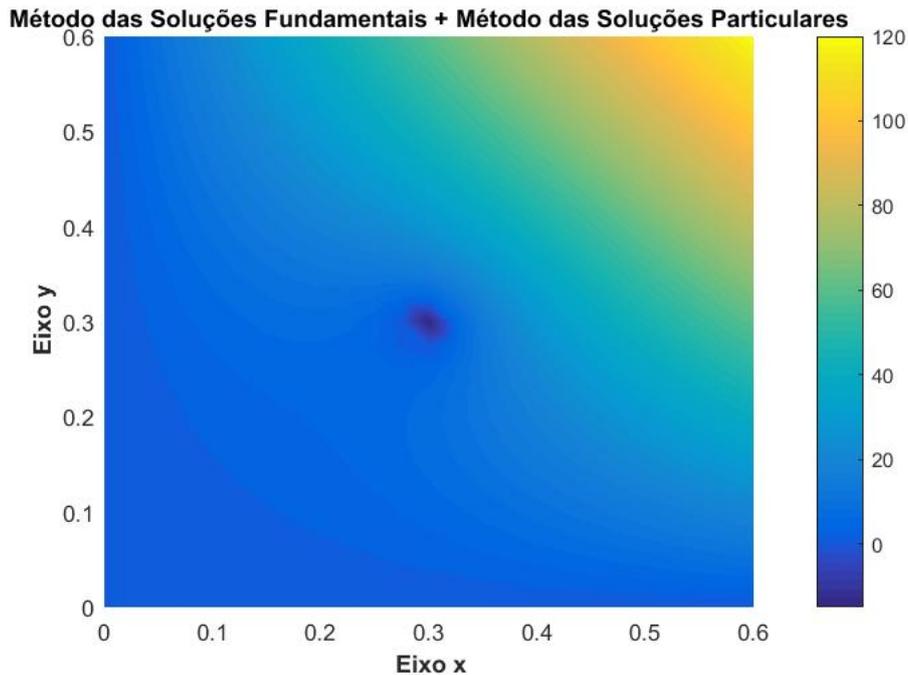


Figura 6.19 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 4$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.

Abaixo, tem-se uma tabela comparativa contemplando os seguintes aspectos:

- *Valor máximo* diz respeito ao máximo da diferença, em módulo, das soluções numéricas obtidas, considerando o comando barra invertida, a solução utilizando a pseudo inversa e a regularização de Tikhonov.

- *Somatório das diferenças* toma a soma de todas as diferenças de soluções, em módulo, também para as soluções supracitadas do sistema linear.

- *Número de Condicionamento da Matriz do Sistema* traz a informação a respeito da matriz dos coeficientes do MSF. Tal informação foi obtida utilizando o comando *cond*.

- *Tempo MSF* traz a informação do tempo de execução do programa proposto para o problema. calculado utilizando o comando *tic-toc* do software.

- *Rank Matriz do MSF* traz a informação do posto numérico da matriz dos coeficientes do sistema de acordo com a variação do raio, sendo que, para obter tal informação, utilizou-se o comando *rank* do software.

O Programa desenvolvido para o MDF teve tempo de execução igual a 0.033705 segundos e o número de condicionamento da matriz foi de $2.327776e + 02$.

Além disso, cabe destacar que, para este primeiro cenário de simulação do problema, utilizou-se o número de fontes virtuais igual ao número de pontos fonte, ou seja, o número de pontos da fronteira fictícia foi igual ao número de pontos sobre o contorno.

MDF (h = 0.025) versus MSF	MSF (r = 0.5)	MSF (r = 1)	MSF (r = 1.5)	MSF (r = 3)	MSF (r = 4)
Valor Máximo	0.4883	405.7306	0.4883	0.4904	0.4884
Somatório das diferenças (em módulo)	11.3093	5.5875e+04	11.3085	11.4976	11.4924
Número de Condicionamento da Matriz do Sistema - MSF	3.618258e+10	8.716274e+17	1.832949e+18	1.429681e+18	5.659657e+18
Valor Máximo pinv	0.4883	51.2543	0.4871	0.4928	0.4875
Somatório das diferenças (em módulo) - pinv	11.3093	2.0881e+04	11.7102	11.0113	11.4218
Valor Máximo Tikhonov	0.4883	50.9981	0.4860	0.4533	0.6228
Somatório das diferenças (em módulo) Tikhonov	11.3092	2.0891e+04	14.1132	26.7411	117.0598
Tempo MSF (segundos)	1.683513	1.728287	1.749827	1.713294	1.699476
Tempo MSF (segundos) - pinv	1.716082	1.708894	1.748624	1.685914	1.654457
Tempo MSF (segundos) Tikhonov	1.733179	1.729050	1.660015	1.680312	1.667387
Rank Matriz do MSF	96	56	41	27	23

Para um segundo cenário de simulação do problema, utilizou-se o número de fontes virtuais igual a metade do número de pontos fonte. Neste caso, obteve-se os resultados da tabela comparativa abaixo:

MDF (h = 0.025) versus MSF	MSF (r = 0.5)	MSF (r = 1)	MSF (r = 1.5)	MSF (r = 3)	MSF (r = 4)
Valor Máximo	0.4883	51.2389	0.4883	0.4883	0.4883
Somatório das diferenças (em módulo)	11.3093	2.0881e+04	11.3093	11.3029	11.2631
Número de Condicionamento da Matriz do Sistema - MSF	2.212625e+05	1.777409e+16	1.389938e+16	1.437263e+17	1.848727e+17
Valor Máximo pinv	0.4883	51.2389	0.4871	0.4858	0.4872
Somatório das diferenças (em módulo) - pinv	11.3093	2.0881e+04	11.5726	11.9743	11.4962
Tempo MSF (segundos)	1.688237	1.679353	1.691206	1.716904	1.663068
Tempo MSF (segundos) - pinv	1.707261	1.690246	1.700361	1.685587	1.715781
Rank Matriz do MSF	48	47	39	27	23

Problema 3: Considera-se

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{\dot{g}}{\rho K}, \quad (6.2)$$

para (x, y) no conjunto $R = \{(x, y) \mid 0 < x < 100, 0 < y < 100\}$, com as condições de contorno $h(0, y) = h(x, 0) = h(x, 100) = h(100, y) = 100$.

O termo fonte, presente na parte direita da equação, é considerado como pontual, aplicado no centro do domínio. Utiliza-se os parâmetros $Q = 0.03155$ e $K = 10^{-3}$ para o teste numérico. Este termo foi resolvido utilizando a solução particular proposta, sendo que o ponto que apresenta indeterminação foi contornado utilizando um ponto que dista $\frac{h}{5}$ da singularidade, sendo h o passo utilizado para o MDF

Para o MSF, considerou-se 128 pontos sobre o contorno, 961 pontos distribuídos sobre o domínio e 1089 pontos para o cálculo da solução particular. Quanto ao número de pontos na fronteira fictícia, simulou-se dois cenários: o primeiro, com o mesmo número de pontos sobre o contorno e, o segundo, com a metade de pontos utilizados no contorno. Em cada cenário, variou-se o tamanho dos raios, buscando analisar a sensibilidade do método a este parâmetro.

Para o MDF, utilizou-se incremento/passo $h = 3.125$ fixo em ambos os eixos, sendo que, para este método, o programa desenvolvido teve tempo de execução igual a 0.149707 segundos e o número de condicionamento da matriz foi de 414.3451.

Os gráficos das soluções numéricas são dados abaixo, omitindo-se alguns para os casos em que, graficamente, não é possível perceber diferença nos resultados.

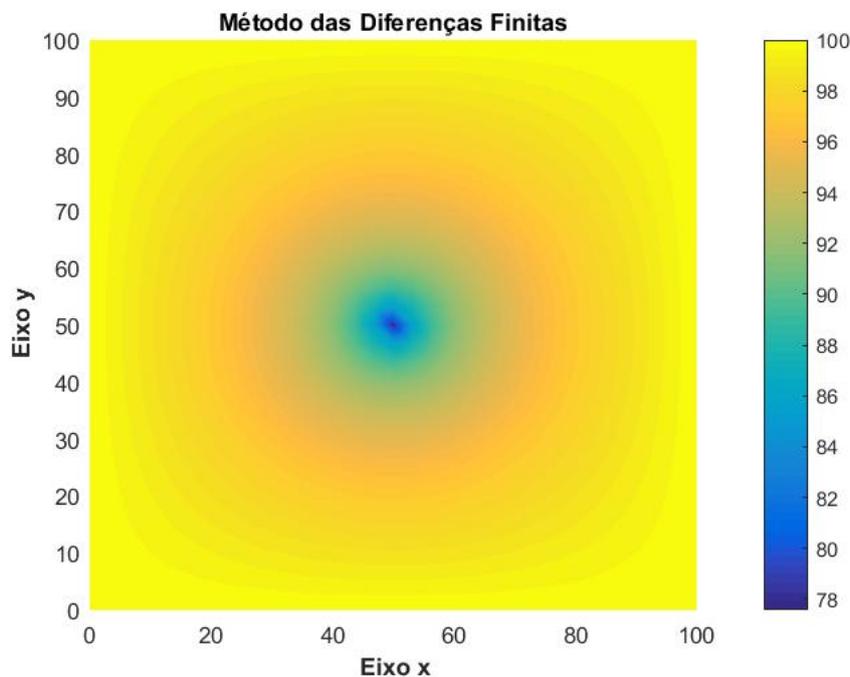


Figura 6.20 – Solução Numérica pelo MDF para $h = 3.125$.

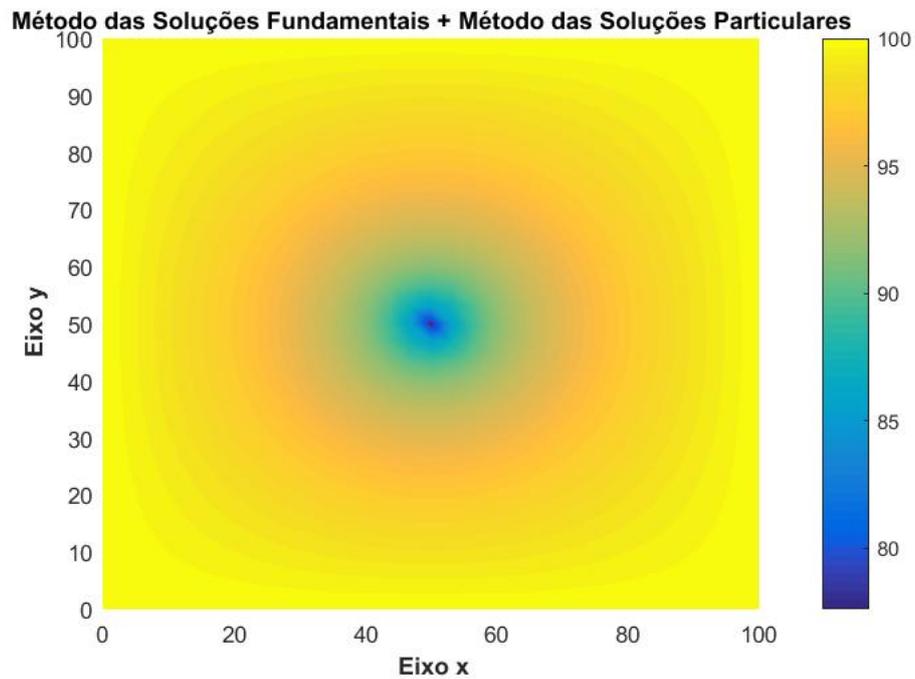


Figura 6.21 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 71$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.

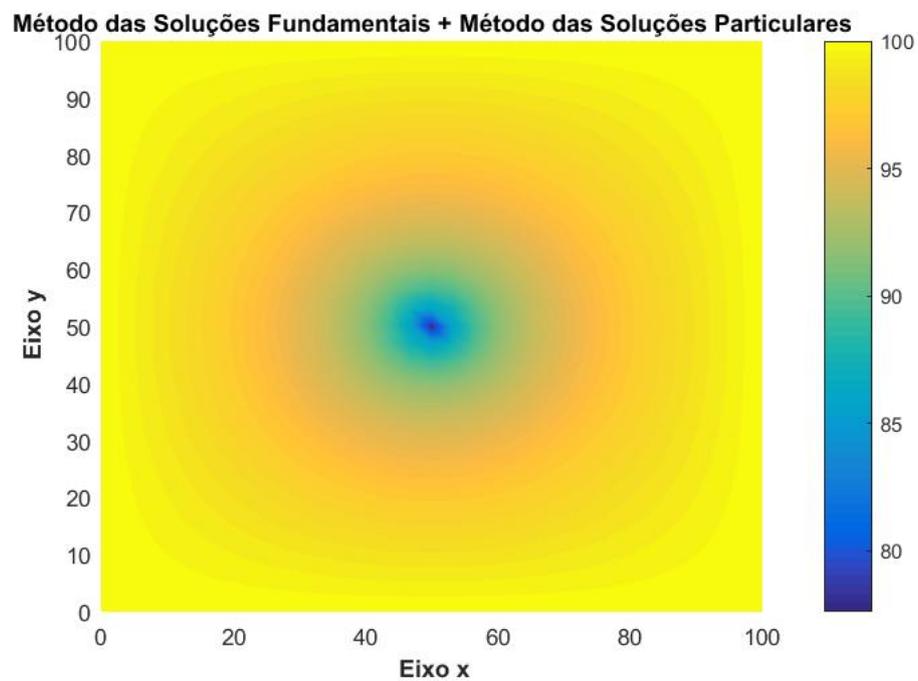


Figura 6.22 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 75$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.

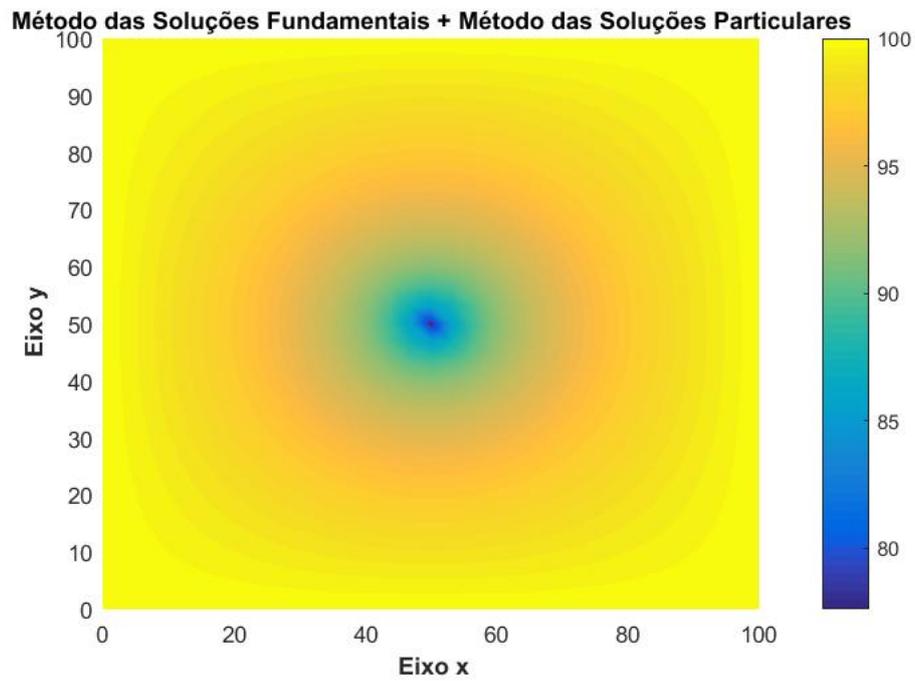


Figura 6.23 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 90$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.

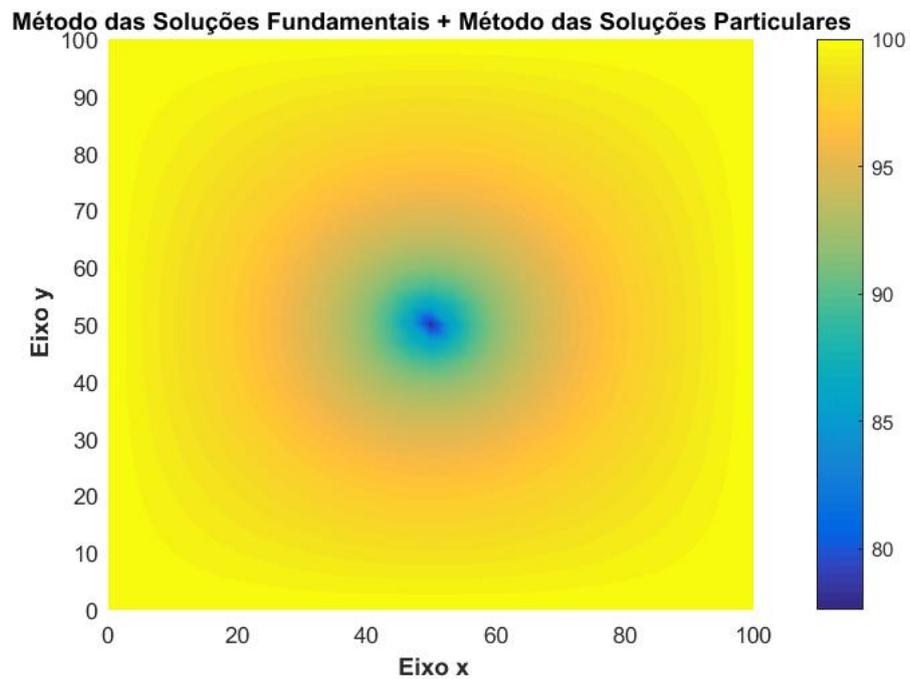


Figura 6.24 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 100$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.

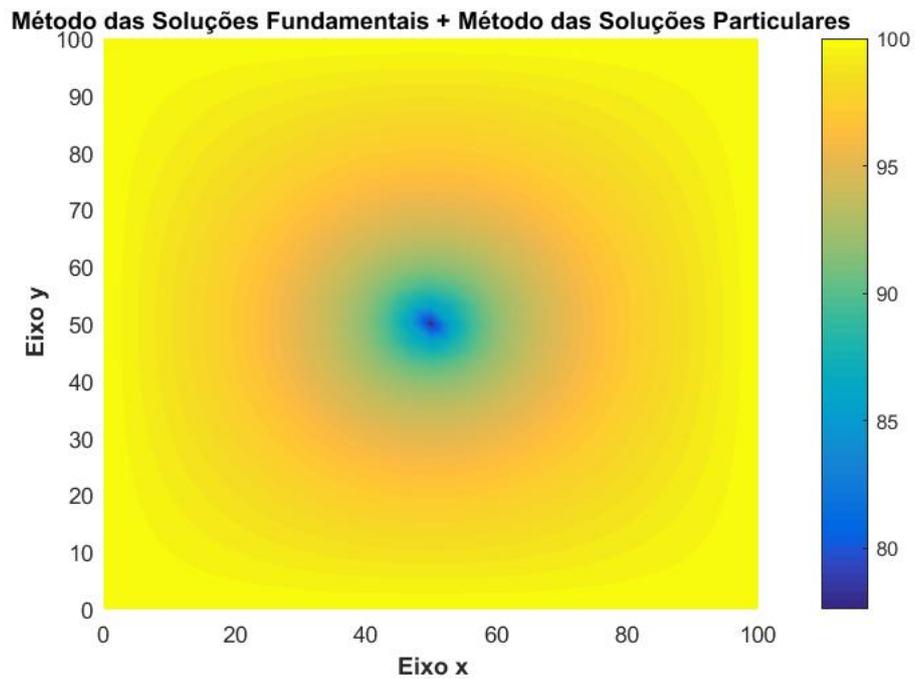


Figura 6.25 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 155$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.

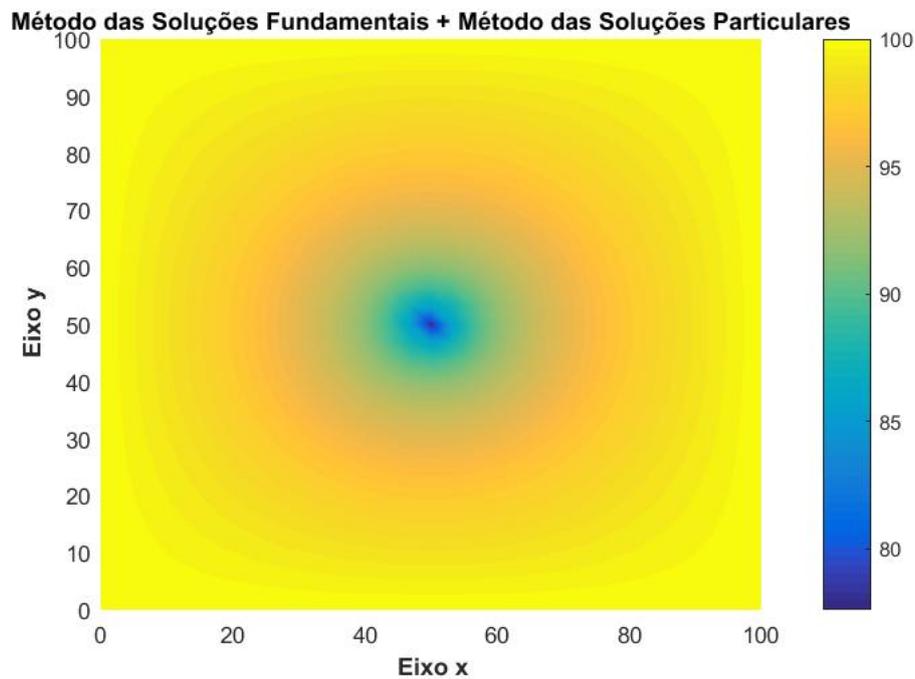


Figura 6.26 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 210$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.

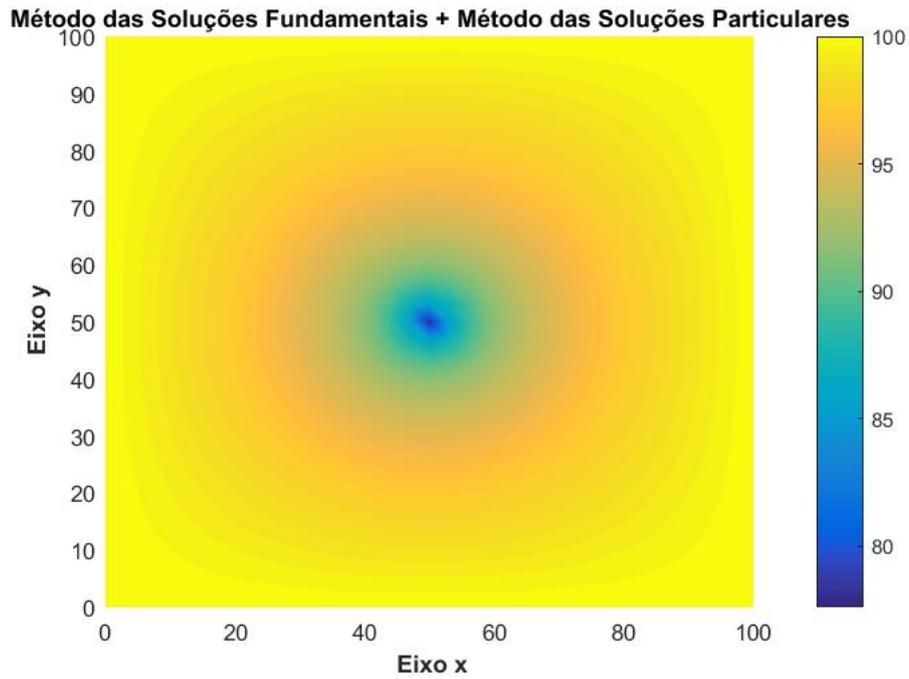


Figura 6.27 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 300$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.

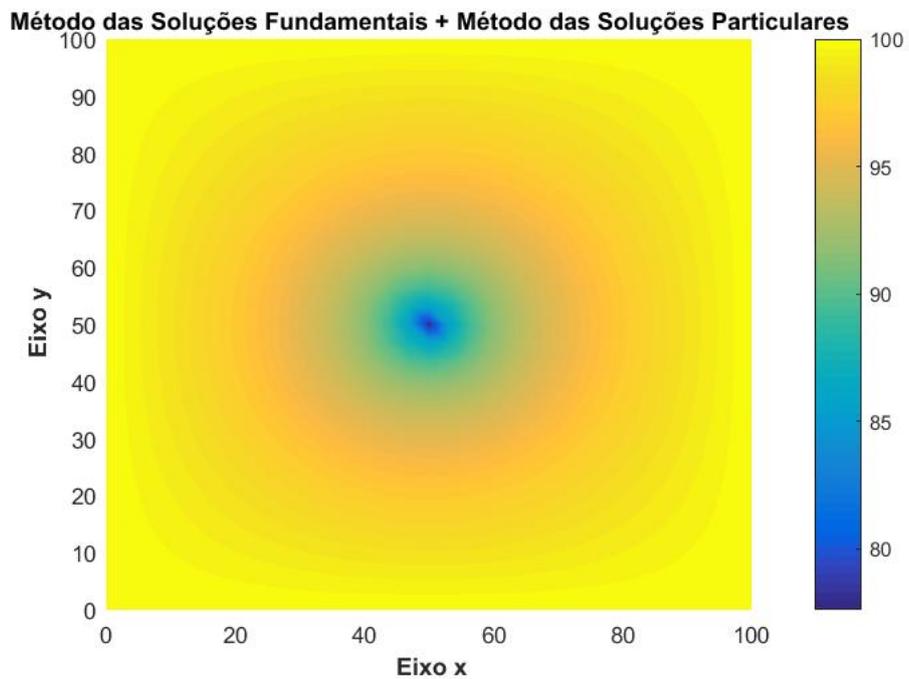


Figura 6.28 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 500$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.

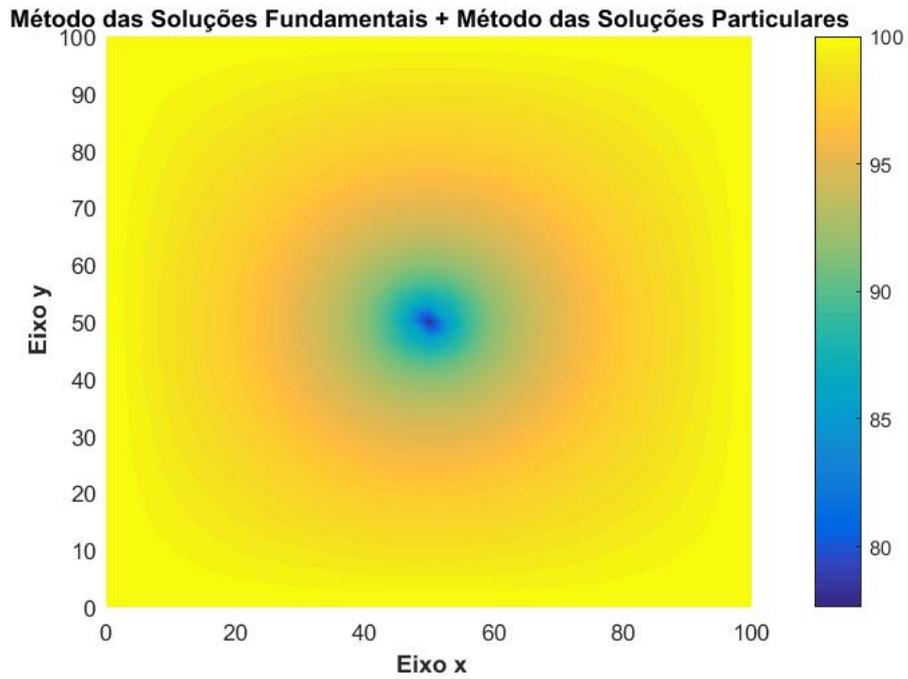


Figura 6.29 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 1000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.

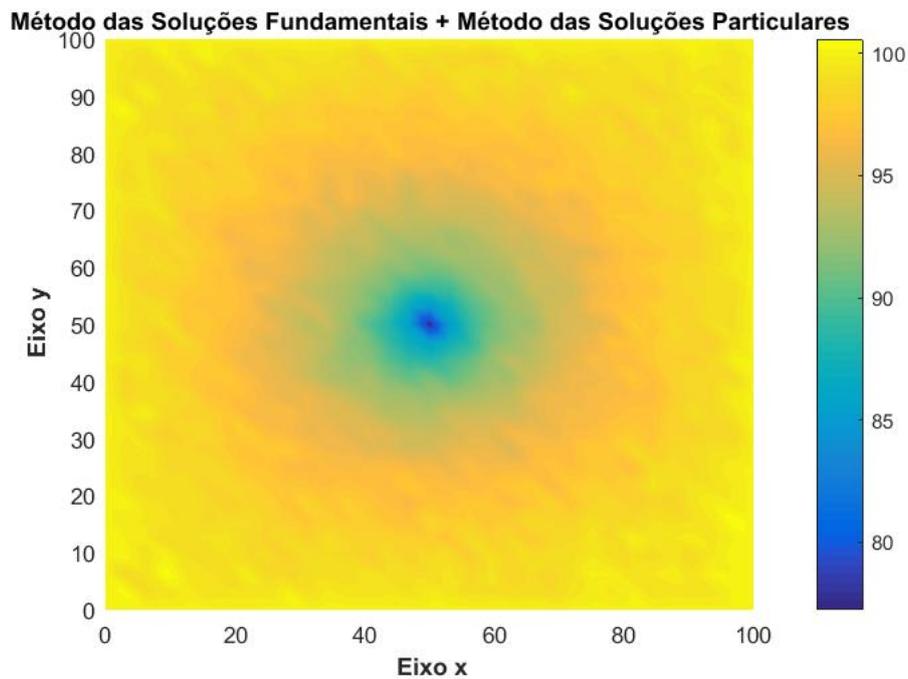


Figura 6.30 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 5000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.

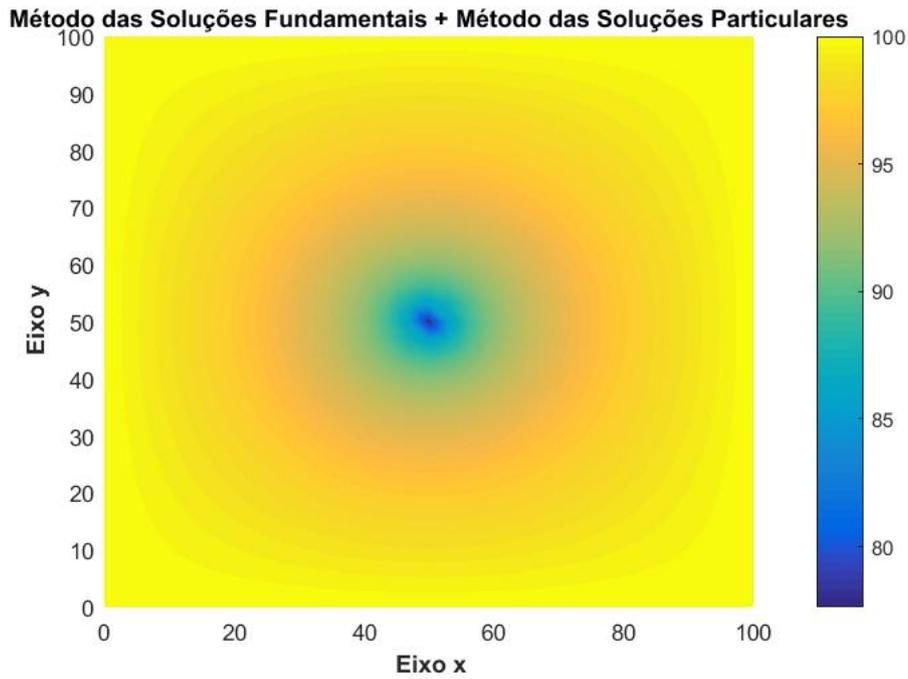


Figura 6.31 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 5000$, quando utilizado o comando `pinv` e número de pontos no contorno igual ao número de pontos sobre a fronteira fictícia.

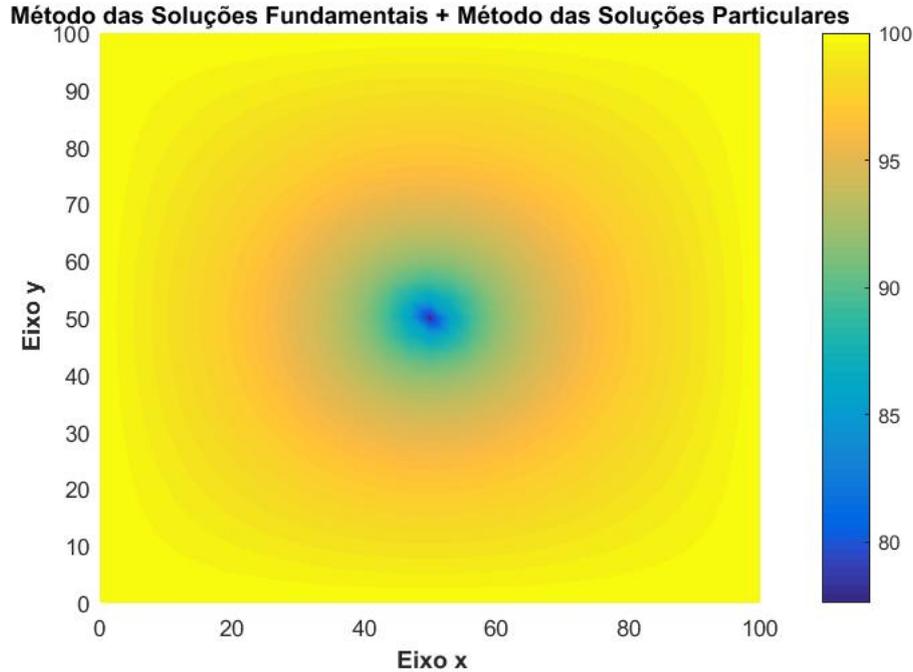


Figura 6.32 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 5000$, quando utilizado o comando `barra` invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.

Abaixo, tem-se uma tabela comparativa contemplando os aspectos já considerados no problema anterior, quando utilizados a quantidade de número de pontos fonte igual ao número de pontos sobre o contorno.

MDF (h = 3.125) versus MSF	MSF (r = 71)	MSF (r = 75)	MSF (r = 90)	MSF (r = 100)	MSF (r = 155)
Valor Máximo	0.2297	0.2296	0.2296	0.2296	0.2296
Somatório das diferenças (em módulo)	5.7516	5.7694	5.7695	5.7695	5.7695
Número de Condicionamento da Matriz do Sistema - MSF	4.8426e+10	1.0351e+12	8.3412e+16	9.3765e+18	4.2243e+18
Valor Máximo pinv	0.2297	0.2296	0.2341	0.2268	0.2291
Somatório das diferenças (em módulo) - pinv	5.7496	5.7759	7.2304	7.6734	6.0561
Valor Máximo Tikhonov	0.2297	0.2296	0.2296	0.2296	0.2296
Somatório das diferenças (em módulo) Tikhonov	5.7516	5.7694	5.7691	5.7663	5.7428
Tempo MSF (segundos)	1.805515	1.661374	1.952716	1.772554	1.813840
Tempo MSF (segundos) - pinv	1.652038	1.807940	1.623108	1.829856	1.765876
Tempo MSF (segundos) Tikhonov	2.659111	3.080194	3.211577	2.625673	4.178452
Rank Matriz do MSF	128	128	112	95	53
MDF (h = 3.125) versus MSF	MSF (r = 210)	MSF (r = 300)	MSF (r = 500)	MSF (r = 1000)	MSF (r = 5000)
Valor Máximo	0.2296	0.2297	0.2301	0.2470	1.6014
Somatório das diferenças (em módulo)	5.7696	5.7666	5.9226	15.6742	453.3007
Número de Condicionamento da Matriz do Sistema - MSF	6.3813e+18	3.0441e+19	1.0943e+19	3.4080e+18	1.5818e+19
Valor Máximo pinv	0.2309	0.2271	0.2328	0.2323	0.2395
Somatório das diferenças (em módulo) - pinv	5.6562	7.3919	6.4291	6.1401	14.1619
Valor Máximo Tikhonov	0.2289	0.2285	0.2198	0.7000	0.7863
Somatório das diferenças (em módulo) Tikhonov	8.2418	9.2581	14.8760	236.1272	264.2622
Tempo MSF (segundos)	1.755651	1.829860	1.877872	1.870383	1.911250
Tempo MSF (segundos) - pinv	1.896514	1.721850	1.825656	1.799371	1.664673
Tempo MSF (segundos) Tikhonov	2.643859	2.318431	2.771861	4.217578	3.328210
Rank Matriz do MSF	41	33	25	19	13

Agora, considerando o número de pontos fonte igual a metade do número de pontos no contorno, obtém-se:

MDF (h = 3.125) versus MSF	MSF (r = 71)	MSF (r = 75)	MSF (r = 90)	MSF (r = 100)	MSF (r = 155)
Valor Máximo	0.2296	0.2296	0.2296	0.2296	0.2296
Somatório das diferenças (em módulo)	6.0024	5.7691	5.7695	5.7695	5.7695
Número de Condicionamento da Matriz do Sistema - MSF	1.1909e+06	4.0879e+06	3.7348e+08	7.1023e+09	5.9149e+15
Valor Máximo pinv	0.2296	0.2296	0.2296	0.2296	0.2348
Somatório das diferenças (em módulo) - pinv	6.0024	5.7691	5.7695	5.7693	7.7440
Tempo MSF (segundos)	1.328381	1.286369	1.224582	1.253031	1.179818
Tempo MSF (segundos) - pinv	1.260387	1.257241	1.234868	1.292029	1.225574
Rank Matriz do MSF	64	64	64	64	53
MDF (h = 3.125) versus MSF	MSF (r = 210)	MSF (r = 300)	MSF (r = 500)	MSF (r = 1000)	MSF (r = 5000)
Valor Máximo	0.2296	0.2296	0.2296	0.2296	0.2287
Somatório das diferenças (em módulo)	5.7695	5.7695	5.7621	5.7917	9.2046
Número de Condicionamento da Matriz do Sistema - MSF	2.5263e+17	2.8253e+17	3.2954e+17	2.9383e+17	2.9276e+17
Valor Máximo pinv	0.2315	0.2330	0.2309	0.2355	0.2438
Somatório das diferenças (em módulo) - pinv	5.8298	6.5296	5.6611	8.2341	17.5824
Tempo MSF (segundos)	1.247878	1.230417	1.236021	1.292676	1.246055
Tempo MSF (segundos) - pinv	1.273813	1.243741	1.215180	1.221444	1.212023
Rank Matriz do MSF	41	33	25	19	13

Problema 4: Considera-se

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{\dot{g}}{\rho K}, \quad (6.3)$$

para (x, y) no conjunto $R = \{(x, y) \mid 0 < x < 10000, 0 < y < 10000\}$, com as condições de contorno $h(0, y) = h(x, 0) = h(x, 10000) = h(10000, y) = 100$. O termo fonte, presente na parte direita da equação, é considerado como pontual, aplicado no centro do domínio. Utiliza-se os parâmetros $Q = 0.06755$ e $K = 10^{-3}$ para o teste numérico. Este termo foi resolvido utilizando a solução particular proposta, sendo que o ponto que apresenta indeterminação foi contornado utilizando um ponto que dista $\frac{h}{5}$ da singularidade, sendo h o passo utilizado para o MDF.

Para o MSF, considerou-se 320 pontos sobre o contorno, 6241 pontos distribuídos sobre o domínio e 6561 pontos para o cálculo da solução particular. Quanto ao número de pontos na fronteira fictícia, simulou-se considerando a metade de pontos utilizados no contorno.

Para o MDF, utilizou-se incremento/passo $h = 125$ fixo em ambos os eixos, sendo que, para este método, o programa desenvolvido teve tempo de execução igual a 85.908576 segundos e o número de condicionamento da matriz foi de $2.593156e + 03$.

Os gráficos das soluções numéricas são dados abaixo, omitindo-se alguns para os casos em que, graficamente, não é possível perceber diferença nos resultados.

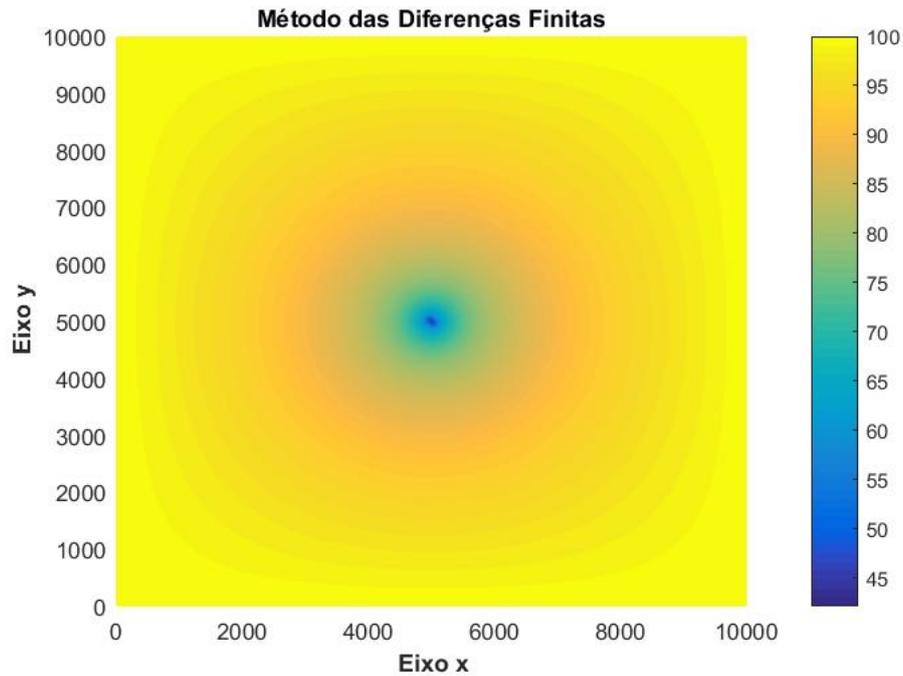


Figura 6.33 – Solução Numérica pelo MDF para $h = 125$.

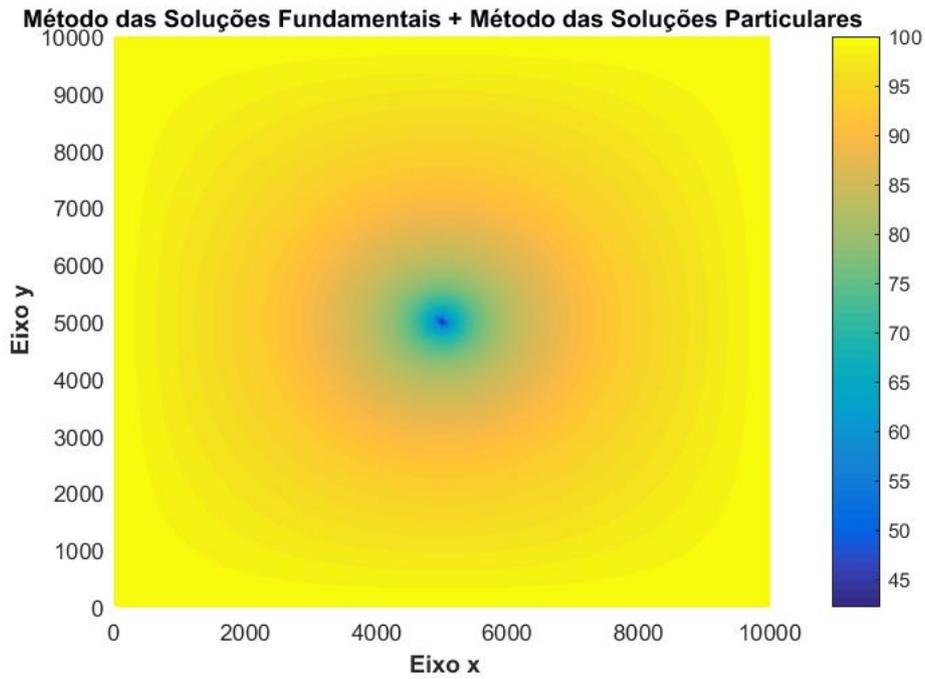


Figura 6.34 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 7100$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.

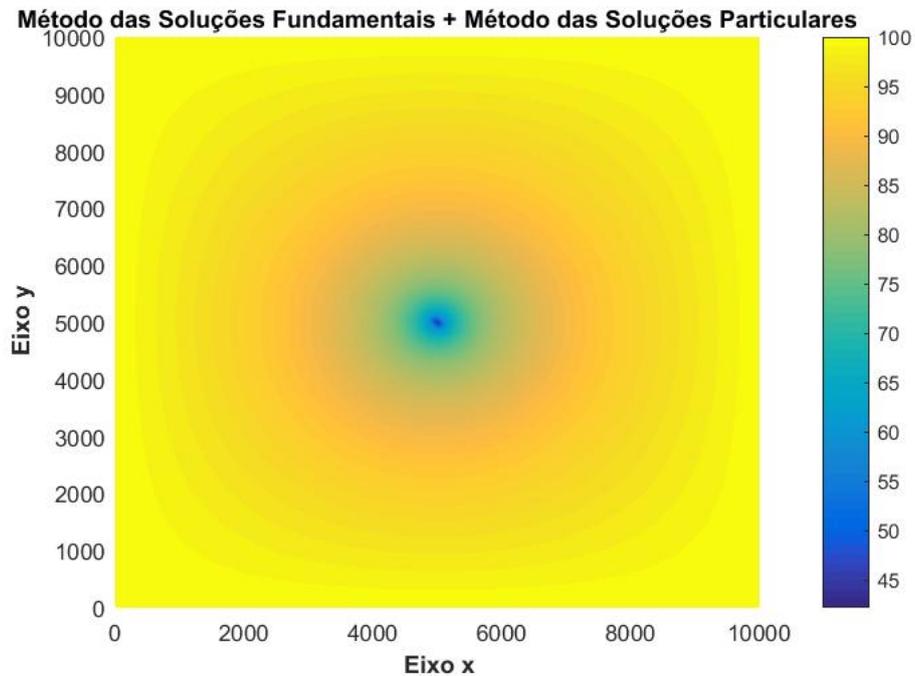


Figura 6.35 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 7500$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.

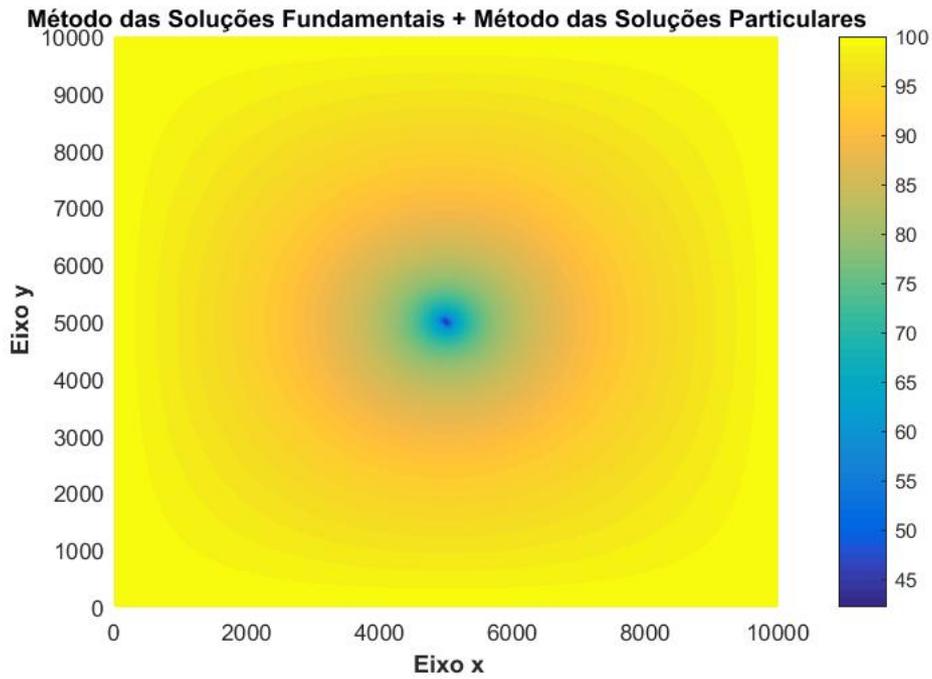


Figura 6.36 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 9000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.

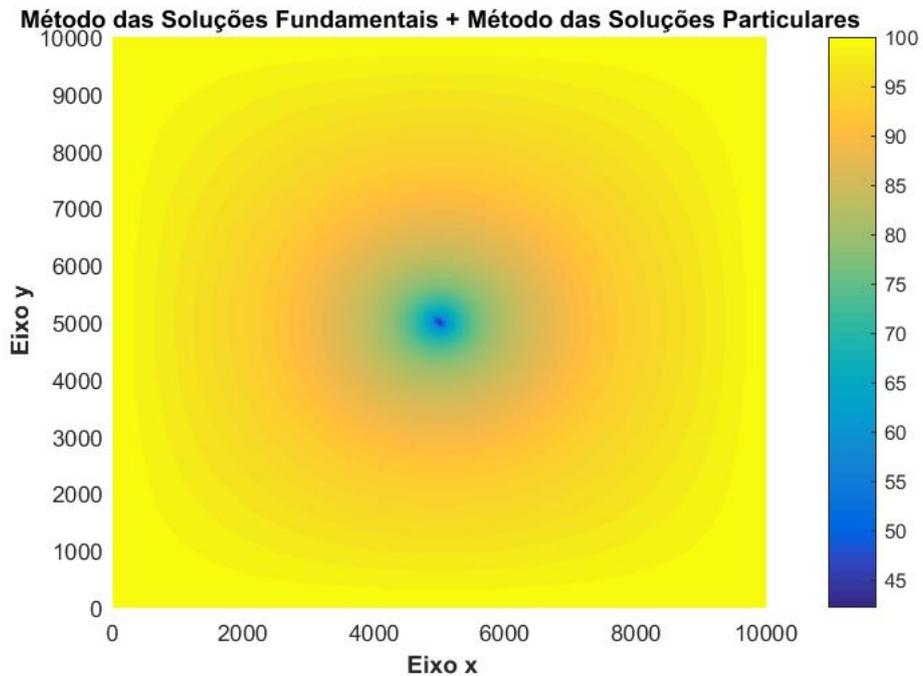


Figura 6.37 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 10000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.

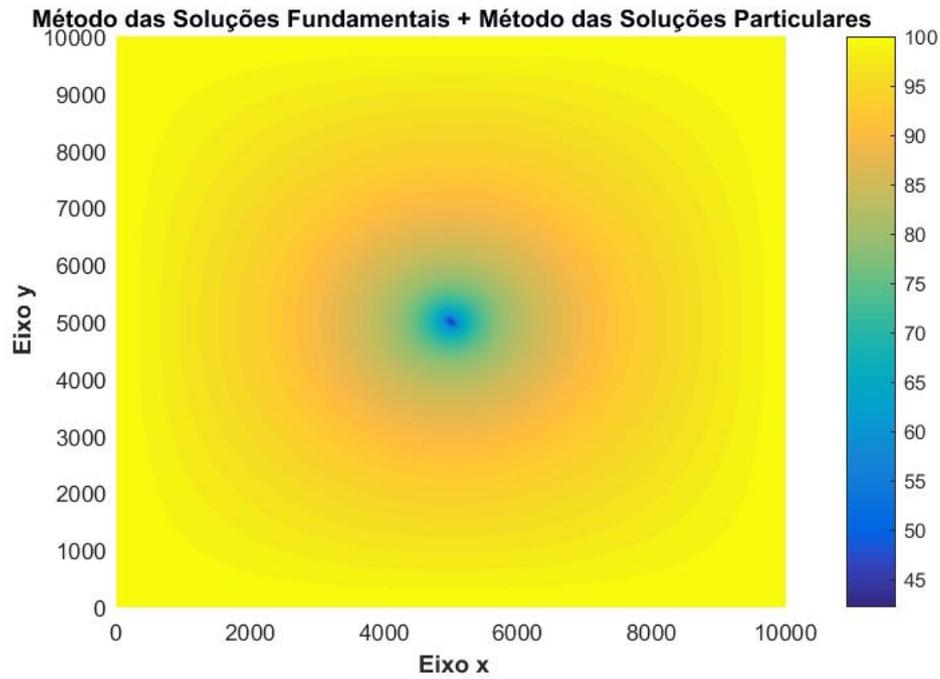


Figura 6.38 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 15500$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.

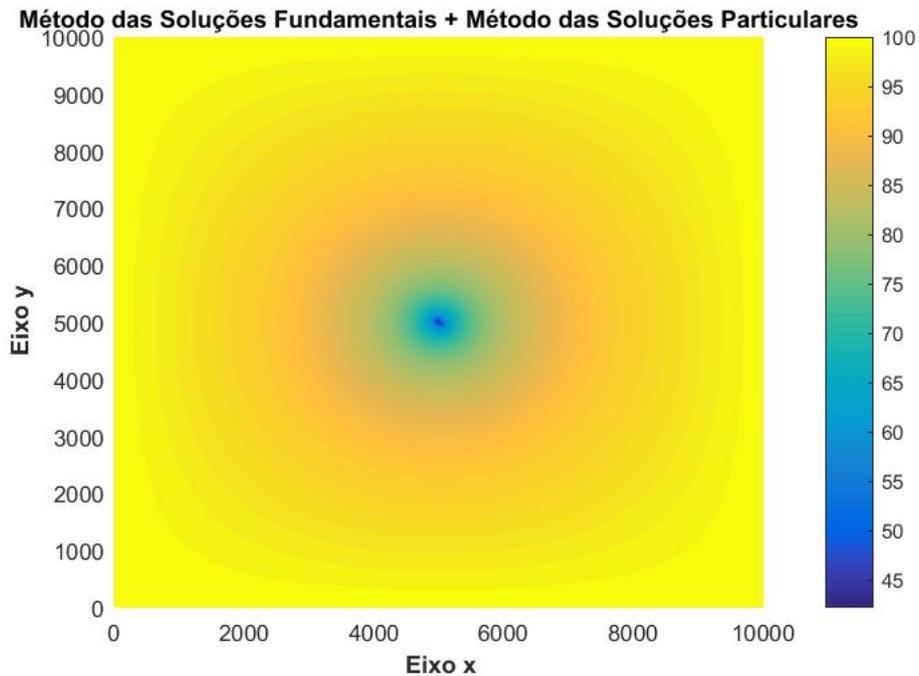


Figura 6.39 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 21000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.

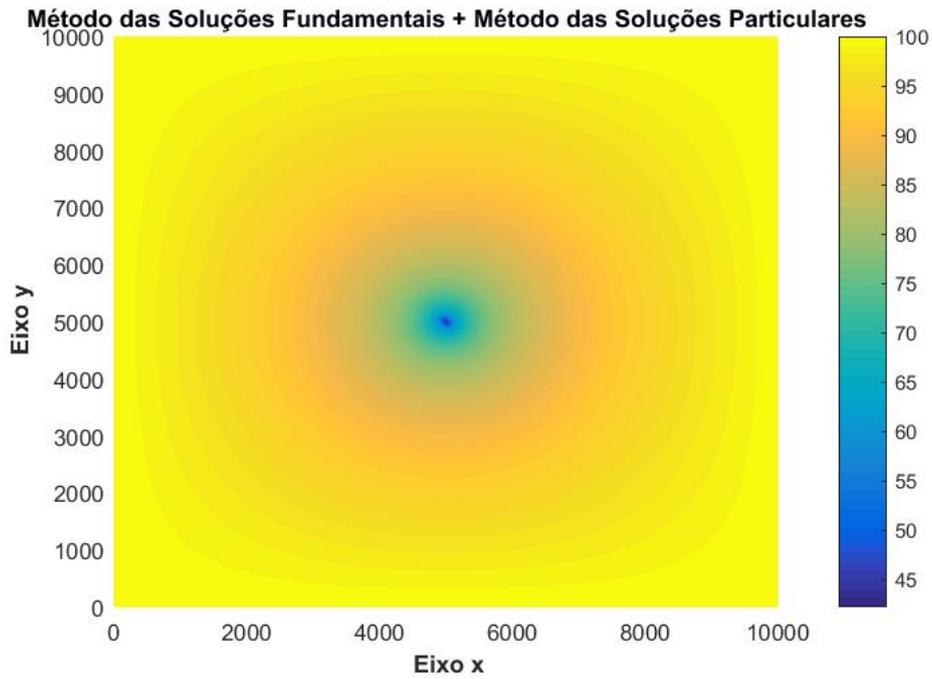


Figura 6.40 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 30000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.

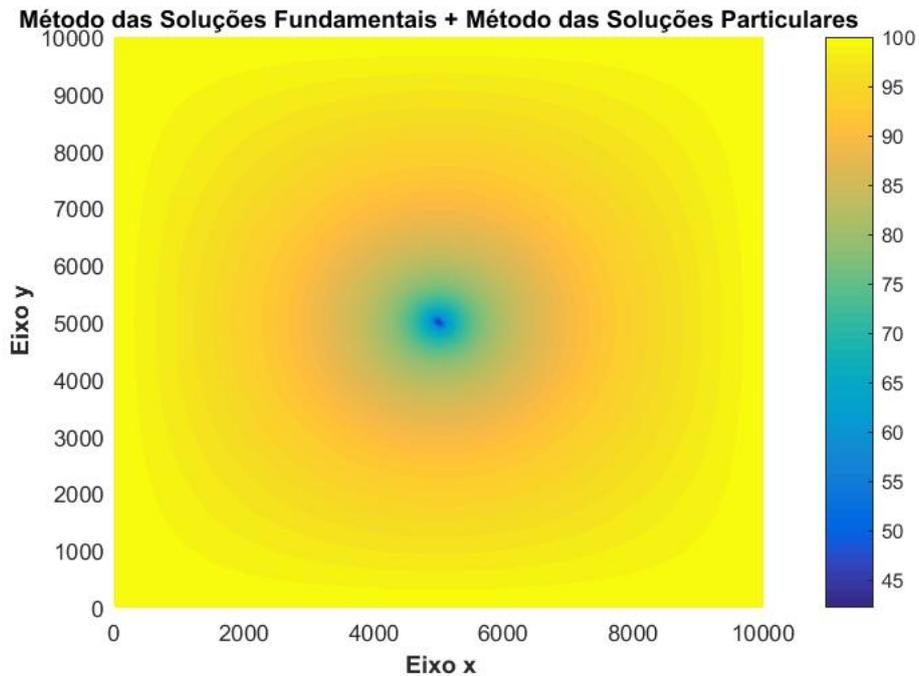


Figura 6.41 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 50000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.

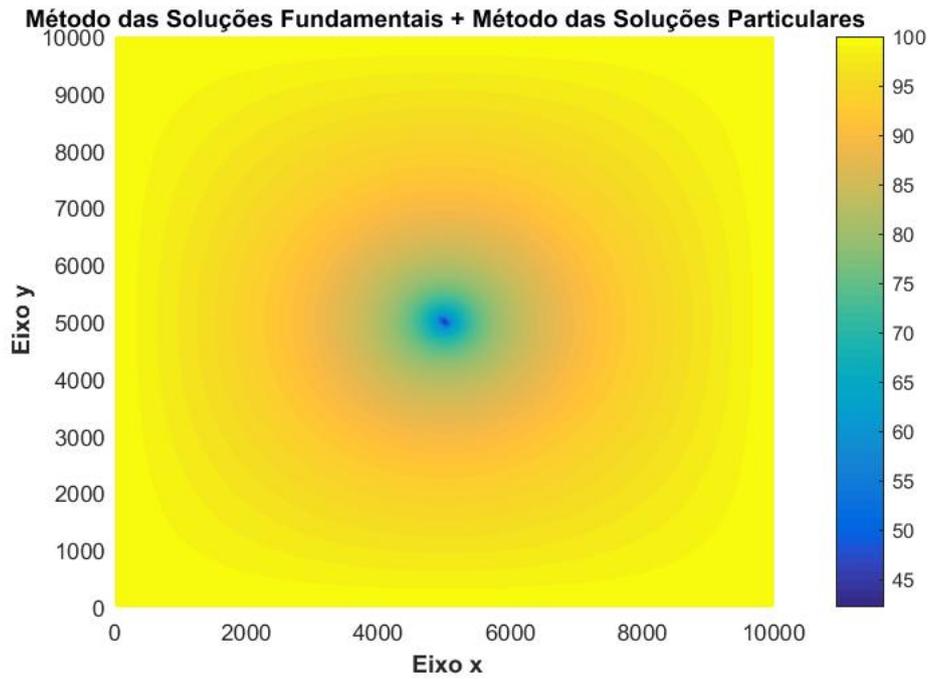


Figura 6.42 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 100000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.

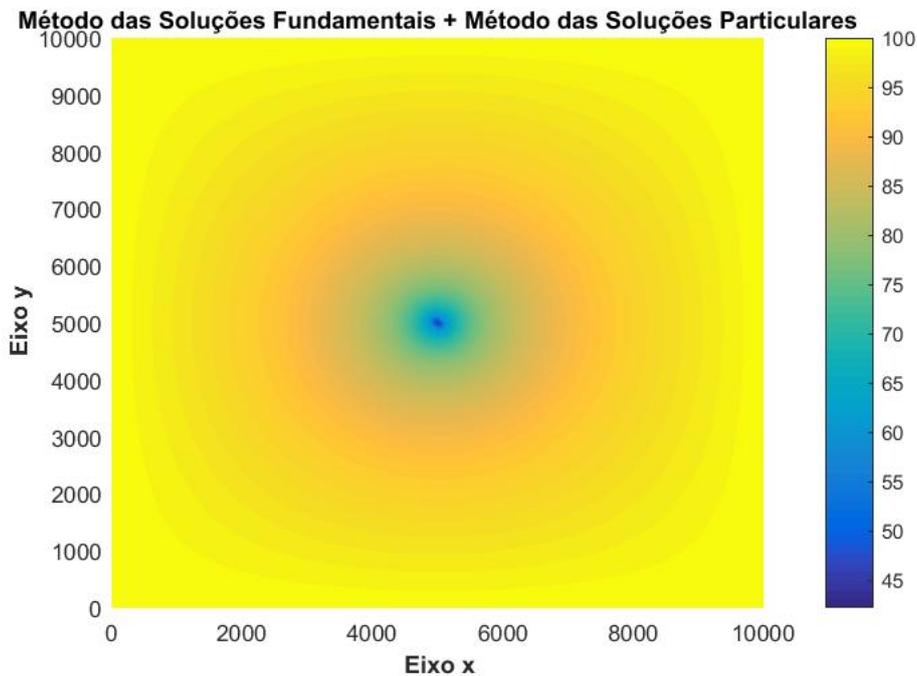


Figura 6.43 – Solução Numérica pelo MSF para $r = 500000$, quando utilizado o comando barra invertida e número de pontos sobre a fronteira fictícia sendo a metade do número de pontos no contorno.

Abaixo, tem-se uma tabela comparativa contemplando os aspectos já considerados no problema anterior.

MDF (h = 125) versus MSF	MSF (r = 7100)	MSF (r = 7500)	MSF (r = 9000)	MSF (r = 10000)	MSF (r = 15500)
Valor Máximo	0.4953	0.4953	0.4953	0.4953	0.4953
Somatório das diferenças (em módulo)	15.6640	15.6288	15.6288	15.6288	15.6288
Número de Condicionamento da Matriz do Sistema - MSF	9.887891e+12	2.280089e+14	2.311471e+17	3.133165e+17	4.204238e+17
Valor Máximo pinv	0.4953	0.4954	0.4952	0.4955	0.4953
Somatório das diferenças (em módulo) - pinv	15.7059	15.6097	16.0006	15.4053	15.6947
Tempo MSF (segundos)	6.897624	6.679122	6.738310	6.810041	6.817755
Tempo MSF (segundos) - pinv	6.598050	6.639771	6.500739	6.637421	6.518028
Rank Matriz do MSF	160	152	113	91	51
MDF (h = 125) versus MSF	MSF (r = 21000)	MSF (r = 30000)	MSF (r = 50000)	MSF (r = 100000)	MSF (r = 500000)
Valor Máximo	0.4953	0.4953	0.4953	0.4953	0.4934
Somatório das diferenças (em módulo)	15.6284	15.6268	15.8946	18.3190	87.6546
Número de Condicionamento da Matriz do Sistema - MSF	4.166689e+17	3.693802e+17	3.677880e+17	3.811911e+17	4.712152e+17
Valor Máximo pinv	0.4953	0.4953	0.4954	0.4954	0.4934
Somatório das diferenças (em módulo) - pinv	15.6326	15.7362	18.2081	18.2387	87.6550
Tempo MSF (segundos)	6.755992	6.934699	6.781568	8.526533	6.767242
Tempo MSF (segundos) - pinv	6.571598	6.750075	6.662234	6.509666	7.109809
Rank Matriz do MSF	39	31	23	19	11

Problema 5: Considera-se

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{T}{S} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) + \frac{\dot{g}}{\rho K S} T, \quad (6.4)$$

para (x, y, t) no conjunto $R = \{(x, y, t) \mid 0 < x < 10000, 0 < y < 10000, 0 < t < 24400\}$, com as condições de contorno $h(0, y, t) = h(x, 0, t) = h(x, 10000, t) = h(10000, y, t)$ e condição inicial $h(x, y, 0) = 100$. O termo fonte, presente na parte direita da equação, é considerado como pontual, aplicado no centro do domínio. Utiliza-se os parâmetros $S = 0.000198$, $Q = 0.03155$ e $T = 0.015$, tempo total de simulação igual a 24400, espaçamento temporal igual a 2.5 e incrementos espaciais iguais a 250 em ambas as direções x e y .

Além disso, cabe destacar que o critério de estabilidade desenvolvido em (4.32) é atendido com os parâmetros atribuídos, garantindo assim, estabilidade numérica e, portanto, convergência.

Este problema é facilmente adaptável para resolver a equação do calor linear em duas dimensões espaciais.

A seguir, são apresentados os resultados gráficos da simulação, tanto em 3D quanto em 2D.

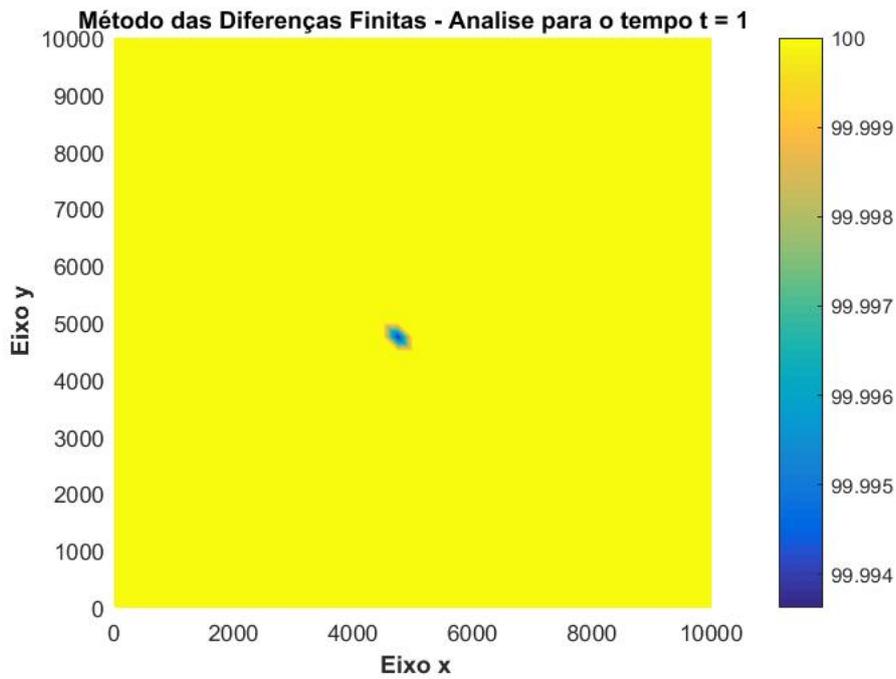


Figura 6.44 – Simulação para o MDF no tempo $t = 1$ segundo.

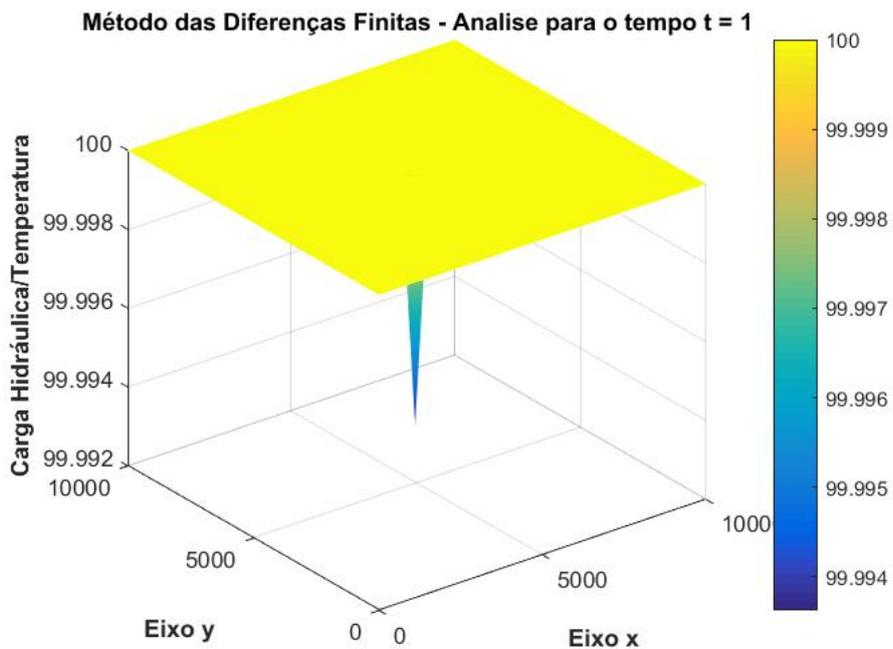


Figura 6.45 – Simulação para o MDF no tempo $t = 1$ segundo.

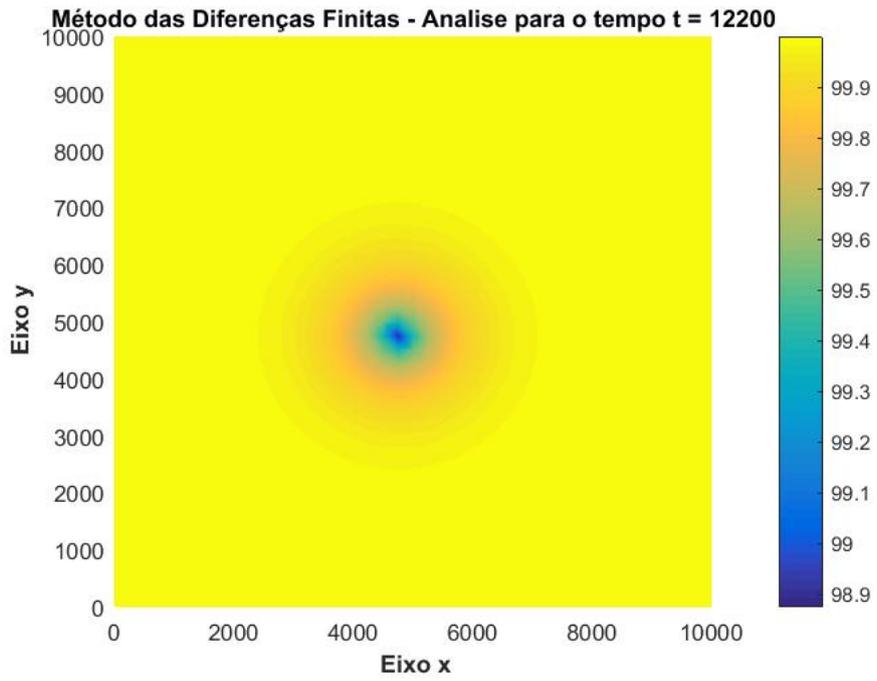


Figura 6.46 – Simulação para o MDF no tempo t = 12200 segundos.

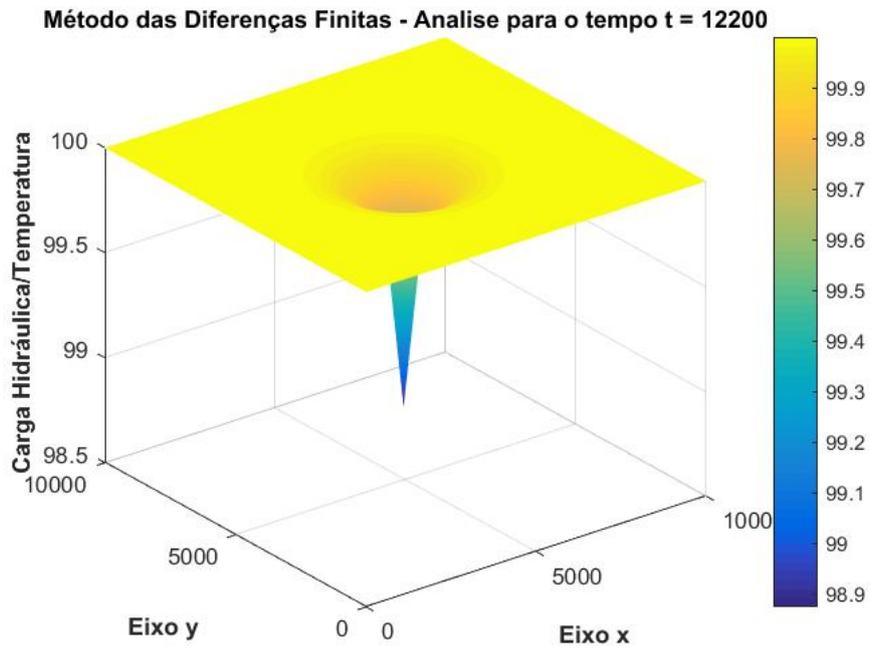


Figura 6.47 – Simulação para o MDF no tempo t = 12200 segundos.

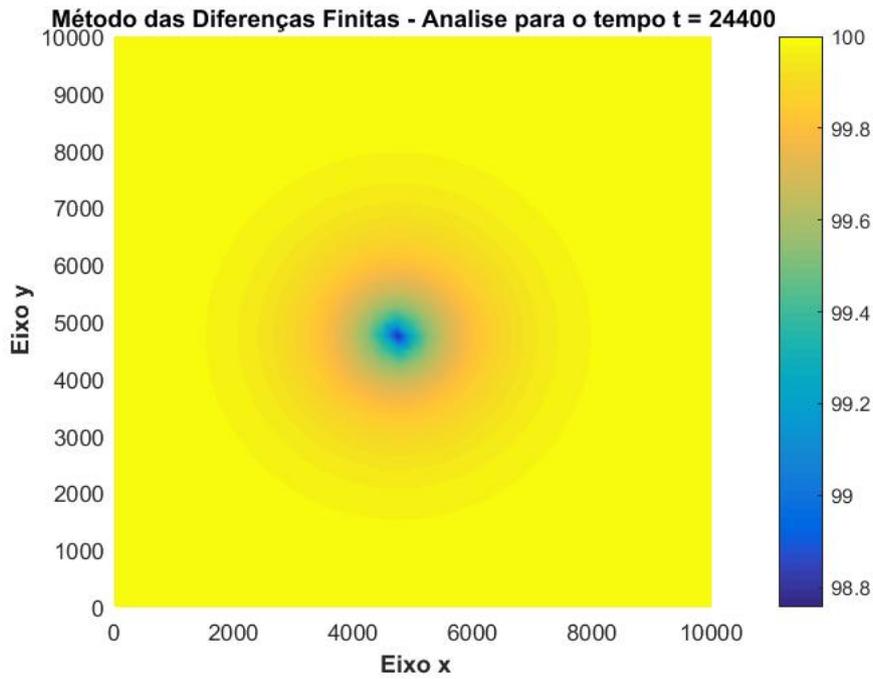


Figura 6.48 – Simulação para o MDF no tempo $t = 24400$ segundos.

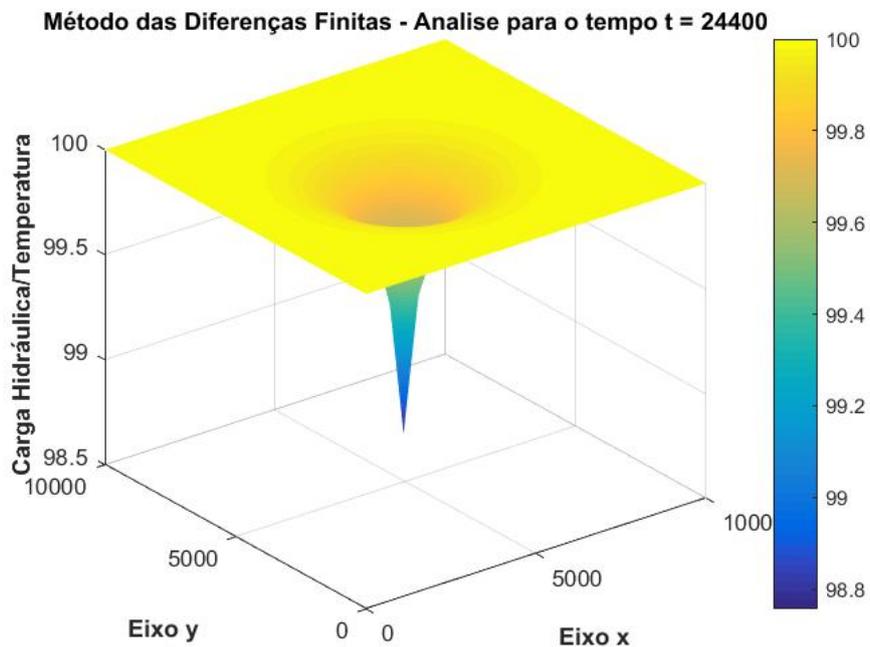


Figura 6.49 – Simulação para o MDF no tempo $t = 24400$ segundos.

A simulação para o problema 5 não foi realizada com o Método das Soluções Fundamentais devido a algumas dificuldades de convergência encontradas. Esta questão será abordada em trabalhos futuros.

Conclusão

Trabalhou-se com dois métodos numéricos importantes para a resolução de EDP's, cada um com suas particularidades.

O MDF é um método robusto, preciso quando garantido sua estabilidade e de fácil implementação, o que o torna um dos métodos mais utilizados atualmente, conforme já citado. Por outro lado, seu uso em domínios curvos ainda está sendo estudado.

Já o MSF é um método que promete se adaptar facilmente a domínios curvos (círculos, $\frac{1}{4}$ de coroa circular, estrelas, astróides, amoebas e coroas, que podem ser vistos em [BASÍLIO, 2019]), tem fácil implementação, não necessita de integração numérica, mas, necessita da solução fundamental do operador. Outro ponto importante a ser destacado, é que a complexidade para utilização do método aumenta quando o termo fonte da equação diferencial não é nulo, independentemente se a fonte for pontual ou distribuída.

Nos problemas simulados com o MSF, confirmou-se o que apresentam as referências anteriormente citadas a respeito do mal condicionamento da matriz e a independência do raio para que este fenômeno aconteça. Em todos os problemas simulados, foi possível notar que, ao aumentar o raio, não necessariamente o número de condicionamento da matriz melhorou.

O *problema 1* trata-se de um problema teste, por possuir solução analítica e para validação do código desenvolvido. Nele, o MDF apresentou erros baixíssimos, em ambas as normas, quando comparamos com o MSF, independente do raio. Também, pode-se notar que raios muito próximos do domínio real do problema apresentaram erros que comprometeram a solução. Já para raios crescentes, o erro diminuiu.

No *problema 2*, quando considerou-se o número de pontos fonte igual ao número de fontes virtuais, para raios crescentes, o número de condicionamento da matriz quase sempre aumentou e posto da matriz associada ao sistema diminuiu. Quanto ao tempo de execução do programa, não foi possível notar diferenças discrepantes. Para o raio igual a um, a solução ficou visivelmente comprometida, independente da forma em que o sistema linear foi resolvido. Os melhores resultados, quando comparado ao MDF, foram obtidos utilizando o comando barra invertida e a pseudo-inversa.

Para o segundo cenário de simulação, ou seja, quando o número de fontes virtuais foi considerado a metade do número de pontos fonte, ao aumentar o raio, o número de condicionamento da matriz aumentou e o posto diminuiu. Quanto ao tempo, não percebeu-se aumentos ou diminuições significativas. Para o raio igual a um, percebeu-se divergência de solução. Tanto o comando barra invertida quanto a utilização da pseudo-inversa apresentaram resultados parecidos, que se distanciaram pouco da solução via MDF, exceto no caso $r = 1$.

Já para o *problema 3*, para o primeiro cenário de simulação, as observações sobre o posto e o número de condicionamento da matriz do sistema, quando aumentado o raio, foram

semelhantes ao problema anterior. Sobre o tempo, percebeu-se que, ao utilizar a regularização de Tikhonov, houve aumento significativo na execução do programa. Sobre os métodos de resolução do sistema linear, a regularização de Tikhonov teve resultados não satisfatórios conforme o raio cresce, o que pode ser visto globalmente, quando fizemos o somatório das diferenças em módulo. Para o caso em que o posto era bastante deficiente, a utilização da pseudo-inversa mostrou resultados melhores e o comando barra invertida apresentou divergência.

Para o segundo cenário de simulação, a melhor aproximação, com respeito ao MDF, foi obtido com o comando barra invertida. Aqui, pode-se também notar que o posto da matriz se manteve completo com raios mais variados.

No *problema 4*, para raios crescentes, o número de condicionamento da matriz quase sempre aumentou e o tempo de execução dos programas não apresentaram diferenças significativas. Globalmente, os piores resultados foram obtidos para o maior raio considerado. Quanto aos métodos utilizados para a resolução do sistema do MSF, em ambos os casos, os distanciamentos obtidos com respeito ao MSF não apresentaram grandes discrepâncias. Neste problema, o tempo de execução do programa para o MDF foi de 95.258832, o que mostra uma desvantagem do método em relação ao MSF, neste caso.

Por fim, no *problema 5*, o fenômeno difusivo ocorreu de forma esperada. Tempos maiores de simulação não foram possíveis devido a capacidade da máquina utilizada.

Com os pontos destacados acima, pode-se notar que o MSF é um método eficaz, tanto na resolução de equações homogêneas quanto não homogêneas. A medida que os raios cresceram, o posto das matrizes ficou cada vez mais deficiente, o que, na maioria dos casos, ocasionou um maior distanciamento entre as soluções MDF-MSF. Cabe também destacar que, para problemas com domínio maior, o MSF se mostrou mais eficaz, quando considerado o tempo de execução do programa.

Como possibilidades para trabalhos futuros, destaca-se: realizar as simulações com condições de Neumann (condições de contorno com derivada) para aproximar ainda mais o problema da realidade, verificar o comportamento do MSF para domínios curvos, simular fenômenos regidos pela equação de Poisson em três dimensões e, também, problemas com variação temporal, independente se acoplado com outro método numérico ou utilizando solução fundamental dependente do tempo.

Ainda, cabem análises de outros métodos de regularização ou, até mesmo, um estudo mais aprofundado de análise de sensibilidade do parâmetro de regularização na solução final do problema, quando considerado a regularização de Tikhonov. Estudos sobre novas possibilidades para a localização da fronteira fictícia e número de pontos virtuais também podem ser feitos.

Quanto ao método de diferenças finitas, o *problema 5* pode ser repensado de forma a utilizar uma aproximação mais eficaz para a derivada temporal, utilizando, por exemplo, o método de Crank–Nicolson, além de estudos mais aprofundados de novas formas de utilizar este método em domínios curvos.

Referências bibliográficas

- AUGUSTIN, M. A. *A Method of Fundamental Solutions in Poroelasticity to Model the Stress Field in Geothermal Reservoirs*. [S.l.]: Springer, 2015. ISBN 9783319170787.
- BASÍLIO, A. *Resolução da Equação de Laplace aplicada a Problemas Diretos e Inversos de Transferência de Calor por Condução*. 125 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia - MG, 2019.
- BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. *Boundary Element Techniques*. [S.l.]: Springer, 1984. ISBN 9783642488627.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, D. J.; BURDEN, A. M. *Análise Numérica*. São Paulo: Cengage Learning, 2017.
- CAMPOS, F. F. *Algoritmos Numéricos*. Rio de Janeiro: LTC, 2007.
- CARRILLO, M. E. R. *Aplicação do Método das Soluções Fundamentais em Problemas Inversos Geométricos*. 145 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2020.
- CHENG, A. H.-D.; CHENG, D. T. Heritage and early history of the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 29, n. 3, p. 268–302, 2005.
- CUMINATO, J. A.; JUNIOR, M. M. *Discretização de Equações Diferenciais Parciais - Técnicas de Diferenças Finitas*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- CUNHA, M. C. de C. *Métodos Numéricos*. Campinas, SP: UNICAMP, 2000.
- DIAS, F. T. et al. *Método dos Elementos Finitos - Técnicas de Simulação Numérica em Engenharia*. [S.l.]: ETEP, 2009. ISBN 9789728480400.
- FALCHETTO, V. P. *Uma Comparação entre o Método dos Elementos de Contorno e o Método das Soluções Fundamentais para a Equação de Laplace*. 122 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2015.
- FEITOSA, F. A. C.; AL et. *Hidrogeologia: conceitos e aplicações*. Rio de Janeiro: CPRM: LABHID, 2008.
- FISH, J.; BELYTSCHKO, T. *Um Primeiro Curso em Elementos Finitos*. [S.l.]: LTC, 2009. ISBN 9788521617013.

- FRANCO, N. M. B. *Cálculo Numérico*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- GOLBERG, M. A. The method of fundamental solutions for poisson's equation. *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, v. 8, p. 09, 1994.
- Instituto Água e Terra. *Aquífero*. 2022. Disponível em: <<https://www.iat.pr.gov.br/Pagina/Aquifero>>. Acesso em: 06 de junho 2022.
- KUPRADZE, V.; ALEKSIDZE, M. The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, SBMAC, v. 4, p. 82–126, 1964. ISSN 0041-5553. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0041-5553\(64\)90006-0](https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90006-0)>
- LEITAO, F. D. C. *Métodos sem malha: aplicações do método de Galerkin sem elementos e do método de interpolação de ponto em casos estruturais*. Dissertação (Mestrado) — UERJ, 2010.
- LEON, S. J. *Álgebra Linear com Aplicações*. [S.l.]: LTC, 2019. ISBN 9788521635352.
- LIBARDI, P. L. *Dinâmica da Água no Solo*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2018.
- LIER, Q. de Jong van. *Física do Solo Baseada em Processos*. Piracicaba: Edição do Autor, 2020.
- LOMEU, P. F. S. *Sobre o Método das Soluções Fundamentais com Estratégia de Regularização para Análise de Problemas Bidimensionais Elastoestáticos e Elastodinâmicos no Domínio da Frequência*. 103 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.
- MATHON, R.; JOHNSTON, R. L. The approximate solution of elliptic boundary-value problems by fundamental solutions. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 14, n. 4, p. 638–650, 1977. Disponível em: <<https://doi.org/10.1137/0714043>>.
- MEDEIROS, G. C. de. *O Método das Soluções Fundamentais com Reciprocidade Dual para Problemas de Potencial*. 93 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília, 2001.
- Minas Jr - Consultoria Mineral. *Aquíferos: o que são e qual a importância*. 2022. Disponível em: <<https://www.minasjr.com.br/aquiferos-o-que-sao-e-qual-a-importancia/>>. Acesso em: 06 de junho 2022.
- NETO, G. C. R. *Método livre de malha usando solução fundamental aplicado na simulação do fluxo de água subterrâneo*. 79 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2020.
- PREVEDELLO, C. L.; ARMINDO, R. A. *Física do Solo com Problemas Resolvidos*. Curitiba: Celso Luiz Prevedello, 2015.
- RAMOS, M. R. C. *Aplicação do Método das Soluções Fundamentais em Problemas de Difusão*. 64 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2016.
- ROQUE, C. M. da C. *Métodos sem malha para a análise de placas e cascas compósitas*. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Porto, 2007.

- SALLES, G. C. *Formulação Forte do Método sem Malha usando Colocação Aplicado a Problemas de Potencial e Propagação de Ondas*. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil), UFRJ (Universidade Federal do Rio de Janeiro), Rio de Janeiro, Brasil.
- SANTANA, A. A. *Programas em MATLAB para Implementação de Exemplos em Discretização de Equações Diferenciais Parciais*. 172 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.
- SANTURIO, D. S. *Análise de Problemas de Difusão Transiente Através do Método das Soluções Fundamentais*. 71 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.
- SILVA, A. C. da et al. Estudo do método das soluções fundamentais aplicado à equação de poisson. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, SBMAC*, v. 9, p. 1–2, 2022.
- SIMÕES, A. L. A.; SCHULZ, H. E.; PORTO, R. de M. *Métodos Computacionais em Hidráulica*. Salvador: EDUFBA, 2017.
- SIQUEIRA, B. A. *Discretização de Equações Diferenciais Utilizando Diferenças Finitas: Uma Abordagem na Equação do Calor*. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática), UFSC (Universidade Federal de Santa Catarina), Santa Catarina, Brasil.
- TODD, D. K. *Hidrologia de Águas Subterrâneas*. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 1989.
- TREVISAN, R. et al. Condutividade hidráulica do solo saturado na zona vadosa in situ e em laboratório. *IRRIGA*, v. 14, p. 413–422, 09 2009.
- WENDLAND, E. *Modelos Matemáticos e Métodos Numéricos em Águas Subterrâneas*. São Paulo: SBMAC, 2012.

Este apêndice dedica-se a disponibilizar os programas desenvolvidos e/ou adaptados. Todos os programas utilizados estão disponíveis, sendo que na parte superior do documento, está descrito o número do problema e o método utilizado (MDF ou MSF).

Na página 92, estão dispostos os pontos utilizados para o problema 1 na simulação com o MSF.

Os demais pontos utilizados podem ser acessados em: <<https://acesse.one/owieJ>>, ou através do QR-code:



Figura 9.1 – Acesso aos pontos utilizados para a simulação do MSF.

Destaca-se que, para a simulação com o MSF, o arquivo dos pontos em excel deve estar salvo no mesmo diretório em que o programa está salvo.

Por fim, o arquivo *Comparacao.pdf*, disponível na página 84, foi utilizado para calcular o distanciamento das soluções, valores máximos e somatório de todos os distanciamentos.

O Algoritmo para os problemas 1,2,3 e 4 utilizando o MDF foram adaptados de [CUNHA, 2000]. Já o problema 5, foi adaptado do código do livro [SIMOES et al., 2017]. Todos os demais códigos foram inteiramente desenvolvidos pelo autor da dissertação.

```

clear all
close all
clc

% Algoritmo retirado do livro "Métodos Numéricos", da autora Maria Cristina C
Cunha - Editora UNICAMP -
% 2ª edição - página 213 - ISBN 978-85-268-0877-5.
% ADAPTADO

%% ENTRADA DE DADOS %%
N = 4; %número de pontos da malha na direção x
M = 4; %número de pontos da malha na direção y
lx = 0.5; %tamanho do eixo x
ly = 0.5; %tamanho do eixo y

%% CÁLCULOS PRELIMINARES %%
hx = lx/(N+1); %espaçamento da malha em x
hy = ly/(M+1); %espaçamento da malha em y
for i=1:N
    x(i)=i*hx; %malha na direção x
end
for i=1:M
    y(i)=i*hy; %malha na direção y
end
h = hx*hx; %para simplificar hx^2
k = hy*hy; %para simplificar hy^2
n = M*N; %dimensão do sistema

%% MATRIZ DA DISCRETIZAÇÃO/COEFICIENTES DO SISTEMA %%

for i=1:(M*N)
    a(i,i) = -2*(h+k); %diagonal principal
end

for i=1:(M*N-1)
    a(i,i+1)=k; %diagonal superior
end

for i=2:(M*N)
    a(i,i-1)=k; %diagonal inferior
end

for i=1:(M-1)*N
    a(i,i+N)=h; %diagonal superior afastada
end

for i= N+1:(M*N)
    a(i,i-N)=h; %diagonal inferior afastada
end

%% TERMO INDEPENDENTE DO SISTEMA%%
%Considera o termo fonte e condições de contorno

```

```

kk=0; %contador
for j=1:M
    for i=1:N
        kk=kk+1;
        b(kk) = h*k*0; %termo fonte
        if j==1
            b(kk)=b(kk)-h*0; %condição de contorno u(x,0)
        end
        if j==M
            b(kk)=b(kk)-h*200*x(i); %condição de contorno u(x,end)
        end
        if i==1
            b(kk)=b(kk)-k*0; %condição de contorno u(0,y)
        end
        if i==N
            b(kk)=b(kk)-k*200*y(j); %condição de contorno u(end,y)
        end
        if i==1 & j>1
            a(kk, kk-1)=0; %zera as entradas da matriz dos coeficientes cujos termos
foram para o vetor independente
        end
        if i==N & j<M
            a(kk, kk+1)=0; %zera as entradas da matriz dos coeficientes cujos termos
foram para o vetor independente
        end
    end
end
end

%% ENCONTRANDO A SOLUÇÃO %%

v = a\b';
kk=0;
for j=1:M
    for i=1:N
        kk=kk+1;
        u(j, i)=v(kk);
    end
end

%% SOLUÇÃO ANALÍTICA %%

%% SOLUÇÃO ANALÍTICA/EXATA %%

for i= 1:N+2
    for j= 1:M+2
        xe(i) = 0+(i-1)*hx;
        ye(j) = 0+(j-1)*hy;
        exata(i, j) = 400*xe(i)*ye(j); %solução exata
    end
end

% surf(xe, ye, exata) %plota o gráfico com as soluções

```

```

% title('Solução analítica') %coloca título no gráfico
% xlabel('\bf Eixo x') %nomeia o eixo x
% ylabel('\bf Eixo y') %nomeia o eixo y
% zlabel('\bf Carga Hidráulica/Temperatura') %nomeia o eixo z
% shading interp %suaviza os resultados no gráfico

%% PLOTANDO GRÁFICO DA SOLUÇÃO NUMÉRICA COM AS CONDIÇÕES DE CONTORNO%%

contornocima = 200*xe; %6 elementos
contornobaixo = zeros(1,6);%6 elementos
contornodireito = 200*ye(2:5)'; %4 elementos
contornoesquerdo = zeros(4,1); %4 elementos

B = [contornobaixo; contornoesquerdo u' contornodireito; contornocima];%cria a
matriz das soluções obtidas com as condições de contorno

surf(xe, ye, B) %plota o gráfico com as soluções
title('Método das Diferenças Finitas') %coloca título no gráfico
xlabel('\bf Eixo x') %nomeia o eixo x
ylabel('\bf Eixo y') %nomeia o eixo y
zlabel('\bf Carga Hidráulica/Temperatura') %nomeia o eixo z
shading interp %suaviza os resultados no gráfico

%% CÁLCULO DE ERROS %%

%Calcula o erro ao utilizar a norma 2 comparando a solução analítica e
%aproximada

norma2 = sqrt(sum(sum((B-exata).^2)));

%Calcula o erro ao utilizar a norma infinita comparando a solução analítica e
%aproximada

normainfinita = max(max(abs(B-exata)));

%Mostra na janela de comando os erros acometidos considerando as normas 2 e
%infinita.
fprintf('O erro acometido considerando a norma 2 é de %s, já ao considerar a norma
infinita obtemos %d.\n',norma2,normainfinita)

%Mostra o número de condicionamento da matriz
fprintf('O número de condicionamento da matriz associada ao sistema é %s. \n',cond
(a))

```

```

clear all %Remove itens do espaço de trabalho, liberando memória do sistema
close all %Fecha todas as figuras abertas
clc %Limpa todos os dados inseridos anteriormente, porém sem apagá-los da
memória

%% DADOS INICIAIS%%
intcontinicial = 0; %intervalo inicial do lado do quadrado
intcontfinal = 0.5; %intervalo final do lado do quadrado
h = 0.1; %incremento/passo
n = abs(intcontfinal - intcontinicial)/h; %número de pontos em um lado do contorno
ntot= n*4; %número total de pontos no contorno quando consideramos um quadrado
nvtot = ntot; %número total de pontos virtual (externos ao contorno)
npdom = (n-1)*(n-1); %número de pontos interiores ao domínio
R = 5; %tamanho do raio da fronteira fictícia

%% GERA AS COORDENADAS DA FRONTEIRA FICTÍCIA EM FORMATO CIRCULAR %%

cx = abs(intcontfinal - intcontinicial)/2; %coordenada x do ponto central do
quadrado
cy = abs(intcontfinal - intcontinicial)/2; %coordenada y do ponto central do
quadrado

for i=1:nvtot
    F(i,1)= R*cos((2*pi*i)/nvtot)+ cx; %coordenada x
    F(i,2)= R*sin((2*pi*i)/nvtot)+ cy; %coordenada y
end

%% LEITURA DOS PONTOS%%

x = xlsread('PontosMSF', 1, 'B6:B25'); %coordenada x do ponto no contorno
y = xlsread('PontosMSF', 1, 'C6:C25'); %coordenada y do ponto no contorno

xv = F(:,1); %coordenada x da fonte virtual circular
yv = F(:,2); %coordenada y da fonte virtual circular

pdx = xlsread('PontosMSF', 1, 'E6:E21'); %coordenada x do ponto no domínio
pdy = xlsread('PontosMSF', 1, 'F6:F21'); %coordenada y do ponto no domínio

%% CÁLCULO DAS DISTÂNCIAS E DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL NOS PONTOS DO CONTORNO%%

for i=1:ntot %i é o elemento do contorno
    for j=1:nvtot %j é o elemento virtual
        r(i,j)= sqrt(((x(i)-xv(j))^2) + ((y(i)-yv(j))^2)); %matriz das distâncias
        G(i,j) = (1/2*pi)*log(1/r(i,j)); %cálculo da solução fundamental
    end
end

%% CONDIÇÕES DE CONTORNO %%

```

```

for i=1:ntot %px corresponde ao ponto X=(x,y) no plano
    if i<=(ntot/4)+1
        px(i)=0; %condição de contorno inferior do domínio
    elseif i<=(ntot/2)+1
        px(i)=200*y(i); %condição de contorno lateral direita
    elseif i<=3*(ntot/4)+1
        px(i)=200*x(i); %condição de contorno superior do domínio
    elseif i<=ntot
        px(i)=0; %condição de contorno lateral esquerda
    end
end

%% OBTÉM OS COEFICIENTES C %%

lambda = 10^(-8); %coeficiente do método de Tikhonov
sizeG = size(G); %A função size retorna o número de linhas e colunas da matriz G
c = (G'*G + lambda*eye(sizeG))\ (G'*px'); %técnica de regularização de Tikhonov

%% CALCULA A MATRIZ DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS TENDO COMO REFERÊNCIA CADA PONTO DO
DOMÍNIO %%

for i=1:nptom %i é o elemento do domínio
    for j=1:nvtot %j é o elemento virtual
        rr(i,j)= sqrt(((pdx(i)-xv(j))^2) + ((pdy(i)-yv(j))^2)); %matriz das
distâncias
        GG(i,j) = (1/2*pi)*log(1/rr(i,j)); %cálculo da solução fundamental
    end
end

%% DEFINE A SOLUÇÃO NOS PONTOS PROCURADOS %%
u=GG*c; %vetor solução nos pontos de interesse

%% MATRIZ DAS SOLUÇÕES COM AS CONDIÇÕES DE CONTORNO %%

matriz = reshape(u, [n-1, n-1]); %transforma o vetor solução em uma matriz solução

baixo = px(1:((ntot/4)+1)); %aloca as condições de contorno da parte inferior do
domínio
latdir = px(((ntot/4)+2):(ntot/2)); %aloca as condições de contorno da lateral
direita do domínio
cima = px(((3*ntot/4)+1):-1:((ntot/2)+1)); %aloca as condições de contorno da parte
superior do domínio
latesq = px(((3*ntot/4)+2):ntot); %aloca as condições de contorno da lateral
esquerda do domínio

B = [baixo; latesq matriz latdir; cima]; %cria a matriz das soluções obtidas com as
condições de contorno

%% GRÁFICOS E RESULTADOS %%

```

```

xe = intcontinicial:h:intcontfinal;%pontos sobre o eixo x
ye = intcontinicial:h:intcontfinal;%pontos sobre o eixo y

% surf(xe, ye, B) %plota um gráfico 3D com as soluções
% title('Método das Soluções Fundamentais para r = 5') %coloca título no gráfico
% xlabel('\bf Eixo x') %nomeia o eixo x
% ylabel('\bf Eixo y') %nomeia o eixo y
% zlabel('\bf Carga Hidráulica/Temperatura') %nomeia o eixo z
% shading interp %suaviza os resultados no gráfico

%% MOSTRA GRAFICAMENTE A DISPOSIÇÃO DOS PONTOS NO CONTORNO, DOMÍNIO E FONTE
VIRTUAIS
% necessário colocar como comentário as seis linhas acima e
% retirar o comentário das duas linhas abaixo para visualizar os resultados

plot(x,y,'o', xv, yv,'o', pdx, pdy,'o')
title('Disposição dos pontos para r=5') %coloca título no gráfico
xlabel('\bf Eixo x') %nomeia o eixo x
ylabel('\bf Eixo y') %nomeia o eixo y
legend('Contorno','Virtuais', 'Domínio') %dá nome/legenda os resultados

%% SOLUÇÃO ANALÍTICA/EXATA %%

for i= 1:n+1
    for j= 1:n+1
        exata(i,j) = 400*xe(i)*ye(j); %solução exata
    end
end

% surf(xe, ye, exata) %plota um gráfico 3D com as soluções
% title('Solução analítica') %coloca título no gráfico
% xlabel('\bf Eixo x') %nomeia o eixo x
% ylabel('\bf Eixo y') %nomeia o eixo y
% zlabel('\bf Carga Hidráulica/Temperatura') %nomeia o eixo z
% shading interp %suaviza os resultados no gráfico

%% CÁLCULO DE ERROS %%

%Calcula o erro ao utilizar a norma 2 comparando a solução analítica e
%aproximada

norma2 = sqrt(sum(sum((B-exata).^2)));

%Calcula o erro ao utilizar a norma infinita comparando a solução analítica e
%aproximada

normainfinita = max(max(abs(B-exata)));

%Mostra na janela de comando os erros acometidos considerando as normas 2 e
%infinita.

fprintf('O erro acometido considerando a norma 2 é de %s, já ao considerar a norma

```

```
infinita obtemos %d.\n',norma2,normainfinita)
```

```
%Mostra o número de condicionamento da matriz e o raio utilizado
```

```
fprintf('O raio considerado para esta simulação é de %s metros. \n',R)
```

```
fprintf('O número de condicionamento da matriz associada ao sistema é %s. \n',cond
```

```
(G)
```

```

clear all
close all
clc

% Algoritmo retirado do livro "Métodos Numéricos", da autora Maria Cristina C
Cunha - Editora UNICAMP -
% 2ª edição - página 213 - ISBN 978-85-268-0877-5.
% ADAPTADO
tic
%% ENTRADA DE DADOS %%
N = 23; %número de pontos da malha na direção x
M = 23; %número de pontos da malha na direção y
lx = 0.6; %tamanho do eixo x
ly = 0.6; %tamanho do eixo y
Q = 0.06755;
K = 10^(-3);

%% CÁLCULOS PRELIMINARES %%
hx = lx/(N+1); %espaçamento da malha em x
hy = ly/(M+1); %espaçamento da malha em y
for i=1:N
    x(i)=i*hx; %malha na direção x
end
for i=1:M
    y(i)=i*hy; %malha na direção y
end
h = hx*hx; %para simplificar hx^2
k = hy*hy; %para simplificar hy^2
n = M*N; %dimensão do sistema

%% MATRIZ DA DISCRETIZAÇÃO/COEFICIENTES DO SISTEMA %%

for i=1:(M*N)
    a(i,i) = -2*(h+k); %diagonal principal
end

for i=1:(M*N-1)
    a(i,i+1)=k; %diagonal superior
end

for i=2:(M*N)
    a(i,i-1)=k; %diagonal inferior
end

for i=1:(M-1)*N
    a(i,i+N)=h; %diagonal superior afastada
end

for i= N+1:(M*N)
    a(i,i-N)=h; %diagonal inferior afastada
end

```

```

%% TERMO INDEPENDENTE DO SISTEMA%%
%Considera o termo fonte e condições de contorno

kk=0; %contador
for j=1:M
    for i=1:N
        kk=kk+1;
        if i==12 && j==12
            b(kk) = hx*hy*(Q/K); %fonte pontual
        else
            b(kk) = 0; %termo fonte nulo nas outras entradas
        end
        if j==1
            b(kk)=b(kk)- h*0; %condição de contorno u(x,0)
        end
        if j==M
            b(kk)=b(kk)-h*200*x(i); %condição de contorno u(x,end)
        end
        if i==1
            b(kk)=b(kk)-k*0; %condição de contorno u(0,y)
        end
        if i==N
            b(kk)=b(kk)-k*200*y(j); %condição de contorno u(end,y)
        end
        if i==1 & j>1
            a(kk, kk-1)=0; %zera as entradas da matriz dos coeficientes cujos termo
foram para o vetor independente
        end
        if i==N & j<M
            a(kk, kk+1)=0; %zera as entradas da matriz dos coeficientes cujos termo
foram para o vetor independente
        end
    end
end

%% ENCONTRANDO A SOLUÇÃO %%

v = a\b';
kk=0;
for j=1:M
    for i=1:N
        kk=kk+1;
        u(j, i)=v(kk);
    end
end

%% DISCRETIZAÇÃO EIXO X E Y %%

for i= 1:N+2
    for j= 1:M+2
        xe(i) = 0+(i-1)*hx;
        ye(j) = 0+(j-1)*hy;
    end
end

```

```
end  
toc
```

```
%% PLOTANDO GRÁFICO DA SOLUÇÃO NUMÉRICA COM AS CONDIÇÕES DE CONTORNO%%
```

```
contornocima = 200*xe; %7 elementos  
contornobaixo = zeros(1,N+2);%7 elementos  
contornodireito = 200*ye(2:M+1)'; %5 elementos  
contornoesquerdo = zeros(M,1); %5 elementos
```

```
BB = [contornobaixo; contornoesquerdo u' contornodireito; contornocima];%cria a  
matriz das soluções obtidas com as condições de contorno
```

```
surf(xe, ye, BB) %plota o gráfico com as soluções  
title('Método das Diferenças Finitas') %coloca título no gráfico  
xlabel('\bf Eixo x') %nomeia o eixo x  
ylabel('\bf Eixo y') %nomeia o eixo y  
zlabel('\bf Carga Hidráulica/Temperatura') %nomeia o eixo z  
shading interp %suaviza os resultados no gráfico
```

```
%Mostra o número de condicionamento da matriz
```

```
fprintf('O número de condicionamento da matriz associada ao sistema é %s. \n',cond  
(a))
```

```

clear all %Remove itens do espaço de trabalho, liberando memória do sistema
close all %Fecha todas as figuras abertas
clc %Limpa todos os dados inseridos anteriormente, porém sem apagá-los d
memória
tic
%% DADOS INICIAIS%%
intcontinicial = 0; %intervalo inicial do lado do quadrado
intcontfinal = 0.6; %intervalo final do lado do quadrado
h = 0.025; %incremento/passo
n = 24; %número de pontos em um lado do contorno
ntot= n*4; %número total de pontos no contorno quando consideramos um quadrado
nvtot = ntot/2; %número total de pontos virtual (externos ao contorno)
npdom = (n-1)*(n-1); %número de pontos interiores ao domínio
npp = ntot + npdom; %número de pontos para o cálculo da solução particula
(internos ao domínio + contorno)
R = 4; %tamanho do raio da fronteira fictícia
Q=0.06755;
K=10^(-3);

%% GERA AS COORDENADAS DA FRONTEIRA FICTÍCIA EM FORMATO CIRCULAR %%

cx = abs(intcontfinal - intcontinicial)/2; %coordenada x do ponto central do
quadrado
cy = abs(intcontfinal - intcontinicial)/2; %coordenada y do ponto central do
quadrado

for i=1:nvtot
    F(i,1)= R*cos((2*pi*i)/nvtot)+ cx; %coordenada x
    F(i,2)= R*sin((2*pi*i)/nvtot)+ cy; %coordenada y
end

%% LEITURA DOS PONTOS%%

x = xlsread('PontosMSF', 2, 'B6:B101'); %coordenada x do ponto no contorno
y = xlsread('PontosMSF', 2, 'C6:C101'); %coordenada y do ponto no contorno

xv = F(:,1); %coordenada x da fonte virtual circular
yv = F(:,2); %coordenada y da fonte virtual circular

pdx = xlsread('PontosMSF', 2, 'E6:E534'); %coordenada x do ponto no domínio
pdy = xlsread('PontosMSF', 2, 'F6:F534'); %coordenada y do ponto no domínio

ppx = xlsread('PontosMSF', 2, 'H6:H630'); % coordenada x do ponto para o cálculo da
solução particular
ppy = xlsread('PontosMSF', 2, 'I6:I630'); % coordenada y do ponto para o cálculo da
solução particular

%% CÁLCULO DA SOLUÇÃO PARTICULAR %%

for i=1:npp
    distpart(i) = sqrt(((ppx(313)-ppx(i))^2) + ((ppy(313)-ppy(i))^2)); %%matriz
das distâncias da solução particular

```

```

    %o ponto (313,313) corresponde ao ponto central do domínio onde a fonte
pontual é aplicada.
    distpart(313) = h/5; %contorna a singularidade visto a distância zero
    solpart(i) = (Q/(K))*(1/(2*pi))*log(distpart(i)); %Solução particular
end

matrizparticular = reshape(solpart,[n+1,n+1]); %transforma o vetor solução em uma
matriz solução

contornoparticular = matrizparticular(1,:); %contorno em cada um dos lados do
quadrado (os 4 são iguais)

%% CONDIÇÕES DE CONTORNO DO PROBLEMA ORIGINAL %%

for i=1:ntot %px corresponde ao ponto X=(x,y) no plano
    if i<=(ntot/4)+1
        pox(i)=0; %condição de contorno inferior do domínio
    elseif i<=(ntot/2)+1
        pox(i)=200*y(i); %condição de contorno lateral direita
    elseif i<=3*(ntot/4)+1
        pox(i)=200*x(i); %condição de contorno superior do domínio
    elseif i<=ntot
        pox(i)=0; %condição de contorno lateral esquerda
    end
end

%% CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O PROBLEMA HOMOGENEO ASSOCIADO %%

baixoah = pox(1:((ntot/4)+1)) - contornoparticular; %aloca as condições de contorno
da parte inferior do domínio
latdirha = pox(((ntot/4)+2):(ntot/2))' - contornoparticular(2:n)'; %aloca as
condições de contorno da lateral direita do domínio
cimaha = pox(((ntot/2)+1):(3*ntot/4)+1) - contornoparticular; %pox(((3*ntot/4)
+1):-1:(ntot/2)+1)) - contornoparticular; %aloca as condições de contorno da parte
superior do domínio
latesqha = pox(((3*ntot/4)+2):ntot)' - contornoparticular(2:n)'; %aloca as
condições de contorno da lateral esquerda do domínio
px = [baixoah, latdirha', cimaha, latesqha']; %vetor das condições de contorno

%% SOLUÇÃO HOMOGENEA %%

%% CÁLCULO DAS DISTÂNCIAS E DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL NOS PONTOS DO CONTORNO%%

for i=1:ntot %i é o elemento do contorno
    for j=1:nvtot %j é o elemento virtual
        r(i,j) = sqrt(((x(i)-xv(j))^2) + ((y(i)-yv(j))^2)); %%matriz das distâncias
        G(i,j) = (1/(2*pi))*log(1/r(i,j)); %cálculo da solução fundamental
    end
end

%% OBTÉM OS COEFICIENTES C %%
% lambda = 10^(-8); %coeficiente do método de Tikhonov
% sizeG = size(G); %A função size retorna o número de linhas e colunas da matriz G

```

```

% c = (G'*G + lambda*eye(sizeG))\ (G'*px'); %técnica de regularização de Tikhonov

%c = G\px';

c = pinv(G)*px';

%% CALCULA A MATRIZ G TENDO COMO REFERÊNCIA CADA PONTO DO DOMÍNIO %%

for i=1:npdom %i é o elemento do domínio
    for j=1:nvtot %j é o elemento virtual
        rr(i,j)= sqrt(((pdx(i)-xv(j))^2) + ((pdy(i)-yv(j))^2));%%matriz das
distâncias
        GG(i,j) = (1/(2*pi))*log(1/rr(i,j));%cálculo da solução fundamental
    end
end

%% DEFINE A SOLUÇÃO NOS PONTOS PROCURADOS %%
u=GG*c; %vetor solução nos pontos de interesse

%% MATRIZ DAS SOLUÇÕES COM AS CONDIÇÕES DE CONTORNO %%

matriz = reshape(u, [n-1,n-1]); %transforma o vetor solução em uma matriz solução

baixo = px(1:((ntot/4)+1)); %aloca as condições de contorno da parte inferior do
domínio
latdir = px(((ntot/4)+2):(ntot/2))'; %aloca as condições de contorno da lateral
direita do domínio
cima = px(((3*ntot/4)+1):-1:((ntot/2)+1)); %aloca as condições de contorno da
parte superior do domínio
latesq = px(((3*ntot/4)+2):ntot)'; %aloca as condições de contorno da lateral
esquerda do domínio

B = [baixo; latesq matriz latdir; cima]; %cria a matriz das soluções obtidas com as
condições de contorno do problema homogêneo associado

%% SOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA ORIGINAL %%

solgeral = matrizparticular + B;
toc
posto = rank(G)
%% GRÁFICOS E RESULTADOS %%

xe = intcontinicial:h:intcontfinal; %pontos sobre o eixo x
ye = intcontinicial:h:intcontfinal; %pontos sobre o eixo y

surf(xe, ye, solgeral) %plota um gráfico 3D com as soluções
title('Método das Soluções Fundamentais + Método das Soluções Particulares) %
coloca título no gráfico
xlabel('\bf Eixo x') %nomeia o eixo x
ylabel('\bf Eixo y') %nomeia o eixo y
zlabel('\bf Carga Hidráulica/Temperatura') %nomeia o eixo z
shading interp %suaviza os resultados no gráfico

```

```
% MOSTRA GRAFICAMENTE A DISPOSIÇÃO DOS PONTOS NO CONTORNO, DOMÍNIO E FONTES VIRTUAIS
%necessário colocar como comentário as seis linhas acima e
%retirar o comentário das duas linhas abaixo para visualizar os resultados
%
% plot (x,y,'o', xv, yv,'*', pdx, pdy, '.')
% title('Disposição dos pontos para r = 4') %coloca título no gráfico
% xlabel('\bf Eixo x') %nomeia o eixo x
% ylabel('\bf Eixo y') %nomeia o eixo y
% legend('Contorno','Virtuais', 'Domínio') %dá nome/legenda os resultados

%Mostra o número de condicionamento da matriz e o raio utilizado

fprintf('O raio considerado para esta simulação é de %s metros. \n',R)
fprintf('O número de condicionamento da matriz associada ao sistema é %s. \n',cond)
(G)
```

```
clear all
close all
clc

% Algoritmo retirado do livro "Métodos Numéricos", da autora Maria Cristina C
Cunha - Editora UNICAMP -
% 2ª edição - página 213 - ISBN 978-85-268-0877-5.
% ADAPTADO
tic
%% ENTRADA DE DADOS %%
N = 31; %número de pontos da malha na direção x
M = 31; %número de pontos da malha na direção y
lx = 100; %tamanho do eixo x
ly = 100; %tamanho do eixo y
Q = 0.03155;
K = 0.001;

%% CÁLCULOS PRELIMINARES %%
hx = lx/(N+1); %espaçamento da malha em x
hy = ly/(M+1); %espaçamento da malha em y
for i=1:N
    x(i)=i*hx; %malha na direção x
end
for i=1:M
    y(i)=i*hy; %malha na direção y
end
h = hx*hx; %para simplificar hx^2
k = hy*hy; %para simplificar hy^2
n = M*N; %dimensão do sistema

%% MATRIZ DA DISCRETIZAÇÃO/COEFICIENTES DO SISTEMA %%

for i=1:(M*N)
    a(i,i) = -2*(h+k); %diagonal principal
end

for i=1:(M*N-1)
    a(i,i+1)=k; %diagonal superior
end

for i=2:(M*N)
    a(i,i-1)=k; %diagonal inferior
end

for i=1:(M-1)*N
    a(i,i+N)=h; %diagonal superior afastada
end

for i= N+1:(M*N)
    a(i,i-N)=h; %diagonal inferior afastada
end
```

```

%% TERMO INDEPENDENTE DO SISTEMA%%
%Considera o termo fonte e condições de contorno

kk=0; %contador
for j=1:M
    for i=1:N
        kk=kk+1;
        if i==16 && j==16
            b(kk) = hx*hy*(Q/K); %fonte pontual
        else
            b(kk) = 0; %termo fonte nulo nas outras entradas
        end
        if j==1
            b(kk)=b(kk)- h*100; %condição de contorno u(x,0)
        end
        if j==M
            b(kk)=b(kk)-h*100; %condição de contorno u(x,end)
        end
        if i==1
            b(kk)=b(kk)-k*100; %condição de contorno u(0,y)
        end
        if i==N
            b(kk)=b(kk)-k*100; %condição de contorno u(end,y)
        end
        if i==1 & j>1
            a(kk, kk-1)=0; %zera as entradas da matriz dos coeficientes cujos termo
foram para o vetor independente
        end
        if i==N & j<M
            a(kk, kk+1)=0; %zera as entradas da matriz dos coeficientes cujos termo
foram para o vetor independente
        end
    end
end

%% ENCONTRANDO A SOLUÇÃO %%

v = a\b';
kk=0;
for j=1:M
    for i=1:N
        kk=kk+1;
        u(j, i)=v(kk);
    end
end

%% DISCRETIZAÇÃO EIXO X E Y %%

for i= 1:N+2
    for j= 1:M+2
        xe(i) = 0+(i-1)*hx;
        ye(j) = 0+(j-1)*hy;
    end
end

```

```
end
toc
condicionamento = cond(a)
%% PLOTANDO GRÁFICO DA SOLUÇÃO NUMÉRICA COM AS CONDIÇÕES DE CONTORNO%%

contornocima = 100*ones(1,N+2);
contornobaixo = 100*ones(1,N+2);
contornodireito = 100*ones(M,1);
contornoesquerdo = 100*ones(M,1);

BB = [contornobaixo; contornoesquerdo u' contornodireito; contornocima];%cria a
matriz das soluções obtidas com as condições de contorno

% surf(xe, ye, BB) %plota o gráfico com as soluções
% title('Método das Diferenças Finitas') %coloca título no gráfico
% xlabel('\bf Eixo x') %nomeia o eixo x
% ylabel('\bf Eixo y') %nomeia o eixo y
% zlabel('\bf Carga Hidráulica/Temperatura') %nomeia o eixo z
% shading interp %suaviza os resultados no gráfico
%
% %Mostra o número de condicionamento da matriz
% fprintf('O número de condicionamento da matriz associada ao sistema é %s. \n')
cond(a)
```

```

% clear all %Remove itens do espaço de trabalho, liberando memória do sistema
% close all %Fecha todas as figuras abertas
% clc %Limpa todos os dados inseridos anteriormente, porém sem apagá-los da
memória
tic
%% DADOS INICIAIS%%
intcontinicial = 0; %intervalo inicial do lado do quadrado
intcontfinal = 100; %intervalo final do lado do quadrado
h = 3.125; %incremento/passo
n = 32;%intcontfinal/h; %número de pontos em um lado do contorno
ntot= n*4; %número total de pontos no contorno quando consideramos um quadrado
nvtot = ntot; %número total de pontos virtual (externos ao contorno)
nptom = (n-1)*(n-1); %número de pontos interiores ao domínio
npp = ntot + nptom; %número de pontos para o cálculo da solução particular
(internos ao domínio + contorno)
R = 71; %tamanho do raio da fronteira fictícia
Q=0.03155;
K=0.001;

%% GERA AS COORDENADAS DA FRONTEIRA FICTÍCIA EM FORMATO CIRCULAR %%

cx = abs(intcontfinal - intcontinicial)/2; %coordenada x do ponto central do
quadrado
cy = abs(intcontfinal - intcontinicial)/2; %coordenada y do ponto central do
quadrado

for i=1:nvtot
    F(i,1)= R*cos((2*pi*i)/nvtot)+ cx; %coordenada x
    F(i,2)= R*sin((2*pi*i)/nvtot)+ cy; %coordenada y
end

%% LEITURA DOS PONTOS%%

x = xlsread('PontosMSF', 3, 'B6:B133'); %coordenada x do ponto no contorno
y = xlsread('PontosMSF', 3, 'C6:C133'); %coordenada y do ponto no contorno

xv = F(:,1); %coordenada x da fonte virtual circular
yv = F(:,2); %coordenada y da fonte virtual circular

pdx = xlsread('PontosMSF', 3, 'E6:E966'); %coordenada x do ponto no domínio
pdy = xlsread('PontosMSF', 3, 'F6:F966'); %coordenada y do ponto no domínio

ppx = xlsread('PontosMSF', 3, 'H6:H1094'); % coordenada x do ponto para o cálculo da
solução particular
ppy = xlsread('PontosMSF', 3, 'I6:I1094'); % coordenada y do ponto para o cálculo da
solução particular

%% CÁLCULO DA SOLUÇÃO PARTICULAR %%

for i=1:npp
    distpart(i) = sqrt(((ppx(545)-ppx(i))^2) + ((ppy(545)-ppy(i))^2)); %%matriz
das distâncias da solução particular

```

```

    %o ponto (545,545) corresponde ao ponto central do domínio onde a fonte
pontual é aplicada.
    distpart(545) = h/5; %contorna a singularidade visto a distância zero
    solpart(i) = (Q/(K))*(1/(2*pi))*log(distpart(i)); %Solução particular
end

matrizparticular = reshape(solpart,[n+1,n+1]); %transforma o vetor solução em uma
matriz solução

contornoparticular = matrizparticular(1,:); %contorno em cada um dos lados do
quadrado (os 4 são iguais)

%% CONDIÇÕES DE CONTORNO DO PROBLEMA ORIGINAL %%

for i=1:ntot %px corresponde ao ponto X=(x,y) no plano
    if i<=(ntot/4)+1
        pox(i)=100; %condição de contorno inferior do domínio
    elseif i<=(ntot/2)+1
        pox(i)=100; %condição de contorno lateral direita
    elseif i<=3*(ntot/4)+1
        pox(i)=100; %condição de contorno superior do domínio
    elseif i<=ntot
        pox(i)=100; %condição de contorno lateral esquerda
    end
end

%% CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O PROBLEMA HOMOGENEO ASSOCIADO %%

baixoah = pox(1:((ntot/4)+1)) - contornoparticular; %aloca as condições de contorno
da parte inferior do domínio
latdirha = pox(((ntot/4)+2):(ntot/2))' - contornoparticular(2:n)'; %aloca as
condições de contorno da lateral direita do domínio
cimaha = pox(((ntot/2)+1):(3*ntot/4)+1) - contornoparticular; %pox(((3*ntot/4)
+1):-1:((ntot/2)+1)) - contornoparticular; %aloca as condições de contorno da parte
superior do domínio
latesqha = pox(((3*ntot/4)+2):ntot)' - contornoparticular(2:n)'; %aloca as
condições de contorno da lateral esquerda do domínio
px = [baixoah, latdirha', cimaha, latesqha']; %vetor das condições de contorno

%% SOLUÇÃO HOMOGENEA %%

%% CÁLCULO DAS DISTÂNCIAS E DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL NOS PONTOS DO CONTORNO%%

for i=1:ntot %i é o elemento do contorno
    for j=1:nvtot %j é o elemento virtual
        r(i,j) = sqrt(((x(i)-xv(j))^2) + ((y(i)-yv(j))^2)); %%matriz das distâncias
        G(i,j) = (1/(2*pi))*log(1/r(i,j)); %cálculo da solução fundamental
    end
end

%% OBTÉM OS COEFICIENTES C %%
% c = G\px';
% c = pinv(G)*px';

```

```

lambda = 10^(-8); %coeficiente do método de Tikhonov
sizeG = size(G); %A função size retorna o número de linhas e colunas da matriz G
c = (G'*G + lambda*eye(sizeG))\ (G'*px'); %técnica de regularização de Tikhonov

%% CALCULA A MATRIZ G TENDO COMO REFERÊNCIA CADA PONTO DO DOMÍNIO %%

for i=1:npdom %i é o elemento do domínio
    for j=1:nvtot %j é o elemento virtual
        rr(i,j)= sqrt(((pdx(i)-xv(j))^2) + ((pdy(i)-yv(j))^2)); %%matriz das
distâncias
        GG(i,j) = (1/(2*pi))*log(1/rr(i,j)); %cálculo da solução fundamental
    end
end

%% DEFINE A SOLUÇÃO NOS PONTOS PROCURADOS %%
u=GG*c; %vetor solução nos pontos de interesse

%% MATRIZ DAS SOLUÇÕES COM AS CONDIÇÕES DE CONTORNO %%

matriz = reshape(u, [n-1, n-1]); %transforma o vetor solução em uma matriz solução

baixo = px(1:((ntot/4)+1)); %aloca as condições de contorno da parte inferior do
domínio
latdir = px(((ntot/4)+2):(ntot/2))'; %aloca as condições de contorno da lateral
direita do domínio
cima = px(((3*ntot/4)+1):-1:((ntot/2)+1)); %aloca as condições de contorno da
parte superior do domínio
latesq = px(((3*ntot/4)+2):ntot)'; %aloca as condições de contorno da lateral
esquerda do domínio

B = [baixo; latesq matriz latdir; cima]; %cria a matriz das soluções obtidas com as
condições de contorno do problema homogêneo associado

%% SOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA ORIGINAL %%

solgeral = matrizparticular + B;
toc
%% GRÁFICOS E RESULTADOS %%

xe = intcontinicial:h:intcontfinal; %pontos sobre o eixo x
ye = intcontinicial:h:intcontfinal; %pontos sobre o eixo y
posto = rank(G)
condicionamento = cond(G)

% surf(xe, ye, solgeral) %plota um gráfico 3D com as soluções
% title('Método das Soluções Fundamentais + Método das Soluções Particulares') %
coloca título no gráfico
% xlabel('\bf Eixo x') %nomeia o eixo x
% ylabel('\bf Eixo y') %nomeia o eixo y
% zlabel('\bf Carga Hidráulica/Temperatura') %nomeia o eixo z
% shading interp %suaviza os resultados no gráfico

```

```
%  
% %% MOSTRA GRAFICAMENTE A DISPOSIÇÃO DOS PONTOS NO CONTORNO, DOMÍNIO E FONTE  
VIRTUAIS  
% %necessário colocar como comentário as seis linhas acima e  
% %retirar o comentário das duas linhas abaixo para visualizar os resultados  
% %  
% % plot (x,y,'o', xv, yv,'o', pdx, pdy,'o')  
% % title('Disposição dos pontos') %coloca título no gráfico  
% % xlabel('\bf Eixo x') %nomeia o eixo x  
% % ylabel('\bf Eixo y') %nomeia o eixo y  
% % legend('Contorno','Virtuais', 'Domínio') %dá nome/legenda os resultados  
%  
% %Mostra o número de condicionamento da matriz e o raio utilizado  
%  
% fprintf('O raio considerado para esta simulação é de %s metros. \n',R)  
% fprintf('O número de condicionamento da matriz associada ao sistema é %s. \n')  
cond(G))
```

```

% clear all
% close all
% clc

% Algoritmo retirado do livro "Métodos Numéricos", da autora Maria Cristina C
Cunha - Editora UNICAMP -
% 2ª edição - página 213 - ISBN 978-85-268-0877-5.
% ADAPTADO
tic
%% ENTRADA DE DADOS %%
N = 79; %número de pontos da malha na direção x
M = 79; %número de pontos da malha na direção y
lx = 10000; %tamanho do eixo x
ly = 10000; %tamanho do eixo y
Q = 0.06755;
K = 10^(-3);

%% CÁLCULOS PRELIMINARES %%
hx = lx/(N+1); %espaçamento da malha em x
hy = ly/(M+1); %espaçamento da malha em y
for i=1:N
    x(i)=i*hx; %malha na direção x
end
for i=1:M
    y(i)=i*hy; %malha na direção y
end
h = hx*hx; %para simplificar hx^2
k = hy*hy; %para simplificar hy^2
n = M*N; %dimensão do sistema

%% MATRIZ DA DISCRETIZAÇÃO/COEFICIENTES DO SISTEMA %%

for i=1:(M*N)
    a(i,i) = -2*(h+k); %diagonal principal
end

for i=1:(M*N-1)
    a(i,i+1)=k; %diagonal superior
end

for i=2:(M*N)
    a(i,i-1)=k; %diagonal inferior
end

for i=1:(M-1)*N
    a(i,i+N)=h; %diagonal superior afastada
end

for i= N+1:(M*N)
    a(i,i-N)=h; %diagonal inferior afastada
end

```

```

%% TERMO INDEPENDENTE DO SISTEMA%%
%Considera o termo fonte e condições de contorno

kk=0; %contador
for j=1:M
    for i=1:N
        kk=kk+1;
        if i==40 && j==40
            b(kk) = hx*hy*(Q/K); %fonte pontual
        else
            b(kk) = 0; %termo fonte nulo nas outras entradas
        end
        if j==1
            b(kk)=b(kk)- h*100; %condição de contorno u(x,0)
        end
        if j==M
            b(kk)=b(kk)-h*100; %condição de contorno u(x,end)
        end
        if i==1
            b(kk)=b(kk)-k*100; %condição de contorno u(0,y)
        end
        if i==N
            b(kk)=b(kk)-k*100; %condição de contorno u(end,y)
        end
        if i==1 & j>1
            a(kk, kk-1)=0; %zera as entradas da matriz dos coeficientes cujos termo
foram para o vetor independente
        end
        if i==N & j<M
            a(kk, kk+1)=0; %zera as entradas da matriz dos coeficientes cujos termo
foram para o vetor independente
        end
    end
end

%% ENCONTRANDO A SOLUÇÃO %%

v = a\b';
kk=0;
for j=1:M
    for i=1:N
        kk=kk+1;
        u(j, i)=v(kk);
    end
end

%% DISCRETIZAÇÃO EIXO X E Y %%

for i= 1:N+2
    for j= 1:M+2
        xe(i) = 0+(i-1)*hx;
        ye(j) = 0+(j-1)*hy;
    end
end

```

```
end
toc
%% PLOTANDO GRÁFICO DA SOLUÇÃO NUMÉRICA COM AS CONDIÇÕES DE CONTORNO%%

contornocima = 100*ones(1,N+2);
contornobaixo = 100*ones(1,N+2);
contornodireito = 100*ones(M,1);
contornoesquerdo = 100*ones(M,1);

BB = [contornobaixo; contornoesquerdo u' contornodireito; contornocima];%cria a
matriz das soluções obtidas com as condições de contorno

% surf(xe, ye, BB) %plota o gráfico com as soluções
% title('Método das Diferenças Finitas') %coloca título no gráfico
% xlabel('\bf Eixo x') %nomeia o eixo x
% ylabel('\bf Eixo y') %nomeia o eixo y
% zlabel('\bf Carga Hidráulica/Temperatura') %nomeia o eixo z
% shading interp %suaviza os resultados no gráfico

%Mostra o número de condicionamento da matriz
fprintf('O número de condicionamento da matriz associada ao sistema é %s. \n',cond
(a))
```

```

clear all %Remove itens do espaço de trabalho, liberando memória do sistema
close all %Fecha todas as figuras abertas
clc %Limpa todos os dados inseridos anteriormente, porém sem apagá-los da
memória

%% DADOS INICIAIS%%
tic
intcontinicial = 0; %intervalo inicial do lado do quadrado
intcontfinal = 10000; %intervalo final do lado do quadrado
h = 125; %incremento/passo
n = abs(intcontfinal-intcontinicial)/h; %número de pontos em um lado do contorno
ntot= n*4; %número total de pontos no contorno quando consideramos um quadrado
nvtot = ntot/2; %número total de pontos virtual (externos ao contorno)
nptom = (n-1)*(n-1); %número de pontos interiores ao domínio
npp = ntot + nptom; %número de pontos para o cálculo da solução particular
(internos ao domínio + contorno)
R = 500000; %tamanho do raio da fronteira fictícia
Q=0.06755;
K=10^(-3);

%% GERA AS COORDENADAS DA FRONTEIRA FICTÍCIA EM FORMATO CIRCULAR %%

cx = abs(intcontfinal - intcontinicial)/2; %coordenada x do ponto central do
quadrado
cy = abs(intcontfinal - intcontinicial)/2; %coordenada y do ponto central do
quadrado

for i=1:nvtot
    F(i,1)= R*cos((2*pi*i)/nvtot)+ cx; %coordenada x
    F(i,2)= R*sin((2*pi*i)/nvtot)+ cy; %coordenada y
end

%% LEITURA DOS PONTOS%%

x = xlsread('PontosMSF', 4, 'B6:B325'); %coordenada x do ponto no contorno
y = xlsread('PontosMSF', 4, 'C6:C325'); %coordenada y do ponto no contorno

xv = F(:,1); %coordenada x da fonte virtual circular
yv = F(:,2); %coordenada y da fonte virtual circular

pdx = xlsread('PontosMSF', 4, 'E6:E6246'); %coordenada x do ponto no domínio
pdy = xlsread('PontosMSF', 4, 'F6:F6246'); %coordenada y do ponto no domínio

ppx = xlsread('PontosMSF', 4, 'H6:H6566'); % coordenada x do ponto para o cálculo da
solução particular
ppy = xlsread('PontosMSF', 4, 'I6:I6566'); % coordenada y do ponto para o cálculo da
solução particular

%% CÁLCULO DA SOLUÇÃO PARTICULAR %%

for i=1:npp
    distpart(i)= sqrt(((ppx(3281)-ppx(i))^2) + ((ppy(3281)-ppy(i))^2)); %%matriz

```

```

das distâncias da solução particular
    %o ponto (841,841) corresponde ao ponto central do domínio onde a fonte
pontual é aplicada.
    distpart(3281) = h/5; %contorna a singularidade visto a distância zero
    solpart(i) = (Q/(K))*(1/(2*pi))*log(distpart(i)); %Solução particular
end

matrizparticular = reshape(solpart, [n+1, n+1]); %transforma o vetor solução em uma
matriz solução

contornoparticular = matrizparticular(1,:); %contorno em cada um dos lados do
quadrado (os 4 são iguais)

%% CONDIÇÕES DE CONTORNO DO PROBLEMA ORIGINAL %%

for i=1:ntot %px corresponde ao ponto X=(x,y) no plano
    if i<=(ntot/4)+1
        pox(i)=100; %condição de contorno inferior do domínio
    elseif i<=(ntot/2)+1
        pox(i)=100; %condição de contorno lateral direita
    elseif i<=3*(ntot/4)+1
        pox(i)=100; %condição de contorno superior do domínio
    elseif i<=ntot
        pox(i)=100; %condição de contorno lateral esquerda
    end
end

%% CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O PROBLEMA HOMOGENEO ASSOCIADO %%

baixoha = pox(1:((ntot/4)+1)) - contornoparticular; %aloca as condições de contorno
da parte inferior do domínio
latdirha = pox(((ntot/4)+2):(ntot/2))' - contornoparticular(2:n)'; %aloca as
condições de contorno da lateral direita do domínio
cimaha = pox(((ntot/2)+1):(3*ntot/4)+1) - contornoparticular; %pox(((3*ntot/4)
+1):-1:(ntot/2)+1)) - contornoparticular; %aloca as condições de contorno da parte
superior do domínio
latesqha = pox(((3*ntot/4)+2):ntot)' - contornoparticular(2:n)'; %aloca as
condições de contorno da lateralesquerda do domínio
px = [baixoha, latdirha', cimaha, latesqha']; %vetor das condições de contorno

%% SOLUÇÃO HOMOGENEA %%

%% CÁLCULO DAS DISTÂNCIAS E DA SOLUÇÃO FUNDAMENTAL NOS PONTOS DO CONTORNO%%

for i=1:ntot %i é o elemento do contorno
    for j=1:nvtot %j é o elemento virtual
        r(i,j) = sqrt(((x(i)-xv(j))^2) + ((y(i)-yv(j))^2)); %%matriz das distâncias
        G(i,j) = (1/2*pi)*log(1/r(i,j)); %cálculo da solução fundamental
    end
end

%% OBTÉM OS COEFICIENTES C %%
% lambda = 10^(-8); %coeficiente do método de Tikhonov

```

```

% sizeG = size(G); %A função size retorna o número de linhas e colunas da matriz G
% c = (G'*G + lambda*eye(sizeG))\ (G'*px'); %técnica de regularização de Tikhonov

c = pinv(G)*px';

% c = G\px';

%% CALCULA A MATRIZ G TENDO COMO REFERÊNCIA CADA PONTO DO DOMÍNIO %%

for i=1:npdom %i é o elemento do domínio
    for j=1:nvtot %j é o elemento virtual
        rr(i,j)= sqrt(((pdx(i)-xv(j))^2) + ((pdy(i)-yv(j))^2));%%matriz das
distâncias
        GG(i,j) = (1/2*pi)*log(1/rr(i,j)); %cálculo da solução fundamental
    end
end

%% DEFINE A SOLUÇÃO NOS PONTOS PROCURADOS %%
u=GG*c; %vetor solução nos pontos de interesse

%% MATRIZ DAS SOLUÇÕES COM AS CONDIÇÕES DE CONTORNO %%

matriz = reshape(u, [n-1, n-1]); %transforma o vetor solução em uma matriz solução

baixo = px(1:((ntot/4)+1)); %aloca as condições de contorno da parte inferior do
domínio
latdir = px(((ntot/4)+2):(ntot/2))'; %aloca as condições de contorno da lateral
direita do domínio
cima = px(((3*ntot/4)+1):-1:((ntot/2)+1)); %aloca as condições de contorno da
parte superior do domínio
latesq = px(((3*ntot/4)+2):ntot)'; %aloca as condições de contorno da lateral
esquerda do domínio

B = [baixo; latesq matriz' latdir; cima]; %cria a matriz das soluções obtidas com
as condições de contorno do problema homogêneo associado

%% SOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA ORIGINAL %%

solgeral = matrizparticular + B;
toc
posto = rank(G)
%% GRÁFICOS E RESULTADOS %%

xe = intcontinicial:h:intcontfinal; %pontos sobre o eixo x
ye = intcontinicial:h:intcontfinal; %pontos sobre o eixo y

% surf(xe, ye, solgeral) %plota um gráfico 3D com as soluções
% title('Método das Soluções Fundamentais + Método das Soluções Particulares') %
coloca título no gráfico
% xlabel('\bf Eixo x') %nomeia o eixo x
% ylabel('\bf Eixo y') %nomeia o eixo y
% zlabel('\bf Carga Hidráulica/Temperatura') %nomeia o eixo z
% shading interp %suaviza os resultados no gráfico

```

```
%% MOSTRA GRAFICAMENTE A DISPOSIÇÃO DOS PONTOS NO CONTORNO, DOMÍNIO E FONTES
VIRTUAIS
%necessário colocar como comentário as seis linhas acima e
%retirar o comentário das duas linhas abaixo para visualizar os resultados

% plot (x,y,'o', xv, yv,'*', pdx, pdy, '.')
% title('Disposição dos pontos no domínio') %coloca título no gráfico
% xlabel('\bf Eixo x') %nomeia o eixo x
% ylabel('\bf Eixo y') %nomeia o eixo y
% legend('Contorno','Virtuais', 'Domínio') %dá nome/legenda os resultados

%Mostra o número de condicionamento da matriz e o raio utilizado

fprintf('O raio considerado para esta simulação é de %s metros. \n',R)
fprintf('O número de condicionamento da matriz associada ao sistema é %s. \n',cond
(G))
```

```

clear all
close all
clc

% Algoritmo retirado do livro "Métodos Computacionais em Hidráulica", Editora
EDUFBA, 2017.
% ADAPTADO

Lx = 10000; %[m] Comprimento do domínio em x
Ly = 10000; %[m] Comprimento do domínio em y
Nx=41; %Número de divisões do eixo x
Ny=41; %Número de divisões do eixo y
dx=Lx/(Nx-1);%espaçamento da malha em x
dy=Ly/(Ny-1);%espaçamento da malha em y
S=0.000198;%Adimensional
Q=0.03155; %SI, m³/s
T=0.015;
tt=24400;%tt é o tempo total considerado para a simulação. %240;
Nt=9761;%é o número de divisões no eixo temporal.
dt=tt/(Nt-1);
D=T/S;
x=(0:dx:Lx)';
y=(0:dy:Ly)';
h0=100;
h = h0*ones(Nx,Ny);
hh = h;
ht(:, :, 1) = h;

%% CRITÉRIO DE ESTABILIDADE %%
%Exibe uma mensagem avisando se o critério de estabilidade é ou não é
%cumprido.
if dt<=(1/4)*(dx*dy)
    disp('O critério de estabilidade é atendido')
else
    disp('A estabilidade não é garantida. Reveja os incrementos espaciais
temporais')
end

n=1;
for t=dt:dt:tt
n=n+1;
for i=2:Nx-1
for j=2:Ny-1
if i==20 && j==20 %aplicação da fonte pontual 1
F1=-Q/(S*dx*dy);
else
F1=0;
end
hh(i,j)=h(i,j)+D*dt*((h(i-1,j)-2*h(i,j)+h(i+1,j))/(dx^2)+(h(i,j-1)-2*h(i,j)+h(i,
j+1))/(dy^2))+F1*dt;
end
end
end

```

```
h=hh;
ht(:, :, n) = h; %ht é um conjunto de n matrizes com i linhas e j.
%Pode ser interpretada como uma “matriz 3D”, com i linhas, j colunas e
%n matrizes 2D.
end

% PLOTA A SOLUÇÃO PARA O TEMPO t ESCOLHIDO %%
surf(x,y,ht(:, :, 2))
title(['Método das Diferenças Finitas - Analise para o tempo t = 1']) %coloca
título no gráfico
xlabel('\bf Eixo x') %nomeia o eixo x
ylabel('\bf Eixo y') %nomeia o eixo y
zlabel('\bf Carga Hidráulica/Temperatura') %nomeia o eixo z
shading interp %suaviza os resultados no gráfico
```

PROBLEMA 1

PONTOS NO CONTORNO			PONTOS DO DOMÍNIO		
PONTO	COORDENADA X	COORDENADA Y	PONTO	COORDENADA X	COORDENADA Y
pc1	0	0	pd1	0,1	0,1
pc2	0,1	0	pd2	0,2	0,1
pc3	0,2	0	pd3	0,3	0,1
pc4	0,3	0	pd4	0,4	0,1
pc5	0,4	0	pd5	0,1	0,2
pc6	0,5	0	pd6	0,2	0,2
pc7	0,5	0,1	pd7	0,3	0,2
pc8	0,5	0,2	pd8	0,4	0,2
pc9	0,5	0,3	pd9	0,1	0,3
pc10	0,5	0,4	pd10	0,2	0,3
pc11	0,5	0,5	pd11	0,3	0,3
pc12	0,4	0,5	pd12	0,4	0,3
pc13	0,3	0,5	pd13	0,1	0,4
pc14	0,2	0,5	pd14	0,2	0,4
pc15	0,1	0,5	pd15	0,3	0,4
pc16	0	0,5	pd16	0,4	0,4
pc17	0	0,4			
pc18	0	0,3			
pc19	0	0,2			
pc20	0	0,1			

```
clear all
close all
clc

%% Programa para calcular os valores da tabela e gerar os gráficos de
distanciamento de soluções %%

%Comentar clear all, close all e clc nos códigos dos problemas e deixar sem
%comentário somente aqui.

Problema4MDF

Problema4MSF

ERRO = abs(BB-solgeral)

maximo = max(max(abs(BB-solgeral)))

somatorio = sum(sum(abs(BB-solgeral)))

%% GRÁFICOS E RESULTADOS %%

xe = intcontinicial:h:intcontfinal; %pontos sobre o eixo x
ye = intcontinicial:h:intcontfinal; %pontos sobre o eixo y

surf(xe, ye, ERRO) %plota um gráfico 3D com as soluções
title('Distância absoluta dos resultados numéricos') %coloca título no gráfico
xlabel('\bf Eixo x') %nomeia o eixo x
ylabel('\bf Eixo y') %nomeia o eixo y
shading interp %suaviza os resultados no gráfico
```