UFRRJ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO

Matemágica e jogos interativos motivacionais como princípios norteadores no processo de ensino e aprendizagem da educação básica

Daniel Pereira

2024

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

MATEMÁGICA E JOGOS INTERATIVOS MOTIVACIONAIS COMO PRINCÍPIOS NORTEADORES NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA EDUCAÇÃO BÁSICA

DANIEL PEREIRA

Sob a orientação do professor
Cláudio Cesar Saccomori Júnior

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Matemática**, no curso de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Área de Concentração em Matemática.

Seropédica, RJ
Abril de 2024

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Pereira, Daniel, 1984-
P436m Matemágica e jogos interativos motivacionais como princípios norteadores no processo de ensino e aprendizagem da educação básica / Daniel Pereira. - Mesquita, 2024.
100 f.

Orientador: Cláudio Cesar Saccomori Júnior.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, 2024.

1. Matemágica. 2. Jogos. 3. Motivação. 4. Aprendizagem. 5. Matemática. I. Saccomori Júnior, Cláudio Cesar, 1977-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT III. Título.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

Seropédica-RJ, 05 de abril de 2024.

DANIEL PEREIRA

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre, no Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 05/04/2024

CLAUDIO CESAR SACCOMORI JUNIOR Drº UFRRJ (Orientador- Presidente da Banca)

ANDRE LUIZ MARTINS PEREIRA Drº UFRRJ (membro interno)

ANDRÉ LUIZ CORDEIRO DOS SANTOS Drº CEFET-RJ (externo à Instituição)

ATA Nº ata/2024 - ICE (12.28.01.23)
(Nº do Documento: 1233)

(Nº do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 12/04/2024 13:19)
ANDRE LUIZ MARTINS PEREIRA
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
PROFMAT (12.28.01.00.00.00.65)
Matrícula: ###180#6

(Assinado digitalmente em 15/04/2024 12:08)
CLAUDIO CESAR SACCOMORI JUNIOR
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptM (12.28.01.00.00.00.63)
Matrícula: ###222#4

(Assinado digitalmente em 16/04/2024 20:34)
ANDRE LUIZ CORDEIRO DOS SANTOS
ASSINANTE EXTERNO
CPF: ###.###.917-##

*Visualize o documento original em https://sipac.ufrrj.br/documentos/ informando seu número: **1233**, ano: **2024**, tipo: **ATA**, data de emissão: **12/04/2024** e o código de verificação: **f2e2573d42***

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho em primeiro lugar a Deus, pois ele é o autor da vida e de tudo que há nessa terra.

Dedico ainda a minha esposa Dâmaris Pinheiro Amorim Pereira, e as Minhas filhas Sophia Pinheiro Amorim Pereira e Maitê Pinheiro Amorim Pereira. Dedico a minha querida Mãe Izabel de Araújo Pereira. Dedico ainda aos Professores da UFRRJ, que com muita dedicação contribuíram para esse momento.

Uma dedicação especial ao Professor Dr. Cláudio Cesar Saccomori Júnior, que com muita sabedoria e dedicação me orientou na realização desse pesquisa.

Dedico ainda aos meus queridos alunos que tiveram papel preponderante durante a realização dessa pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade de chegar ao final de uma etapa acadêmica, mestrado em Matemática do Profmat, já que sem Ele nada disso seria possível. Esse agradecimento ainda é maior, pois durante essa jornada de muito empenho e dedicação ele colocou pessoas a minha volta que sempre me incentivaram e me ajudaram. Desta maneira, o agradecimento é extensivo a minha querida esposa Dâmaris Pinheiro Amorim Pereira que teve toda paciência durante esses dois anos, sempre procurando me apoiar, esse agradecimento é extensivo as minhas queridas e amadas filhas, Sophia e Maitê. Sophia mesmo tão nova já compreendia que o pai precisava estudar, ao invés de reclamar, quando possível estudava comigo. Já Maitê nasceu no começo do último semestre, fato que dificultou dar a ela toda a atenção que merecia, mas tenho certeza que dei todo o amor necessário e possível. Não poderia deixar de agradecer aos meus pais, em particular a minha mamãe, pois foi ela quem cuidou de mim, que me criou, de certa maneira devo tudo a ela e a meu pai que, que já descansa nos braços do Senhor. Agradeço ainda ao grande Mestre Professor Dr. Cláudio, meu orientador, que aceitou o pedido para que me orientasse na elaboração dessa dissertação de mestrado. Desde o início demonstrou uma grande capacidade, tranquilidade e compreensão da minhas minhas ideias, sempre com os ajustes necessários, contribuindo de maneira exemplar na construção desse trabalho. Não poderia deixar de agradecer aos familiares e amigos, aos meus diretores que disponibilizaram o tempo necessário e possível para que me dedicasse aos estudos. Em particular agradeço aos colegas de turma, que durante o curso foram fundamentais na colaboração, na amizade e parceria, além disso, contribuíram de maneira significativa para a apropriação do conhecimento necessário e indispensável para que pudesse chegar a conclusão do curso.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Finance Code 001.

"A Matemática não mente. Mente quem faz mau uso dela."
(Albert Einstein)

RESUMO

Esta pesquisa descreve truques matemáticos bem como a importância dos jogos e atividades lúdicas como metodologia motivacional e facilitadora no processo de ensino e aprendizagem, com foco na educação básica. Nesse trabalho são apresentadas teorias da aprendizagem que descrevem diferentes fases do desenvolvimento cognitivo do indivíduo. Como metodologia dessa pesquisa a exposição dessas teorias ocorre através do diálogo com autores que destacam a importância dessas atividades no processo de aprendizagem. Sabe-se que os desafios enfrentados na educação básica como falta de motivação e interesse pelo conhecimento matemático são enormes. Diante disso, a dissertação se propõe a construir sequências didáticas envolvendo quatro truques aritméticos, esses truques que são chamados de "matemágicas". Essas matemágicas destacam conteúdos matemáticos fundamentais que podem ser explorados pelo professor. O pleno exercício da cidadania está intrinsecamente ligado a educação. Desta maneira a busca por atividades motivacionais e estimulantes que despertem a curiosidade do aluno deve ser uma prática frequente no processo de ensino. Dentre os teóricos referenciados destacam-se Ferro e Paixão (2017), Oliveira (2008), Santos e Almeida (2018) e Tapia e Fita (2015). Na aplicação dessa pesquisa foi possível verificar que as atividades lúdicas são importante metodologias que podem contribuir para maior motivação e interesse dos discentes durante as aulas. Portanto, considerar a importância de metodologias lúdicas e seu possível impacto na promoção de uma aprendizagem eficiente é essencial para a melhoria da qualidade da educação.

Palavras-chave: matemágica, aprendizagem, motivação, lúdico, aritmética.

ABSTRACT

This research describes mathematical tricks as well as the importance of games and recreational activities as a motivational and facilitating methodology in the teaching and learning process, with a focus on basic education. This work presents learning theories that describe different phases of an individual's cognitive development. As a methodology for this research, these theories are exposed through dialogue with authors who highlight the importance of these activities in the learning process. It is known that the challenges faced in basic education, such as lack of motivation and interest in mathematical knowledge, are enormous. Given this, the dissertation proposes to construct didactic sequences involving four arithmetic tricks, these tricks that are called "mathemagics". These mathmagics highlight fundamental mathematical content that can be explored by the teacher. The full exercise of citizenship is intrinsically linked to education. Therefore, the search for motivational and stimulating activities that awaken the student's curiosity must be a frequent practice in the teaching process. Among the theorists referenced, Ferro and Paixão (2017), Oliveira (2008), Santos and Almeida (2018) and Tapia and Fita (2015) stand out. In applying this research, it was possible to verify that recreational activities are important methodologies that can contribute to greater motivation and interest of students during classes. Therefore, considering the importance of playful methodologies and their possible impact on promoting efficient learning is essential for improving the quality of education.

Keywords: mathemagic, learning, motivation, ludic, arithmetic.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A educação é fundamental para o desenvolvimento da cidadania e a capacidade crítica do ser humano. Como descrito na Lei de Diretrizes e Base da Educação Nacional Brasil (1996), no seu 2º artigo: "A educação, dever da família e do Estado, inspirada nos princípios de liberdade e nos ideais de solidariedade humana, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho". Como pode ser observado, a educação é importante na construção da cidadania, mas é também um grande desafio na sociedade moderna, em particular, a educação matemática no ensino básico. A educação básica tem com propósito principal desenvolver o educando, garantindo-lhe a formação geral fundamental para o exercício da cidadania, e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores.

Muitos discentes demonstram desinteresse pela matemática, alegando ser um disciplina difícil e sem aplicabilidade. É verdade que o excesso de informações tem tornado parte dos alunos mais impacientes e desmotivados para o aprendizado educacional mais formal. Diante desse quadro, a presente pesquisa busca embasar teoricamente a importância dos jogos, de atividades lúdicas, mostrando a importância das atividades didáticas práticas e lúdicas no processo de ensino e aprendizagem. Um dos propósitos imediatos desses jogos e dinâmicas é de despertar o interesse dos alunos, bem como motivá-los para conhecimento matemático básico. Além disso, o trabalho poderá nortear a introdução de determinados conteúdos aritméticos do ensino básico.

De acordo com a BNCC[1] de matemática do ensino básico, a aritmética é parte essencial para a consolidação, ampliação e aprofundamento do conhecimento matemático. Essa área do conhecimento matemático é importante, pois possibilita ao aluno uma maior capacidade de interpretação de problemas do cotidiano, bem como sua solução. Para o desenvolvimento dessas competências e habilidades mais críticas, assim como da capacidade de aplicar os conteúdos matemáticos na resolução de problemas práticos, é indispensável que os discentes estejam motivados para essa área do conhecimento. Os jogos e as atividades diferenciadas podem ser o fator motivador para despertar no aluno maior interesse pelo conhecimento matemático. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> Faz-se necessária uma proposta educacional que tenha em vista a qualidade da formação a ser oferecida a todos os estudantes. O ensino de qualidade que a sociedade demanda atualmente expressa-se aqui como a possibilidade de o sistema educacional vir a propor uma prática educativa adequada às necessidades sociais, políticas, econômicas e culturais da realidade brasileira, que considere os interesses e as motivações dos alunos e garanta as aprendizagens essenciais para a formação de cidadãos autônomos, críticos e participativos, capazes de atuar com competência, dignidade e responsabilidade na sociedade em que vivem. (BRASIL, 1997, p. 27)

A motivação dos alunos para o aprendizado matemático pode perpassar por aulas mais dinâmicas e atrativas, e o professor pode ser o dinamizador desse interesse pelo conhecimento

[1] Base Nacional Comum Curricular.

matemático, com diz Polya[2],

> Um dos mais importantes deveres do professor é o de auxiliar os alunos, o que não é fácil, pois exige tempo, prática, dedicação e princípios firmes. O estudante deve adquirir tanta experiência pelo trabalho independente quanto lhe é possível. Mas se ele for deixado sozinho, sem ajuda ou com auxílio insuficiente, é possível que não experimente qualquer progresso. Se o professor ajudar demais nada restará para o aluno fazer. (POLYA; ARAÚJO, 1977).

O trabalho analisará a importância das atividades lúdicas e dos jogos como metodologia de ensino, para isso dialogará com pensadores da educação que mostram a importância do lúdico como princípios norteadores no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, será elaborado um produto educacional através de sequências didáticas envolvendo atividades lúdicas. Essas atividades serão truques matemáticos. Os truques tem por base os referenciais Eves (2011) e Bastos (2015). Esses truques são aplicados com algumas adaptações. Os truques matemáticos tem por base conceitos matemáticos do ensino básico. Tais conceitos serão abordados e apresentados no decorrer da pesquisa de formas sistemática. Por último, serão analisados os aspectos motivacionais do discentes para o conhecimento da matemática, bem como a mudança de comportamento após a aplicação dessa metodologia lúdica.

Essas sequências serão apresentadas inicialmente através de truques matemáticos, onde serão apresentados o passo a passo bem como os materiais necessários para realização das atividades lúdicas com os alunos, pelos docentes. Em seguida serão exibidos os conceitos matemáticos que envolvem tais truques. Após a apresentação dos conceitos, que são as operações básica, sistemas de numeração, critérios de divisibilidade, potências e múltiplos, será dada aos alunos a possibilidade e o estímulo para que tentem descobrir os segredos por trás de cada matemágica. Após a abordagem e apresentação dos conceitos matemáticos, será revelado o segredo das matemágicas. Previamente às atividades lúdicas, será aplicado um questionário com nove perguntas sobre alguns aspectos relacionados a motivação dos discentes para o conhecimento matemático, bem como o grau de dificuldade que o aluno enxerga no aprendizado dessa disciplina.

As matemágicas abordadas serão: o número pensando, a soma misteriosa, o número riscado e a peça escolhida. Como citado anteriormente os truques o número pensado, o número riscado e a peça escolhida se encontram no livro Eves (2011), já a soma misteriosa tem como base principal o referencial Bastos (2015). No caso dessa pesquisa esses truques tem pequenas variações. Inicialmente será explicado como cada matemágica funciona, após essa explicação serão convidados alguns alunos para participarem ativamente dos truques matemáticos. No truque “o número pensado”, um aluno convidado pensará em um número entre 1 e 63, o docente com a utilização de 6 cartas, contendo esses sessenta e três números, após o aluno indicar em quais cartas se encontra o número pensado, revelará o número pensado. Na matemágica “a soma misteriosa”, um aluno convidado colocará um número no quadro com k algarismos, após

[2]George Pólya foi um matemático húngaro e professor de matemática de 1914 a 1940 no ETH Zürich na Suíça, e de 1940 a 1953 na Stanford University.

o aluno escrever esse número o professor anotará o resultado previamente da soma final, tendo por base apenas o primeiro número. Depois dessa anotação outro aluno será convidado a escrever logo abaixo do primeiro número, outro número com k algarismos. Para finalizar a soma que será realizada o professor colocará um terceiro número, número chave para que a soma seja igual ao resultado previamente anotado. Um terceiro aluno pode ser convidado a realizar a soma dos três números expostos no quadro, após essa soma ser efetuada o professor abrirá o papel que conterá o número correspondente ao da soma. No truque "o número riscado", o aplicador descobrirá um algarismo riscado pelo aluno. A matemágica começará com um aluno expondo no quadro um número de k algarismo, depois escreverá outro número com k algarismo, usando os mesmos algarismos do primeiro número na ordem inversa. Após isso, realizará a subtração desses números (o maior menos o menor). Tendo feito essa subtração o aluno será orientado pelo professor a riscar qualquer um dos algarismos do resultado, não podendo ser o algarismo zero. O discente será informado a efetuar a soma dos algarismos restantes e informará o resultado dessa soma ao professor, que revelará o número riscado sem ver nenhum dos números utilizados pelo aluno. No truque "a peça escolhida", um aluno escolherá uma peça de um dominó tradicional com 28 peças. Após a realização de alguns cálculos, que serão orientados pelo professor, o aluno informará o resultado final. Imediatamente, o docente revelará a peça escolhida, tendo por base apenas o resultado final das contas indicadas para o aluno.

A presente pesquisa pretende propor matemágica como princípios norteadores de alguns conteúdos do ensino básico, buscando motivar e despertar no aluno maior interesse e curiosidade pelo conhecimento matemático, e possivelmente uma melhoria no desempenho escolar na disciplina de matemática. Por último, serão analisados os impactos motivacionais dessas atividades lúdicas, através de questionários, que serão aplicados antes e após as matemágicas. Também será aplicado um teste avaliativo, que terá por base os conteúdos matemáticos envolvidos em duas matemágicas. Após a aplicação desse teste serão analisados os impactos a curto prazo da matemágica no aproveitamento dos discentes no teste. Além disso, os principais resultados dessa pesquisa serão analisados e apresentados através de gráficos.

2 O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

O processo de ensino e aprendizagem é visto por muitas pessoas com um processo árduo e complexo, em particular o conhecimento matemático, mas pode se tornar agradável e até divertido, quando se tem motivação para essa área do conhecimento. A Aprendizagem dos discente é o objetivo principal da educação. Como destaca Tapia e Fita (2015, p. 67), "[...] a aprendizagem é uma construção que o aluno realiza sobre a base do estado inicial ao incorporar a nova informação em seus esquemas cognitivos". Desta maneira, é importante que se compreenda algumas teorias psicológicas da aprendizagem, bem como, que fatores podem trazer maior motivação no estudo da matemática. Além disso, é importante perceber que os jogos podem despertar um maior interesse e motivação para o conhecimento aritmético.

2.1 Teorias psicológicas da aprendizagem

As teorias da educação buscam compreender e dar base para que o o processo de ensino e aprendizagem seja mais efetivo e eficiente. A compreensão das fases do desenvolvimento humano, em particular o desenvolvimento que tange a aprendizagem, é de fundamental importância para que a educação escolar atinja seus principais objetivos. No processo de ensino e aprendizagem, Weisz e Sanhez (2002 *apud* Ferro; Paixão, 2017, p. 23) destacam: "não é o processo e aprendizagem que deve se adaptar ao de ensino, mas o processo de ensino é que tem de se adaptar ao de aprendizagem". Há bastante tempo o homem tenta compreender como se dá o processo de aprendizagem, entretanto foi a partir do século XX que a psicologia começou a desenvolver estudos e teorias para explicar como se dá o aprendizado ao longo do desenvolvimento humano. Deste modo, é significativo apresentar algumas teorias psicológicas da aprendizagem: a teoria Behaviorista, a teoria da aprendizagem significativa, a teoria de Piaget e a teoria de vygotsky.

2.1.1 A Teoria Behaviorista ou comportamentalista

A teoria Behaviorista possui como principais idealizadores Watson[1] (1878-1958) e Skinner[2](1904-1990). O Behaviorismo reconheceu o método de aprendizado que trabalha com a recompensa e com estímulos, também chamado de evento reforçador. A compreensão dessa teoria quanto a aprendizagem como diz Ferro e Paixão (2017, p. 42), "a aprendizagem decorre de sucessivos mecanismos de condicionamento que modelam a ação do homem no ambiente". Essa corrente psicológica da aprendizagem trabalha principalmente o comportamento observável, isto é, o elo estímulo-resposta. Nessa teoria, o estímulo é provocado pelo evento reforçador, não podendo, a priori, ser definido como reforçador para todos as pessoas, sendo adequado afirmar que tal evento é reforçador para determinado indivíduo quando aumenta as chances de se repetir determinado comportamento. Na visão de Skinner, o comportamento humano é diri-

[1]John Watson foi um psicólogo norte-americano que lançou as bases teóricas do Behaviorismo.
[2]foi um psicólogo norte-americano, seguidor do Behaviorismo de Watson.

gido pelo esforço, desta perspectiva o aprendizado é visto como resultado de um processo de modelagem, tendo por base o condicionamento operante. Assim sendo, a aprendizagem não é responsabilidade exclusiva do aluno, mas como diz Ferro e Paixão (2017, p. 48), "não depende exclusivamente do aprendiz, de sua ação sobre o meio, de sua estrutura mental, mas devem existir elementos externos que facilitem a aprendizagem". A teoria behaviorista trouxe novidades pedagógicas na área da educação, tais como criação de máquinas de ensinar, destaque a importância dos alunos serem reforçados positivamente pelo professor em sala de aula, defesa da inadequação do métodos punitivos predominantes nas escolas e a proposição de um ensino gradualmente organizado com base em contingências e reforços.

2.1.2 A Teoria da aprendizagem significativa

Os conceitos iniciais dessa teoria datam de 1960, tendo como o idealizador inicial David Ausubel[3]. Essa abordagem teórica busca compreender como se dão os processos de aprendizagem do ser humano, mas especificamente no âmbito escolar. A aprendizagem significativa como afirmam Ferro e Paixão (2017, p. 51), "A aprendizagem significativa ocorre quando uma nova informação articula-se com um aspecto relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito". Desta maneira, essa teoria ressalta que os conhecimentos preliminares do discente são os fatores mais importante, e que contribui para o aprendizado, ou seja, um conteúdo é bem assimilado quando interage com outras ideias, e conceitos que já fazem parte da estrutura cognitiva do aluno. Portanto o aspecto mais relevante no processo de aprendizagem segundo a teoria ausubeliana é o conhecimento prévio do sujeito. As ideias podem ser resumidas em,

> Se tivéssemos que reduzir toda a psicologia educacional a um só princípio, diríamos: o fator singular mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra isto e ensine-o de acordo. (Ausubel; Novak; Hanesian, 1980 *apud* Ferro; Paixão, 2017, p. 55)

2.1.3 A Teoria de Piaget

A teoria de Piaget[4] busca investigar como se dá o desenvolvimento do conhecimento no ser humano. O principal propósito de suas ideias é estudar a origem e o progresso do conhecimento. Esse teórico busca articular a Biologia, a Filosofia e a Psicologia, para desenvolver uma teoria do desenvolvimento e da inteligência. Em seus estudos, Jean Piaget busca descrever como a pessoa constrói o conhecimento desde o seu nascimento até a fase adulta, destarte, a questão central dos seus estudos é: como se dá a construção do conhecimento?

Para esse pensador, o aspecto biológico é significativo, mas o ponto crucial para o desenvolvimento cognitivo é o convívio social, bem como a interação do sujeito com o objeto e

[3]Nasceu nos Estados Unidos, na cidade de Nova York, no ano de 1918. Formou-se em Medicina com especialização em psiquiatria, mas dedicou sua carreia acadêmica à Psicologia Educacional.

[4]Doutor em ciências naturais, nasceu em 1896, em Neuchâtel, na Suíça, e faleceu em 1980, aos 84 anos de idade.

com outras pessoas. Tal aspecto é tão relevante em seus estudos que a teoria de Piaget destaca a interação como aspecto preponderante. A interação para Jean Piaget era algo tão relevante que ele acreditava que a inteligência só se desenvolvia na sua máxima potencialidade através da socialização e da iteração com o objeto. Desta forma, ele entendia que o desenvolvimento partia do mais simples, isto é, o pensamentos sensório-motor, para o formal, ou seja, aquele que possibilita abstrações lógicas. A ação do sujeito sobre o objeto de acordo com Ferraz e Errazzan (2002, p. 40 *apud* Ferro; Paixão, 2017, p. 72), "[...] é na medida que o sujeito interage (e portanto age sobre e sofre a ação do objeto) que ele vai produzindo sua capacidade de conhecer e vai produzindo também o próprio conhecimento [...]"

Para um maior entendimento da teoria do conhecimento de Jean Piaget, é importante avaliar as ideias centrais da sua teoria: esquema, assimilação, acomodação e equilíbrio. De acordo com Ferro e Paixão (2017, p. 73) "Esquemas são estruturas cognitivas que representam modelos/estratégias de ação generalizáveis que o indivíduo constrói no processo interativo com o meio e que o possibilitam conhecer a realidade". Ao longo do desenvolvimento, esquemas são fabricados e podem ser transformados de acordo com as circunstâncias do ambiente. A interação do indivíduo com o meio é um aspecto importante na formação dos esquemas motores simbólicos e operatórios. Como diz Ferro e Paixão,

> Assim, o esquema constitui a unidade estrutural da mente e, como tal, não é estática; ao contrário, é dinâmica e variada em seu conteúdo, pois se modifica e se adapta, enriquecendo, com isso, tanto o repertório comportamental e motor como a vida mental do indivíduo, em especial da criança. (FERRO; PAIXãO, 2017, p. 73),

Segundo os estudos de Piaget, a inteligência é vista como uma maneira de adequação do indivíduo ao ambiente, que se dá pelos processos de assimilação e de acomodação, já que esses são os elementos de todo o equilíbrio cognitivo, segundo Ferro e Paixão (2017).

Os estudos de Piaget destacam a importância do meio, sem descartar as características inatas do ser humano, mas deixa claro que o sujeito e o objeto são inseparáveis, e ambos se modificam mutuamente. Desta maneira, entende-se que a inteligência como característica inata do indivíduo se desenvolve de acordo com alguns estágios ou período tais como período sensório-motor (de 0 a 2 anos); período pré-operatório (de 2 a 7 anos); período das operações concretas: (de 8 a 11 anos); período das operações formais (de 12 anos em diante).

O estágio sensório-motor, fase que vai do nascimento aos dois anos, é caracterizado por uma inteligência prática, baseada nos reflexos básicos, repetição motora de esquemas iniciais, predominando a repetição de movimentos simples e alguns praticados por pessoas a volta.

> Nesse estágio, não há ainda a capacidade de abstração e a atividade intelectual da criança é de natureza sensorial e motora; ou seja, o conhecimento do real é elaborado pelas impressões que chegam à criança através dos órgãos dos sentidos (percepção) e do aparelho motor (movimentos/ações). (FERRO; PAIXãO, 2017, p. 76)

O período pré-operatório tem com característica principal o começo da intuição e da simbolização. Tendo como aspecto preponderante o desenvolvimento da função simbólica, que como diz Ferro e Paixão (2017, p. 80), "[...] consiste na capacidade de representar objetos e eventos ausentes através de símbolos e signos diferenciados".

O avanço dessa representação simbólica estabelece condições para a aquisição da linguagem, provocando mudanças significativas no comportamento da criança em questões cognitivas, afetivas e sociais. Como diz Garcez (2021, p. 22), "Existe uma capacidade simbólica, com egocentrismo (birra), animismo e pensamento estático e rígido, captadas momentaneamente e sem integração do conjunto". Essas característica são importantes, pois trazem uma maior estabilidade cognitiva e afetiva, aspecto importante para que a criança possa desenvolver as operações lógicas.

Na etapa de operações concretas, que tem início aos sete anos e vai até os 11 anos, tem como marca característica uma evolução do pensamento mais lógico e racional, declínio do egocentrismo, possibilitando maior entendimento da realidade, saindo de uma fase mais animista ou fantasiosa. O aspecto mais relevante nessa fase é como afirma Ferro e Paixão (2017), a reversibilidade operatória, ou seja, o entendimento que as operações podem ser reversíveis. Possibilita que a criança desenvolva a ideia de classificação, número, conservação e velocidade. No estágio das operações formais ou proporcionais que tem início aos doze anos, as estruturas mentais alcançam um elevado nível de evolução, desenvolvendo uma maior capacidade de abstração da mente, consciência do próprio pensamento. Como diz,

> O que caracteriza as operações formais próprias desse estágio é o fato de elas recaírem sobre hipóteses e não mais sobre os objetos. Como as hipóteses não são objetos concretos, mas proposições, as operações formais se realizam de forma interproposicional, ou seja, entre proposições, representando, portanto, a passagem do conhecimento do nível real para o possível, por meio do pensamento combinatório. (FERRO; PAIXãO, 2017, p. 87),

2.1.4 A Teoria de Vygotski

A teoria de Vygotski[5], de acordo com Viana e Francischini (2016), busca apresentar uma psicologia, diferente das percepções positivistas, descrevendo o mundo psíquico como uma construção social da humanidade. A perspectiva da psicologia de Vygotski é de uma aprendizagem sociointeracionista. Como afirma Garcez,

> diferente de Piaget que reconhecia um processo de maturação do 'eu' com o envolvimento da herança genética, influenciando a constituição do sujeito e da aprendizagem para um 'meio' à medida que amadurece, Vygotsky defende o contrário: uma aprendizagem derivada do meio, das interações ou do plano intersubjetivo. (GARCEZ, 2021, p. 25)

A abordagem psicológica de Vygotski, como afirma Ferro e Paixão (2017), também conhecida como histórico-cultural, tendo como base principal descrever como se formaram, no decorrer da história, as funções psíquicas superiores e como elas evoluem no ser humano.

[5]Lev Semenovich Vygotsky nasceu na antiga União das Repúblicas Socialistas Soviéticas (hoje a Rússia), no ano de 1896.

Na concepção de Vygotski, a formação do sujeito está intrinsecamente ligada a interação social, pois dessa interação o indivíduo vai internalizando as atividades socialmente estabelecidas. Como afirma o autor acima citado,

> Desse modo, essa abordagem defende que é a partir das relações com o outro que a criança reconstrói internamente as formas culturais de ação e pensamento, configurando o processo por ele denominado internalização, ou seja, a reconstrução interna de uma operação externa. (Vygotski, 1991 *apud*, Ferro; Paixão, 2017, p. 93).

A relação do indivíduo com o mundo é importante, pois o conhecimento também é fruto das influências externas, que são construídas ao longo do tempo. Na perspectiva de Vygotski, a relação da pessoa com o mundo é mediada por sistemas simbólicos e signos. De acordo com Garcez (2021, p. 26), "Os instrumentos se inserem entre o homem e o mundo ao ampliar as possibilidades de transformação da natureza, enquanto o signo é exclusivamente humano e refere-se aos objetos, às formas e aos fenômenos que representam algo diferente de si mesmos".

Nos estudos de Vygotski, os conceitos de desenvolvimento humano e de aprendizado são fundamentais, bem como a relação entre eles. Nas palavras das autoras mencionadas, a aprendizagem diz respeito ao uso dos signos pelo indivíduo e o desenvolvimento à transformação das funções psíquicas em superiores em decorrência do aprendizado. Como diz Ferro e Paixão (2017, p. 95), "para Vygotski a aprendizagem não é resultado do desenvolvimento; ao contrário, ela conduz ao desenvolvimento, isto é, desencadeia o desenvolvimento do indivíduo". Pautado nessa ideia, Vygotski formulou conceitos importantes como Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP).

> Zona de desenvolvimento proximal. Ela é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes. (VYGOTSKY, 1991, p. 91)

Como afirma Ferro e Paixão (2017, p. 96), "[...]implicações pedagógicas advindas da compreensão da Zona de Desenvolvimento Proximal, o fato de que o ensino deve fazer o desenvolvimento avançar, sinalizando para a importância do professor organizar o ensino considerando a possibilidade de atuar na ZDP". O conceito de zona de desenvolvimento proximal é fundamental para área educacional, pois ao passo que a criança interage com o outras pessoas vai internalizando conhecimentos diversos, que não ocorreriam segundo Vygotsky. Desta maneira, como afirma Ferro e Paixão,

> Deste modo, a escola teria então como função o desenvolvimento de aberturas para a construção de zonas de desenvolvimento proximal da criança, na qual a intervenção do educador é um processo pedagógico que objetiva o alcance de avanços que não ocorreriam espontaneamente. (FERRO; PAIXãO, 2017, p. 98)

2.2 A motivação no processo de ensino e aprendizagem

Um importante aspecto para que o indivíduo realize qualquer atividade é a motivação, talvez o mais importante. É da natureza humana trabalhar por objetivos, buscando alcançar metas, muitas vezes a motivação está nesses objetivos. Como diz Oliveira (2008), a relevância está intrinsecamente ligada o que cada pessoa considera valioso. Desta maneira, a motivação é um fator muito importante no processo de ensino e aprendizagem.

O processo de ensino e aprendizagem pode se tornar mais agradável, e possivelmente mais eficiente, principalmente quando se está motivado para alcançar determinado saber. O significado da palavra motivação de acordo com o dicionário é: ato ou efeito de motivar, de despertar o interesse por algo. Segundo afirma Oliveira (2008, p. 36), "[...] motivação a força que põe alguém em ação para conseguir, para alcançar um objetivo proposto. A motivação é o que coloca um sujeito em movimento em direção a esse fim proposto".

O conhecimento matemático é visto por muitos discentes como um conteúdo difícil e muitas vezes até inacessível. Essa percepção do conhecimento matemático muitas vezes traz mais desmotivação, tanto ao corpo docentes quanto aos discentes. Segundo Tapia e Fita (2015, p. 7), "uma queixa presente na maioria dos encontros de professores é: os alunos não têm interesse em aprender o que queremos ensinar". Diante disso, professores motivados e alunos motivados podem tornar os processo de ensino e aprendizagem mais interessante e e eficaz, em particular no ensino da matemática.

2.2.1 A importância de docentes motivados

Como destacam os autores anteriormente citados, uma queixa frequente de muitos professores é sobre o desinteresse dos discentes pelo que é ensinado. Como destacam Tapia e Fita (2015, p. 9), "o interesse dos alunos em aprender depende em medida das decisões que o professor toma com respeito à organização do ensino". Motivar alguém para aprender não é trabalho fácil. Por isso, se faz necessário a utilização de recursos diversos que visem motivar os alunos, e desta maneira, também se motivar.

Segundo Tapia, quando os professores encontram discentes aparentemente desinteressado pelo que é ensinado, é comum esses docentes tenderem a justificar que as condições de trabalho não favorecem a motivação para o aprendizado. Mesmo diante dessas dificuldades, muitos profissionais se perguntam: o que posso fazer para que os alunos fiquem mais motivados? De acordo com Tapia e Fita (2015, p. 14), "fazer-se essa pergunta implica o reconhecimento do papel do contexto como ativador da motivação e do interesse em aprender".

De acordo com o autor supracitado, a motivação é um dos aspectos chave para que o professor alcance os objetivos propostos, ou seja, os alunos ampliem seus conhecimentos e se desenvolvam. Como sugere Tapia e Fita (2015), para que os discentes estejam mais interessados na aprendizagem, é importante o professor estabelecer metas, conhecer o estado inicial do aluno[6], se valer de modelos de aprendizagem e, embora não se tenha modelos fechados, a psicologia da aprendizagem pode ajudar nessa tarefa. Utilizar modelos de ensino, ou seja, quais atividades podem ser aplicadas para que o aluno atinja as aprendizagens propostas e aplicar metodologias que sejam mais eficientes para se alcançar algumas aprendizagens. Deve se ter em mente a importância de modelos de avaliação, como afirmam destacado a seguir,

> Conhecer o estado inicial dos alunos implica verificar também qual é seu grau e estilo de motivação. Os modelos de aprendizagem e ensino deverão estar impregnados de ideias relativas à motivação se quisermos que nossos alunos realmente aprendam, sendo imprescindível controlar o estado inicial dos alunos, seu estado final e os processos que levaram de um a outro.(TAPIA; FITA, 2015, p. 76)

2.2.2 Discentes motivados para o aprendizado

No processo de ensino e aprendizagem o aluno deve ser o protagonista, para isso, deve ter consciência e motivação. Como descreve Tapia e Fita (2015, p. 77), "a motivação é um conjunto de variáveis que ativam a conduta e a orientam em determinado sentido para poder alcançar um objetivo". Segundo o autor anteriormente citado, professores sem ânimo não desempenharão suas atividades com eficiência e dificilmente transmitirão aos seus alunos entusiasmo, e motivação pelas atividades propostas. A aprendizagem é mais satisfatória quando existe uma afinidade entre professor e aluno.

A atenção dos discentes durante as aulas é um fator de alta relevância para um bom aprendizado. O professor tem um papel central neste aspecto, de acordo com Oliveira (2008, p. 62), "em primeiro lugar, o quê um professor motivado deve conseguir no começo de uma aula, como condição necessária para motivar seus alunos a aprender, é atrair e reter sua atenção, despertando sua curiosidade e interesse". Segundo Tapia e Fita (2015, p. 99), "Às vezes se diz que o mais motivador para um aluno é ter um bom professor. Também se diz que um bom professor é aquele que sabe motivar seus alunos". Ainda de de acordo com Tapia e Fita,

> Em qualquer caso, é importante ter presente que nosso objetivo é conseguir aprendizagens de qualidade, realmente significativas, profundas. Não devemos nos contentar com aprendizagens por memorização ou superficiais. (TAPIA; FITA, 2015, p. 12)

As escolhas de tarefas que serão realizadas pelos alunos devem ter como critério a motivação dos alunos, pois estando motivados, terão mais interesse em desenvolver as atividades propostas e como consequência um melhor desempenho no seu aprendizado. Essas tarefas devem estimular os alunos a tomadas de decisões, avaliação de suas decisões e a concessão ao discente de um papel protagonista no processo de aprendizagem.

2.3 Os jogos no processo de ensino e aprendizagem

O processo de ensino e aprendizagem é um grande desafio, por isso se deve buscar diferentes metodologias para que se alcance resultados mais eficientes e satisfatórios. Destarte, os

[6] Conhecimentos prévios do aluno.

jogos e as atividades lúdicas podem servir de meios facilitadores no processo de aprendizagem dos alunos, principalmente da disciplina de matemática que é vista por muitos como de difícil compreensão. Vygotski defende a importância dos jogos, fazendo um paralelo desses com a instrução escolar, já que ambos criam uma zona de desenvolvimento proximal. De acordo com os Parâmetros curriculares Nacionais (PCN),

> É consensual a ideia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da Matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental para que o professor construa sua prática. (BRASIL, 1997, p. 32)

Desta forma, as atividades lúdicas envolvendo matemágica[7] visam despertar nos alunos a curiosidade e estimulá-los a procurarem a solução de tais truques, bem como de conhecer os conceitos matemáticos por trás das brincadeiras. De acordo com Santos e Almeida (2018, p. 2), "usar o lúdico e o método da resolução de problemas é uma possibilidade de auxiliar no processo ensino-aprendizagem da matemática, pois estimulam o convívio em grupo, desenvolvem o raciocínio e possibilitam uma aprendizagem divertida". As atividades lúdicas e didáticas, conforme afirma Santos (2008), tem duas funções básicas: trazer satisfação ao discente enquanto joga e ao mesmo tempo ensinar algum conteúdo. Deste modo, pode trazer maior motivação para o aprendizado de determinado conteúdo e como consequência melhoria no nível de aprendizado. De acordo com Santos (2008, p. 29), "uma razão lógica para a utilização de jogos parece ser o gosto dos alunos pela atividade lúdica e pelas aprendizagens efetuadas por seu intermédio. O seu objectivo centra-se no despertar o gosto pela Matemática, mudando as rotinas de aprendizagem".

A aplicação de atividades lúdicas e jogos trabalham aspectos importantes tais como cooperação, trabalho em grupo, envolvimento, motivação, entre outros. Esses fatores são primordiais no processo de ensino e aprendizagem. Como afirmam Nicola e Paniz,

> Os jogos tornam-se ferramenta favorável, pois além dos alunos terem a possibilidade de aprenderem, podem estreitar as relações entre o professor e o aluno, tornando-os parceiros na busca do conhecimento. Através da utilização de jogos é possível observar e desenvolver no aluno a aprendizagem de diversas habilidades tais como: tomada de decisões, cooperação, respeito às regras, trabalho em equipe, dentre outras. (NICOLA; PANIZ, 2017, p. 8)

No processo de ensino e aprendizagem os discentes passam por inúmeros desafios, já que estão diante de novos saberes que exigirão motivação, empenho, disciplina, persistência, levantamento de hipóteses, o recurso da tentativas e erro, trabalho em equipe entre outros aspectos. As atividades lúdicas e os jogos destacam muitos desses fatores que estão intrinsecamente ligados a raciocínio lógico, aspecto fundamental no aprendizado da matemática. A atividade lúdica desperta no aluno o desejo de entender, de perguntar, de buscar solução, questões importantes na resolução de muitos problemas matemáticos.

[7] Truque que usa matemática.

A prática docente deve estar comprometida com a formação de alunos pensantes, críticos e criativos, essa prática através do lúdico, em particular através dos truques matemáticos, pode aguçar ou até mesmo despertar o interesse dos alunos pelo conhecimento em questão, o que tornará o trabalho de mediação do professor, no processo de ensino e aprendizagem, mais fácil e eficiente. Desta forma, metodologias diferenciadas podem contribuir para um melhor desempenho dos estudantes, trazendo resultados mais satisfatórios no processo de ensino e aprendizagem. Entretanto, cabe ressaltar que as atividades lúdicas por si só não são capazes de contribuir de maneira significativa para o aprendizado, como destaca Guirado (2018, p. 12) "o jogo, por si só, não garante a construção de conhecimento, pois a qualidade na aprendizagem dos alunos dependerá do papel do professor nessa mediação, intervindo no processo, quando necessário, e apontando os caminhos em busca do sucesso".

As atividades lúdicas, em particular os truques matemáticos, são metodologias que visam motivar os discentes para o aprendizado, trazendo melhoria no processo de ensino e aprendizagem. Cabe destacar que essa terminologia "matemágica", usada para os truques matemáticos têm sido utilizada em alguns trabalhos dos autores supracitados. Como destaca Almeida (2017), no Brasil Pedro Luiz Aparecido Malagutti e João Carlos Vieira Sampaio, colaboram com essa área do conhecimento matemático, através de palestras e oficinas sobre matemágica e seus mistérios. O noticiário publicado em 2017 no site IG, destacado por Almeida (2017), sobre o caso da professora Leila Graziela de Mendonça e Castro que até então lecionava na Escola Estadual Professor Djalma Octaviano, de Campinas, que levou os truques matemáticos para a sala de aula, melhorando o interesse dos alunos pelas aulas de matemática, alcançando melhorias nas notas dos alunos nessa disciplina.

As escolhas de tarefas que serão realizadas pelos alunos devem ter como critério a motivação dos alunos, pois estando motivados, terão mais interesse em desenvolver as atividades propostas e como consequência um melhor desempenho no seu aprendizado. Essas tarefas visam estimular os alunos a: tomarem decisões, avaliarem suas decisões e dar ao discente um papel protagonista no processo de aprendizagem. Como aponta Santos e Almeida,

> usar o lúdico e o método da resolução de problemas é uma possibilidade de auxiliar no processo ensino-aprendizagem da matemática, pois estimulam o convívio em grupo, desenvolvem o raciocínio e possibilitam uma aprendizagem divertida, (SANTOS; ALMEIDA, 2018, p. 2)

No processo de ensino e aprendizagem, os discentes passam por inúmeros desafios, já que estão diante de novos saberes que exigirão motivação, empenho, disciplina, persistência, levantamento de hipóteses, o recurso da tentativa e erro, trabalho em equipe entre outros aspectos. As atividades lúdicas e os jogos destacam muitos desses fatores que estão intrinsecamente ligados a raciocínio lógico, aspecto fundamental no aprendizado da matemática. A atividade lúdica desperta no aluno o desejo de entender, de perguntar, de buscar solução, questões importantes na resolução de muitos problemas matemáticos. Além disso, como destaca Almeida (2020) essas atividades lúdicas contribuem para outros aspectos importantes no processo de formação do discentes, tais como socialização, adaptação, respeito às regras e de saber lidar com a derrota.

Destarte, essas metodologias, quando bem empregadas, podem servir de apoio pedagógico para os docentes no processo de ensino da matemática básica. Como destaca o Programa de Desenvolvimento Educacional do Paraná (PDE),

> Os jogos são instrumentos que o professor pode utilizar para promover e facilitar a aprendizagem, pois enquanto joga o aluno incorpora valores, conceitos e conteúdos, porém em momentos oportunos e não apenas como passa tempo ou para preencher lacunas livres. (PARANÁ, 2016, p. 8).

Em particular, a matemágica faz parte de metodologias que visam motivar os alunos para o conhecimento matemático, gerando curiosidade pelos truques matemáticos, quando bem empregadas podem servir de princípios norteadores para introdução de determinado conteúdo da educação básica, descritos nos parâmetros curriculares.

3 DEFINIÇÕES E RESULTADOS MATEMÁTICOS

Neste capítulo, serão apresentados as principais definições e os resultados matemáticos necessários e presentes nos truques matemáticos do capítulo seguinte. Os principais assuntos que serão abordados são: indução finita, divisão euclidiana, sistemas de numeração, congruência e critérios de divisibilidade.

3.1 Indução finita

Conforme afirma Lages (2013), com a evolução das civilizações a humanidade se apoderou dos modelos abstratos de contagem (um, dois, três, quatro,...) que se tratam dos números naturais[1]. Depois de milhares de anos, é possível descrever os números naturais de forma precisa, graças a forma concisa de descrever esses números, através dos axioma de Peano[2].

Como descreve Carvalho e Morgado (2015):

1. Todo número natural tem um único sucessor, sucessor esse que é um número natural;
2. Números naturais distintos tem sucessores distintos;
3. O único número natural que não é sucessor de nenhum outro natural é o número 1;
4. Seja A um subconjunto dos naturais, ou seja, $A \subset \mathbb{N}$. Caso $1 \in A$ e se, além disso, o sucessor de cada elemento de A ainda pertence a A, então $A = \mathbb{N}$.

Um importante axioma de Peano é o conhecido axioma da indução. Esse axioma é a base de um método eficaz de demonstração de proposições envolvendo números naturais.

De acordo com Milies e Coelho (2000), nas ciências naturais é usado o processo de indução empírica para formulação de leis que governam determinados fenômenos, após a observação de uma grande números de casos.

Por outro lado, na matemática a validade de um resultado é totalmente diferente, não bastando a observação de um grande número de casos, pois essa observação não garante o resultado como verdadeiro. Diante disso, o processo de indução finita é uma ferramenta eficaz na demonstração da validade de determinados resultados matemáticos envolvendo números inteiros positivos. Os teoremas a seguir descrevem o quarto axioma de Peano em forma de propriedades.

Teorema 3.1.1. *Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:*

(i) *$P(1)$ é válida;*

(ii) *Para todo $k \in N$, $P(k)$ verdadeiro implica $P(k+1)$ é verdadeiro. Então, $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.*

[1]Os números naturais serão considerados a partir do número 1, não sendo considerado o zero como natural. Além disso, o símbolo para o conjunto dos números naturais será $\mathbb{N}$.

[2]Giuseppe Peano lógico, Matemático Italiano.

Uma variante do princípio de indução finita é a indução forte ou completa. Nesse princípio de indução, tem-se a validez da proposição para todo $n \leq k$ onde n e k são números naturais e k é fixado arbitrariamente.

Teorema 3.1.2 (Indução completa)**.** *Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:*

(i) $P(1)$ *é válida;*

(ii) Para todo $k \in \mathbb{N}$, se verdadeiro para $P(n)$, para todo $n \leq k$, implica $P(k+1)$ é verdadeiro. Então, $P(n)$ é verdadeiro para todo $n \in \mathbb{N}$.

3.2 Divisão euclidiana

Por volta do ano 300 a.C. em Alexandria, surgiu um tratado que é um marco da matemática, “Os Elementos de Euclides[3]”. Como destacado a seguir,

> os Elementos foram produzidos como um livro-texto, de caráter introdutório, cobrindo o que era considerado, na época, matemática elementar. A obra não se propunha a expor de forma exaustiva o conhecimento matemático de então ou a relatar resultados mais recentes e sofisticados. (MOL, 2013, p. 46)

Euclides[4] em seus elementos mostra que mesmo quando um número inteiro positivo[5] $b \neq 0$ que não divide um número inteiro a, é possível efetuar a divisão de a por b, com resto. O teorema a seguir, conhecido como divisão euclidiana, destaca a afirmação de Euclides.

Teorema 3.2.1. *Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem números inteiros q e r, únicos tais que,*

$$a = bq + r, \text{ com } 0 \leq r < |b|.$$

3.3 Sistemas de numeração

O sistema de numeração que normalmente é utilizado para representar os números inteiros é o sistema posicional. Como destaca Hefez (2022), o sistema posicional é uma variante do sistema sexagesimal, utilizada pelos babilônios em aproximadamente 1700 antes de Cristo. O sistema posicional foi aprimorado pelos chineses e indianos. Documentos do século VI comprovam a utilização desse sistema. Dentre os sistemas de numeração destacam-se o binário e o decimal.

[3]Tratado composto por 13 livros, onde se encontrava a maior parte do conhecimento matemático daquela época, de forma sistematizada.

[4]Considerando a importância de sua obra, pouco é conhecido sobre a vida de Euclides, onde e quando nasceu, ou sobre as circunstâncias de sua morte. Sabe-se que viveu no século III a.C. em Alexandria, durante o reinado de Ptolemeu I, e que esteve dentre os estudiosos que foram convidados para trabalhar no Museu de Alexandria. (MOL, 2013 p. 46)

[5]Como destaca Hefez, Euclides considerava apenas os números naturais.

3.3.1 Binário

O sistema posicional de base dois conhecido como sistema binário de numeração usa apenas os algarismos 0 e 1. Esse sistema tem ampla aplicação na linguagem de computação. O sistema é posicional, pois os algarismos além dos seus valores absolutos, possuem pesos de acordo com a posição. O algarismo que está no extremo direito tem peso 1, o algarismo imediatamente a esquerda do que tem peso 1, tem peso 2, o seguinte tem peso 4, em seguida peso 8 e assim por diante. Ou seja, os pesos são as potências de dois:

$$2^0, 2^1, 2^3, 2^4, \ldots$$

Desta forma, como veremos mais adiante, é possível representar qualquer número inteiro como uma soma de potências de 2.

Exemplo 3.3.1.

1. $10 = 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$

2. $15 = 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0$

3. $30 = 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0$

Um método prático para determinar a extensão do número inteiro na base dois bem como sua representação nessa base é dado pela divisão euclidiana.

Exemplo 3.3.2. Representar o 10 na base 2 e sua extensão.

$$\begin{array}{rrrrr}
10 & \multicolumn{1}{|l}{2} & & & \\ \cline{2-2}
0 & 5 & \multicolumn{1}{|l}{2} & & \\ \cline{3-3}
 & 1 & 2 & \multicolumn{1}{|l}{2} & \\ \cline{4-4}
 & & 0 & 1 & \multicolumn{1}{|l}{2} \\ \cline{5-5}
 & & & 1 & 0
\end{array}$$

Logo $10 = [1010]_2$, onde o último resto na divisão euclidiana é o primeiro algarismo na base 2, o penúltimo resto o segundo algarismo, e assim por diante.

Exemplo 3.3.3. Representar o 15 na base 2.

$$\begin{array}{rrrrr}
15 & \multicolumn{1}{|l}{2} & & & \\ \cline{2-2}
1 & 7 & \multicolumn{1}{|l}{2} & & \\ \cline{3-3}
 & 1 & 3 & \multicolumn{1}{|l}{2} & \\ \cline{4-4}
 & & 1 & 1 & \multicolumn{1}{|l}{2} \\ \cline{5-5}
 & & & 1 & 0
\end{array}$$

Logo, $15 = [1111]_2$, onde o último resto na divisão euclidiana é o primeiro algarismo na base 2, o penúltimo resto o segundo algarismo, e assim por diante.

3.3.2 Decimal

O sistema posicional de base dez, conhecido como sistema decimal, tem como característica o fato de se utilizar dez algarismos. Os algarismo são:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Essa base de numeração é amplamente utilizada no dia-dia escolar, na realização dos cálculos básicos. O sistema é posicional, pois os algarismos além dos seus valores absolutos, possuem pesos de acordo com a posição. O algarismo que está no extremo direito tem peso 1, o algarismo imediatamente a esquerda do que tem peso 1, tem peso 10, o seguinte tem peso 100, assim por diante, ou seja, os pesos são as potências de dez:

$$10^0, 10^1, 10^3, 10^4, \ldots$$

Todos os números inteiros podem ser representados base decimal.[6]

Exemplo 3.3.4.

1. $12 = 1.10^1 + 2.10^0$
2. $15 = 1.10^1 + 5.10^0$
3. $121 = 1.10^2 + 2.10^1 + 1.10^0$

Os sistemas de numeração posicionais se fundamentam, em particular os sistemas binário e decimal, no teorema a seguir.

Teorema 3.3.5. *Dados os números inteiros a e b, onde a > 0 e b > 1. Existem inteiros $m \geq 0$ e $0 < r_0, r_1, \ldots, r_m < b$, com $r_m \neq 0$, únicos e determinados tais que*

$$a = r_0 + r_1 b^1 + r_2 b^2 + \cdots + r_m b^m.$$

Demonstração. A demonstração do teorema será realizada usando o teorema 3.1.2 de indução completa sobre a. Fixado b, tome a sentença $P(a)$: A afirmação do teorema.
(1º caso): Se $0 < a < b$, então basta tomar $m = 0$ e $r_0 = a < b$, e nesse caso a unicidade é óbvia.
(2º caso): Se $a \geq b$, suponhamos que o resultado é válido para todo natural menor que a. Provemos que a sentença é verdadeira para a. Pela divisão euclidiana, teorema 3.2.1, temos que $a = qb + r$ (1), onde $0 \leq r < b$. Note que, $0 < q < a$. De fato, como $a \geq b$ e q é a parte inteira da divisão de a por b, seque que e q é no mínimo 1, logo $q > 0$. Observe ainda que do fato de $b > 1$, tem-se que $b \geq 2$, logo q é no máximo a metade de a e portanto $0 < q < a$. Como $q < a$, pela hipótese de indução completa, existem números inteiros $m' \geq 0$

[6] Essa afirmação será provada a seguir.

e $0 \leq r_1, r_2, \ldots, r_{m'+1} < b$, com $r_{m'+1} \neq 0$, tais que: $q = r_1 + r_2 b + \cdots + r_{m'+1} b^{m'}$ (2). Substituindo (2) em (1) tem-se:

$$a = r + bq = r + b(r_1 + r_2 b + \cdots + r_{m'+1} b^{m'}) = r + r_1 b + r_2 b^2 + \cdots + r_{m'+1} b^{m'+1}.$$

Chamando $r = r_0$ e $m' + 1 = m$, segue que: $a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \cdots + r_m b^m$. Logo o resultado é verdadeiro para a, isto é, $P(a)$ é verdadeira.

Portanto, pelo princípio de indução finita, o resultado é verdadeiro. $\square$

3.4 Congruência

Um importante conceito da Aritmética é o de congruência, que conforme Hefez (2022) foi introduzido por Gauss[7] no seu livro *Disquisitiones arithmeticae*, de 1801. Essa obra é a publicação unitária mais importante de Gauss e, inclusive, é fundamental na moderna teoria dos números. Congruência é a aritmética realizada com os restos da divisão euclidiana por um número inteiro positivo fixado.

Definição 3.4.1. Fixado um natural m, diz-se que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m, quando os restos da divisão euclidiana de a e b por m deixam o mesmo resto. Representa-se por: $a \equiv b \mod m$.

Exemplo 3.4.2.

(i) $25 \equiv 10 \mod 3$, pois tanto 25 quanto 10 deixam resto 1 na divisão por 3;

(ii) $43 \equiv 11 \mod 8$, pois tanto 43 quanto 11 deixam resto 3 na divisão por 8.

Observação 3.4.3. Como o resto da divisão de qualquer números inteiro por 1 é sempre zero, a congruência mod 1 se torna desinteressante. Desta maneira, será considerado o valor de $m > 1$, sempre.

A congruência mod m, para m fixado, é um relação de equivalência. Esse fato decorre imediatamente da definição acima.

Proposição 3.4.4. *Seja m um inteiro positivo maior que 1. Para todo os inteiros a, b, c, tem-se:*

(i) $a \equiv a \mod m$;

(ii) Se $a \equiv b \mod m$, *então* $b \equiv a \mod m$;

(iii) Se $a \equiv b \mod m$ *e* $b \equiv c \mod m$, *então* $a \equiv c \mod m$.

[7]Carl Friedrich Gauss é universalmente considerado como o maior matemático do século XIX e, ao lado de Arquimedes e Isaac Newton, como um dos maiores de todos os tempos. Carl nasceu em Brunswick, Alemanha, em 1777. (Eves, 2011, p. 520).

Proposição 3.4.5. *Sejam a, b e m números inteiros com m > 1. Tem-se $a \equiv b$ mod m se, e somente se, $b - a = km$.*

Demonstração. Suponha $a \equiv b \mod m$. Por definição, a e b, na divisão euclidiana por m, deixam o mesmo resto, isto é, $a = q_1m + r$ e $b = q_2m + r, 0 \leq r < m$. Assim, $b - a = (q_2m + r) - (q_1m + r) = (q_2 - q_1)m + r - r = km$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Reciprocamente, suponha $b - a = mk \in \mathbb{Z}$. Efetuando a divisão euclidiana de a e b por m, temos:

$$a = q_1m + r_1, \text{ com } 0 \leq r_1 < m \text{ e } b = q_2m + r_2, \text{ com } 0 \leq r_2 < m.$$

Segue que, $b - a = q_2m - q_1m + r_2 - r_1 = (q_2 - q_1)m + r_2 - r_1$. Como $b - a = km$ e $-m < r_2 - r_1 < m$, é necessário que $r_2 - r_1$ seja um múltiplo de m entre $-m$ e m. Logo $r_2 - r_1 = 0$ e $r_2 = r_1$. Portanto, $a \equiv b \mod m$ como se desejava provar. □

Exemplo 3.4.6. Sejam $a = 15$, $b = 27$ e $m = 4$, tem-se que os restos da divisão euclidiana de 15 e 27 por 4 são iguais (resto 3). Logo $15 \equiv 27 \mod 4$ o que é equivalente a $27 - 13 = 3 \times 4$.

Proposição 3.4.7. *Sejam a, b, c, d e m números inteiros, com $m > 1$, tais que $a \equiv b \mod m$ e $c \equiv d \mod m$. Então:*

(i) $a + c \equiv b + d \mod m$*;*

(ii) $ac \equiv bd \mod m$.

Demonstração. Pela proposição 3.4.5, tem-se $b - a = k_1m \quad (1)$ e $d - c = k_2m \quad (2)$.

(i) Somando (1) e (2), obtemos

$$(b - a) + (d - c) = k_1m + k_2m \Leftrightarrow (b + d) - (a + c) = (k_1 + k_2)m.$$

Novamente pela proposição 3.4.5, $a + c \equiv b + d \mod m$.

(ii) Observe que: $bd - ac = bd - ad + ad - ac = d(b - a) + a(d - c)$. Aplicando (1) e (2) tem-se:

$$d(k_1m) + a(k_2m) = (dk_1 + ak_2)m = km,$$

onde $k = (dk_1 + ak_2) \in \mathbb{Z}$. Logo $bd - ac = km$ e, novamente pela proposição 3.4.5, tem-se $ac \equiv bd \mod m$. □

Corolário 3.4.8. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{Z}$, tais que $a \equiv b \mod m$. Então $a^n \equiv b^n \mod m$.*

Demonstração. Provemos por indução sobre n usando o teorema 3.1.1 de indução finita. Seja a sentença: $P(n) : a^n \equiv b^n \mod m$. Para $n = 1$, temos, por hipótese do corolário, que $P(1)$ é verdadeira. Suponha o resultado verdadeiro para $n = k$. Provemos para $n = k + 1$, isto é, $a^{k+1} \equiv b^{k+1} \mod m$.

Note que, por hipótese de indução, $a^k \equiv b^k \mod m$ e como por hipótese $a \equiv b \mod m$, tem-se pela proposição 3.4.7 (ii), que $a^k \cdot a \equiv b^k \cdot b \mod m$. Assim, $a^{k+1} \equiv b^{k+1} \mod m$. Logo a afirmação é verdadeira para $P(k+1)$. Portanto, pelo princípio de indução finita, tem-se que $a^n \equiv b^n \mod m$. □

3.5 Critérios de divisibilidade

Na divisão de um número inteiro a por um número inteiro $b \neq 0$, nem sempre a divisão é possível, dentro dos números inteiros. Mas é sempre possível realizar a divisão com um resto pequeno. No caso em que esse resto é zero tem-se que a é divisível por b.

Os teoremas a seguir descrevem alguns critérios para se saber se determinados números inteiros são divisíveis por outros números inteiros, sem se realizar a divisão.

Teorema 3.5.1. *Seja $a = r_n \dots r_1 r_0 = r_n 10^n + \dots + r_1 10^1 + r_0$ um número no sistema decimal. Tem-se que a é divisível por 2 se, e somente se, r_0 é par.*

Demonstração. Seja $a = r_n \dots r_1 r_0 = r_n 10^n + \dots + r_1 10^1 + r_0$ um número no sistema decimal. Note que, $10 \equiv 0 \mod 2$, então pelo corolário 3.4.8 tem-se que $10^i \equiv 0 \mod 2$ (1). Como $r_i \equiv r_i \mod 2$ (2) para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, aplicando a proposição 3.4.7 item (ii) em (1) e (2) tem-se: $r_i 10^i \equiv 0 \mod 2$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Novamente pela proposição 3.4.7 item (i) segue que:

$$r_n 10^n + \dots + r_2 10^2 + r_1 10^1 + r_0 \equiv 0 + \dots + 0 + 0 + r_0 = r_0 \mod 2.$$

Como $a = r_n 10^n + \dots + r_1 10^1 + r_0$, tem-se que a é divisível por 2 se, e somente se, r_0 é par. □

Teorema 3.5.2. *Seja $a = r_n \dots r_1 r_0 = r_n 10^n + \dots + r_1 10^1 + r_0$ um número no sistema decimal. Tem-se que a é divisível por 5 se, e somente se, r_0 é igual a 0 ou 5.*

Demonstração. Seja $a = r_n \dots r_1 r_0 = r_n 10^n + \dots + r_1 10^1 + r_0$ um número no sistema decimal. Note que, $10 \equiv 0 \mod 5$, então pelo corolário 3.4.8 tem-se que $10^i \equiv 0 \mod 5$ (1). Como $r_i \equiv r_i \mod 5$ (2) para todo $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$, aplicando a proposição 3.4.7 item (ii) em (1) e (2) tem-se: $r_i 10^i \equiv 0 \mod 5$ para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Novamente pela proposição 3.4.7 item (i) segue que:

$$r_n 10^n + \dots + r_2 10^2 + r_1 10^1 + r_0 \equiv 0 + \dots + 0 + 0 + r_0 = r_0 \mod 5.$$

Como $a = r_n 10^n + \dots + r_1 10^1 + r_0$, tem-se que a é divisível por 5 se, e somente se, r_0 é um algarismo divisível por 5, ou seja, r_0 é igual a 0 ou 5. □

Teorema 3.5.3. *Seja $a = r_n \dots r_1 r_0 = r_n 10^n + \dots + r_1 10^1 + r_0$ um número no sistema decimal. Tem-se que a é divisível por 3 ou 9 se, e somente se, a soma dos algarismos é um múltiplo de 3 ou 9, respectivamente, ou seja, $r_n + \dots + r_1 + r_0 = 3k$ ou $r_n + \dots + r_1 + r_0 = 9k$ com $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Seja $a = r_n \dots r_1 r_0 = r_n 10^n + \dots + r_1 10^1 + r_0$ um número no sistema decimal. Note que,

$$10 \equiv 1 \mod 3 \quad \text{e} \quad 10 \equiv 1 \mod 9.$$

Aplicando a proposição 3.4.7 item (ii), tem-se que: $r_i 10^i \equiv r_i \mod 3$ e $r_i 10^i \equiv r_i \mod 9$. Novamente aplicando a proposição 3.4.7 item (i), segue que: $\sum_{i=0}^{n} r_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{n} r_i \mod 3$ e $\sum_{i=0}^{n} r_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{n} r_i \mod 9$. Mas $a = \sum_{i=0}^{n} r_i 10^i$. Assim, a é divisível por 3 (ou 9) se, e somente se, $\sum_{i=0}^{n} r_i$ é múltiplo de 3 (ou 9). $\square$

Teorema 3.5.4. *Seja $a = r_n \dots r_1 r_0 = r_n 10^n + \dots + r_1 10^1 + r_0$ um número no sistema decimal. Tem-se que a é divisível por 10 se , e somente se r_0 termina em 0.*

Demonstração. Seja $a = r_n \dots r_1 r_0 = r_n 10^n + \dots + r_1 10^1 + r_0$ um número no sistema decimal. Como $10 = 2 \times 5$, para que um número a seja divisível por 10 é necessário que seja divisível por 2 e por 5 ao mesmo tempo. Pelos teoremas 3.5.1 e 3.5.2, tem-se que a deve terminar em 0. $\square$

3.6 A matemática por trás dos truques

No próximo capítulo, apresentaremos quatro matemágicas: o números pensado, a soma misteriosa, o número riscado e a peça escolhida. Para isto, nesta seção, veremos os principais resultados matemáticos por trás de tais truques, incluindo exemplos e suas demonstrações.

3.6.1 O número pensado

Considere os números inteiros positivos de 1 a 63 dispostos nas seis cartas abaixo, de tal maneira que esses números estejam apenas nas cartas cujo primeiro número da carta seja uma potência de 2 presente na sua expansão na base 2.

Figura 1: Cartas número pensado.

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

Carta C_1

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

Carta C_2

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

Carta C_3

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63

Carta C_4

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

Carta C_5

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

Carta C_6

Fonte: Elaborada pelo autor no LaTeX.

Corolário 3.6.1. *Escolhido um desses números de 1 a 63, a soma dos primeiros números das cartas em que o número escolhido está presente, nos dá o número escolhido.*

Demonstração. Esse corolário é um consequência imediata do teorema3.3.5. Seja a o número escolhido entre 1 e 63. Note que os primeiros números de cada carta são $1 = 2^0, 2 = 2^1, 4 = 2^2, 8 = 2^3, 16 = 2^4$ e $32 = 2^5$ e, pelo teorema citado, todo número pode ser escrito como $a = r_0 + r_1 2^1 + r_2 2^2 + \cdots + r_m 2^m$, onde $r_i = 0$ ou 1, com $i \in \{0, 1, 2, 3, \dots, m\}$.

Desta forma, temos dois casos:

(1º) O número escolhido não esteja na $(i+1)$-ésima carta. Neste caso, $r_i = 0$ e a potência 2^i não entrará na soma;

(2º) O número escolhido esteja na $(i+1)$-ésima carta. Neste caso, $r_i = 1$ e a potência de 2^i entrará na soma. □

Exemplo 3.6.2. Seja $a = 25$. Na expansão da base 2,

$$25 = 1 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4.$$

Note que as cartas em que está o 25 são as que os primeiros números são $1 = 2^0, 8 = 2^3$ e $16 = 2^4$, cuja soma é $1 + 8 + 16 = 25$.

Observação 3.6.3. Para uma demonstração alternativa do corolário 3.6.1, veja o apêndice B.

3.6.2 A soma misteriosa

Considere um número inteiro positivo x de cinco algarismos, escrito na base decimal, ou seja, $x = abcde = a10^4 + b10^3 + c10^2 + d10^1 + e$.

Teorema 3.6.4. *Sejam $x = abcde$ e $y = fghij$ números inteiros positivos quaisquer de cinco algarismos na base* 10*. Seja ainda, o terceiro número inteiro z, dado por*

$$z = (9 - f)(9 - g)(9 - h)(9 - i)(9 - j),$$

onde $(9 - m)$ são algarismos com $m \in \{f, g, h, i, j\}$. Então a soma $x + y + z$ é da forma:

(i) $1abc(d - 1)9$*, se $e = 0$; ou*

(ii) $1abcd(e - 1)$*, se $e \neq 0$.*

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned}
x &= abcde = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e;\\
y &= fghij = 10000f + 1000g + 100h + 10i + j \text{ e}\\
z &= (9 - f)(9 - g)(9 - h)(9 - i)(9 - j)\\
&= 10000(9 - f) + 1000(9 - g) + 100(9 - h) + 10(9 - i) + (9 - j).
\end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned}
y + z &= 10000(f + 9 - f) + 1000(g + 9 - g) + 100(h + 9 - h) + 10(i + 9 - i) + (j + 9 - j)\\
&= 10000 \times 9 + 1000 \times 9 + 100 \times 9 + 10 \times 9 + 9\\
&= 99999.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$x + y + z = 10000(a + 9) + 1000(b + 9) + 100(c + 9) + 10(d + 9) + (e + 9). \tag{3.1}$$

Considere agora os casos em que $e = 0$ e $e \neq 0$ nesta ultima somatória.
(Caso i) $e = 0$: Nesse caso, afirmamos que o algarismo da dezena em (3.1) será $(d - 1)$. De

fato, $10(d+9) = 10(d-1+1+9) = 10(d-1+10) = 10(d-1)+100$ e (3.1) fica:

$$\begin{aligned}
x+y+z &= 10000(a+9)+1000(b+9)+[100(c+9)+100]+10(d-1)+9\\
&= 10000(a+9)+1000(b+9)+100(c+9+1)+10(d-1)+9\\
&= 10000(a+9)+1000(b+9)+100(c+10)+10(d-1)+9\\
&= 10000(a+9)+[1000(b+9)+1000]+100c+10(d-1)+9\\
&= 10000(a+9)+1000(b+9+1)+100c+10(d-1)+9\\
&= 10000(a+9)+1000(b+10)+100c+10(d-1)+9\\
&= [10000(a+9)+10000]+1000b+100c+10(d-1)+9\\
&= 10000(a+9+1)+1000b+100c+10(d-1)+9\\
&= 10000(a+10)+1000b+100c+10(d-1)+9\\
&= 100000+10000a+1000b+100c+10(d-1)+9\\
&= 1abc(d-1)9.
\end{aligned}$$

(Caso ii) $e \neq 0$: Nesse caso, afirmamos que o algarismo da unidade em (3.1) será $(e-1)$. De fato, $(e+9) = (e-1+1+9) = [(e-1)+10]$ e (3.1) fica:

$$\begin{aligned}
x+y+z &= 10000(a+9)+1000(b+9)+100(c+9)+10(d+9)+(e+9)\\
&= 10000(a+9)+1000(b+9)+100(c+9)+10(d+9)+(e-1+1+9)\\
&= 10000(a+9)+1000(b+9)+100(c+9)+[10(d+9)+10]+(e-1)\\
&= 10000(a+9)+1000(b+9)+100(c+9)+10(d+9+1)+(e-1)\\
&= 10000(a+9)+1000(b+9)+[100(c+9)+100]+10d+(e-1)\\
&= 10000(a+9)+1000(b+9)+100(c+9+1)+10d+(e-1)\\
&= 10000(a+9)+1000(b+9)+[100c+1000]+10d+(e-1)\\
&= 10000(a+9)+[1000(b+9)+1000]+100c+10d+(e-1)\\
&= 10000(a+9)+1000(b+9+1)+100c+10d+(e-1)\\
&= 10000(a+9)+[1000b+10000]+100c+10d+(e-1)\\
&= [10000(a+9)+10000]+1000b+100c+10d+(e-1)\\
&= 10000(a+9+1)+1000b+100c+10d+(e-1)\\
&= 100000+10000a+1000b+100c+10d+(e-1)\\
&= 1abcd(e-1).
\end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 3.6.5. Com $e = 0$. Sejam $x = 76840$, $y = 53784$ e $z = (9-5)(9-3)(9-7)(9-8)(9-4) = 46215$. Note que a soma $x+y+z = 76840+53784+46215 = 176839$ e que o resultado é da forma $1abc(d-1)9$.

Exemplo 3.6.6. Com $e \neq 0$. Sejam $x = 67842$, $y = 34789$ e $z = (9-3)(9-4)(9-7)(9-8)(9-9) = 65210$. Note que a soma $x + y + z = 76840 + 34789 + 65210 = 167841$ e que o resultado é da forma $1abcd(e-1)$.

Observação 3.6.7. O fato do número possuir cinco algarismo não é determinante para demonstração. Demonstra-se de maneira análoga para números com qualquer outra quantidade de algarismos, conforme o caso geral no apêndice C.

3.6.3 O número riscado

Teorema 3.6.8. *Seja $x = abcd$ um número inteiro positivo de quatro algarismo na base decimal e $y = dcba$ então $(x-y) = 9k$, onde $k \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Como $x = abcd = 1000a+100b+10c+d$ e $y = dcba = 1000d+100c+10b+a$, então

$$\begin{aligned}
(x-y) &= 1000(a-d) + 100(b-c) + 10(c-b) + (d-a) \\
&= (1000-1)(a-d) + (100-10)(b-c) \\
&= 999(a-d) + 90(b-c) \\
&= 9[(111(a-b) + 10(b-c)] \\
&= 9k.
\end{aligned}$$

□

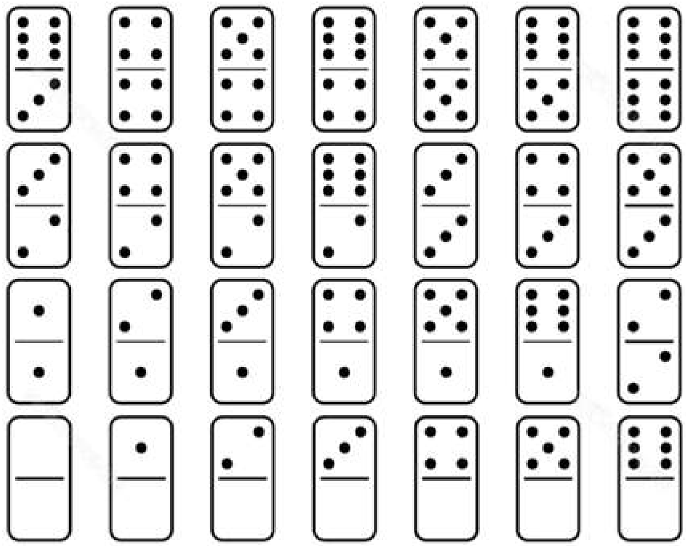
Exemplo 3.6.9. Seja $x = 8791$ e $y = 1978$, note que $(x-y) = 8791-1978 = 6813 = 9 \times 757$. Veja que, $(y-x) = -6813 = 9 \times (-757)$.

Observação 3.6.10. O fato do número possuir quatro algarismo não é determinante para a demonstração. O número poderia ter qualquer quantidade finita de algarismo. Para conferir a demonstração do caso geral consulte o apêndice D.

3.6.4 A peça escolhida

Considere um jogo de dominó tradicional com 28 peças. Como na imagem abaixo:

Figura 2: Peças de Dominó.



Fonte:
https://www.supercoloring.com/pt/artes-com-papel/modelo-de-conjunto-de-pecas-de-domino-para-imprimir

Teorema 3.6.11. *Dada uma peça do dominó, denote x a numeração de um lado e y do outro. Considere um desses números multiplicado por 5, somado 7 ao resultado, multiplicado por 2, o último resultado, adicionado o outro número da peça, subtraindo 12 e finalmente menos 2. Então o resultado é um número da forma $10i + j$, onde i é o primeiro número escolhido e j é o segundo número da peça.*

Demonstração. Seja uma peça qualquer do dominó escolhida. Considere sem perda de generalidade que o primeiro número da peça escolhido para início do cálculo seja x. Efetuando as operações descritas no teorema tem-se:

$$\begin{aligned} [[[[(5x) + 7] \times 2] + y] - 12] - 2 &= 10x + 14 + y - 12 - 2 \\ &= 10x + y \\ &= xy. \end{aligned}$$

□

Exemplo 3.6.12. Suponha que a peça escolhida seja $x = 4$ de um lado e $y = 3$ do outro. Sendo 4 o primeiro número escolhido para começar o cálculo, tem-se:

$$\begin{aligned} [[[[(4 \times 5) + 7] \times 2 + 3] - 12] - 2] &= 20 \times 2 + 7 \times 2 + 3 - 12 - 2 \\ &= 40 + 3 + 14 - 12 - 2 \\ &= 40 + 3 + 2 - 2 \\ &= 10 \times 4 + 3 \\ &= 10x + y. \end{aligned}$$

Logo, a peça escolhida tem o número 4 de um lado e 3 do outro lado.

4 A MATEMÁTICA DE FORMA DIVERTIDA

A prática docente perpassa pela busca de metodologias que possam contribuir para aprendizado dos alunos. Por isso, os docentes devem buscar metodologias que possam auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. A aprendizagem matemática é vista por muitos discentes como um processo cansativo e nada atraente, se valendo de algumas metodologias diferenciadas como destacado anteriormente por alguns autores, o aprendizado matemático pode fica mais divertido e atrativo. O processo de ensino e aprendizagem pautado em atividades lúdicas como matemágica e jogos que sirvam de princípios norteadores para determinado conteúdo do ensino básico, em particular na área de matemática, pode tornar essa área do conhecimento mais prazerosa. Como destacado anteriormento por Ferro e Paixão (2017), a aprendizagem está intrinsecamente ligada a adaptações do ensino, ou seja, os docentes devem buscar mecanismos que contribuam para uma maior motivação e um melhor aprendizado dos discentes.

Na busca dessas atividades lúdicas como fator motivador para determinado conteúdos, a matemágica é uma metodologia que pode cumprir esse papel, como destacado anteriormente por Almeida (2017). Além disso, como no noticiário destacado pelo autor supracitado, tais metodologias contribuíram como aspecto motivador e para um melhor desempenho dos alunos na disciplina de matemática na escola que a professora Leila Graziela de Mendonça e Castro até então lecionava.

Diante disso, visando introduzir determinados conteúdos de aritmética, destacamos os seguintes truques matemáticos: o número pensado, a soma misteriosa, o número riscado e a peça escolhida.

4.1 O número pensado

O número pensado é um truque matemático que tem alguns conceitos matemáticos do ensino básico. Essa matemágica é adaptação de um truque da seção 1.10 do referencial Eves (2011). Como citado anteriormente nos Parâmetros Curriculares Nacionais Brasil (1997), esse truque se enquadra dentro de uma metodologia que destaca que não existe um único caminho para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da matemática. Sendo fundamental que o docente busque caminhos diversos no ensino do conteúdo.

Esse truque tem como objetivo descobrir o número pensado pelo aluno, dentre os sessenta e três disponíveis nas cartas destacadas na seção 3.6.1. Inicialmente serão apresentados seis cartas numeradas como a da figura a seguir:

Figura 3: Cartas número pensado.

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

Carta C_1

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

Carta C_2

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

Carta C_3

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63

Carta C_4

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

Carta C_5

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

Carta C_6

Fonte: Elaborada pelo autor no LaTeX.

4.1.1 Aplicando o truque

1. Pergunte aos alunos quem deseja participar. A partir disso, escolha um aluno, ou alguns alunos;

2. Peça ao aluno que pense em um número entre 1 e 63. (Se quiserem podem anotar em um papel e mantê-lo escondido, para mostrar aos demais futuramente);

3. Mostre uma carta após a outra (As cartas devem estar em ordem crescente das potências de 2, que se encontram na primeira posição de cada carta), pedindo para que o participante diga se o número pensado se encontra na carta;

4. A cada carta que o participante disser que o número pensado se encontra some o primeiro número (a potência de 2);

5. Revele o resultado: O resultado de acordo com o corolário 3.6.1 será a soma das potência de 2 das cartas em que se encontra o número pensado.

Exemplo 4.1.1. Suponha que o aluno tenha escolhido o número 37. O docente aplicador da matemágica mostrará as seis cartas. Nesse caso o número 37 estará na 1ª carta, 3ª carta e

6ª carta, onde as potências de 2 na primeira posição das cartas são: $1, 4$ e 32 cuja soma é: $1 + 4 + 32 = 37$.

4.1.2 Conceitos matemáticos por trás do truque

De acordo com Brasil (1997), no ensino fundamental dois, os discentes devem ampliar os conceitos já trabalhados no ciclo anterior, tais como operações com números naturais e sistema posicional. Além disso, é fundamental nesse ciclo que o aluno tenha confiança em si próprio diante da resolução de situações propostas. Para isso deve ser valorizado as estratégias pessoais do aluno. Desta maneira, o truque anterior pode nortear a introdução dos assuntos abaixo descritos.

1. Sistemas de numeração posicional: base dois;
2. Operações básicas: soma, multiplicação e divisão;
3. Potenciação.

4.1.3 Revelando o segredo

Nesse ponto, é importante estimular os alunos para que busquem descobrir os truques por trás dessa matemágica, sempre valorizando as tentativas dos alunos, ainda que erradas. Afim de auxiliar nessa busca, deem algumas dicas que possam auxiliar na busca por esses segredos. Não sendo descoberto o segredo revele a matemágica, como a seguir.

1. Primeiro mostre que os primeiros números das cartas são potências de 2;
2. Explique que as cartas, mesmo estando de costas para o aplicador da matemágica, estão em ordem crescente das potências de 2;
3. Mostre através de alguns exemplos que todos os números de acordo corolário 3.6.1 podem ser escritos como soma de potências de 2 (dependendo do nível da turma, pode ser falado no sistema posicional de base 2);

Exemplo 4.1.2.

i) $28 = 2^2 + 2^3 + 2^4 = 4 + 8 + 16$

ii) $55 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^4 + 2^5 = 1 + 2 + 4 + 16 + 32$

iii) $17 = 2^0 + 2^4 = 1 + 16$

Observação 4.1.3.

1ª) Após se revelar o truque, dê aos alunos a possibilidade de realizarem os truques, sendo eles os protagonistas;

2ª) Numa aula seguinte a essa proponha exercícios dos conteúdos relacionados aos conceitos matemáticos dessa matemágica.

4.1.4 Sugestão de aula

Tema da Aula: Operações básicas
Objetivos: Apresentar a definição de potenciação; propor situações problemas com potenciação; calcular potências de números naturais; descrever as principais propriedades das potências; representar diferentes números como soma de potências de base dois.

1. Proponha inicialmente uma situação motivadora (sugestão exemplo 4.1.4);
2. Apresente o conceito de potenciação;
3. Proponha situações problemas que envolvam potências (sugestões exemplos a seguir);
4. Mostre através de exemplos que qualquer número natural pode ser escrito como soma de potências de base dois;
5. Use a divisão euclidiana para encontrar as potência de dois cuja soma seja o número natural proposto.

Sugestões de atividades

Exemplo 4.1.4.

i) Em um estacionamento encontram-se quatro carros iguais ao da imagem abaixo, alinhados e parados;

ii) Cada carro com quatro pneus tocando o solo;

iii) Essas quatro rodas presas por quatro parafusos.

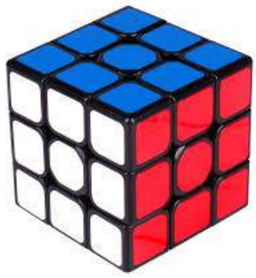
Figura 4: Carro

Fonte:https://www.google.com.br/search?

Então, ao todo, quantos são os parafusos das rodas encostadas no solo, desses quatro carros idênticos?

Exemplo 4.1.5. O cubo mágico é formado por seis faces de quadradinhos coloridos. Cada face tem uma cor.

Figura 5: Cubo mágico

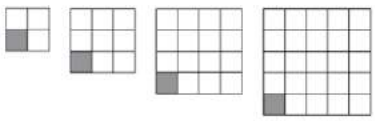


Fonte:https://www.google.com.br/search?

Quantos quadradinhos ao todo formam esse cubo mágico?

Exemplo 4.1.6. Diga quantos são os quadradinhos que formam os quadrados maiores da figura abaixo. Represente por potências o número de quadradinhos de cada quadrado maior.

Figura 6: Quadrados



Fonte:https://www.google.com.br/search?

Exemplo 4.1.7. Sabe-se que a velocidade da luz no vácuo é de aproximadamente de 300 000 km/s ou 300 000 000 m/s. A velocidade da luz em metros por segundo na potência de base 10 é:

a) 3×10^6

b) 3×10^8

c) 30×10^6

d) 300×10^8

4.2 A soma misteriosa

A soma misteriosa é um truque matemático, onde o resultado de uma adição será anotado em um papel, tendo como base apenas um número de cinco algarismo, apresentado por um discente no quadro. Essa matemágica tem com principal referencial Bastos (2015), com algumas adaptações. Nesse truque a previsão do resultado é possível se valendo do teorema 3.6.4. Essa atividade lúdica visa facilitar a aprendizagem, como destacado por Ferro e Paixão

(2017), já que essa não é responsabilidade exclusiva do discente, de sua ação sobre o meio, de sua estrutura mental, mas que alguns elementos externos podem ser facilitadores nesse processo. Inicialmente será explicado que serão necessários a participação de dois a três alunos e a matemágica consiste em descobrir previamente o resultado de uma soma misteriosa.

4.2.1 Aplicando o truque

1. Peça a um aluno voluntário que coloque no quadro um número natural com cinco algarismos;
2. Anote o resultado da soma misteriosa, usando o teorema 3.6.4, deixando o papel em local visível, de maneira que ninguém tenha contato;
3. Peça a um segundo aluno que anote um 2º número natural de cinco algarismos, imediatamente abaixo do 1º número, já exposto no quadro;
4. O professor deve adicionar o terceiro número natural de cinco algarismos, número esse chave da matemágica, esse número deve ser da forma do terceiro número do teorema 3.6.4;
5. Peça a outro aluno que efetue a soma dos três números que estão no quadro;
6. Após um suspense revele o resultado do papel, resultado igual ao da soma realizada pelo terceiro aluno.

Exemplo 4.2.1.

i) Suponha que o primeiro número seja (aluno 1): 68954;

ii) O resultado da soma misteriosa, anotado pelo professor será $\mathbf{1}68953$, de acordo com o teorema 3.6.4 item (ii);

iii) O segundo número (Aluno 2) seja: 35671;

iv) O terceiro número deve ser (Professor) 64328.

Note que, a soma do segundo número com o terceiro é: $35671 + 64328 = 99999$. E que $68954 + 99999 = \mathbf{1}68953$ (número anotado previamente pelo professor).

Exemplo 4.2.2.

i) Suponha que o primeiro número seja: 34560;

ii) O resultado da soma misteriosa, anotado pelo professor será $\mathbf{1}34559$, de acordo com o teorema 3.6.4 item (i);

iii) O segundo número seja: 95674;

iv) O terceiro número deve ser 04325.

Note que, a soma do segundo número com o terceiro é: $95674 + 04325 = 99999$. E que $34560 + 99999 = \mathbf{1}34559$ (número anotado previamente pelo professor).

4.2.2 Conceitos matemáticos por trás do truque

De acordo com Brasil (2017), a unidade de números é uma das cinco unidades fundamentais a serem desenvolvidas no ensino fundamental, dentre os quais destaca-se: sistema de numeração decimal, números naturais, leitura e escrita desses números e operações com números naturais. Nessa perspectiva, o truque "a soma misteriosa" poderá servir de princípio norteador para introdução desses assuntos, já que por trás desse truque estão os conteúdos descritos a seguir.

1. Sistema decimal de numeração;

2. Leitura e escrita dos números naturais;

3. Decomposição em ordens (unidade, dezena, centena, ...);

4. Operações com números naturais.

4.2.3 Revelando o segredo

A matemática é um ciência desafiadora, pois alguns dos seus resultados necessitam de reflexão e muita investigação. Destarte, antes de se revelar o segredo é importante incentivar os alunos a tentarem descobrir o truque matemático. Para isso, dê algumas pistas, sempre valorizando as intervenções propostas por eles. Como pontuado anterioremente por Vygotsky (1991), o nível de desenvolvimento potencial se destaca pela solução de problemas sob a orientação e colaboração de adultos ou pessoas mais capazes. Não havendo resultado satisfatório revele o segredo, de acordo com os passos a seguir:

1. Explique que o resultado será formado apenas tendo como base o primeiro número de cinco algarismos.

2. Explique que o resultado será o mesmo número subtraindo uma unidade e acrescentando o algarismo 1 na frente do número. (número com seis algarismos);

3. Comente que o 2º número colocado pelo segundo aluno é importante, mas pode ser qualquer um, bastando ter a mesma quantidade de algarismo.

4. Explique que o terceiro número é a chave para o resultado ser igual ao resultado do papel, anotado previamente. E que ele somado ao segundo número deve ter como resultado um número da forma 99999.

Exemplo 4.2.3. Suponha que o primeiro número seja: 57342. O número anotado pelo professor dever ser da forma: $\mathbf{1}57341$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Primeiro Aluno} & \rightarrow & 57342 \\ \text{Segundo Aluno} & \rightarrow & 34561 \\ \text{Professor} & \rightarrow & 65438 \end{array}$$

Note que, a soma do segundo número com o terceiro é: $34561 + 65438 = 99999$, e que $57342 + 99999 = \mathbf{1}57341$ (número anotado previamente pelo professor).

Exemplo 4.2.4. Suponha que o primeiro número seja: 38640. O número anotado pelo professor dever ser da forma: $\mathbf{1}38639$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Primeiro Aluno} & \rightarrow & 38640 \\ \text{Segundo Aluno} & \rightarrow & 54962 \\ \text{Professor} & \rightarrow & 45037 \end{array}$$

Note que, a soma do segundo número com o terceiro é: $54962 + 45037 = 99999$, e que $38640 + 99999 = \mathbf{1}38639$ (número anotado previamente pelo professor).

4.2.4 Sugestão de aula

Tema da Aula: Sistema decimal de numeração
Objetivos: Apresentar diferentes sistemas de numeração; contextualizar historicamente esses diferentes sistemas de numeração; compreender a praticidade do sistema decimal, pelo fato de ser um sistema posicional; decompor os números no sistema decimal nas diferentes ordens; efetuar a leitura e escrita do números.

1. Apresente os diferentes sistemas de numeração. (Use a seção 4.5). Essa apresentação pode ser feita através de slides;

2. Ressalte a importância dos números do decurso do desenvolvimento da humanidade, ressalte a praticidade do sistema posicional para efeito de cálculos;

3. Descreva as principais características do sistema decimal de numeração;

4. Destaque através de exemplos os diferentes valores que os algarismos podem assumir (valor relativo), de acordo com a ordem que ocupe (sugestões exemplos 4.2.5 e 4.2.6);

5. Faça a decomposição dos números nas diferentes ordens (sugestão exemplo 4.2.7);

6. Faça a separação de alguns números em classes, e logo após realize a leitura e a escrita desses números (sugestão exemplo 4.2.8).

7. Proponha exercícios mais elaborados (sugestão exemplos 4.2.9, 4.2.10 e 4.2.11).

Sugestões de atividades

Exemplo 4.2.5. 4574 - Destaque que o algarismo 4 à esquerda tem valor relativo de 4000 unidades já o algarismo à direita tem valor relativo de 4 unidades.

Exemplo 4.2.6. 700173 - Destaque que o algarismo 7 à esquerda tem valor relativo de 700000 unidades já o algarismo à direita tem valor relativo de 70 unidades.

Exemplo 4.2.7. Decomposição do número 856471 nas diferentes ordens.

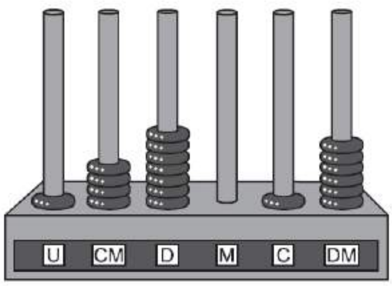
$$\begin{aligned} 856471 &= 8.100000 + 5.10000 + 6.1000 + 4.100 + 7.10 + 1 \\ &= 8.10^5 + 5.10^4 + 6.10^3 + 4.10^2 + 7.10^1 + 1.10^0. \end{aligned}$$

Exemplo 4.2.8. Em 2022, segundo o IBGE, a população do Estado do Rio de Janeiro era de 16.055.174 habitantes e a densidade demográfica era de 366,97 habitantes por quilômetro quadrado. Na comparação com outros estados, ficava nas posições 3 e 2 de 27. Já o total de veículos, em 2022, era de 7.475.503 o que o colocava na posição 5 entre os 27 estados.

Leia o texto acima e escreva por extenso a população do Rio de Janeiro e o número de veículos.

Exemplo 4.2.9. (Enem 2016 – 1ª Azul – 148) O ábaco é um antigo instrumento de cálculo que usa notação posicional de base dez para representar números naturais. Ele pode ser apresentado em vários modelos, um deles é formado por hastes apoiadas em uma base. Cada haste corresponde a uma posição no sistema decimal e nelas são colocadas argolas; a quantidade de argolas na haste representa o algarismo daquela posição. Em geral, colocam-se adesivos abaixo das hastes com os símbolos U, D, C, M, DM e CM que correspondem, respectivamente, a unidades, dezenas, centenas, unidades de milhar, dezenas de milhar e centenas de milhar, sempre começando com a unidade na haste da direita e as demais ordens do número no sistema decimal nas hastes subsequentes (da direita para esquerda), até a haste que se encontra mais à esquerda. Entretanto, no ábaco da figura, os adesivos não seguiram a disposição usual.

Figura 7: Ábaco



Fonte: Enem 2016

Nessa disposição, o número que está representado na figura é

a) 46 171.

b) 147 016.

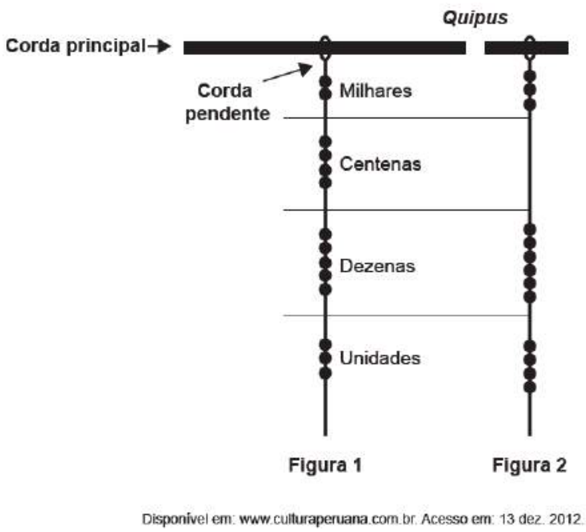
c) 171 064.

d) 460 171.

e) 610 741.

Exemplo 4.2.10. (Enem 2014 – Azul – 172) Os incas desenvolveram uma maneira de registrar quantidades e representar números utilizando um sistema de numeração decimal posicional: um conjunto de cordas com nós denominado quipus. O quipus era feito de uma corda matriz, ou principal (mais grossa que as demais), na qual eram penduradas outras cordas, mais finas, de diferentes tamanhos e cores (cordas pendentes). De acordo com a sua posição, os nós significavam unidades, dezenas, centenas e milhares. Na Figura 1, o quipus representa o número decimal 2 453. Para representar o "zero" em qualquer posição, não se coloca nenhum nó.

Figura 8: Ábaco



Fonte: Enem 2014

O número da representação do quipus da Figura 2, em base decimal, é

a) 364.

b) 463.

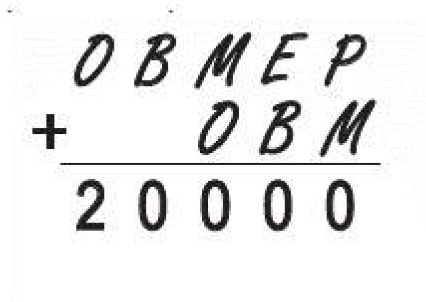
c) 3 064.

d) 3 640.

e) 4 603.

Exemplo 4.2.11. Na conta abaixo, cada letra representa um algarismo diferente. Qual é o algarismo representado pela letra P ?

Figura 9: Sigla



Fonte: Obmep 2018

a) 0

b) 2

c) 5

d) 7

e) 9

4.3 O número riscado

O número riscado é uma matemágica adaptada do truque sugerido na seção 1.10 item c do referencial Eves (2011). A matemágica consiste em se descobrir o número riscado, após a realização de alguns procedimentos e cálculos no quadro por parte de algum discente, que ao final riscará um número. Esses procedimentos serão orientados pelo professor. O professor permanecerá de costas durante a realização de todos os procedimentos por parte do aluno. Ao final, após ser informado pelo aluno do resultado da soma dos algarismos, sem o algarismo riscado, o professor revelará o algarismo riscado.

Essa atividade lúdica visa despertar uma maior motivação nos alunos, além de possibilitar a introdução de alguns conteúdos matemáticos que são base para realização do truque. Como destacado anteriormente por Oliveira (2008), a ação para alcançar determinado objetivo, por parte do indivíduo está intrinsecamente ligada a motivação, já que é a motivação a força que faz o sujeito agir.

4.3.1 Aplicando o truque

1. Convide um aluno para participar na realização do truque. O aluno participante deve escrever no quadro um número de quatro algarismos;

2. Peça para o aluno escrever um número de quatro algarismo, invertendo a ordem dos algarismos do número escrito anteriormente;

3. Peça o aluno que subtraia o menor número do maior;

4. Peça ao aluno que risque qualquer algarismo diferente de zero, no resultado da subtração realizada anteriormente;

5. Peça ao aluno que informe o resultado da soma dos algarismos restantes;

6. Após saber o resultado da soma anterior, o professor revela o algarismo riscado de acordo com teorema 3.6.8. O número riscado é o que falta no resultado informado para o próximo múltiplo de 9.

Exemplo 4.3.1.

i) Seja o número inicialmente escrito no quadro pelo aluno: 4689;

ii) Seja o segundo invertendo a ordem dos algarismos do número anterior: 9864;

iii) Subtraindo o menor do maior: $9864 - 4689 = 5175$;

iv) Considere que o aluno risque o número 7, no número 5175, logo a soma dos restantes é: $5 + 1 + 5 = 11$;

v) O professor dirá que o algarismo riscado é 7, pois é o que falta para o próximo múltiplo de 9.

Exemplo 4.3.2.

i) Seja o número inicialmente escrito no quadro pelo aluno: 9450;

ii) Seja o segundo invertendo a ordem dos algarismos do número anterior: 0549;

iii) Subtraindo o menor do maior: $9450 - 0549 = 8901$;

iv) Considere que o aluno risque o número 9, no número 8901, logo a soma dos restantes é: $8 + 0 + 1 = 9$;

v) O professor dirá que o algarismo riscado é 9, pois é o que falta para o próximo múltiplo de 9.

4.3.2 Conceitos matemáticos por trás do truque

Os conceitos e resultados matemáticos são fundamentais para formação de cidadãos críticos, mas é fundamental que os alunos percebem a importância desses conteúdos e valorizem esse conhecimento para sua formação como cidadão. Como destacado anteriormente por Oliveira (2008), a relevância está intrinsecamente ligada o que cada pessoa considera valioso. Os conteúdos de números naturais, sistema decimal, múltiplos, divisores e critérios de divisibilidade são ressaltados nos parâmetros curriculares municipais, dado o seu valor para formação dos discentes. Observando esse truque, nota-se que esses conteúdos estão presentes nessa atividade lúdica, podendo essa matemágica servir de aspecto motivador para apresentação e abordagem de tais conteúdos. Sendo os conteúdos presentes na matemágica descritos a seguir.

1. Números naturais;
2. Sistema decimal de numeração;
3. Operações básicas;
4. Múltiplos e divisores;
5. Critérios de divisibilidade.

4.3.3 Revelando o segredo

A curiosidade faz parte da natureza humana, devendo ser essa explorada e aguçada pela prática docente. No momento da revelação do segredo seria importante motivar os alunos para que tentem descobrir os segredos do truque "o número riscado". Para isso, é interessante dar algumas orientações a fim de facilitar a descoberta, inclusive motivando a trabalharem em grupo. Não havendo avanços, revele o truque de acordo com os passos a seguir:

1. Mostre através de exemplos que a subtração de números que tem os algarismos invertidos são múltiplos de 9;
2. Lembre o critério de divisibilidade por 9, de acordo com o teorema 3.5.3;
3. Revele o segredo afirmando que o algarismo que foi riscado é exatamente o que falta para o primeiro múltiplo de 9, já que a soma de todos os algarimos seria um múltiplo de 9;
4. Ressalte que por esse motivo não se pode permitir que risque o algarismo zero, pois se pudesse, não se saberia caso a soma informada fosse um múltiplo de 9 se o algarismo riscado foi o 0 ou 9.

4.3.4 Sugestão de aula

Tema da Aula: Múltiplos e divisores
Objetivos: Apresentar as definições de múltiplos e divisores de um número natural; descrever situações que envolvam múltiplos e divisores; descrever alguns critérios de divisibilidade; usar os critérios de divisibilidade para determinar se um número é múltiplo de outro;

1. Inicialmente, proponha uma situação motivadora, como sugestão comece com o exemplo 4.3.3 abaixo.
2. Após a situação motivadora acima apresente a definição de múltiplo;
3. Exemplifique como determinar alguns múltiplos de determinado número natural;
4. Defina o que é um divisor de um número natural;
5. Através de exemplos mostre os divisores de alguns números;
6. Defina o que são números primos e compostos;
7. Descreva os critérios de divisibilidade por $2, 3, 5, 6, 9$ e 10;
8. Apresente exemplos de aplicação dos critérios de divisibilidade (sugestão exemplo 4.3.7);
9. Utilize os critérios de divisibilidade para efetuar a fatoração de um número natural em fatores primos.
10. Defina MMC e MDC entre números naturais.
11. Apresente situações que envolvam MMC e MDC (sugestões exemplos 4.3.8 e 4.3.9).

Sugestões de atividades

Exemplo 4.3.3. O nosso calendário, chamado gregoriano, tem anos com 365 dias e anos bissextos, com 366. Esse dia extra é adicionado, a cada quatro anos, ao mês de fevereiro, que passa a ter 29 dias, em vez de 28.

Observação 4.3.4. Nem todo número divisível (múltiplo) por 4 é um ano bissexto[1].

[1] O ano solar não tem um número inteiro de dias, sendo aproximadamente $365,24$ dias. Desta maneira se faz necessário a inserção de mais um dia no calendário dando origem aos anos bissextos. Além disso, os múltiplos de 100 não são anos bissextos, mesmo sendo múltiplos de 4, exceto os que forem múltiplos de 400.

Figura 10: Translação

Fonte: https://www.google.com.br/search?q=transla

O período de um ano é completado quando a Terra dá uma volta em torno do Sol. Essa volta leva aproximadamente 365 dias e 6 horas, mas, por praticidade, os calendários têm um número inteiro de dias, que é 365. Por isso a cada 4 anos deve ser adicionado um dia a mais no calendário. Sabendo que 2020 foi ano bissexto, quando serão os próximos anos bissextos? Esses números são múltiplos de 4?

Exemplo 4.3.5. Fernanda foi ao médico, que receitou dois medicamentos para ela tomar:

- 1° remédio: de 6 em 6 horas;
- 2° remédio: de 8 em 8 horas.

Ela começou a tomar os dois remédios às 08:00 horas da manhã. Qual o próximo horário em que ela tomará os remédios juntos novamente?

a) 8 h da manhã;

b) 12 h da tarde;

c) 16 h da tarde;

d) 20 h da noite.

Exemplo 4.3.6. Leonardo tem vários palitos de sorvete de mesmo tamanho e deseja formar quadrados com esses palitos. Responda as perguntas a seguir:

a) É possível formar um quadrado usando apenas 10 palitos?

b) Com 20 palitos, é possível que Leonardo forme um quadrado?

c) Usando 30 palitos para formar um quadrado, é possível?

d) Caso Leonardo use 100 palitos, ele consegue formar um quadrado?

Exemplo 4.3.7. Descubra o algarismo que falta em cada caso e responda.

a) Que algarismo deve ser colocado no lugar da ★, de modo que o número abaixo seja divisível por 5 e por 3?

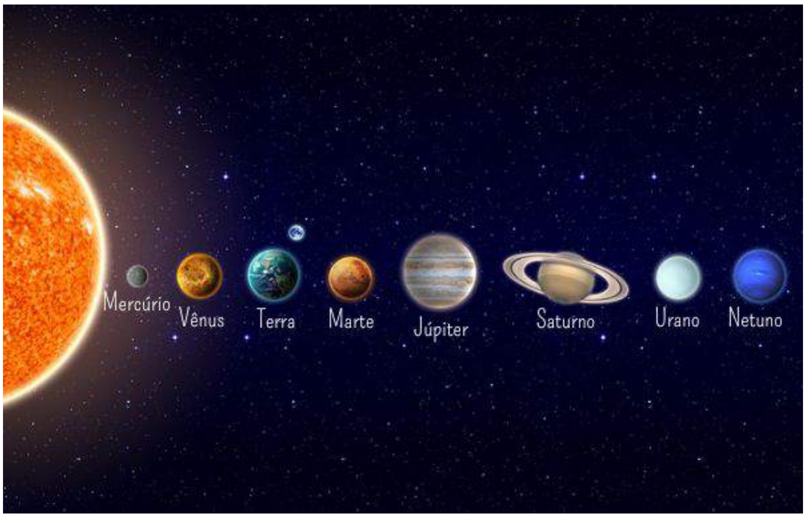
$54\bigstar20$

b) O número que aparece a seguir é divisível por 9 e 6 (múltiplo). Qual é o algarismo que deve substituir ▲ no número abaixo?

$93\blacktriangle560$

Exemplo 4.3.8. Os planetas Júpiter e Saturno completam uma volta em torno do Sol em aproximadamente 12 e 30 anos respectivamente. Veja na figura a seguir,

Figura 11: Planetas



Fonte: https://www.google.com.br/search?q=Transla

Se em certo momento esses planetas se alinham como mostra a figura, quantos anos depois eles voltarão a se alinhar novamente?

Exemplo 4.3.9. (Enem 2015 – 1ª Azul – 162) Um arquiteto está reformando uma casa. De modo a contribuir com o meio ambiente, decide reaproveitar tábuas de madeira retiradas da casa. Ele dispõe de 40 tábuas de 540 cm, 30 de 810 cm e 10 de 1 080 cm, todas de mesma largura e espessura. Ele pediu a um carpinteiro que cortasse as tábuas em pedaços de mesmo comprimento, sem deixar sobras, e de modo que as novas peças ficassem com o maior tamanho possível, mas de comprimento menor que 2 m. Atendendo o pedido do arquiteto, o carpinteiro deverá produzir

a) 105 peças.

b) 120 peças.

c) 210 peças.

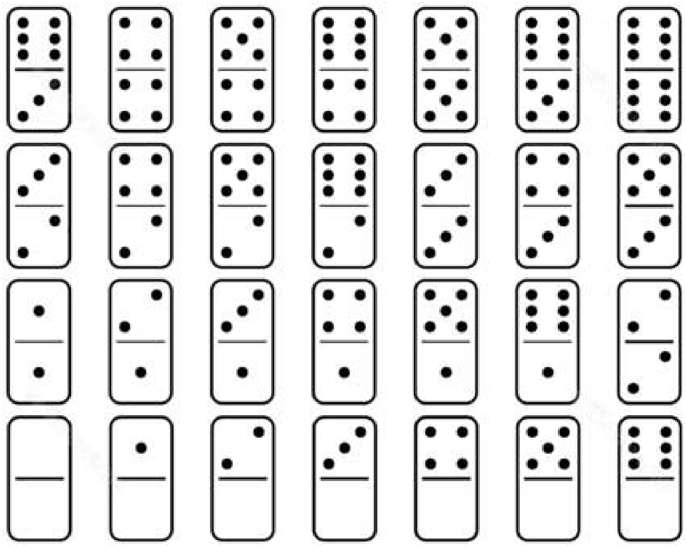
d) 243 peças.

e) 420 peças.

4.4 A peça escolhida

Esse truque matemático foi retirado do referencial Santos e Almeida (2018), com pequenas adaptações. Além disso, é possível encontrar uma variação desse truque no referencial Eves (2011). Nessa matemágica um aluno deve escolher uma das peças do dominó, como da figura as seguir.

Figura 12: Peças de dominó



Fonte:
https://www.supercoloring.com/pt/artes-com-papel/modelo-de-conjunto-de-pecas-de-domino-para-imprimir

Após a escolha de uma peça, sem que o aplicador da matemágica veja, o aluno escolherá um dos números que compõem a peça de dominó, para realizar alguns cálculos, após a realização de desses cálculos, contas essas orientadas pelo professor, será revelado a peça escolhida pelo discente. Esse truque visa despertar a curiosidade do discente, bem como servir de motivação para apresentação de alguns conteúdos matemáticos do ensino básico.

4.4.1 Aplicando o truque

1. Apresente um jogo de dominó tradicional com 28 peças;

2. Peça a um aluno que escolha um peça, dentre as 28 disponíveis;

3. Após escolher a peça, peça que utilize um dos números da peça para começar os cálculos;

4. Escolhido um dos números, peça que o aluno multiplique por 5;

5. Oriente a somar o resultado anterior com 7;

6. Multiplique o último resultado por 2;

7. Peça que o discente some ao último resultado o outro número da peça;

8. Peça que subtraia do último resultado o número 12;

9. Peça ao discente que informe o resultado final, desses cálculos;

10. Usando o teorema 3.6.11, subtraia 2 do resultado informado e diga qual foi a peça escolhida pelo aluno.

Exemplo 4.4.1. Suponha que a peça escolhida possua $x = 6$ de um lado e $y = 2$ do outro. Sendo 2 o primeiro número escolhido para começar o cálculo, tem-se:

$$\begin{aligned}
[[[[(2 \times 5) + 7] \times 2 + 6] - 12] - 2] &= 10 \times 2 + 7 \times 2 + 6 - 12 - 2 \\
&= 20 + 6 + 14 - 12 - 2 \\
&= 20 + 6 + 2 - 2 \\
&= 10 \times 2 + 6 \\
&= 10x + y.
\end{aligned}$$

Logo, a peça tirada tem o número 2 de um lado e 6 do outro lado.

4.4.2 Conceitos matemáticos por trás do truque

A matemática é uma ciência com muitas aplicações práticas, podendo facilitar a representação de situações do dia, sendo importante o conceito de número natural, bem como o sistema de numeração decimal e aplicações das operações básicas na resolução de problemas práticos, inclusive, algumas situações podem ser modelados por expressões aritméticas e algébricas. A seguir estão expressos os principais conteúdos por trás da matemágica "a peça escolhida", podendo ser trabalhados após a aplicação dos truques.

1. Sistema decimal de numeração;

2. Operações básicas com números naturais;

3. Expressão numérica;

4. Expressão algébrica.

4.4.3 Revelando o segredo

Após a apresentação dos conteúdos, é importante que se mostre a matemática por trás do truque, podendo trazer maior motivação e desejo pelo aprendizado matemático. O truque revelado visa mostrar que a matemática também pode ser divertida e ainda sim, levar ao conhecimento de determinados conteúdos matemáticos. Desta forma, é importante que se incentive os alunos a procurarem os segredos por trás dos truques, não obtendo êxito, revele os segredos de acordo com os passos a seguir:

1. Mostre através de exemplos, que o primeiro número escolhido para efetuar o cálculo ficará multiplicado por 10, logo será uma dezena;

2. Através de exemplos mostre que o número 7 somado, foi multiplicado por 2 virando 14, e esse 14 será subtraído, em duas partes -12 realizada pelo aluno, e -2 realizada pelo docente;

3. O segundo número da peça, será a unidade, e são esses dois números que restarão como dezena e unidade.

4. Portanto de acordo com o teorema 3.6.11, a peça escolhida é composta pelo algarismo da dezena e pelo algarismo da unidade.

4.4.4 Sugestão de aula

Tema da Aula: Expressões Aritméticas e Algébricas
Objetivos: Propor situações problemas envolvendo expressões aritméticas e algébricas; resolver expressões aritméticas; apresentar a definição de expressões algébricas; calcular o valor numérico da expressão algébrica.

1. Proponha inicialmente uma situação motivadora envolvendo expressão aritmética (sugestões exemplos 4.4.2 e 4.4.3);

2. Descreva a ordem das operações na solução de uma expressão aritmética;

3. Trabalhe expressões aritméticas que envolvam diversas operações e separadores (sugestões de exemplo 4.4.4);

4. Proponha situações que envolvam expressões algébricas (sugestões exemplos 4.4.5 e 4.4.6);

5. Defina o que é uma expressão algébrica;

6. Apresente exemplos com expressões algébricas;

7. Use a situação inicial para introduzir valor numérico;

8. Proponha exemplos de cálculo de valor numérico (sugestão exemplos 4.4.8);

9. Apresente questões mais elaboradas, como os exemplos 4.4.10 e 4.4.11.

Sugestões de atividades

Exemplo 4.4.2. Resolva a situação a seguir, registrando as operações em uma mesma expressão.

Léo tinha 600 reais. Gastou 350 reais com ferramentas, 145 reais com tintas e 78 reais em par de botas de segurança. Depois, ele recebeu 270 reais como pagamento de uma dívida. Quanto Léo tem agora?

Exemplo 4.4.3. Luan comprou um vídeo game de 4200 reais para presentear seu filho. Deu uma entrada de 2200 reais e parcelou o restante em 4 prestações iguais.

i) Represente essa situação por uma expressão aritmética.

ii) Qual é o valor de cada prestação?

iii) Caso Luan pagasse o restante em 5 prestações, qual seria o valor de cada prestação?

Exemplo 4.4.4. Resolva as expressões:

i) $45 - 3 \times 12 + 28 \times 7 - 14$

ii) $\{[(5 + 15) \div 5] + (49 - 10)\} + 27 \div 3 \times 2$

iii) $\{[(6 \times 5 + 7) \times 2] + 4\} - 12 - 2$

Exemplo 4.4.5. Num parque de diversões, paga-se R$ 10,00 de entrada e mais R$ 5,00 por cada brinquedo utilizado. Quanto deverá pagar uma pessoa que utilizou alguns brinquedos nesse parque? (sugestão use x para representar o número de brinquedos).

Caso o número de brinquedos utilizados seja oito, isto é, $x = 8$, quanto pagará no total?

Exemplo 4.4.6. Uma quadra poliesportiva tem a sua largura com 12 metros a menos que o comprimento. Qual é a expressão algébrica que representa a largura, o comprimento e o perímetro dessa quadra?

Exemplo 4.4.7. Calcule o valor numérico da expressão abaixo, para $x = 6$ e $y = 4$:

$$\{[(x \times 5 + 7) \times 2] + y\} - 12 - 2$$

Exemplo 4.4.8. Calcule o valor numérico da expressões a seguir:

i) $3 \times a + b$, para $a = 5$ e $b = 7$

ii) $4 \times x - 2 \times y$, para $x = 8$ e $y = 7$

iii) $x^2 - 48$, para $x = 7$

Exemplo 4.4.9. O lucro de uma empresa de plástico que produz produtos ecologicamente corretos é dado pela expressão algébrica $L = 48x - 730$, em que L é o lucro e x o número de produtos vendidos. Se, num determinado mês, essa empresa vendeu 132 produtos, quanto ela obteve de lucro?

a) 3616.

b) 5606.

c) 6606.

d) 7066.

Exemplo 4.4.10. (Faetec – 2016) Dezesseis clubes irão disputar um campeonato de basquete. Nesse campeonato, todos os clubes jogam uma única vez com todos os demais clubes. O total de jogos a serem disputados pode ser calculado usando-se a fórmula $(x^2 - x)/2$, onde x representa o número de clubes participantes. Um torcedor que adora basquete conseguiu assistir $3/4$ do número total de jogos. Isso significa dizer que esse torcedor assistiu ao seguinte números de partidas:

a) 60.

b) 90.

c) 120.

d) 150.

Exemplo 4.4.11. (Enem 2019 – 1ª Azul – 168) Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R\$ $1000,00$ por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R\$ $80,00$ por dia trabalhado. Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y, em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por

a) $Y = 80X + 920$.

b) $Y = 80X + 1000$.

c) $Y = 80X + 1080$.

d) $Y = 160X + 840$.

e) $Y = 160X + 1000$.

4.5 A história das matemáticas nas matemágicas

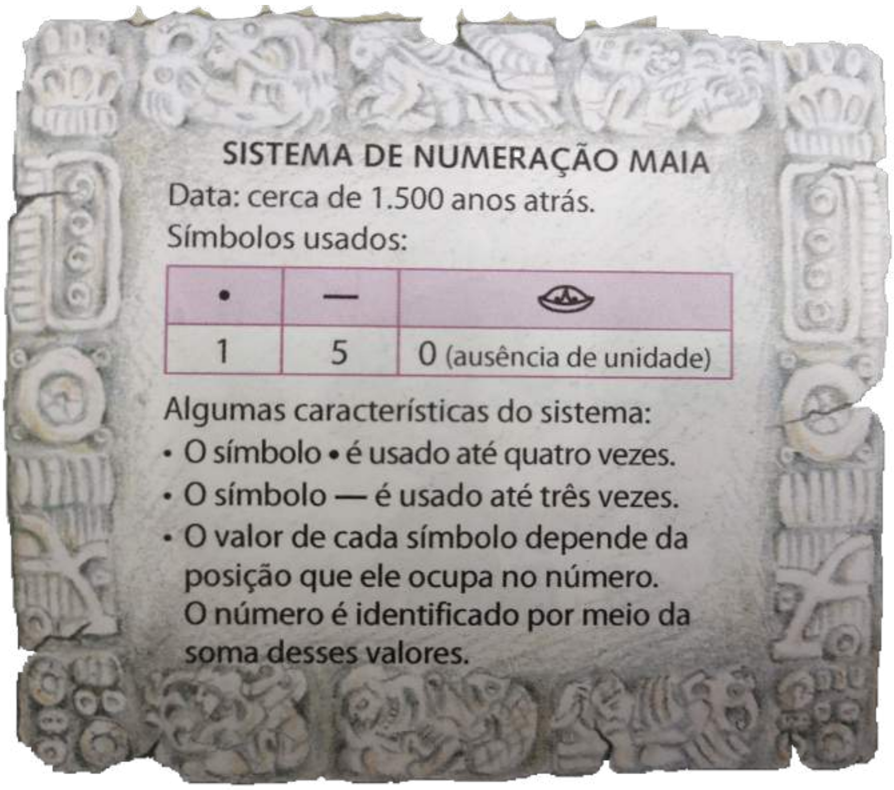
4.5.1 Sistema de numeração posicional

No decurso da história humana, o homem sentiu a necessidade de contar, comparar e codificar. Desta maneira, os números se tornaram indispensáveis para o ser humano. Mas os números nem sempre foram como os conhecemos hoje. Como em destaque a seguir,

> "O conceito de número e o processo de contar desenvolveram-se tão antes dos primeiros registros históricos que a maneira como ocorreram é largamente conjectural. Não é difícil, porém, imaginar como isso provavelmente se deu. É razoável admitir que a espécie humana, mesmo nas épocas mais primitivas, tinha algum senso numérico [...]".(EVES, 2011, p. 25)

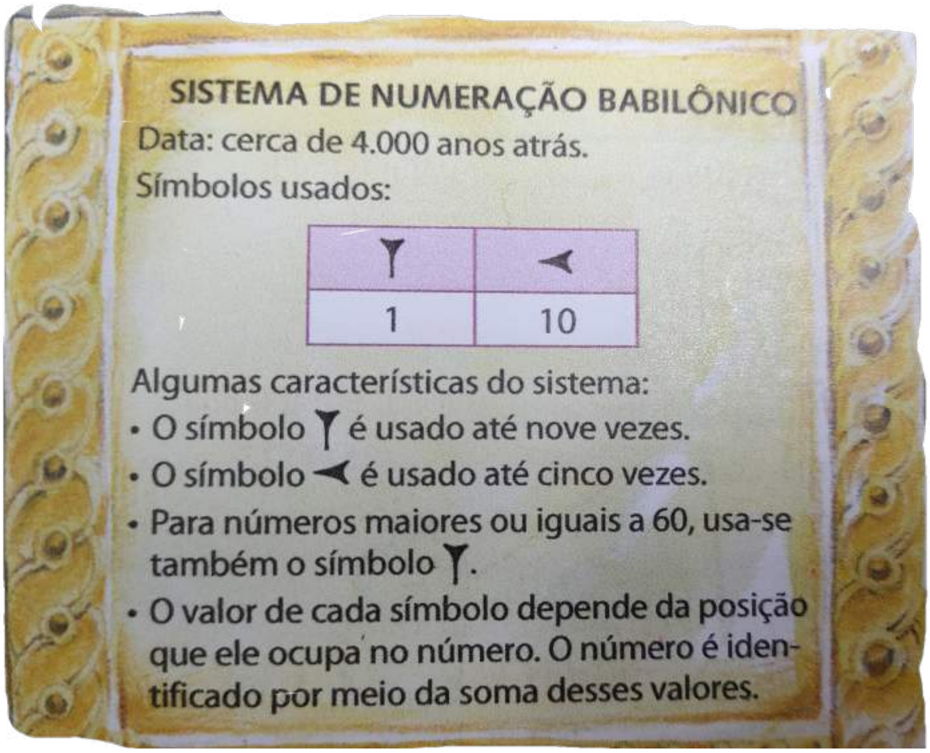
Os antigos contavam usando métodos de registros simples, fazendo uma correspondência biunívoca, através de ranhuras no barro ou em pedras, entalhes num pedaço de madeira ou nós numa corda. É provável que a maneira mais antiga e contar se baseasse em algum método de registro simples, empregando o princípio da correspondência biunívoca. Tempos depois com o desenvolvimento humano e da escrita, foram surgindo diferentes símbolos e sistemas mais complexos para representar os números. Dentre os quais se destacam os sistemas de numeração Egípcio, Babilônico, Maia, Romano e Indo arábico (sistema decimal). As figuras a seguir descrevem alguns desses sistemas de numeração.

Figura 13: Sistema Maia.



Fonte: (LEONARDO et al., 2010, p.18)

Figura 14: Sistema Babilônico.



SISTEMA DE NUMERAÇÃO BABILÔNICO

Data: cerca de 4.000 anos atrás.

Símbolos usados:

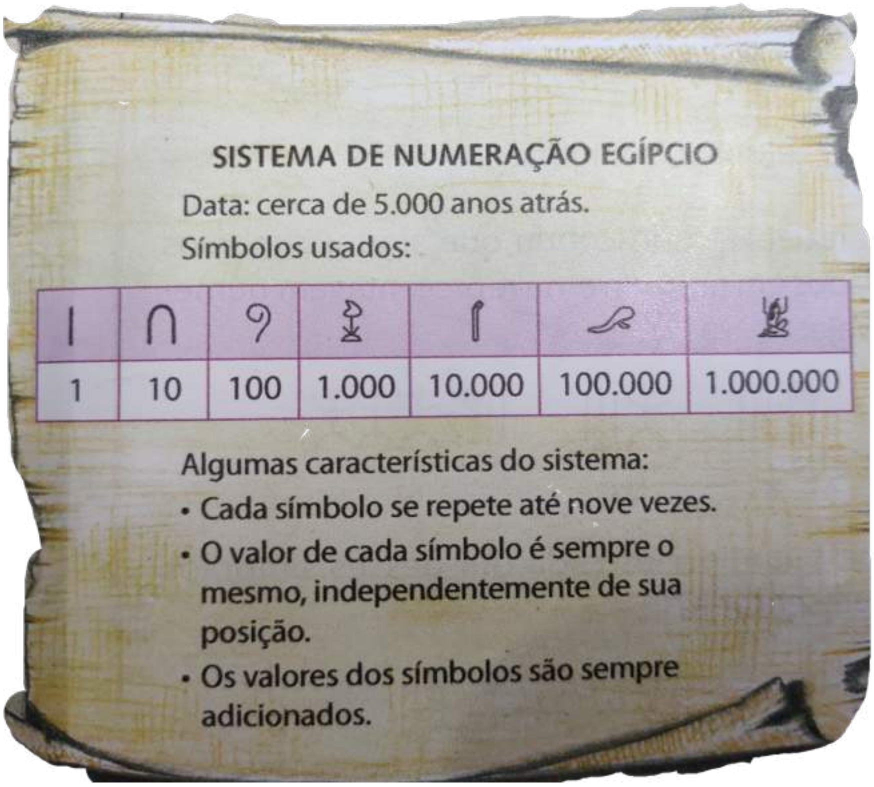
𒁹	𒌋
1	10

Algumas características do sistema:

- O símbolo 𒁹 é usado até nove vezes.
- O símbolo 𒌋 é usado até cinco vezes.
- Para números maiores ou iguais a 60, usa-se também o símbolo 𒁹.
- O valor de cada símbolo depende da posição que ele ocupa no número. O número é identificado por meio da soma desses valores.

Fonte: (LEONARDO et al., 2010, p.19)

Figura 15: Sistema Egípcio.



SISTEMA DE NUMERAÇÃO EGÍPCIO

Data: cerca de 5.000 anos atrás.

Símbolos usados:

𓏺	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨
1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000

Algumas características do sistema:

- Cada símbolo se repete até nove vezes.
- O valor de cada símbolo é sempre o mesmo, independentemente de sua posição.
- Os valores dos símbolos são sempre adicionados.

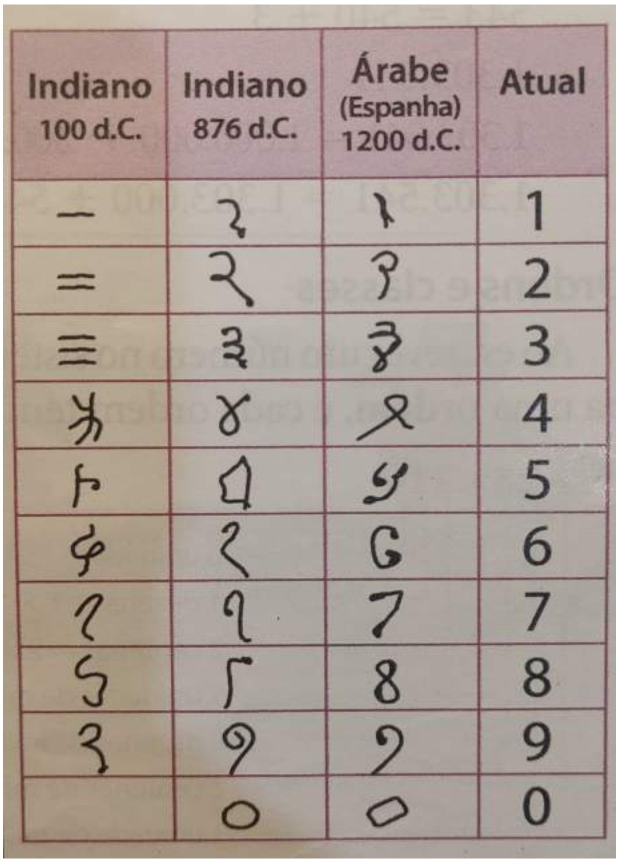
Fonte: (LEONARDO et al., 2010, p.19)

Depois do período clássico o oriente teve grande destaque na contribuição para o desenvolvimento da matemática. Podendo ser enfatizado as contribuições vindas da Índia e sobretudo do império Árabe. A matemática indiana teve uma contribuição marcante para matemática, como o seu sistema de numeração, sendo decimal, posicional e formado por nove algarismos e posteriormente o algarismo zero. Como destaca Mol,

> O sistema de numeração hindu foi resultado da incorporação de elementos de outros povos e de uma longa evolução interna. Os hindus uniram em seu sistema quatro elementos: a base decimal, a notação posicional, o uso do zero e uma notação para cada um dos dez numerais. Nenhum desses elementos foi criação hindu, mas foi na Índia que eles ganharam uma existência conjunta. A princípio, o sistema contava apenas com nove símbolos básicos. O zero, como instrumento para preencher as posições vazias, surgiu apenas posteriormente — a primeira referência a ele data do século IX. Nessa época, o desenho dos dez numerais diferia bastante do formato moderno. Em seu caminho para o Ocidente, sua grafia passou por transformações nas mãos dos árabes antes de ganhar a forma atual. (MOL, 2013, p. 63)

O sistema de numeração decimal também conhecido como indo-arábico tem esse nome devido aos hindus, que o criaram, e devido aos árabes, que o difundiram para a europa Ocidental. Como destaca Eves (2011, p. 40) “Os mais antigos exemplos de nosso atuais símbolos numéricos encontram-se em algumas colunas de pedra erigidas na Índia por volta do ano 250 a.C. pelo rei Açoka”. Veja na figura a seguir exemplos desses algarismos:

Figura 16: Algarismo Indo-Arábico



Fonte:(LEONARDO et al., 2010, p. 21) .

4.5.2 Euclides e seus elementos

Os elementos de Euclides são compostos por treze livros de grande relevância na matemática. Pouco se sabe sobre a vida de Euclides, onde e quando nasceu, mas sabe-se que viveu por volta do ano 300 a.C. Como destacado a seguir,

> Considerando a importância de sua obra, pouco é conhecido sobre a vida de Euclides, onde e quando nasceu, ou sobre as circunstâncias de sua morte. Sabe-se que viveu no século III a.C. em Alexandria, durante o reinado de Ptolemeu I, e que esteve dentre os estudiosos que foram convidados para trabalhar no Museu de Alexandria. Pelas evidências que temos, não há descobertas matemáticas atribuídas a Euclides e sua contribuição foi sobretudo no âmbito da compilação e da sistematização do conhecimento matemático. No entanto, há muito de originalidade em seu trabalho, tanto na forma de exposição quanto na estrutura das demonstrações. (MOL, 2013, p. 46)

A divisão Euclidiana aplicada sucessivamente é utilizado quando se deseja e efetuar a mudança de base. Na mudança de um número da base dez para a base dois é efetuada a divisão euclidiana sucessivas vezes até que o quociente seja zero.

4.5.3 Sistema binário de numeração

Esse sistema de numeração é composto apenas pelos algarismos 0 e 1. O sistema de numeração binário tem grande aplicação na área de informática. Quanto a origem desse sistema de numeração existem divergências sobre a data exata, local e o criador. Na formulação desse sistema de numerãção destaca-se Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), considerado por muitos como o aperfeiçoador desse sistema. Inclusive Leibniz se destaca como um dos primeiros a escrever um artigo sobre o tema, entitulado de *Explicationdel'Arithmétique Binaire.* De acordo com Lopes,

> Mais do que toda sua filosofia, mais do que sua Monadologia, que tanto prezava, seu *Explication de l'arithmétique binaire* apresenta de forma simples e vibrante as bases da moderna Ciência da Computação, do funcionamento dos computadores digitais e dos onipresentes telefones celulares. (LOPES, 2011, p. 90)

A base binária tem grande aplicação na informática, em circuitos eletrônicos. Segundo Santos (2020), "Em eletrônica tudo é estado de corrente elétrica (ligada/desligada, alta/baixa), logo o Sistema binário tornou-se excelente para isso, interpretar todos estes estados usando 0 para tudo que esta desligado/baixo e usando o 1 para tudo que esta ligado/alto". Mais tarde em 1854, George Boole publicou artigo sobre um sistema lógico baseado no sistema binário de Leibniz. Esse sistema lógico mais tarde se tornou imprescindível nos circuitos eletrônicos. Como destacado por Santos (2020), "Álgebra Booleana de George Boole permitiu fazer operações lógicas e aritméticas usando-se apenas dois dígitos ou dois estados. Toda a eletrônica digital e computacional da atualidade estão baseadas nos cálculos da Álgebra Booleana".

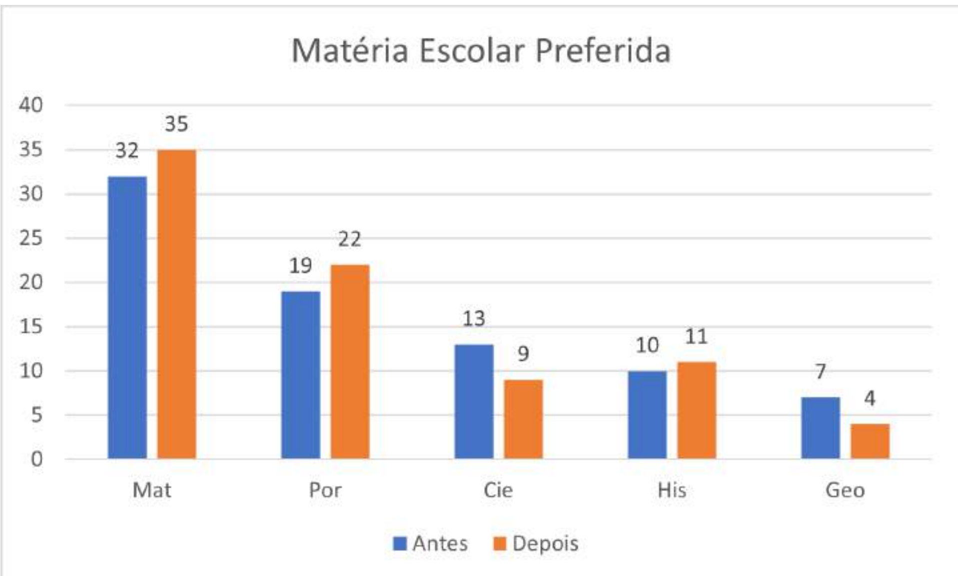
5 ANÁLISE DOS RESULTADOS

A presente pesquisa buscou avaliar a motivação e o interesse dos alunos pelo conhecimento matemático. A pesquisa foi realizada numa escola municipal do Rio de Janeiro, e participaram da pesquisa 81 alunos do 6º ano escolar. Como parte da pesquisa, foi aplicado um questionário antes e após as aulas práticas envolvendo as matemágicas. Os principais objetivos do questionário, que se encontra no "Apêndice A", foram avaliar os possíveis impactos das matemágicas no aumento do interesse e da motivação dos discentes para o conhecimento matemático, quais são os principais fatores que levam os alunos a terem mais interesse pelos conteúdos matemáticos, verificar se os discentes enxergam os jogos como possíveis facilitadores no próprio processo de aprendizagem e avaliar como os alunos enxergam a disciplina de matemática. Além disso, foi aplicado um teste afim de avaliar se os truques matemáticos teriam algum impacto, a curto prazo, no desempenho dos discentes envolvidos na pesquisa. As análises desses resultados serão distribuídos nas secções: a motivação para o conhecimento matemático, os jogos como fator facilitador na própria aprendizagem, a visão do discentes sobre a matemática e sua importância, a maior motivação em uma aula, destaques das aulas envolvendo as matemágicas e análise dos resultados no teste.

5.1 A Motivação para o conhecimento matemático

Nesta secção, serão analisadas as perguntas um, dois e três, do questionário aplicado. A primeira pergunta que será analisada é: **Qual é a sua matéria escolar preferida (displina)?** Como resultado da pesquisa o gráfico da figura 17 descreve a visão dos alunos antes e depois das matemágicas. Veja a seguir:

Figura 17: Matéria escolar

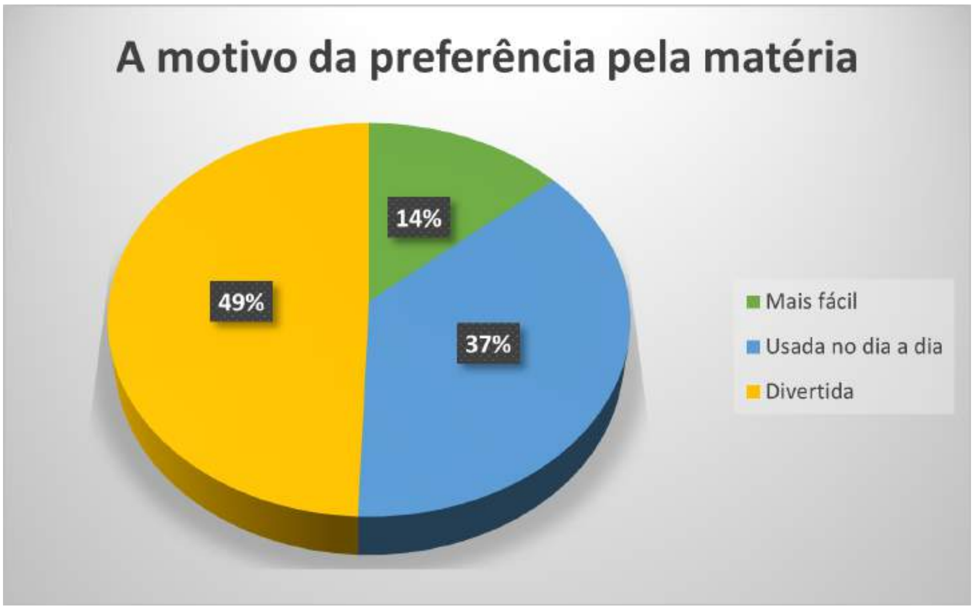


Fonte: Elaborada pelo autor no Excel.

Pelo gráfico da figura 17 é possível observar que a matéria de matemática teve a preferência da maior parte dos alunos, tanto antes quanto depois das matemágicas. Nota-se que ocorreu uma pequena melhora, após as aulas práticas envolvendo os truques. Vale ressaltar, que a disciplina de matemática costuma ser uma matéria vista como difícil e na grande maioria das vezes a de menor preferência. Acreditamos que a preferência pela matemática, tanto antes quantos depois, pode ter sido influenciada pelos truques matemáticos, pois as turmas envolvidas na pesquisa já haviam tido algum contato com matemágicas, já que é comum a realização desses truques no começo do ano letivo, afim de criar um maior afeto e interesse pelo conhecimento matemático.

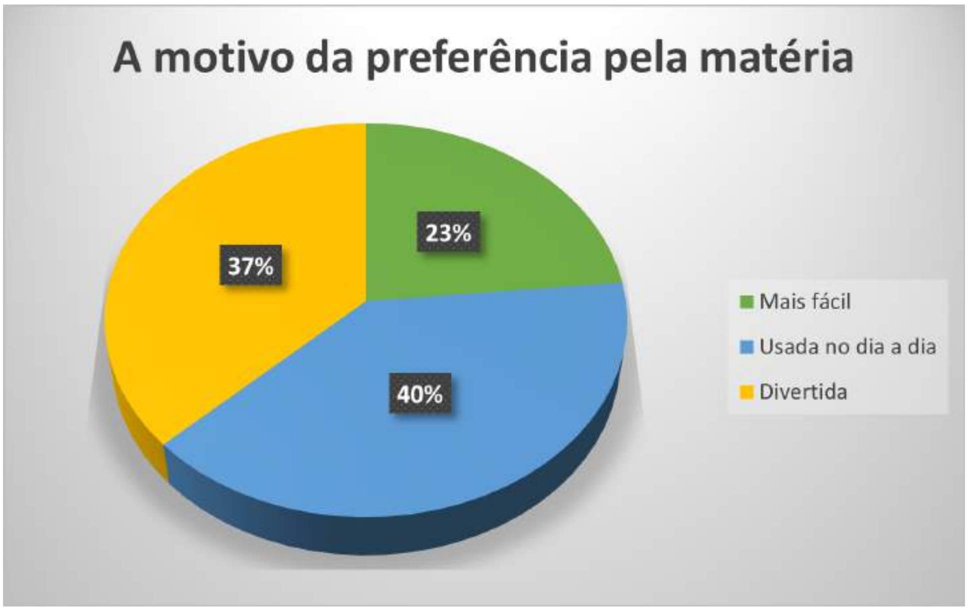
A segunda pergunta aplicada visa analisar quais as principais motivações para escolha da disciplina na questão anterior. Sendo a pergunta: **A preferência pela matéria, indicada na questão anterior se dá por qual motivo?** Os gráficos das figura 18 e 19 apresentam as respostas dos alunos participantes da pesquisa, antes e depois das matemágicas. Veja a seguir:

Figura 18: Motivo da Preferência (Antes)



Fonte: Elaborada pelo autor no Excel.

Figura 19: Motivo da Preferência (Depois)

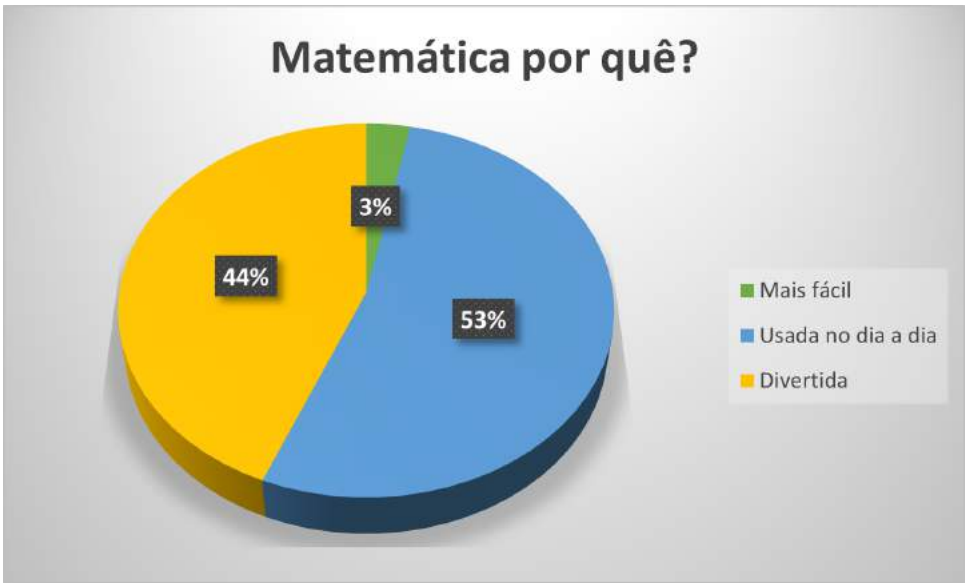


Fonte: Elaborada pelos autores no Excel.

Analisando os gráficos anteriores referente a pergunta dois, tanto antes quanto depois do truques. Nota-se que antes dos truques que quase 50% dos pesquisados associaram a preferência ao fato de ser divertida, o que de certa forma reforçaria a importância de práticas pedagógicas inovadoras, na transmissão do conhecimento, entretanto pela análise do gráfico resultante da pesquisa aplicada após os truques teve uma queda de 12%, resultando em 37% dos alunos que relacionaram a preferência da matéria ao fato de ser divertida. Observa-se ainda que parte desses pesquisados migraram para o opção mais fácil, o que de certa maneira pode está relacionado ao desenvolvimento dos truques, e talvez tenha facilitado a compreensão do conteúdo por boa parte dos alunos. Cabe destacar que alguns alunos também migraram para a opção usada no dia a dia, desta forma, é possível concluir que a matéria ensinada dever ser contextualizada com situações práticas da vida, destacando a importância da mesma na resolução de problemas do cotidiano do aluno.

Nesse momento a análise da pergunta dois se restringirá aos que escolheram matemática como matéria preferida na primeira pergunta. veja os gráficos das figuras 20 e 21 a seguir:

Figura 20: Preferência por Matemática (Antes)



Fonte: Elaborada pelos autores no Excel.

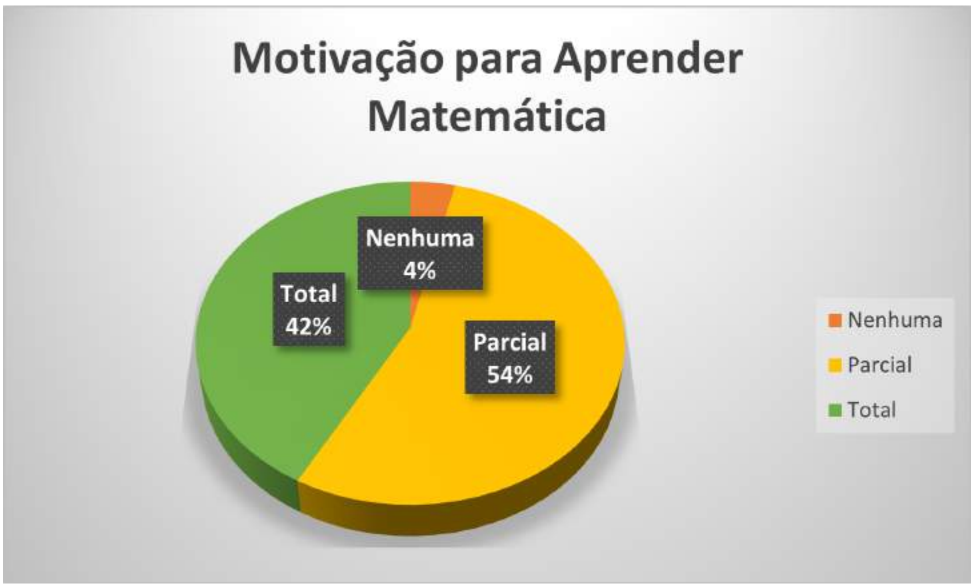
Figura 21: Preferência por Matemática (Depois)

Fonte: Elaborada pelos autores no Excel.

Observando os gráficos acima nota-se que inicialmente 44% dos que preferem matemática associaram essa escolha ao fato de ser divertida e 53% fizeram essa escolha tendo como motivação o aspecto de ser usada no dia a dia. Num segundo momento após a realização das matemágicas foi feita a pergunta dois novamente, e as respostas estão descritas na figura 21. Pela análise desse gráfico, nota-se que 37% dos que escolheram matemática relacionaram ao fato de ser divertida, e 52% fizeram a escolha ligando ao fato de ser usada no cotidiano. A escolha motivada pelo aspecto da ser divertida teve uma queda de de 7%, menor que a queda de 12% observada na motivação para escolha da disciplina preferida, quando se considera todas as disciplinas. Cabe ressaltar que embora tenha ocorrido essa queda de 7%, em números absolutos a redução foi de um aluno, pois os 44% do primeiro gráfico que escolheram matemática, pelo fato de ser divertida corresponde a 14 alunos, e posteriormente as matemágicas, no segundo gráfico foram 37% que responderam divertida, o 37% representa 13 alunos, o que de certa maneira mostra que em números absolutos o número de alunos que escolheu matemática pelo fato de ser divertida permaneceu quase que inalterado. O que de fato ocorreu é que 11% num segundo momento optaram pela opção mais fácil, o que representou um aumento de 8%. Uma questão que vale ressaltar é que todos os alunos já tinham tido contato com os truques matemáticos, antes da aplicação da matemágica de forma mais sistemática, o que de certa maneira pode ter tido alguma influência nas resposta da primeira vez que a pergunta dois foi aplicada, sendo possível conjecturar que a associação ao fato de ser divertida pudesse ter sido menor num primeiro momento, e possivelmente teria um crescimento num segundo momento, o resultado observado no gráfico da figura 21. Outro aspecto importante é que a maior parte dos alunos, tanto antes quanto depois dos truques matemáticos ressaltam e relacionam a escolha pela matemática ao aspecto de ser usada em situações do dia a dia.

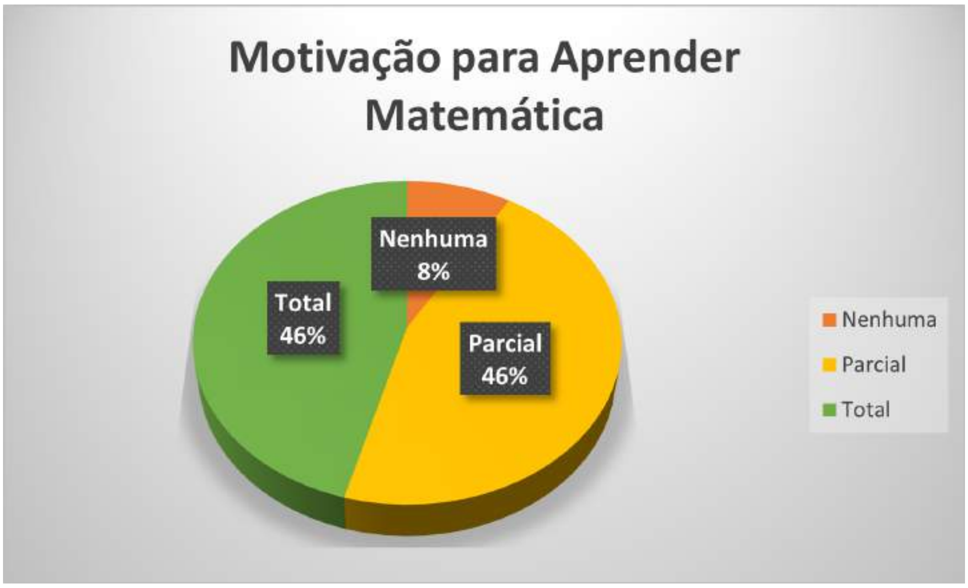
A terceira pergunta feita ao discentes tem como principal objetivo analisar a motivação para o conhecimento matemático, sendo a pergunta: **Qual é a sua motivação para aprender matemática?**. Veja as figuras 22 e 23 a seguir:

Figura 22: Motivação (antes)



Fonte: Elaborada pelos autores no Excel.

Figura 23: Motivação (depois)



Fonte: Elaborada pelos autores no Excel.

Analisando os gráficos anteriores das figuras 22 e 23, observa-se que o número de discentes interessados pelo conhecimento matemático teve um pequeno acréscimo de 4%, passando de 42% para 46%, além disso, a maior parte dos alunos tem interesse parcial ou total por matemática. Como relatado anteriormente as turmas já haviam tido contato com os truques matemáticos, o que de certa forma pode ter tido influência na escolha do item **total**, mesmo antes da aulas envolvendo as matemágicas, por boa parte da turma . Desta maneira é possível que as matemágicas tenham tido influência na escolha da motivação total, para o conhecimento matemático, sendo possível conjecturar que caso não tivessem tido contato prévio com as matemágicas, o percentual dos alunos fosse menor antes das matemágicas.

Mediante a análise das três perguntas acima descritas, pode-se concluir que a metodologia de ensino pautada nas matemágicas pode ter tido certa influência na escolha da matemática como matéria preferida, pela maior parte dos estudantes envolvidos na pesquisa. Além disso, a motivação para escolha da disciplina se dá em boa parte pelo fato da disciplina estar associada a diversão. Além do mais, pode-se constatar uma melhora no percentual dos alunos motivados para aprender matemática após a aplicação do truques matemáticos. E de certa maneira esse aumento pode ter sido motivado pelas matemágicas de forma mais sistemática.

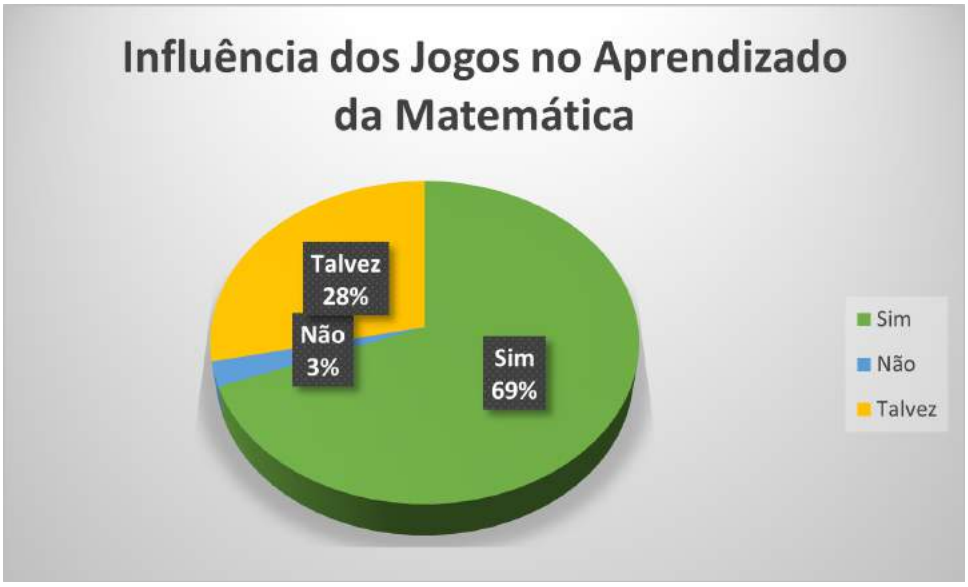
5.2 Os jogos como facilitador na própria aprendizagem

Nesta seção serão analisadas as perguntas seis e sete do questionários aplicado aos discentes participantes da pesquisa. A sexta pergunta aplicada é: **Você acredita que os jogos matemáticos podem te auxiliar no aprendizado da matemática?** Os gráficos das figuras 24 e 25 descrevem as respostas dos alunos, tanto antes quanto depois das matemágicas. Veja a seguir:

Figura 24: Influência dos Jogos (antes)

Fonte: Elaborada pelos autores no Excel.

Figura 25: Influência dos Jogos (depois)

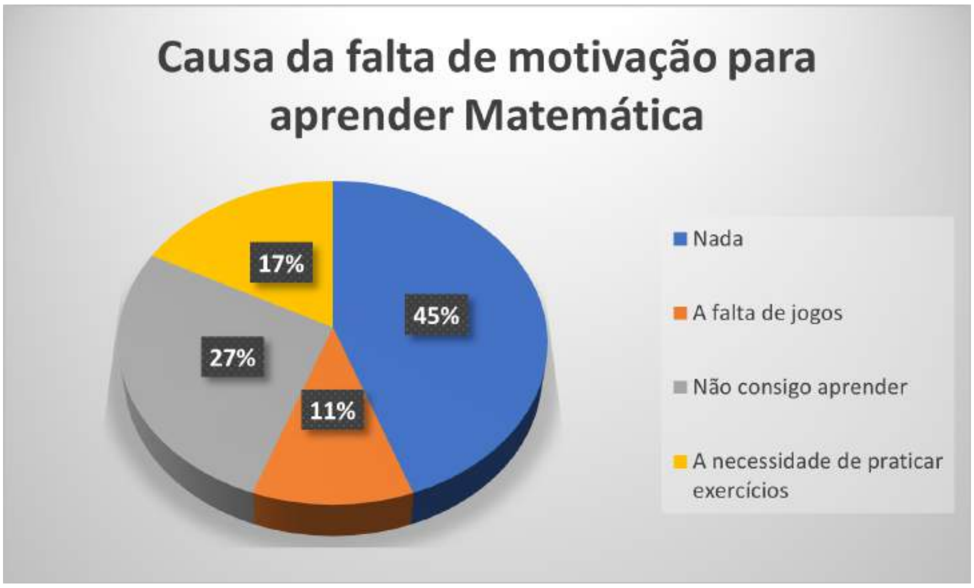


Fonte: Elaborada pelos autores no Excel.

Pela análise dos gráficos acima, fica claro que houve um aumento considerável nas respostas sim, passando de 58% para 69%, sendo o aumento de 11%. Desta maneira, é possível considerar que as matemágicas possam ter tido alguma influência na mudança de boa parte dos pesquisados da opção talvez para a opção sim.

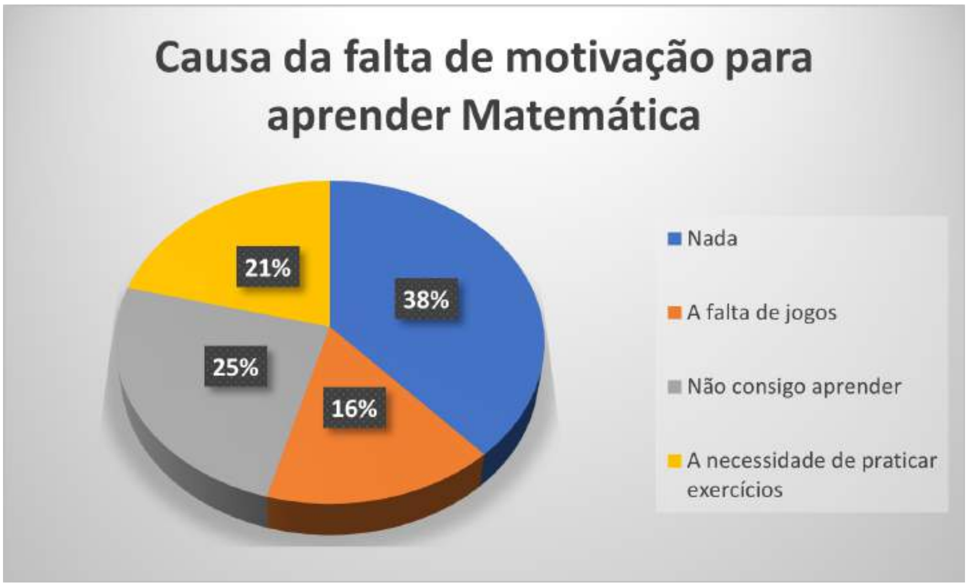
A seguir, analisaremos a sétima pergunta que é: **O que te causa maior desmotivação no aprendizado da matemática?** Os gráficos das figuras 26 e 27 retratam as respostas dos discentes. Veja a seguir:

Figura 26: Falta de Motivação (Antes)



Fonte: Elaborada pelos autores no Excel.

Figura 27: Falta de Motivação (Depois)



Fonte: Elaborada pelos autores no Excel.

Nessa pergunta a principal resposta foi que nada tira a motivação para aprender matemática, que posterior a matemágicas teve um redução de 7%. Analisando as demais resposta, é possível destacar dentre as respostas dadas pelos alunos que houve um aumento de 5% dos que responderam “a falta de jogos”, depois das aulas envolvendo os truques matemáticos. Desta maneira, alguns alunos sentem a falta dos jogos como fator desmotivador para o aprendizado matemático.

Desta forma, após a análise das duas perguntas acima, é possível concluir que após as matemágicas os alunos tiveram uma maior percepção que os jogos matemáticos poderiam de certa maneira influenciar positivamente no próprio processo de ensino e aprendizagem. Isso ficou visível com o aumento de 11% nas resposta sim, e no aumento de 5% dos que sentem falta dos jogos como fator da falta de motivação.

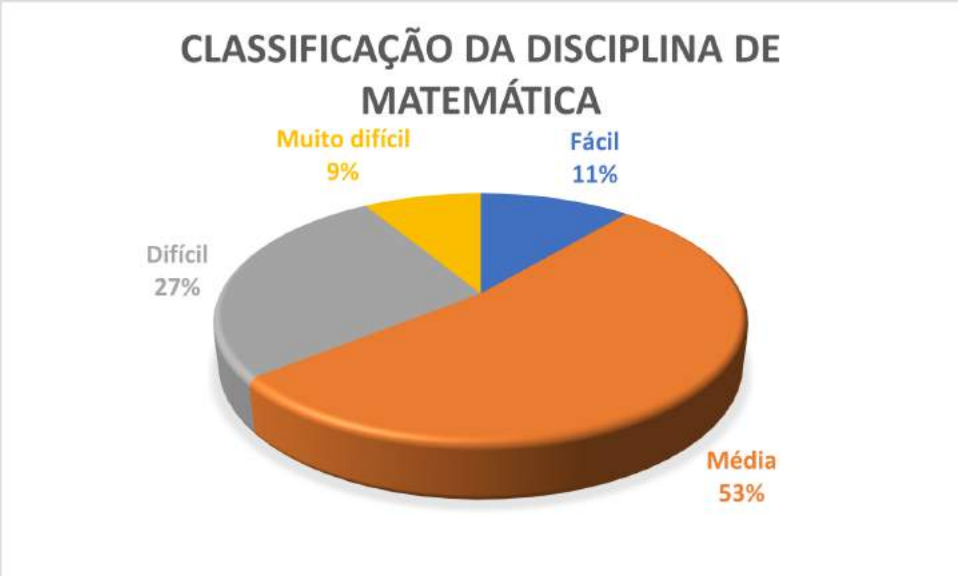
5.3 A visão do discente sobre a matemática e sua importância

Nesta seção serão analisadas as respostas dadas nas perguntas quatro, cinco e oito. A quarta pergunta é: **Como você classifica a disciplina (matéria) de matemática?** Os gráficos das figuras 28 e 29 descrevem as respostas dos discentes participantes. Veja a seguir:

Figura 28: Disciplina de Matemática (Antes)

Fonte: Elaborada pelos autores no Excel.

Figura 29: Disciplina de Matemática (Depois)

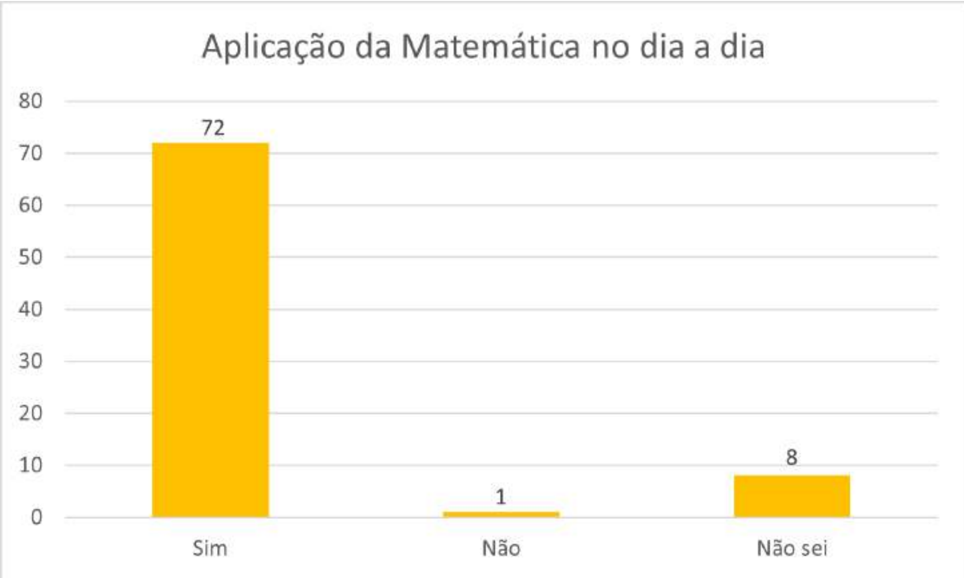


Fonte: Elaborada pelos autores no Excel.

Observando os gráficos antes e depois das matemágicas, nota-se que houve um aumento entre os pesquisados que classificaram a disciplina de matemática com média, esse aumento foi de 9%, ocorrendo uma redução de 11% nos que classificaram a matéria como muito difícil. Essas mudanças de respostas pós matemágicas, podem estar intrinsecamente ligadas a essa prática pedagógica. Contudo é de se destacar que uma pequena parte considera a matéria de matemática como fácil, ressaltando a mentalidade predominante de que a matemática não é uma matéria acessível a todos.

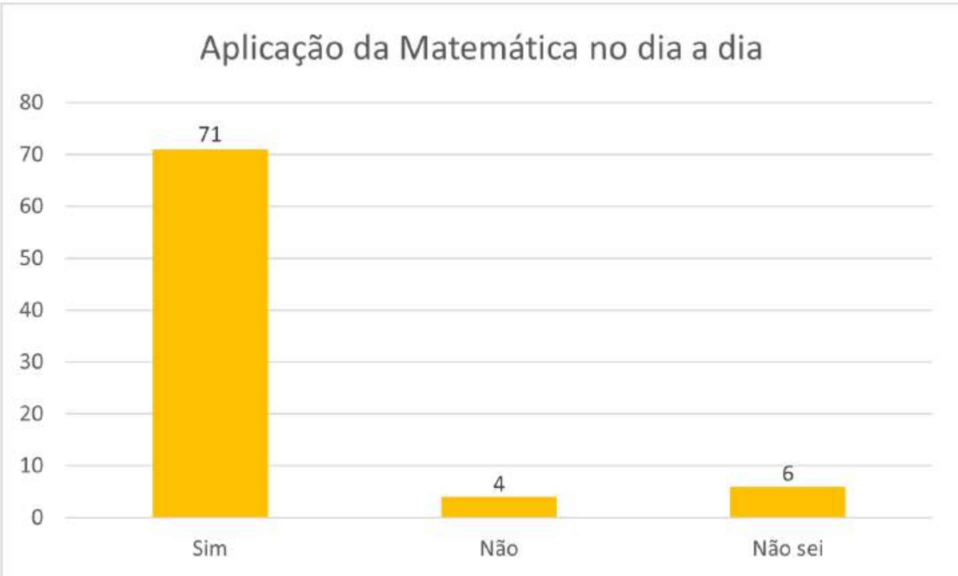
A quinta pergunta da pesquisa é: **Você acredita que a matemática pode ser aplicada em situações do seu dia a dia?** Os gráficos das figuras 30 e 31 mostram as respostas dos pesquisados. Veja a seguir:

Figura 30: Matemática no dia a dia (Antes)



Fonte: Elaborada pelos autores no Excel.

Figura 31: Matemática no dia a dia (Depois)

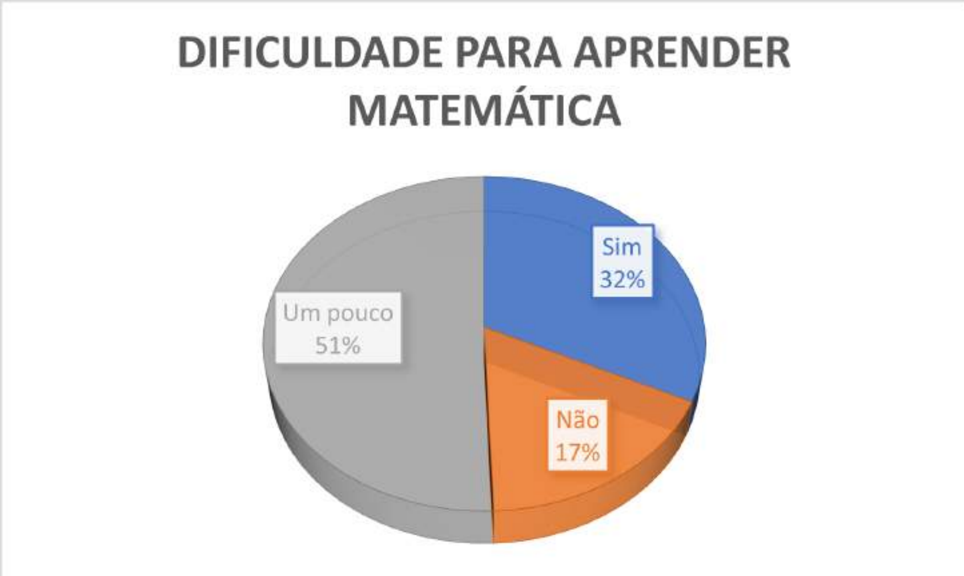


Fonte: Elaborada pelos autores no Excel.

Pelos gráficos acima apresentados é possível constatar que quase que a totalidade dos alunos reconhece a importância e a aplicação da matemática em situações do dia a dia. Desta maneira, pode-se se conclui que a prática pedagógica deve se pautar em aulas que valorizem situações da realidade e que valorizem a resolução de situações problemas que trabalhem aspectos do dia a dia.

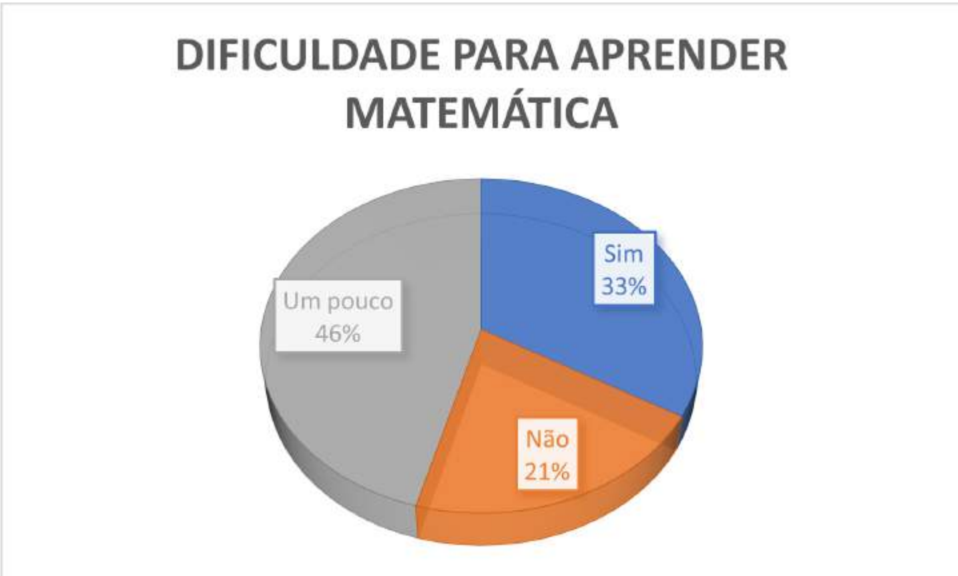
A oitava pergunta da pesquisa é: **Você acredita que tenha dificuldade para aprender matemática?** Os gráficos das figuras 32 e 33 retratam as respostas dos discentes pesquisados. Veja a seguir:

Figura 32: Dificuldade em Matemática (Antes)



Fonte: Elaborada pelos autores no Excel.

Figura 33: Dificuldade em Matemática (Depois)



Fonte: Elaborada pelos autores no Excel.

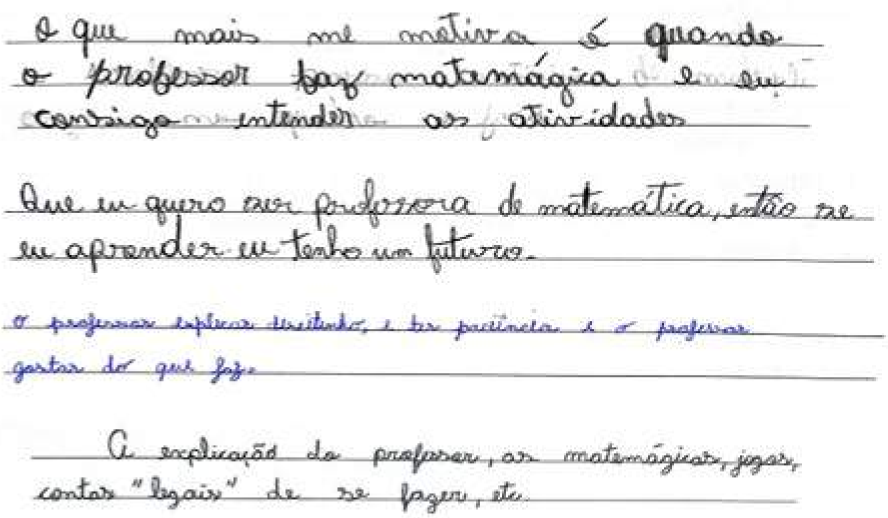
Nessa questão quase 50% dos alunos responderam ter um pouco de dificuldade em aprender matemática. Caso se junte a esses alunos os que reconhece ter dificuldade, aproximadamente 80% dizem ter alguma dificuldade. Desta maneira, o docente deve buscar meios para que essas dificuldades sejam minimizadas e se possível deixem de existir na maior parte da turma. Nessa perspectiva, os truque matemáticos podem contribuir para a diminuição desses dessas dificuldades e na assimilação do conhecimento matemático.

Após a análise das três perguntas desta seção, é possível concluir que num primeiro momento quase 50% classificavam como difícil ou muito difícil, que num segundo momento apresentou uma queda de 11%, mas ainda sim quase 40% classificam como difícil ou muito difícil. Com relação a aplicação da matemática em situações do cotidiano, quase a totalidade dos pesquisados percebe a importância do conhecimento matemático, embora quase 80% diz ter algum tipo de dificuldade no aprendizado da matemática. Destarte, é fundamental que o docente busque os mais variados recursos, a fim de reduzir essas dificuldades. Além disso, apresentar a matemática de maneira mais contextualizada, buscando acabar com o medo que muitos discentes tem da matemática.

5.4 Mais motiva em uma aula

Nesta seção serão apresentadas algumas respostas dadas pelos alunos participantes da pesquisa. Essas respostas são relacionadas a nona pergunta do questionário do Apêndice A. A pergunta é: **O que mais te motiva numa aula?** A seguir na figura 34 estão algumas respostas dadas pelos alunos.

Figura 34: Mais motiva em uma aula



Fonte: Elaborada pelos autores no Paint.

A primeira frase o discente disse: “O que mais me motiva é quando o professor faz matemágica e eu consigo entender as atividades”.

Na segunda frase outro aluno disse: “Que eu quero ser professora de matemática, então se eu aprender eu tenho um futuro”.

Na terceira resposta outro aluno disse: “O professor explicando direitinho, e ter paciência e o professor gostar do que faz”.

E na quarta frase outro aluno disse: “A explicação do professor, as matemágicas, jogos contas ’legais’ de se fazer, etc”.

As frases acima descritas destacam aspectos importantes a serem observados. Essas respostas possivelmente ressaltam que os truques matemáticos, os jogos de certa maneira, tornaram a aula mais divertida e atrativa. Outras respostas destacam que parte da motivação em aula está intrinsecamente ligado ao fato de se compreender o conteúdo. Além disso, outros discentes pontuaram através das suas respostas a importância da explicação do professor, bem como a motivação do docente e a importância do conhecimento para se alcançar os sonhos. No apêndice F, se encontram mais frases dos pesquisados sobre o que mais os motivam nas aulas.

5.5 Apontamentos sobre as aulas práticas

As aulas práticas envolvendo matemágica foram realizadas nas quatro turmas do 6º ano em uma escola municipal do Rio de Janeiro, na qual leciono. Esses truques matemáticos foram realizados no período de uma semana, e na semana seguinte foram trabalhados exercícios que envolviam uma das matemágicas. Durante a realização das matemágicas elas foram divididas em dois grupos: no primeiro grupo os truques foram **o número pensado**, **a soma misteriosa** e **o número riscado**, já no segundo grupo os truques matemáticos foram **a peça escolhida**, **a soma misteriosa** e **o número riscado**. O primeiro grupo de matemágicas foi apresentado nas turma “A” e na turma “B”, com destaque para os conteúdos de divisão euclidiana e representação como soma de potência de base dois, diretamente ligados a matemágica em destaque **o número pensado**. O segundo grupo de matemágicas foi aplicado nas outras duas turmas, turma “C” e na turma “D”, com ênfase nos conteúdos de expressões ariméticas, presente no truque em destaque **a peça escolhida**. Essas matemágicas foram apresentadas para os alunos e logo em seguida foram realizadas na prática. Posterior a realização dessas atividades, os alunos foram estimulados a tentarem descobrir os segredos por trás dos truques matemáticos. Nessas tentativas vale destacar que um dos alunos, que chamaremos de Joãozinho, percebeu que, no truque matemático “a soma misteriosa” o resultado era obtido acrescentando o algarismo 1 antes do primeiro número exposto, pelo primeiro aluno no quadro e subtraindo 1 da unidade. Da mesma maneira, outra aluna que chamaremos de Julieta teve a mesma percepção do aluno Joãozinho nesse truque. Além disso, a maior parte dos alunos percebiam que o último número colocado por mim, na soma misteriosa era um número importante, muitos tentavam até impedir que esse número fosse colocado por mim. Quanto aos demais truques os alunos não conseguiram descobrir os segredos por trás e nem a matemática envolvida.

Durante essas aulas, houve um grande envolvimento dos alunos tanto na participação dos truques como na realização posterior dos truques entre eles. O envolvimento por parte dos alunos foi tão grande que dois dos alunos resolveram participar do “show de talentos” realizado na escola onde leciono, apresentando as quatro matemágicas. Um desses aluno é a Julieta anteriormente citada e o outro chamaremos de Alfredo. Nessa apresentação Julieta apresentou os truques: o número riscado e a peça escolhida. Já Alfredo apresentou as matemágicas: o número pensado e a soma misteriosa. Posteriormente a essas apresentações os alunos Alfredo e Julieta me pediram que organizasse uma apresentação exclusiva de matemágicas, no auditório, para as demais turmas. Após uma semana de preparo do ambiente com cartazes que lembram truques matemáticos, a apresentação ocorreu no dia 6 de dezembro de 2023. Nessa apresentação Alfredo e Julieta apresentam os mesmos truques do show de talentos. Durante a apresentação todas as demais turmas, acompanhados dos respectivos professores, passaram pelo auditório e tiveram a oportunidade participar ativamente das matemágicas, inclusive os professores. Ressalto que os alunos se mostraram bem motivados e curiosos quanto aos truques.

Os conteúdos dos demais truques não foram trabalhados em virtude dos pequeno espaço de tempo disponível para a realização da prática em sala de aula. Na semana seguinte os conteúdos envolvidos nas matemágicas em destaque foram dados na turmas que não tiveram tal matemágica. Desta maneira, as quatro turmas tiveram esses dois conteúdos, duas turmas tiveram o conteúdo motivadas pela matemágica, e o outro conteúdo não motivado pela matemágica, da mesma forma as outras duas turmas tiveram um conteúdo motivado pela matemática e outro conteúdo não motivado pela matemática.

5.6 Análise dos resultados no teste avaliativo

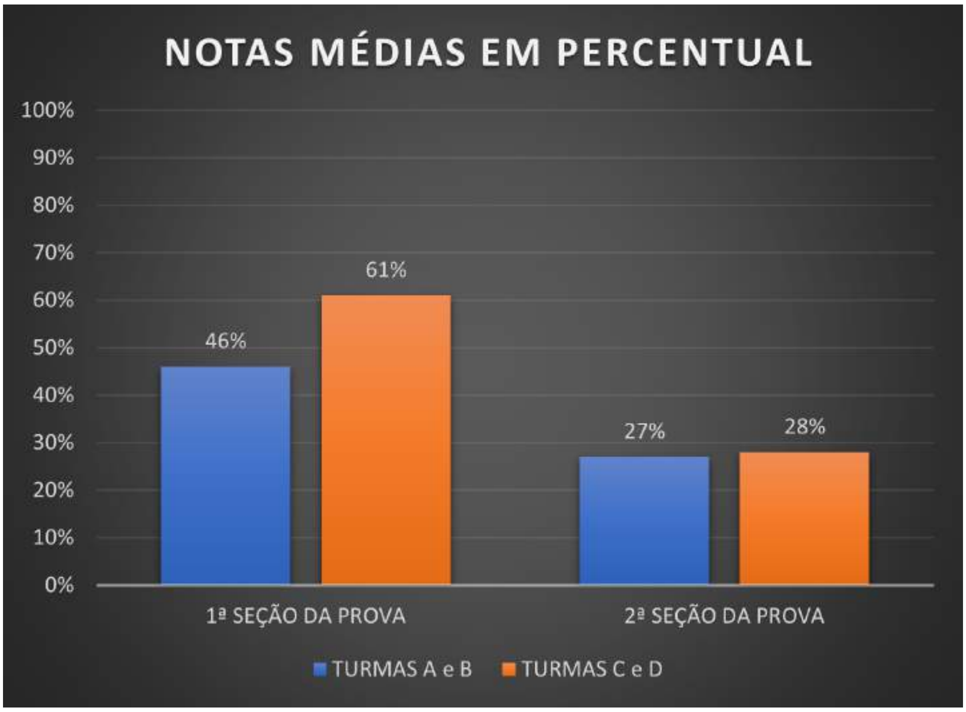
Nessa seção serão observados o desempenho das turmas no teste avaliativo, de acordo com o apêndice E. Nessa avaliação o objetivo foi analisar se a apresentação dos conteúdos motivados pelas matemágicas teve alguma contribuição no desempenho das turmas, no aspecto de aproveitamento. A avaliação foi dividida em duas seções: a primeira seção da prova é composta pela primeira e segunda questões, já a segunda seção é composta pelas terceira e quarta questões. Na primeira seção o conteúdo explorado foi o de expressão aritmética, conceito esse presente na matemágica “a peça escolhida” que foi realizado nas turmas C e D. Na segunda seção foi trabalhado o conteúdo de divisão euclidiana e representação do números como soma de potências, conteúdos presentes no truque “o número pensado” que foi realizado nas turmas A e B. A tabela a seguir e o gráfico da figura 23 descrevem o desempenho das turmas nessa avaliação. Veja a seguir:

Tabela 1: Desempenho no teste

TURMAS	**MÉDIA NA 1ª SEÇÃO**	**MÉDIA NA 2ª SEÇÃO**
A e B	4,6	2,7
C e D	6,1	2,8

Elaborada pelos autores no LaTeX.

Figura 35: (Desempenho no Teste)



Fonte: Elaborada pelos autores no Excel.

De acordo com a tabela e o gráfico acima é possível verificar que as turmas C e D tiveram um melhor desempenho na primeira seção da prova. O aproveitamento foi 16% superior ao das turmas A e B. Cabe destacar que as turmas C e D tiveram a matemágica "a peça escolhida", que explora os conteúdos dessas duas questões. Já as turmas A e B não tiveram contato com essa matemágica. Observando essa diferença é possível conjecturar que a matemágica possa ter facilitado a assimilação de tal conteúdo, refletindo num melhor desempenho das turmas C e D nas duas primeiras questões.

Analisando o desempenho das turmas na segunda seção da prova, é possível constatar que o desempenho nessas questões em média foi praticamente o mesmo tanto da turmas A e B que tiveram contato com esses conteúdos motivados pelo truque "o número pensado", quanto das turmas C e D que não tiveram contato com essa matemágica, mas tiveram os conteúdos sem os truques matemáticos. Desta maneira, nessa duas questões não houve diferença no desempenho das turmas. Vale destacar que de um modo geral todas as turmas tiveram maior dificuldade nessas questões, pois envolviam conceitos mais elaborados do que na primeira seção da prova. Logo nessa segunda seção não foi constatado diferença no desempenho tanto dos alunos que tiveram a matemágica, quanto os que não tiveram o truque.

Na análise desses resultados, vale destacar que o impacto no desempenho das turmas que tiveram a matemágica talvez pudesse ter sido melhor caso o tempo para realização desses truques tivesse sido maior, além de um tempo maior para se praticar exercícios. Já que todo o processo envolvendo as três matemágicas, apresentação dos conteúdos perdurou apenas duas semanas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na pesquisa matemágica e jogos interativos motivacionais como princípios norteadores no processo de ensino e aprendizagem da educação básica, buscamos dialogar com autores que destacam as diferentes fases do desenvolvimento cognitivo do indivíduo, incluindo algumas teorias da aprendizagem. Além disso, descrevemos a importância das atividades lúdicas como um fator motivador, e que possivelmente essa motivação reflita num melhor desempenho. No trabalho foram apresentadas quatro matemágicas, bem como a base teórico-matemática por trás. Por último, foi analisado o impacto imediato dessas atividades lúdicas no que se refere a motivação e desempenho. De acordo com o tratado anteriormente, o problema de pesquisa foi respondido, parcialmente, já que diante dos inúmeros desafios no ensino básico, onde se destacam a falta de motivação e de interesse pelo conhecimento matemático, observamos que houve um maior interesse , mais curiosidade e uma participação mais ativa. Isso pôde ser constatado na aplicação práticas dos truques matemáticos, bem como pela análise realizada no capítulo anterior. No que se refere a assimilação dos conteúdos durante as aulas práticas, pelo desempenho no teste, não foi possível chegar a uma conclusão precisa do impacto que a matemágica teve a curto prazo, pois apenas parcialmente observamos uma diferença de desempenho, como analisado na seção 5.6.

Durante a realização da pesquisa consideramos que os objetivos foram alcançados quase que na totalidade, devido a construção dos diálogos com pensadores que tratam sobre a importância dos jogos e atividades lúdicas, através da apresentação da base matemática por trás das matemágicas, mediante a construção das sequências didáticas no quarto capítulo, que tratam dos truques matemáticos e por último através da análise dos resultados relacionados ao questionário aplicado aos discentes. Nessa análise buscamos saber quais foram os impactos imediatos e a curto prazo dessas atividades lúdicas em sala de aula.

A metodologia utilizada foi de uma pesquisa aplicada, já que de acordo com Mattos (2020) , "A pesquisa aplicada depende das descobertas e se enriquece por intermédio do desenvolvimento", tendo uma abordagem quantitativa, e descritiva, pois segundo Gil (2002), "[...] uma das características mais significativas está nas técnicas padronizadas de coletas de dados, tais como questionário". Para isso foram realizados levantamentos bibliográficos sobre pensadores da educação, junto a livros, dissertações e revistas especializadas, autores esses que descrevem a importância de jogos e atividades lúdicas, para desenvolvimento do pensamento matemático básico. Assim foram construídas e apresentadas quatro sequências didáticas tratando das matemágicas. A fim de dar uma base teórico-matemática mais aprofundada ao colega professor, foram apresentados o embasamento teórico matemático por trás de cada truque. E com a perspectiva de analisar os impactos imediatos foram aplicados e analisados os questionários sobre o nível de motivação e interesse dos alunos para o conhecimento matemático, antes e após as atividades propostas nas sequências didáticas. A presente pesquisa foi desenvolvida junto aos alunos do sexto ano escolar de uma escola municipal do Rio de Janeiro.

Diante do exposto e pela análise dos dados, é possível conjecturar que metodologias lúdicas elevam o nível de motivação e interesse dos discentes por determinada disciplina. Isso pôde ser verificado pelas respostas dadas a pergunta um, respostas expostas no gráfico da figura 17. Além disso, a análise de outras perguntas mostraram que boa parte dos discentes escolheram a disciplina de matemática como favorita relacionando ao fator diversão. Além disso, na análise realizada foi constatado um aumento dos alunos que passaram a perceber os jogos e atividades lúdicas como um possível facilitador da própria aprendizagem. Ainda durante a análise das respostas dadas pelos alunos percebemos que a maior parte dos discentes declararam ter algum tipo de dificuldade para aprender matemática, o que certa maneira reforça a necessidade de se buscar metodologia que possam auxiliar no ensino da matemática. Durante a análise da pergunta: "O que mais te motiva numa aula?" A grande maioria das repostas dadas pelos pesquisados destacavam a importância da atividades lúdicas, como um fator motivador, como pôde ser observado anteriormente na seção 5.4. Destacamos uma delas: "A explicação do professor, as matemágicas, jogos, contas 'legais' de se fazer, etc." Com relação a segunda seção do teste aplicado não foi constatado um resultado expressivo no desempenho, por parte dos que tiveram a matemágica como fator motivador. Sendo possível conjecturar que a longo prazo essa prática metodológica possa implicar de maneira mais eficiente no desempenho do estudante. Desta maneira, se faz necessário uma prática dessas atividades de maneira mais continuada, que possibilitaria se chegar a conclusões mais precisas do verdadeiro impacto dessa prática didática no desempenho escolar dos estudantes.

Como demonstração da melhora no aspecto motivacional. Posteriormente a aplicação da matemágicas dois alunos participaram do show de talentos. Nessa apresentação realizaram as quatro matemágica. Os mesmos alunos se apresentaram em outro evento intitulado "o show da matemática: matemágicas com os números". Vale destacar que esse evento foi organizado a pedido dos alunos. Isso nos deixou muito satisfeito, pois demonstrou de forma prática a motivação de alguns alunos por essa prática pedagógica.

Em suma, é possível constatar que os objetivos propostos na pesquisa foram alcançados quase que na totalidade, pois durante a aplicação da pesquisa verificamos que as durante as atividades lúdicas houve uma participação maior dos discentes durante a aula. Outro aspecto fundamental é a base teórico-matemática para que o professor tenha o conhecimento mais aprofundado dos conteúdos por trás dos truques matemáticos e possa aplicá-los durante as aulas, e de certa maneira estará mais respaldado para responder a perguntas mais aprofundadas sobre o conteúdo matemático por trás do truque. O fator mais importante é a descrição detalhada de como aplicar as matemágicas, bem como os conteúdos por trás dessas atividades lúdicas, para que esse conteúdos possam ser trabalhados durante as aulas.

A análise dos resultados reforça a importância de se buscar novos caminhos que possam auxiliar no processo de ensino e aprendizagem, trazendo maior motivação, mais interesse pelo conhecimento; como destaca o Brasil (1997) que a prática educativa considere o interesse e a motivação do aluno, dando a ele mais autonomia, uma maior capacidade crítica e capacidade de atuar ativamente na sociedade em que vive.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. d. S. *Jogos Matemáticos como recurso didático no ensino Médio*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Campina Grande, 2020.

ALMEIDA, V. L. *Matemágica em sala de aula: uma proposta lúdica usando a resolução de problemas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Alagoas, 2017.

BASTOS, I. M. da S. *MAGIA MATEMÁTICA COM NÚMEROS*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Aveiro, 2015.

BRASIL. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. *Diário Oficial da República Federativa do Brasil*, Brasília, DF, 1996. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. [S.l.], 1997.

BRASIL. *Base Nacional Curricular Comum - BNCC*. [S.l.], 2017.

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. *Matemática discreta*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2015.

EVES, H. W. *Introdução à história da matemática*. [S.l.]: Unicamp, 2011.

FERRO, M. d. G. D.; PAIXãO, M. d. S. S. L. *Psicologia da aprendizagem: Fundamentos teórico-metodológicos dos processos de construção do conhecimento*. [S.l.]: Teresina: EDUFPI, 2017.

GARCEZ, B. P. *Jogos de matemática voltados para a aprendizagem de números inteiros no ensino fundamental: proposta à partir da classificação ESAR*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - UEMS, 2021.

GIL, A. C. *Como elaborar projeto de Pesquisa*. [S.l.]: Atlas, 2002.

GUIRADO, J. C. e. a. *Jogos matemáticos na educação básica: a magia de ensinar e aprender*. [S.l.]: Fecilcam, 2018.

HEFEZ, A. *Aritmética*. [S.l.]: SBM - Sociedade Brasileira de Matemática, 2022.

LAGES, L. E. *Números e Funções Reais*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2013.

LEONARDO, F. M. d. et al. *Projeto Araribá: Matemática*. [S.l.]: Moderna, 2010.

LOPES, F. J. A. Leibniz e a aritmÉtica binÁria. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 11, n. 22, p. 89 – 94, 2011.

MATTOS, S. M. N. *Conversando sobre Metodologia da Pesquisa Científica*. [S.l.]: Editora Fi, 2020.

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. *Números: uma introdução à matemática*. [S.l.]: Edusp, 2000.

MOL, R. S. Introdução à história da matemática. *Belo Horizonte: CAED-UFMG*, p. 17, 2013.

NICOLA, J. A.; PANIZ, C. M. A importância da utilização de diferentes recursos didáticos no ensino de ciências e biologia. *InFor*, v. 2, n. 1, p. 355–381, 2017.

OLIVEIRA, J. E. B. M. *A motivação ética no processo de ensino/aprendizagem na formação de professores do ensino fundamental*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro -UFRJ, 2008.

PARANÁ. *Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE)*. [S.l.], 2016.

POLYA, G.; ARAÚJO, H. L. de. *A arte de revygotskyolver problemas: um novo aspecto do método matemático*. [S.l.: s.n.], 1977.

SANTOS, F. L. F. *A matemática e o jogo: influência no rendimento escolar*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Ci^encias e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa - FCT-UNL, 2008.

SANTOS, R. *Você sabe a história, entende como funciona o sistema Binário?* 2020. Disponível em: <https://www.portalgsti.com.br/2020/02/voce-sabe-a-historia-entende-como-funciona-o-sistema-binario.html>. Acesso em: 08 novembro 2023.

SANTOS, V. de O.; ALMEIDA, V. L. de. Matemágica e resolução de problemas. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, v. 4, n. 1, p. 147–162, 2018.

TAPIA, A. J.; FITA, E. C. *A motivação em sala de aula : o que é, como se faz*. [S.l.]: Loyola, 2015.

VIANA, M. N.; FRANCISCHINI, R. *Psicologia escolar: que fazer é esse?* [S.l.]: Conselho Federal de Psicologia, 2016.

VYGOTSKY, L. S. *A formação social da mente. 4ª edição brasileira*. [S.l.]: São Paulo, Martins, 1991.

APÊNDICE A – Questionário sobre motivação

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ

Programa de Mestrado do Profmat

Questionário com finalidade de levantar dados para dissertação de mestrado.

Questionário sobre a motivação para aprendizado matemático

MARQUE COM UM X A SUA RESPOSTA

Pergunta 1. Qual é a sua matéria escolar preferida (displina)?

( ) Matemática

( ) Português

( ) Ciências

( ) História

( ) Geografia

Pergunta 2. A preferência pela matéria, indicada na questão anterior se dá por qual motivo?

( ) Mais fácil

( ) Usada no dia a dia

( ) Divertida

Pergunta 3. Qual é a sua motivação para aprender matemática?

( ) Nenhuma

( ) Parcial

( ) Total

Pergunta 4. Como você classifica a disciplina (matéria) de matemática?

( ) Fácil

( ) Média

( ) Difícil

( ) Muito difícil

Pergunta 5. Você acredita que a matemática pode ser aplicada em situações do seu dia a dia?

( ) Sim

( ) Não

( ) Não sei

Pergunta 6. Você acredita que os jogos matemáticos podem te auxiliar no aprendizado da matemática?

( ) Sim

( ) Não

( ) Talvez

Pergunta 7. O que te causa maior desmotivação no aprendizado da matemática?

( ) Nada

( ) A falta de jogos

( ) Não consigo aprender

( ) A necessidade de praticar exercícios

Pergunta 8. Você acredita que tenha dificuldade para aprender matemática?

( ) Sim

( ) Não

( ) Um pouco

Pergunta 9. O que mais te motiva numa aula?

____

____

____

APÊNDICE B – Outra demonstração do corolário 2.6.1

Dado um número natural n, considere sua expansão na base 2:

$$n = a_k \cdot 2^{k-1} + a_{k-1} \cdot 2^{k-2} + \cdots + a_3 \cdot 2^2 + a_2 \cdot 2 + a_1 = [a_k a_{k-1} \ldots a_1]_2.$$

Tome $\varphi_i(n) = a_i$, ou seja, $\varphi_i(n)$ nos dá o i-ésimo algarismo de n na base 2, contados da direita para a esquerda. Para cada $i \in \{1, \ldots, 6\}$, defina

$$C_i = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 63, \varphi_i(n) = 1\}.$$

Em outras palavras, C_i é o conjunto dos números naturais menores que 64 cujo i-ésimo algarismo na base 2 é igual a 1. Podemos representar estes conjuntos pelas cartas $C_1, C_2, \ldots, C_6$ apresentadas na subseção 3.6.1. Note que cada C_i se inicia com $\min(C_i) = 2^{i-1}$. Além disso, se $1 \leq n \leq 63$, então

$$n = \sum_{i=1}^{6} \varphi_i(n) \cdot 2^{i-1},$$

onde $\varphi_i(n) = 0$, se $n \notin C_i$ e $\varphi_i(n) = 1$, se $n \in C_i$. Portanto,

Teorema 1. Seja $n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 63$. Então n é a soma dos números iniciais das cartas para as quais n pertence.

APÊNDICE C – Caso geral do teorema 2.6.3

Teorema 2. Sejam $x = [a_k \dots a_1]_{10}$ e $y = [b_k \dots b_1]_{10}$ números naturais de k algarismos escritos na base 10. Tomando os algarismos $c_i = 9 - b_i, i = 1, \dots, k$, e o número $z = [c_k \dots c_1]_{10}$, temos que $x + y + z = 10^k + x - 1$.

Demonstração. Basta notar que

$$y + z = \sum_{i=1}^{k} (b_i + c_i) 10^{i-1} = \sum_{i=1}^{k} 9 \cdot 10^{i-1} = \underbrace{9 \dots 9}_{k \text{ noves}} = 10^k - 1.$$

□

APÊNDICE D – Caso geral do teorema 2.6.7

Teorema 3. Seja $x = [a_k \ldots a_1]_{10}$ um número natural de k algarismos na base 10. Tomando $y = [a_1 \ldots a_k]_{10}$, temos que $x - y \in 9\mathbb{Z}$.

Demonstração. Faremos a demonstração por indução na quantidade k de algarismos. Se $k = 1$, então $y = x$ e $x - y = 0 \in 9\mathbb{Z}$. Suponha, por indução, que o teorema seja válido para algum $k \in \mathbb{N}$. Se $\mathtt{x} = [a_{k+1}a_k \ldots a_1]_{10}$ possui $k + 1$ dígitos, tome $\mathtt{y} = [a_1 \ldots a_k a_{k+1}]_{10}$. Tome, ainda, $x = [a_k \ldots a_1]_{10}$ e $y = [a_1 \ldots a_k]_{10}$. Note que

$$\mathtt{x} - \mathtt{y} = (a_{k+1} \cdot 10^k + x) - (10y + a_{k+1}) = a_{k+1}(10^k - 1) + 10(x - y) - 9x.$$

Como $10^k - 1, x - y \in 9\mathbb{Z}$, segue-se que as 3 parcelas mais a direita das igualdades acima pertencem a $9\mathbb{Z}$. Portanto, $\mathtt{x} - \mathtt{y} \in 9\mathbb{Z}$ e o teorema segue por indução. $\square$

APÊNDICE E – Teste Avaliativo

Teste Avaliativo

Escola Municipal Deputado Hilton Gama

Professor: Daniel Pereira
Aluno:
Turma:
Data:

Pergunta 10. Resolvendo a expressão a seguir, encontra-se:

$$[(6 \times 5 + 7) \times 2] + 4 - 12 - 2$$

a) 74

b) 64

c) 134

d) 144

Pergunta 11. Represente a situação a seguir por um expressão algébrica: Luana tinha 3 moedas em seu cofre, no último final de semana ela conseguiu juntar 5 vezes essa quantidade, ganhou mais sete de seu pai. Após o que recebeu de seu pai dobrou a quantidade total de moedas e juntou mais 4 moedas que ganhou de seu tio. Depois de alguns dias perdeu 12 moedas, e logo em seguida deu 2 moedas para sua prima. Quantas moedas ela ficou no final?

a) 14

b) 24

c) 34

d) 44

Pergunta 12. Após efetuar a divisão eucliana sucessiva por 2. A representação do número 23, como soma de potências de base 2 é:

a) $23 = 2^4 + 2^2 + 2^1 + 2^0$

b) $23 = 2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0$

c) $23 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1$

d) $23 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^1$

Pergunta 13. Representando o número 34 como soma de potências de 2 se tem:

APÊNDICE F – Impressão das cartas da matemágica "o número pensado"

1	3	5	7
9	11	13	15
17	19	21	23
25	27	29	31
33	35	37	39
41	43	45	47
49	51	53	55
57	59	61	63

2	3	6	7
10	11	14	15
18	19	22	23
26	27	30	31
34	35	38	39
42	43	46	47
50	51	54	55
58	59	62	63

4	5	6	7
12	13	14	15
20	21	22	23
28	29	30	31
36	37	38	39
44	45	46	47
52	53	54	55
60	61	62	63

8	9	10	11
12	13	14	15
24	25	26	27
28	29	30	31
40	41	42	43
44	45	46	47
56	57	58	59
60	61	62	63

16	17	18	19
20	21	22	23
24	25	26	27
28	29	30	31
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

32	33	34	35
36	37	38	39
40	41	42	43
44	45	46	47
48	49	50	51
52	53	54	55
56	57	58	59
60	61	62	63

APÊNDICE G – Respostas à pergunta nove

Pergunta 9. O que mais te motiva numa aula?

Que eu quero ser professora de matemática, então se eu aprender eu tenho um futuro.

Pergunta 9. O que mais te motiva numa aula?

O que mais me motiva é quando o professor faz matemágica e eu consigo entender as atividades

Pergunta 9. O que mais te motiva numa aula?

Os Professores serem simpáticos e divertidos

Pergunta 9. O que mais te motiva numa aula?

Eu penso que no futuro eu vou precisar da matemática, isso me motiva quase sempre

Pergunta 9. O que mais te motiva numa aula?

Quando eu consigo fazer o dever eu acho até divertido

Pergunta 9. O que mais te motiva numa aula?

A aprendizagem, a explicação do professor (a), e para o que eu vou usar as contas, etc.

Pergunta 9. O que mais te motiva numa aula?

O professor explicar direitinho, e ter paciência e o professor gostar do que faz.

Pergunta 9. O que mais te motiva numa aula?

Aprender sobre os assuntos para tirar notas boas e ter um bom futuro

Pergunta 9. O que mais te motiva numa aula?

aulas mas divertidas

Pergunta 9. O que mais te motiva numa aula?

Quando a professora esta explicando.

Pergunta 9. O que mais te motiva numa aula?

A explicação da professora, as matemágicas, jogos, contas "legais" de se fazer, etc.

Pergunta 9. O que mais te motiva numa aula?

Os jogos dos números

Pergunta 9. O que mais te motiva numa aula?

O professor é legal, as brincadeiras e truques incríveis.

Pergunta 9. O que mais te motiva numa aula?

saber que futuramente vai valer a pena eu ter estudado muito

Pergunta 9. O que mais te motiva numa aula?

o professor explicar direitinho, ter paciência e ser calmo e gostar do que faz

ANEXO A – Termo de Anuência

Prefeitura do Município do Rio de Janeiro
Secretaria Municipal de Educação
Colégio Municipal Deputado Hilton Gama
Praça Ênio, S/N - Pavuna, Rio de Janeiro - RJ, 21520-410

Rio PREFEITURA

TERMO DE ANUÊNCIA INSTITUCIONAL - TAI

Eu, João Paulo Moço, na condição de diretor geral, matrícula número 11/283469-5, responsável pela Escola Municipal Deputado Hilton Gama, manifesto a ciência, concordância e disponibilidade dos meios necessários para a realização e desenvolvimento da pesquisa intitulada "Matemágicas, Jogos iterativos e motivacionais como princípios norteadores no processo de Ensino e Aprendizagem da educação básica" na nossa instituição. A instituição assume o compromisso de apoiar a pesquisa que será desenvolvida por Daniel Pereira, sob a orientação do(a) Claudio Cesar Saccomori Júnior, Professor Adjunto da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, tendo ciência que a pesquisa objetiva analisar a importância e a contribuição de atividades lúdicas, como aspectos motivadores no ensino e aprendizado da matemática, na educação básica.

A instituição assume o compromisso de que a coleta dos dados estará condicionada à apresentação do Parecer de Aprovação por Comitê de Ética em Pesquisa, junto ao Sistema CEP/Conep.

Atenciosamente,

Rio de Janeiro, 30 de junho de 2023.

João Paulo Moço

Assinatura do dirigente institucional ou pessoa por ele delegada
(Nome completo e função do(a) dirigente institucional ou pessoa por ele(a) delegada)

Prof. João Paulo Moço
S.M.E. 11/283.469-5
Diretor IV

E. M. 06.25.028
XXV R.A.
DEPUTADO HILTON GAMA

Modelo baseado nas Resoluções CNS 466/2012, 510/2016 e 580/2018 e nas Cartas Circulares 0212/2010 e 122/2012 da Conep.

ANEXO B – Termo de consentimento livre e esclarecido

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Campus Seropédica
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

TCLE - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado(a) a participar de uma pesquisa intitulada "matemágicas, Jogos iterativos e motivacionais, como princípios norteadores no processo de Ensino e Aprendizagem da educação básica". Os objetivos dessa pesquisa são; dialogar com pensadores da educação que mostrem a importância e a contribuição dos jogos e dinâmicas norteadoras, elaborar um produto educacional através de sequências didáticas, mostrar os conteúdos matemáticos, por trás dos truques matemáticos e analisar as informações levantadas junto ao corpo discente, quanto a motivação para o aprendizado da matemática antes das matemágicas, bem como após as dinâmicas. Os pesquisadores responsáveis por esta pesquisa são Cláudio César Saccomori, professor do instituto de ciências exatas do departamento de matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro UFRRJ e Daniel Pereira aluno do curso de mestrado em matemática em rede nacional - Profmat pela UFRRJ.

Você receberá os esclarecimentos necessários antes, durante e após a finalização da pesquisa, e asseguro que o seu nome não será divulgado, sendo mantido o mais rigoroso sigilo, em favor de não o identificar (a).

As informações serão obtidas da seguinte forma: Inicialmente como técnica de coleta de dados será aplicado um mesmo questionário antes e depois das atividades quanto ao nível de motivação dos discentes para o conhecimento matemático. Esses questionários serão aplicados em dias diferentes dos truques matemáticos para todos que se e dispuserem a participar da pesquisa, sendo necessário por volta de 20 a 30 minutos o tempo necessário para preenchimento do questionário. Os truques serão realizados em tempos de 50 minutos. Os alunos serão incentivados a descobrirem as matemágicas, sendo dado algumas pistas dos segredos matemáticos, após algumas tentativas no tempo seguinte serão revelados os conhecimentos matemáticos por trás dos truques matemáticos, e em seguida será explicado como funcionam as atividades lúdicas (matemágicas). Os truques serão realizados com voluntários, não sendo obrigatória a participação direta nas atividades, devendo o restante da turma estar atentos ou participar ativamente como voluntário ou em grupo. Poderão participar quantos voluntários quiserem das atividades. Os truques têm relação direta com o conteúdo do bimestre, sendo utilizados como um princípio norteador e motivador para apresentação de conteúdos já aprendidos ou do bimestre. Não serão feitas gravações de áudios ou vídeos, na aplicação das matemágicas.

A sua participação envolve os seguintes riscos previsíveis: Como as atividades lúdicas são matemágicas (truques que envolvem algum conhecimento matemático), sendo os riscos mínimos, dentre os quais destaco: alguns discentes podem não conseguir associar as brincadeiras com o conhecimento matemático, além disso, alguns podem não se sentir motivados a participarem das atividades, por outro lado muitos podem querer participar de maneira ativa das atividades.

A sua participação pode ajudar pesquisadores a entender melhor quais contribuições as atividades lúdicas podem dar para o aprendizado matemático. Além disso, você poderá ver a matemática de maneira mais divertida, aprender matemática através da brincadeira, e despertar uma maior curiosidade para o conhecimento matemático.

Você está sendo consultado sobre seu interesse e disponibilidade de participar desta pesquisa. Você é livre para recusar-se a participar, retirar seu consentimento ou interromper sua participação a qualquer momento. A recusa em participar não acarretará penalidade alguma.

Você não será remunerado por ser participante da pesquisa. Se houver gastos com transporte ou alimentação, eles serão ressarcidos pelo pesquisador responsável. Todas as informações obtidas por meio

Rubrica do Pesquisador Principal	Rubrica do(a) Participante da Pesquisa

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Campus Seropédica
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

de sua participação serão de uso exclusivo para esta pesquisa e ficarão sob a guarda do/da pesquisador/a responsável. Caso a pesquisa resulte em dano pessoal, o ressarcimento e indenizações previstos em lei poderão ser requeridos pelo participante. Os pesquisadores poderão informar os resultados ao final da pesquisa em murais da unidade escolar.

Caso você tenha qualquer dúvida com relação à pesquisa, entre em contato com o(a) pesquisador(a) através do(s) telefone(s) (21) 98707-8728, pelo e-mail danielpereira845@hotmail.com e endereço profissional/institucional Praça Ênio, S/N - Pavuna, Rio de Janeiro - RJ, 21520-410

Este estudo foi analisado e aprovado por um Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) sob o registro CAAE 71772923.4.0000.0311. O CEP é responsável pela avaliação e acompanhamento dos aspectos éticos de pesquisas envolvendo seres humanos, visando garantir o bem-estar, a dignidade, os direitos e a segurança de participantes de pesquisa; bem como assegurando a participação do(a) pesquisador(a) sob os mesmos aspectos éticos.

Caso você tenha dúvidas e/ou perguntas sobre seus direitos como participante deste estudo, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, situada na BR 465, km 7, Seropédica, Rio de Janeiro, pelo telefone (21) 2681-4749 de segunda a sexta, das 09:00 às 16:00h, pelo e-mail: eticacep@ufrrj.br ou pessoalmente às terças e quintas das 09:00 às 16:00h.

No caso de aceitar participar da pesquisa, você e o pesquisador devem rubricar todas as páginas e também assinar as duas vias deste documento. Uma via é sua e a outra via ficará com o(a) pesquisador(a).

Para mais informações sobre os direitos dos participantes de pesquisa, leia a **Cartilha dos Direitos dos Participantes de Pesquisa** elaborada pela Comissão Nacional de Ética em Pesquisa (Conep), disponível no site:

http://conselho.saude.gov.br/images/comissoes/conep/img/boletins/Cartilha_Direitos_Participantes_de_Pesquisa_2020.pdf

Consentimento do participante[2]

Eu, abaixo assinado, entendi como é a pesquisa, tirei dúvidas com o(a) pesquisador(a) e aceito participar, sabendo que posso desistir a qualquer momento, mesmo depois de iniciar a pesquisa. Autorizo a divulgação dos dados obtidos neste estudo, desde que mantida em sigilo minha identidade. Informo que recebi uma via deste documento com todas as páginas rubricadas e assinadas por mim e pelo Pesquisador Responsável.

Nome do(a) participante:______________________________
Assinatura: ______________________________ local e data:____________________

Declaração do pesquisador

Declaro que obtive de forma apropriada e voluntária, o Consentimento Livre e Esclarecido deste participante (ou representante legal) para a participação neste estudo. Declaro ainda que me comprometo a cumprir todos os termos aqui descritos.

Nome do Pesquisador: Cláudio Cesar Saccomori Júnior
Assinatura: Cláudio Cesar Saccomori Jr. Local/data: Rio, 05 de julho de 2023
Nome do auxiliar de pesquisa/testemunha (Se houver): Daniel Pereira
Assinatura: Daniel Pereira. Local/data: Mesquita, 4 de julho de 2023

**Este termo foi elaborado a partir do modelo de TCLE do CEP/Unifesp e orientações do CEP/IFF/Fiocruz.*

Rubrica do Pesquisador Principal	Rubrica do(a) Participante da Pesquisa

ANEXO C – Termo de Assentimento livre e esclarecido

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Campus de Seropédica
Instituto de ciências exatas
Departamento de matemática

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Convite Especial para Você!

Você está sendo convidado(a) para participar de um estudo que tem o seguinte nome: Matemágicas, Jogos iterativos e motivacionais como princípios norteadores no processo de Ensino e Aprendizagem da educação básica.

Com este documento você fica sabendo de tudo que vai acontecer nesse estudo, e se tiver qualquer dúvida é só perguntar para o pesquisador ou seu responsável.

Sua participação é importante e você pode escolher participar ou não.
Iremos conversar com seus responsáveis, pois é importante termos a autorização deles também.
Antes de você decidir participar do estudo, é importante saber por que esta pesquisa está sendo realizada e como será a sua participação.

Você pode em qualquer momento dizer que não quer mais fazer parte do estudo, mesmo que tenha assinado este documento. Você não será prejudicado (a) de forma alguma, mesmo que não queira participar. Você, seus responsáveis ou sua família não precisam pagar nada para sua participação no estudo.

Por que esta pesquisa é importante?

Este estudo está sendo feito para analisar a importância e a contribuição de atividades lúdicas no ensino da matemática, além disso, para elaboração de um produto educacional com atividades lúdicas, porque se observa em especial no ensino público básico uma desmotivação para o conhecimento matemático, por uma parte considerável dos discentes, muitos alegam ser uma "disciplina difícil" e alguns conteúdos não têm "aplicação prática".

SEROPÉDICA/ DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
BR 465, Km7, CEP 23.897-000, Seropédica, Rio de Janeiro/RJ
Telefone: (21) 2681-4749 – Email: eticacep@ufrrj.br

Digite o texto aqui	
Rubrica do Pesquisador Principal	Rubrica do(a) Participante da Pesquisa

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Campus de Seropédica
Instituto de ciências exatas
Departamento de matemática

Quem pode participar?

A pesquisa será realizada durante as aulas do bimestre, sendo realizada numa escola do município do Rio de Janeiro, em algumas turmas do 6º ano escolar.

Como será a pesquisa?

Inicialmente será aplicado um questionário antes e depois das atividades, sobre a motivação dos alunos para o conhecimento matemático. Em seguida serão explicadas como funcionam as atividades lúdicas (matemágicas). Após essas explicações serão chamados voluntários para participarem das atividades lúdicas. Podendo participar quantos discentes quiserem, além disso, os alunos serão motivados a participarem de forma conjunta dos truques matemáticos, bem como o incentivo para que tentem descobrir os segredos.

Se você participar, o que pode acontecer? Quais são os riscos?

Como as atividades lúdicas são matemágicas (truques que envolvem algum conhecimento matemático), entendo que os riscos são mínimos, dentre os quais destaco: alguns discentes podem não conseguir associar as brincadeiras com o conhecimento matemático e se sentirem constrangidos ou deslocados, eles podem não se sentir motivados para aprenderem o conhecimento matemático por trás dos truques, e além disso, eles podem ficar mais agitados, atrapalhando o andamento das matemágicas e de certa forma não participarem das atividades, levando outros alunos a ficarem agitados.

Rubrica do Pesquisador Principal	Rubrica do(a) Participante da Pesquisa

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Campus de Seropédica
Instituto de ciências exatas
Departamento de matemática

Como esses riscos serão cuidados?

Suas informações e seu nome NÃO serão divulgados. Somente o pesquisador e/ou equipe de pesquisa saberão de seus dados e prometemos manter tudo em segredo. A fim de dirimir possíveis constrangimentos e o deslocamento de alguns alunos sobre o conteúdo matemático por trás dos truques, será explicado inicialmente aos alunos o que significa matemágica, ressaltando a importância de alguns conhecimentos matemáticos para o bom funcionamento das atividades dinâmicas, essa atividade será realizada de maneira bem descontraída visando motivar os alunos a participarem, convidando o maior número de discentes. As atividades serão realizadas de forma bem descontraída visando deixar os alunos bem relaxados.

Por que sua participação é importante e pode ser boa para você?

Esta pesquisa vai ajudar você a: Ver a matemática de maneira mais divertida, aprender um pouco de matemática através da brincadeira, e despertar uma maior curiosidade para o conhecimento matemático. Sem contar que a pesquisa também trará benefícios a outras pessoas pelo avanço da ciência, e você estará participando disso. Também podemos te contar sobre os resultados durante e ao final da pesquisa.

Você gostaria de participar deste estudo?
Faça um x na sua escolha.

Sim, quero participar ( )　　　　**Não quero participar** ( )

→ Se você marcou sim, por favor assine aqui:

Declaração do participante

Eu, ____, aceito participar da pesquisa. Entendi as informações importantes da pesquisa, sei que não tem problema se eu desistir de participar a qualquer momento. Concordo com a divulgação dos dados obtidos neste estudo e a autorizo, desde que mantida em sigilo a minha identidade. Os pesquisadores conversaram comigo e tiraram as minhas dúvidas.

Assinatura: ______________________________________ data:________________________

Rubrica do Pesquisador Principal	Rubrica do(a) Participante da Pesquisa

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Campus de Seropédica
Instituto de ciências exatas
Departamento de matemática

Acesso à informação

Em caso de dúvidas sobre a pesquisa, você poderá entrar em contato com Daniel Pereira, pesquisador responsável, nos telefones ___________, celular (21) 98707-8728, endereço Praça Ênio, S/N - Pavuna, Rio de Janeiro - RJ, 21520-410, e e-mail danielpereira845@hotmail.com. Este estudo foi analisado por um Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) que é um órgão que protege o bem-estar dos participantes de pesquisas. Caso você tenha dúvidas e/ou perguntas sobre seus direitos como participante deste estudo ou se estiver insatisfeito com a maneira como o estudo está sendo realizado, entre em contato com o Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, situado na BR 465, Km7, CEP 23.897-000, Seropédica, Rio de Janeiro/RJ, sala CEP/PROPPG/UFRRJ localizada na Biblioteca Central, telefones (21) 2681-4749, e-mail eticacep@ufrrj.br, com atendimento de segunda a sexta, das 08:00 às 17:00h por telefone e presencialmente às terças e quintas das 09:00 às 16:00h.

Declaração do pesquisador

Declaro que obtive o assentimento do menor de idade para a participar deste estudo e declaro que me comprometo a cumprir todos os termos aqui descritos.

Nome do Pesquisador: Claudio cesar Saccomori Junior
Assinatura: Claudio Cesar Saccomori Jr. Local/data: Rio, 05 de julho de 2023

Nome do assistente de pesquisa/testemunha : Daniel Pereira
Assinatura: Daniel Pereira. Local/data: Mesquita, 4 de julho de 2023

**Este termo foi elaborado a partir do modelo de TALE do CEP/Unifesp e orientações do CEP/IFF/Fiocruz.*

Rubrica do Pesquisador Principal	Rubrica do(a) Participante da Pesquisa