UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO / INSTITUTO
MULTIDISCIPLINAR PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

DISSERTAÇÃO

CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO: OLHARES ATRAVÉS DA DOBRADURA

CRISTINA MAYUMI HAMADA

JUL/2023

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO / INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIASE MATEMÁTICA

CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO: OLHARES ATRAVÉS DA DOBRADURA

CRISTINA MAYUMI HAMADA

Sob a orientação da Professora Doutora
Dora Soraia Kindel

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação em Ciências e Matemática**, no Programa de Pós- graduação em Educação em Ciências e Matemática, área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática.

Seropédica, RJ
Julho 2023

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

TERMO Nº 1121/2023 - PPGEDUCIMAT (12.28.01.00.00.00.00.18)

Nº do Protocolo: 23083.066906/2023-14

Seropédica-RJ, 04 de outubro de 2023.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

CRISTINA MAYUMI HAMADA

Dissertação/Tese submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre em Educação em Ciências e Matemática**, no Curso de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáitca, área de Concentração em Educação.

DISSERTAÇÃO (TESE) APROVADA EM 04 / 07 / 2023

Dora Soraia Kindel Dra. UFFRJ
(Orientador)
Gisela Pinto Dra. UFFRJ
Rosana de Oliveira Dra. UERJ

Documento não acessível publicamente

(Assinado digitalmente em 04/10/2023 12:58)
DORA SORAIA KINDEL
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptES (12.28.01.00.00.86)
Matrícula: ###209#1

(Assinado digitalmente em 04/10/2023 09:44)
GISELA MARIA DA FONSECA PINTO
COORDENADOR CURS/POS-GRADUACAO - TITULAR
PPGEDUCIMAT (12.28.01.00.00.00.00.18)
Matrícula: ###042#6

(Assinado digitalmente em 04/10/2023 09:44)
ROSANA DE OLIVEIRA
ASSINANTE EXTERNO
CPF: ###.###.187-##

FICHA CATALOGRÁFICA

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

H198c

Hamada, Cristina Mayumi, 1977-
Construção do Conceito de Fração: Olhares através da Dobradura / Cristina Mayumi Hamada. - Rio de Janeiro, 2023.
145 f.: il.

Orientadora: Dora Soraia Kindel.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática145, 2023.

1. Fração. 2. Dobradura. 3. Conceito. 4. Origami. I. Kindel, Dora Soraia, 1958-, orient. II Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática145 III. Título.

AGRADECIMENTOS

- ✓ Ao Universo, a Fonte, ao Criador, ao Nosso Pai Eterno, não importa qual nome receba, o que interessa é que esta energia que tudo sustenta, eu devo honra, glória e gratidão infinita, pois sem esta potência, eu não seria nada.
- ✓ As minhas filhas Ísis Ayumi e Laís Harumi que quando pensava em desistir, olhava para elas e pensava: força, garra, coragem, foco, determinação, porque elas precisam de mim! Elas foram o meu combustível o tempo todo, sempre me impulsionando mesmo quando estavam em silêncio.
- ✓ À minha amiga e orientadora Soraia, que me guiou com carinho, paciência e dedicação por todo este percurso. Tolerou os meus momentos de aflições em todos os sentidos desta caminhada. Gratidão!
- ✓ À Rosana Oliveira, amiga e professora que me impulsionou e incentivou a realização desta caminhada e contribuiu na banca de qualificação e defesa para o desempenho dessa concretização. Muito obrigada!
- ✓ A professora Gisela Pinto, com todo o seu carisma e dedicação me guiou em suas contribuições na banca de qualificação e defesa. Meu muito obrigada!
- ✓ Em especial a minha amiga Joyce e Andreza que me ajudaram com palavras de ânimo e determinação, me incentivaram quando necessário e sempre me enviaram forças quando estava tudo complicado. Vamos, somos Strong!
- ✓ A Cláudia Baia e a filha dela Amanda Baia surgiram no momento mais importante do meu desespero para me acalmar, tranquilizar e me impulsionar com coragem e fé. A vocês gratidão eterna.
- ✓ Aos professores e colegas do PPGEduCIMAT, pelos ensinamentos e aprendizagens compartilhadas. Honro a existência de cada um de vocês.
- ✓ Aos licenciandos de matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, que participaram voluntariamente da pesquisa. Obrigada!
- ✓ A todos, GRATIDÃO!

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de pessoal Nível Superior – Brasil (Capes) – Código de Financiamento 001. “This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de pessoal de Nível Superior – Brasil (Capes) – finance code 001”.

RESUMO

HAMADA, Cristina Mayumi. **CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FRAÇÃO: OLHARES ATRAVÉS DA DOBRADURA**. 2023. 145p. Dissertação (Mestre em Educação em Ciências e Matemática). Instituto de Educação / Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2023.

O estudo dos números racionais no período escolar da Educação Básica é um assunto recorrente em pesquisas por se tratar de um tema do qual permanece a falta de compreensão e assimilação em relação ao conceito de frações. Esta pesquisa pretende realizar uma abordagem pedagógica sobre a construção do conceito de fração através da construção de dois *kits* utilizando as dobraduras como técnica de Origami e quando necessário recorrer aos mecanismos de desenho geométrico com os instrumentos de ensino. A metodologia empregada na pesquisa se refere ao levantamento bibliográfico, construção e execução de atividades investigativas/exploratórias, nomeada como *Design Based Research* (DBR) que busca através das interações e compartilhamento uma sequência didática estruturada nas construções dos *kits* em figuras geométricas quadrado e círculo que foram desenvolvidas com os estudantes para o entendimento da relação parte/todo. As atividades foram realizadas com licenciandos de Matemática de uma Universidade pública da Baixada Fluminense do estado do Rio de Janeiro. Para a coleta de dados foram utilizados um diário de campo, os encontros registrados em áudios, fotos, e as respostas das fichas com as atividades sobre frações com o uso dos *kits*.Com estes instrumentos buscou-se analisar e identificar de que forma os licenciandos argumentam e solucionam as circunstâncias propostas sobre o conceito de fração. Com a elaboração de um produto educacional, na plataforma *YouTube* para postagem de videoaulas que possam auxiliar os professores e outros profissionais envolvidos na área de ensino.

Palavras-chaves: Frações, Dobraduras, Desenho Geométrico.

ABSTRACT

HAMADA, Cristina Mayumi. **CONSTRUCTION OF THE FRACTION CONCEPT: LOOKS THROUGH FOLDING**. 2023. 145p. Dissertation (Master in Science and Mathematics Education). Institute of Education / Multidisciplinary Institute, Federal Rural University of Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2023.

The study of rational numbers in the school period of Basic Education is a recurrent subject in research because it is a theme that still lacks understanding and assimilation in relation to the concept of fractions. This research intends to carry out a pedagogical approach on the construction of the concept of fraction through the construction of two kits using folding as an origami technique and, when necessary, resorting to geometric design mechanisms with teaching instruments. The methodology used in the research refers to the bibliographical survey, construction and execution of investigative/exploratory activities, named Design Based Research (DBR) that seeks through interactions and sharing a structured didactic sequence in the construction of kits in square and circle geometric figures that were developed with the students to understand the part/whole relationship. The activities were carried out with Mathematics graduates from a public University in Baixada Fluminense in the state of Rio de Janeiro. For data collection, a field diary was used, the meetings recorded in audios, photos, and the answers of the cards with the activities on fractions using the kits. argue and solve the proposed circumstances about the concept of fraction. With the elaboration of an educational product, on the YouTube platform for posting video lessons that can help teachers and other professionals involved in the teaching area.

Keywords: Fractions, Folding, Geometric Drawing.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIAÇÕES E SIGLAS

AVA	Ambiente Virtual de Aprendizagem
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
BOLEMA	Boletim de Educação Matemática
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CD	Compact Disc
CEDERJ	Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro
DBR	Design Based Research
EDUMATEC	Educação Matemática e Tecnológica Informática
EEMAT	Encontro de Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro
EM	Ensino Fundamental
EMP	Educação Matemática Pesquisa
EMR	Educação Matemática em Revistas
GEPEM	Boletim de Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática
IM/UFRRJ	Instituto Multidisciplinar da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
MD	Material Didático
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PIBID	Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PPGEduCIMAT	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática
RJ	Rio de Janeiro
TAD	Teoria Antropológica do Didático
TIC	Tecnologia da Informação e Comunicação
UFRRJ	Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Compreender a disciplina Matemática é perceber as intenções da sua presença na maioria das situações cotidianas, é atribuir sentido às realizações dos fatos. Como cita Giancaterino:

> A Matemática, disciplina temida e dita sem importância pelos alunos por não demonstrar contextualização com a vida cotidiana, necessita assumir o verdadeiro papel no ensino, proporcionando um ensino e uma aprendizagem significativa, criativa, prática e contextualizada, de acordo com a realidade social do educando. Na aprendizagem da Matemática, o que deve ser considerado é a forma de abordar os assuntos e os conteúdos, não deixando de considerar o conhecimento matemático adquirido no dia-a-dia, que é de vital importância, uma vez que cada grupo cultural possui distintas formas de "matematizar". (GIANCATERINO, 2009, p.13)

Colocar em prática o ensino-aprendizagem da matemática com tais atributos pode se tornar um desafio à medida que os anos escolares avançam, pois é mais desafiador processar o ensino-aprendizagem mediante à escassez dos conhecimentos prévios dos alunos. Talvez essa problemática possa ser oriunda da capacidade de abstração que se eleva durante a trajetória escolar e a falta de estímulo em estudar Matemática, por inúmeros fatores, bem como também de nossa incerteza do desenvolvimento e desempenho dos alunos em outras áreas do conhecimento.

O presente estudo se fez necessário, pois durante minha formação escolar percebi lacunas que não permitiam diálogos e reflexões em relação à aprendizagem matemática. Os conteúdos eram vistos de forma mecânica, estanque e distante da minha vivência, da sua relação com as demais disciplinas e em relação às situações presentes fora da sala de aula. Durante o início da minha formação profissional existiram algumas trocas de ideias com professores e colegas mais experientes, mas os materiais didáticos eram sempre os mesmos: livros, apostilas, listas de exercícios, quadro, giz e apagador. Da mesma forma que os materiais, as metodologias de ensino não eram inovadoras, tornando assim as aulas pouco atrativas.

Ao longo de um curso de especialização tive a oportunidade de conhecer outras recursos que poderiam potencializar reflexões sobre conceitos matemáticos, como materiais manipuláveis e o uso de tecnologias em sala de aula, entre eles posso citar o *software* GeoGebra, que ampliou a minha visão em relação ao uso de tecnologias digitais, e a partir daí comecei a buscar mais informações no que se refere a aplicativos, softwares e/ou plataformas que pudessem contribuir com a minha prática profissional.

Como professora em diferentes instituições de ensino, do ensino básico e em cursos de formação de professores tenho observado que os licenciandos que vão atuar nos anos iniciais possuem algumas limitações em compreender as frações e insegurança em transmitir este conhecimento, fato que também ocorre entre os alunos do 4º aos 6º anos quando a assunto é abordado.

Como esta minha inquietação se manteve, busquei me aprofundar no tema frações, e ingressei no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGEduCIMAT) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ) e optei pela linha de pesquisa 2 - Ensino e aprendizagem de Ciências e Matemática, para ter a oportunidade de debruçar sobre o assunto e pesquisar alternativas para o seu ensino, era o ano de 2020.

O semestre letivo mal tinha começado e surgiu a Covid-19, vírus este que se alastrou pelo mundo todo, trazendo mortes, doenças e sequelas de toda ordem e para impedir maior catástrofe algumas medidas sanitárias foram necessárias de serem tomadas para que não houvesse mais pessoas infectadas. Assim, foi determinado o distanciamento social, utilização de máscaras, álcool em gel nas mãos e as aulas presenciais foram suspensas nas unidades escolares. Muitas transformações ocorreram nas esferas da educação de forma a continuarem os processos de ensino-aprendizagem, e uma das modalidades de Ensino que foi implementada na cidade do Rio de Janeiro foi o Ensino Remoto e Híbrido[1], contribuindo assim que as tecnologias ficassem em evidência, pois alavancaram uma dinâmica acelerada.

Diante do exposto, passei a assistir vídeo aulas, busquei encontrar alternativas em livros, apostilas e artigos e me inscrevi em vários cursos de extensão, dentre eles o curso chamado Livro Aberto de Matemática Frações no Ensino Fundamental (2020), que teve como objetivo reunir formadores e professores dos anos iniciais para colaborarem com trocas de ideias e concepções sobre a dinâmica da sala de aula em relação ao conceito de frações, na aplicação das atividades apresentadas no livro desenvolvido pelos autores do curso.

Embora existam muitas pesquisas abordando o estudo de frações, muitos são os pontos ainda obscuros para o seu ensino como também as dificuldades dos alunos para compreendê-las. As frações apresentam diferentes constructos, podem ser vistas como: relação parte-todo, relação parte-parte, razão e proporção, estatística, função.

É preciso inicialmente observar que trabalhar frações prescinde da ideia de unidade e de suas partes e que estas tanto podem ser de um todo discreto como de um todo contínuo e

[1] Disponível em: http://eadparavc.dted.ufma.br/?p=3863. Acesso em 11 de jun. de 2022.

que a sua compreensão é parte integrante para a construção e existência de um novo conjunto numérico, os números racionais. Essa é uma questão que precisa ser avaliada, diante do exposto levantamos a seguinte questão de pesquisa:

De que maneira os licenciandos de matemática se desenvolvem com atividades exploratórias/investigativas para a construção do conceito de fração, de forma a potencializar as dobraduras em papel como recurso metodológico de ensino?

Para tanto, focamos na parte inteira da fração, trabalharmos a unidade, com o estudo das frações unitárias, de 1/2 à 1/10, porque acreditamos que os professores supõem que esta relação é de fácil entendimento para os alunos, mas não é. Neste trabalho, escolhemos como ferramenta o material manipulável físico, o papel, por ser de fácil acesso, seja este reciclável ou não, para explorar as potencialidades que este material proporciona ao ser manuseado enquanto constrói as diferentes partes do todo (relação parte/todo) e compara as partes entre si (relação parte/parte) obtidas dobrando e fazendo *Origami* e cortando o papel.

O público escolhido foram os licenciandos do curso de matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, sede Nova Iguaçu, porque uma das séries que eles irão atuar é com alunos do 6º ano, momento em que estes estudantes estarão aprendendo este conceito e sendo convidados para ampliarem os conjuntos numéricos.

Diante deste cenário, os objetivos específicos são:

- Analisar as interações e as respostas dos licenciandos enquanto constroem um *kit* de frações usando dobradura e o par de esquadros para dividir o quadrado cujo lado mede o menor lado da metade de uma folha de papel sulfite;
- Analisar as interações e as respostas dos licenciandos enquanto constroem o *kit* de frações usando um círculo de papel dobrando-o e usando o transferidor para medir o ângulo central e assim obter a parte desejada;
- Analisar as respostas escritas apresentadas nas tarefas com questões envolvendo as frações usando o material construído.

Como produto final apresentamos um roteiro para acompanhamento dos vídeos produzidos e disponibilizados em um canal criado especialmente no *YouTube* para divulgação do material produzido e que os professores possam acessar em suas aulas.

A pesquisa foi realizada em dois momentos: a primeira, um levantamento bibliográfico realizado no Catálogo de Teses e Dissertações - CAPES e em revistas científicas brasileiras da área de Educação Matemática: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), Boletim de Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM), Educação

Matemática em Revista (EMR) e Educação Matemática Pesquisa (EMP) para identificar o que tem sido produzido nos últimos anos e para auxiliar na elaboração de um roteiro tarefas para serem aplicadas na pesquisa de campo. A segunda, consistiu na elaboração de dois conjuntos de frações recortadas em papel ou cartolina tendo como unidade um, o quadrado e o outro, o círculo, isto é, um kit de frações obtido a partir de recortes feitos no quadrado e o outro kit com recortes feitos em um círculo, a aplicação e a análise das respostas dos licenciandos de matemática ao realizarem as atividades.

As análises serão realizadas a partir dos dados coletados das tarefas propostas com os alunos em sala de aula através de atividades desenvolvidas pela pesquisadora.

A dissertação encontra-se organizada em oito capítulos, arrumados na seguinte configuração: no primeiro capítulo, temos a introdução com a apresentação no âmbito geral da pesquisa, as causas, as motivações e seus objetivos.

No segundo capítulo, apresentamos a pesquisa bibliográfica, no qual nos debruçamos em torno da palavra Fração. O levantamento foi realizado por meio da busca na plataforma Catálogo de Teses e Dissertações da Capes e algumas revistas em matemática, visando entender como as pesquisas se desenvolveram durante os últimos anos. Optamos por focar em pesquisas que abordavam o tema frações para o 6º ano e utilizaram como metodologia de ensino uma sequência didática e excluímos pesquisas que focaram nos números reais e o público eram os outros anos (séries).

No terceiro capítulo, descrevemos sobre a fundamentação teórica com estudos importantes para auxiliar nas reflexões sobre frações, a utilização dos materiais manipuláveis de cunho físico, a contribuição da arte do *origami* com as suas técnicas de dobradura, como recurso para discutir fração, e a formação dos professores de matemática.

No quarto capítulo, abordamos os documentos oficiais da educação, os Parâmetros Curriculares e as orientações da Base Nacional Comum Curricular e a formação inicial dos professores de matemática em relação ao desempenho do futuro profissional.

No quinto capítulo, trazemos os aspectos metodológicos implementados na pesquisa, o local, os participantes, o processo de cada etapa da coleta de dados da pesquisa e os critérios aplicados para a análise de dados.

No sexto capítulo, designamos para apresentação das atividades realizadas com os licenciandos, com a criação dos *kits* para o estudo do conceito de fração. Assim como à apresentação da análise das tarefas aplicadas através de fichas, realizadas em campo pelos licenciandos de matemática.

No sétimo capítulo, é destinado ao produto educacional, com o roteiro para criação dos *kits* para o estudo do conceito de fração, no qual consiste de um material de apoio com vídeo aulas para os profissionais da educação utilizarem presencialmente ou recomendarem aos alunos.

Antes de finalizarmos com as referências, apêndices e anexos, relatamos as considerações finais desenvolvidas nessa pesquisa para construção deste trabalho.

2 PESQUISA BIBLIOGRÁFICA

O tema Fração é abordado há muitos anos por vários profissionais da área de educação por apresentar dificuldades que ainda estão presentes tanto para quem aprende quanto para aqueles que precisam pensar em como ensinar o tema. Para entendermos o cenário atual em relação ao conhecimento científico, aplicamos o rigor metodológico para elucidar a trajetória das afirmações e análises realizadas. Para este processo foi feito o levantamento dos trabalhos que integram o referencial da pesquisa, no qual realizou- se a sondagem, o refinamento, critérios de exclusão e de seleção de pesquisas. O passo a passo, Hamada (2021)[2], do procedimento para realização do levantamento é relatado no artigo e considerou os trabalhos publicados na base de dados do Catálogo de Teses e Dissertações[3], da CAPES em que buscarmos pesquisas acadêmicas usando as seguintes palavras-chaves: Conceito de Fração, *Origami* com Fração e Sequências Didáticas, publicados entre 2016 até 2021. Nesta primeira abordagem apareceram mais de 4500 trabalhos, de modo geral apareceram "todas" as teses e dissertações sem nenhum critério de análise específico, isto é, abrangem as palavras-chaves no seu âmbito global e por isso, incluímos novos filtros_ área de conhecimento, área de concentração e operadores booleanos (*strings*) como *AND* (e), *OR* (ou) e *NOT* (não), informado por Assis (2020), para que os resultados pudessem nos dar informações mais precisas e voltadas para o nosso foco de interesse, frações com origami. Para nortear este mapeamento pautamos em Randolph (2009), em que afirma:

> algumas informações essenciais sobre como escrever uma revisão de literatura para uma dissertação de alta qualidade. Começa com uma discussão dos objetivos de uma revisão, apresenta taxonomia de revisões de literatura e, em seguida, discute as etapas na realização de uma revisão quantitativa ou qualitativa da literatura[4]. (RANDOLPH, 2009, p. 1)

Entre os aspectos que devem ser levados em consideração para o levantamento bibliográfico, Randolph aponta que é importante "delimitar o problema de pesquisa, evitar abordagens infrutíferas, obter insights metodológicos e buscar suporte para fundamentação teórica" (RANDOLPH, 2009, p. 02). E as duas razões adicionais relevantes sobre a revisão da

---

2 Frações e Origami: um levantamento. In: Anais do Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Anais...Campina Grande (PB) UEPB, 2021. Disponível em: <https//www.even3.com.br/anais/xxvebrapem/454482-FRACOES-E-ORIGAMI--UM-LEVANTAMENTO>. Acesso em: 18/04/2022 19:49.

3 https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/

4 some pivotal information on how to write a high-quality dissertation literature review. It begins with a discussion of the purposes of a review, presents a taxonomy of literature reviews, and then discusses the steps in conducting a quantitative or qualitative literature review.

literatura para a nossa pesquisa citada por Hart (1998), neste mesmo artigo é sintetizar e ganhar uma nova perspectiva e identificar relações entre ideias e práticas.

Desse modo, restringimos a análise em 22 dissertações, que abordam os números racionais, analisando os diferentes significados das frações. Neste contexto, existiam pesquisas que tratavam as frações no contexto dos números reais e cujo público não era estudantes do 6º ano e que foram excluídos 17 trabalhos. Ou seja, o foco para inclusão dos trabalhos em nossa pesquisa foi a verificação de como as abordagens de frações são apresentadas, qual a metodologia de ensino que abrange os critérios de uma sequência de ensino elaborada pela engenharia didática que pode contribuir para o ensino e a aprendizagem de fração para o 6º ano.

Importante salientar que ao analisarmos as 22 dissertações não encontramos nenhuma que se referisse a utilização do *Origami* ou dobradura para o estudo de fração. Entretanto, cinco delas apontam algum aspecto de nosso interesse, quais sejam: dificuldades apresentadas pelos estudantes em entender frações, utilização de materiais manipuláveis e sugestão de encaminhamento ou de propostas de atividades para serem desenvolvidas com estudantes em sala de aula e que são apresentadas na tabela 1.

Tabela 1: Trabalhos Disponíveis

Ano	Temática	Autor (es)	Objetivo
2020	Investigando a Aprendizagem de Frações nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental II	BENINCA, Michele	Investigar através de uma avaliação diagnóstica as dificuldades dos alunos do 6º e 7º anos no processo de aprendizagem de frações
2019	A Utilização de Materiais Concretos no Ensino de Fração	NEIS, Vanderlei Silva	Investigar através de casos com a utilização de materiais manipuláveis quais as dificuldades na aprendizagem de frações para os alunos do 6º ano
2019	Uma Proposta Didática com a Utilização de Jogos, Materiais Manipulativos e Contextualização Visando o Ensino-Aprendizagem de Frações	RIBEIRO, Isabela Estephaneli Corty	Apresenta uma sequência didática com atividade contextualizadas, jogos e materiais manipuláveis para o ensino e aprendizagem de frações para alunos do 6º ano
2017	Sequência Didática: Uma Proposta Para O Ensino Do Conceito De Fração	CARVALHO, Euvaldo de Souza	Utilizar a literatura da Engenharia Didática para construir uma sequência didática que estimule a compreensão do conceito de fração
2017	Uma Sequência Didática para o Ensino de Adição de Frações	PEREIRA, Onesimo Rodrigues	Propor uma sequência didática para o entendimento do processo de ensino e aprendizagem de adição de frações aos alunos do 6º ano tendo como base a Engenharia Didática

Fonte: Catálogo de Teses e Dissertações

O trabalho de Pereira (2017), propõe uma sequência didática interativa, apresentada em três etapas da engenharia didática, que são diagnósticos, a experimentação e a avaliação, com aplicação de tarefas para entender o processo de ensino e aprendizagem de adição de frações, no 6º ano escolar. A cada etapa é apresentado um nível crescente de complexidade. Esse desenvolvimento da sequência didática atua na realização do diagnóstico de forma a apresentar os objetivos, metodologia e materiais a cada uma das tarefas. Identifica os procedimentos de como os alunos resolvem cada uma das tarefas e as possíveis dificuldades no processo e na solução.

O trabalho apresenta a elaboração das tarefas, porém não foram aplicadas aos estudantes, e sugere ao professor como encaminhar cada tarefa para que o estudante compreenda como realizar. O autor reconhece que a sequência didática possui as suas limitações no sentido de não ter sido aplicada, mas estimula o professor a desenvolver atividades de reflexão sobre as diferentes perspectivas que um determinado conceito contempla, nesse caso como uma possibilidade metodológica para o ensino de adição de frações e o aluno assume o papel de agente ativo no processo de aprendizagem.

Ribeiro (2019) apresenta uma sequência didática com aplicação de atividades contextualizadas sobre frações, realizadas em três turmas do 6º ano, com a utilização de jogos e materiais manipuláveis. A princípio foi realizado um questionário para saber o conhecimento dos estudantes sobre o conteúdo frações no dia a dia. Em seguida, realizou um pré-teste, nome dado pelo autor, com atividades retiradas de um livro de 6º. A partir dos resultados do pré-teste o autor, apresentou jogos e materiais para ajudar os alunos a entenderem as frações. A autora conclui que os resultados foram positivos, mostrando que os recursos utilizados pelos discentes proporcionam aulas atrativas, dinâmicas e a aprendizagem ganhou um significado cognitivo relevante.

Carvalho (2017), por sua vez, apresenta um roteiro de procedimentos para realização de atividades, através de uma sequência didática que estimule a compreensão do conceito de fração nos seus diferentes significados. Os professores foram o público alvo para o autor, mostrando que estes são articuladores, organizadores, incentivadores e mediadores da construção do conhecimento e não apenas um transmissor.

Apesar de constar como uma ideia palpável, a proposta do trabalho não foi desenvolvida em sala de aula, mas o autor a apresenta como uma maneira diferente de conduzir o ensino e com a qual a capacidade de cada estudante "sobressai", pois possibilita aos aprendizes defenderem os seus pontos de vista e participarem da construção do próprio saber.

Beninca (2020), aponta as dificuldades para ensinar frações para o 6º ano de forma significativa, no qual considera: 1) reconhecer a fração descrita por um desenho, assim como interpretar um desenho dado para associá-lo a uma fração, 2) relação de ordem em frações com denominadores diferentes, 3) transformação das frações impróprias em números mistos, demonstrando a falta de conhecimento do conceito de fração e sua relação com o inteiro e 4) resolver problemas contextualizados, no sentido de compreensão da fração como parte de um inteiro e não conseguirem associar esta representação com uma medida.

A autora conclui que os alunos desconhecem os procedimentos das frações, contudo eles preferem vinculá-las a valores decimais, porque os números decimais estão presentes em nosso cotidiano, o que permite estes se sentirem confortáveis e seguros para realização das atividades. Assim, afirma-se a continuidade das dificuldades acerca de frações e relata a preocupação deste fato.

Neis (2019), utilizou materiais manipuláveis com estudantes do 6º ano para identificar as dificuldades no estudo de frações e concluiu que com a utilização destes materiais os alunos participaram mais ativamente e se interessaram pelo conteúdo. Com essa dinâmica a aprendizagem é apresentada de forma diferente do tradicional e o professor passa a ser um mediador, isto é, ele direciona a realização das atividades. Ao final o autor considera os resultados positivos e incentivadores com o uso dos materiais recicláveis, relatando a relevância dos materiais quando aplicados em sala de aula, podendo diversificar os conteúdos.

Com o propósito de ampliar a nossa pesquisa, direcionamos nosso olhar para as revistas científicas da área e escolhemos quatro revistas eletrônicas em Educação Matemática: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)[5], Boletim de Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM)[6], Educação Matemática em Revistas (EMR)[7] e Educação Matemática Pesquisa (EMP)[8]. As revistas selecionadas possuem ampla difusão, tanto pela promoção de discussões sobre a formação e o trabalho do professor, quanto sobre o ensino e a aprendizagem de Matemática. É importante salientarmos que sabemos de outras revistas de igual valor teórico, no entanto para este levantamento em questão, estas são pertinentes ao nosso propósito.

---

[5] Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema
[6] Disponível em: http://costalima.ufrrj.br/index.php/gepem/index
[7] Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/emr
[8] Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp

Neste levantamento, não encontramos artigos nas revistas BOLEMA e GEPEM, um artigo na EMP e dois na EMR. Nenhuma delas aborda dobradura ou uso de origami no estudo das frações como mostra a tabela 1:

Tabela 2: Artigos disponíveis

Ano	Temática	Autor (es)	Objetivo
2020 EMP	Análise praxeológica da abordagem de frações em um livro didático do 4º ano do ensino fundamental	LANDIM, Evanilson e MORAIS Maria das Dores de	Analisar as situações que tratam de problemas de frações abordados no livro didático Ápis: matemática do 4º ano do Ensino Fundamental (EF) aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)
2018 EMR	Situações da Vida Cotidiana no Ensino de Frações: livros didáticos do início do século XX	BERTINI, Luciane de Fátima	Apresentar uma discussão sobre os saberes mobilizados no ensino de frações a partir de situações da vida cotidiana em livros didáticos do início do século XX
2017 EMR	A mobilização e coordenação de registros de representação semióticos no ensino e aprendizagem de fração nos iniciais	CARDOSO, Geni Pereira e NERES Raimundo Luna	Analisar uma prática de ensino que proporcione a mobilização e coordenação de registros semióticos que favoreça a apropriação do conceito de fração nos anos iniciais

Fonte: Revistas – EMP e EMR

Os autores Landim e Morais (2020), analisaram situações problemas envolvendo frações no livro didático de matemática do 4º ano do Ensino Fundamental publicado pela editora Ápis, aprovado pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). A motivação dos autores surgiu quando cursaram a disciplina Tópicos em Educação Matemática no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica Informática (EDUMATEC) no qual foram apresentados a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1996). E concluíram que das 58 atividades abordadas no livro, 34 são do tipo parte todo, e as outras 24 foram consideradas como operadores. Em relação aos diferentes significados do número fracionário, estes "não são tratados conjuntamente como propõem os documentos oficiais".

O artigo de Bertini (2018) apresentou uma discussão sobre os saberes que são mobilizados no ensino de frações a partir de situações da vida no dia a dia que se encontram nos livros didáticos do início do século XX. A análise foi direcionada a representatividade da aritmética intuitiva e a aritmética sob medida, no ponto de vista de Oliveira (2017) e Pinheiro

(2017), por serem autores que envolveram discussões sobre o ensino de aritmética no final do século XIX e nas primeiras décadas do XX. Segundo Bertini (2018, p. 14), "Oliveira (2017) buscou caracterizar uma Aritmética Intuitiva a partir das propostas do método intuitivo, e Pinheiro (2017), uma Aritmética sob medida em tempos de uma pedagogia científica. Ambos os autores destacaram em suas análises livros didáticos representativos dessas aritméticas".

A autora conclui que o ensino de frações ordinárias com a utilização dos contextos da vida cotidiana, é semelhante ao método intuitivo em relação às aritméticas que estavam sendo analisadas, ou seja, a fração inicial era representada em um objeto dividido em partes iguais.

E finaliza com as diferenças no que diz respeito a sequência de apresentação dos conteúdos, referente a ordem em que são apresentados, ou seja, sugere que o ensino das frações decimais ocorra depois das ordinárias, por constatar que esta é uma aritmética intuitiva. Mas quando se refere à representação de uma aritmética sob medida, é observado o oposto. No entanto, destaca que o uso de situações do cotidiano pode ter reflexo no próprio entendimento do conceito de fração.

Cardoso e Neres (2017), analisam "uma prática de ensino que proporcione a mobilização e coordenação de registros semióticos que favoreçam a apropriação do conceito de fração" e para estudarem esta realidade contaram com a colaboração de uma professora do 5º ano do Ensino Fundamental I que atuava em uma turma com 35 alunos para quem apresentaram uma sequência didática durante 9 aulas com duração de 60 minutos cada.

A professora aplicava em suas aulas as atividades estruturadas da seguinte forma: os alunos realizavam uma atividade introdutória em que se buscava saber o que sabiam sobre frações. Em seguida, os estudantes liam textos que os ajudava a refletirem sobre o tópico do dia, no intuito de resolverem o problema apresentado com estratégias próprias, socializarem as suas respostas e finalizava com a intervenção do professor.

Nessa pesquisa, os autores identificaram que os diferentes registros de representação semiótica colaboraram para o ensino-aprendizagem de conceito de fração, pois os alunos revelaram um "avanço significativo", produziram "respostas mais lógicas e demonstraram mais autonomia e segurança na realização das atividades" e ainda registraram "que os alunos apresentaram ainda, melhor compreensão e interpretação ao lerem os enunciados dos problemas".

Em vista do que identificamos nos textos, acreditamos que uma abordagem das frações a partir de dobraduras ou com a utilização da técnica do *Origami* pode contribuir na compreensão de frações pelos estudantes principalmente para que possam entender o papel da relação parte/todo e da relação parte/parte através da visualização proporcionada no ato do fazer. Ou seja, comparar as partes enquanto dobram, cortam e recortam o inteiro, unidade com a qual serão comparadas as partes.

3 AS FRAÇÕES E AS DOBRADURAS

Neste capítulo apresentamos a fundamentação teórica dos três principais tópicos que direcionaram o nosso estudo e colaboraram como bases teóricas metodológicas para o desenvolvimento da pesquisa, são elas: o estudo das frações, a utilização dos materiais manipuláveis físicos, o uso do *Origami* x dobradura.

3.1 As Frações

Neste tópico, o conceito de fração será apresentado apenas como a relação parte/todo, objeto de estudo do nosso campo, pois não iremos nos referir aos diferentes constructos que a fração assume, por não ser o foco da pesquisa. Nosso estudo começa com um breve estudo do surgimento histórico da fração e a relevância de entender esse processo de construção para auxiliar a compreensão das ideias que contribuam para a solução de problemas do cotidiano ao longo da História da humanidade. Em seguida, exploramos os documentos oficiais da educação, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), por serem fontes que norteiam a organização curricular do Brasil. Nesses documentos são exibidos os objetivos de aprendizagem de forma capacitadora, no qual os desenvolvimentos dos conteúdos contemplados encontram-se distribuídos em cada um dos anos de escolaridade (BRASIL, 1998, p.16), visto que a sua organização aparece em ciclos: 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, que correspondem ao 3º ciclo e o 8º e o 9º ano ao 4º ciclo (BRASIL, 1988, p.9).

Ao direcionarmos o nosso olhar para as habilidades apresentadas na BNCC em relação as frações identificamos a (EF02MA08) que diz: Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais e (EF04MA09) que diz: Reconhecer as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/10) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.

3.1.1 O contexto histórico dos números – Quantos e Quanto

Quando as crianças começam a aprender matemática, logo é ensinado um, dois, três, quatro e nessa rotina de contagens elas assimilam os números naturais. Perguntas como Quantos somos? Quanto custa este objeto? Quanto mede a parede? Quantos metros de linha da pipa? Quanto que ele comeu da pizza? Que horas são? São frequentes e são respondidas com números e as crianças associam os números de sua contagem com a possibilidade de responder às perguntas: quanto e quantos. De um modo geral, quando se pergunta quantos nos referimos à contagem enquanto quando comparamos duas medidas queremos saber quanto cada uma das medidas equivale à outra e neste caso a pergunta mais frequente é quanto. Por exemplo, em “quanto custa?”, estamos comparando o objeto a ser adquirido à uma certa quantidade em dinheiro. Da mesma forma, quando perguntamos quanto mede o poste ou aquele pedaço de madeira precisamos compará-los com algum objeto que será tomado como unidade e então responder à pergunta dizendo quantas unidades do objeto considerado cabem no poste ou no pedaço de madeira. A comparação também pode ser feita na equiparação das partes de uma situação com ela mesma, neste caso temos uma razão de comparação que é expressa por frações.

Qualquer medida envolve duas formas de ver. Considere por exemplo uma sala medindo 3m x 3,6m, cujo piso possui lajotas de 30cm x 3cm, podemos dizer que a sala mede 1200 lajotas ou que cada lajota é 1/1200 da sala. Para responder à pergunta, “quanto mede a sala” precisamos colocar em comparação com algum objeto que será tomado como unidade de comparação e podemos usar as lajotas para responder à pergunta. Neste caso, contamos quantas lajotas podem ser usadas para cobrir o chão da sala e encontramos 1200 lajotas como resposta. Mas, também podemos comparar o tamanho da lajota com o tamanho da sala e dizer que ela mede 1/1200 avos da sala. Ou seja, precisamos dividir a sala em 1200 lajotas e considerar uma delas. Esta passagem entre as duas ideias não é trivial.

A trajetória percorrida pela humanidade para entender a construção dos sistemas numéricos é uma abordagem fundamental para a formação do aluno, por isso, nos cursos de licenciatura em matemática, principalmente na disciplina de História de Matemática, são apresentados alguns livros sobre a história da matemática, como *Uma História da Matemática* de Florian Cajori, *Introdução à História da Matemática* de Howard Eves, História da Matemática de Carl Boyer e *História Concisa das Matemáticas* de Dirk Struik, entre outras.

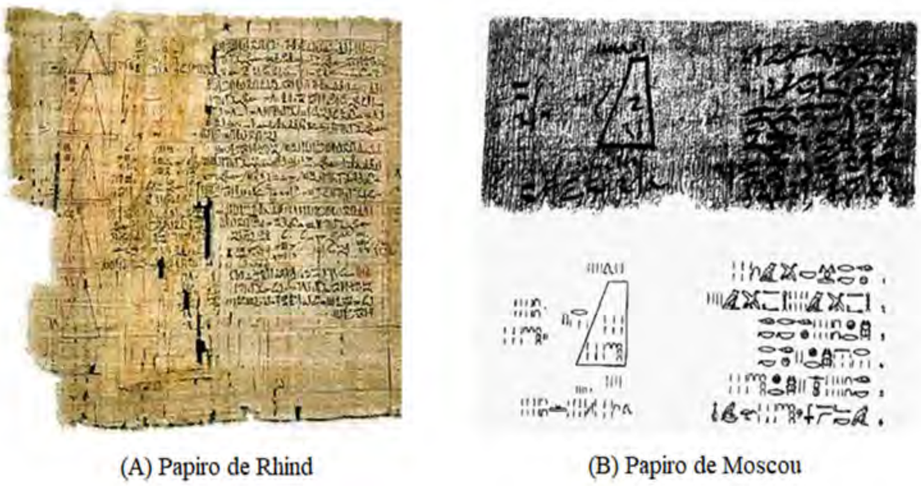
Abreu et al (2020), analisando as referências citadas anteriormente, mostraram o desenvolvimento desta disciplina, as contribuições dadas pelos diferentes povos e de algum cientista, em particular. De acordo com os autores:

> Parece já ser um consenso na academia que a história da matemática tem um papel importante no ensino, seja pelo simples fato de conhecer o desenvolvimento da disciplina no decorrer dos anos, seja pela potencialidade de utilização em sala de aula como uma ferramenta que, em teoria, melhoraria o ensino. (ABREU et al, 2020, p. 281)

O contexto histórico abordado nos Livros de História da Matemática descreve os acontecimentos ao longo dos séculos como nos mostram as pesquisas de Almeida (2020), Celestino (2017) e Perlin (2014). Assim como a maior parte das dissertações analisadas nesta pesquisa que nos permitiram compreender a necessidade dos sistemas de numeração e as suas características que foram abandonadas, modificadas e aperfeiçoadas ao longo da história matemática. Mas, como eram os registros das frações?

Alguns livros didáticos atuais costumam apresentar pequenos recortes históricos sobre o surgimento das frações e neste caso a abordagem frequentemente recai à antiguidade egípcia. Os relatos para o surgimento das frações apontam para o registro feito sobre as medidas das terras às margens do Rio Nilo após sua cheia que inundava as margens fertilizando o solo que era então usada para a agricultura na vazante do rio. As terras eram então demarcadas pelos funcionários dos Faraós, para que pudessem cobrar a taxa de produção dos agricultores. O “Papiro de Rhind” e o "Papiro de Moscou” apresentam alguns desses tipos de registros envolvendo problemas relacionados à medida. Como exemplo, temos o problema de número 50, que nos revela como os egípcios chegaram à área do círculo e o problema número 48, relatado no Papiro de Rhind que se aproxima da nossa pesquisa: “um octógono é formado a partir de um quadrado de lado 9 unidades, onde cada lado é dividido em três e os quatro triângulos isósceles dos cantos, cada um com área 4 1/2 unidades, são cortadas. A área do octógono é 63 unidades e a do quadrado 8 unidades.” (FOSSA, 2009, p. 159).

Figura 1 - Papiros



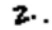
(A) Papiro de Rhind (B) Papiro de Moscou

Fonte: https://www.matematica.br/historia/prhind.html e https://www.matematica.br/historia/pmoscou.html

Os registros de medidas mostram a importância do surgimento dos denominados "esticadores de cordas" eram os funcionários do Faraó, utilizam cordas com unidade de medida para demarcar a terra cultivável para que pudessem cobrar as referidas taxas. As marcações eram feitas a medida de vezes que as unidades cabiam ao longo do terreno, porém, nem sempre esta unidade cabia um valor inteiro de vezes no terreno a ser medido, surgindo assim as frações. Boyer (1974), relata que as frações utilizadas pelos egípcios, de um modo geral, eram expressas pelas frações unitárias, da forma $\frac{1}{n}$.

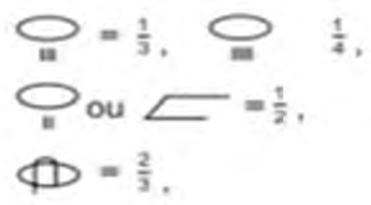
> Os homens da Idade da Pedra não usavam frações, mas com o advento de culturas mais avançadas durante a Idade do Bronze parece ter surgido a necessidade do conceito de fração e de notação para fração. As inscrições hieroglíficas egípcias têm uma notação especial para frações unitárias – isto é, com numerador um. O recíproco de qualquer inteiro era indicado simplesmente colocando sobre a notação para o inteiro um sinal oval alongado. A fração 18 aparecia então como , e $\frac{1}{20}$ como . Na notação hierática dos papiros, o oval alongado é substituído por um ponto, colocando sobre a cifra para o inteiro correspondente (ou sobre a cifra da direita no caso de recíproco de um número multi dígito). (BOYER, 1974, p. 9 e 10)

Além das frações unitárias, os egípcios também trabalharam com a fração $\frac{2}{3}$, e para representá-la utilizavam a adição. Assim a soma dos números representava os quantos e o produto deles representava o quanto.

> Eles se sentiam à vontade com a fração $\frac{2}{3}$, para a qual tinham um sinal hierático ; ocasionalmente usavam sinais especiais para frações da forma $\frac{n}{(n+1)}$, os complementos das frações unitárias. Atribuíam à fração $\frac{2}{3}$, um papel especial nos processos aritméticos de modo que para achar o terço de um número primeiro achavam os dois terços e tomavam depois a metade disso. Conheciam e usavam o fato de dois terços da fração unitária $\frac{1}{p}$, ser a soma de duas frações unitárias $\frac{1}{2p}$, e $\frac{1}{6}$; também tinham percebido que o dobro da fração $\frac{1}{2p}$ é a fração $\frac{1}{p}$. (BOYER, 1974, p. 13)

Ao representar em notação hieroglífica egípcia, a indicação das frações unitárias era simbolizada por uma figura ovalada sobre o denominador, além da fração $\frac{2}{3}$, possuir uma notação diferenciada, a fração $\frac{1}{2}$ era representada de modo especial, como mostrada na figura a seguir (EVES, 2011, p. 73)

Figura 2 - Notação egípcia da fração



Fonte: EVES (2011, p. 73)

Este registro apresentado por Eves é muito diferente daquele que conhecemos hoje e é ensinado nas escolas. Segundo Beninca (2020), as civilizações antigas criaram as suas próprias regras e cada uma delas características específicas de acordo com o sistema de contagem, se decimal, sexagesimal ou outra. Os babilônios, usavam frações similares as frações decimais dos dias atuais e devido ao sistema de numeração ser sexagesimal, trabalhavam com denominadores iguais as potências de 60. Os romanos fixaram no denominador o número 12 e as frações receberam nomes especiais. Os gregos também preferiam as frações unitárias, assim como os egípcios, usavam frações comuns gerais e sexagesimais. Geralmente, as frações eram utilizadas para resolver problemas de divisão de terras, comerciais e econômicos.

Beninca (2020), também aborda a fração na civilização chinesa relatando ser parecida com a utilizada atualmente, ou seja, compatível com o sistema decimal e posicional, assim como também usavam as “frações mistas” em vez das “frações impróprias”, afirmam BERLINGHOFF e GOUVÊA (2010) em sua obra chinesa *Nine Chapters on the Mathematical Art*. Assim como os chineses, os hindus também representavam as frações no sistema decimal e posicional, muito parecido com o que utilizamos hoje em dia.

Fossa, et al, (2009, p. 158) afirma que as matemáticas orientais surgiram para auxiliar a ciência de forma prática, com o objetivo de facilitar o cálculo do calendário, a administração das colheitas, a organização das obras públicas e as cobranças de impostos, que tinha como foco inicial à aritmética prática e à medição.

Assim como cada uma das diferentes civilizações antigas tenha criado seu próprio sistema de numeração, elas também criaram um sistema específico para registrar o uso das frações. E à medida que os cálculos foram sendo desenvolvidos e se complexificando também foi sendo percebido a necessidade de criar regras específicas para a operação com as frações e assim poderem ser comparadas. (CELESTINO, 2017, p. 12).

Conclui-se que o reconhecimento das frações como número levou tempo, porque exigiu aperfeiçoamento nas notações e regras para que chegássemos ao conhecimento que temos delas, hoje.

3.1.2 Conceito de fração

As palavras conceito e definição são muito utilizadas no estudo de matemática e estas se diferenciam no que diz respeito ao entendimento. No dicionário Oxford Languages[9] a palavra conceito tem várias ramificações a saber:

(1) faculdade intelectiva e cognoscitiva do ser humano; mente, espírito, pensamento; (2) compreensão que alguém tem de uma palavra; noção, concepção, ideia; (3) opinião, ponto de vista, convicção; (4) dito original e engenhoso; ditado, máxima, sentença; (5) conclusão moral de um conto ou afim; moral; (6) ideia ou dito conciso; resumo; conceituação; (7) reputação de que goza uma pessoa por parte dos amigos, do público, da sociedade etc; fama; (8) sistema de avaliação simplificada do aproveitamento escolar; (9) representação mental de um objeto abstrato ou concreto, que se mostra como um instrumento fundamental do pensamento em sua tarefa de identificar, descrever e classificar os diferentes elementos e aspectos da realidade; (10) noção abstrata contida nas palavras de uma língua para designar as propriedades e características de uma classe de seres, objetos ou entidades abstratas.

As ideias (2), (6), (9) e (10) são as que melhor se encaixam para o desenvolvimento do pensamento matemático pois o conceito é algo visto como o caminho de um processo, assim como aponta Abbagnano (2007)

> Em geral, todo processo que possibilite a descrição, a classificação e a previsão dos objetos cognoscíveis. Assim entendido, esse termo tem significado generalíssimo e pode incluir qualquer espécie de sinal ou procedimento semântico, seja qual for o objeto a que se refere, abstrato ou concreto, próximo ou distante, universal ou individual etc. (ABBAGNANO, 2007, p. 194)

Em Laudares (2013), a capacidade dos conceitos é generalizar, ampliar, representar a totalidade de classe do conjunto de coisas e transferir a nossa compreensão de uma coisa à outra, ou seja, existe um significado estabelecido e permanece em diferentes contextos.

A definição consiste na síntese desse processo, geralmente é ela que aparece nos livros didáticos. Levando para o contexto matemático, Laudares (2013) diz que:

> Se conceituar, em Matemática, é uma atividade de compreensão do objeto em estudo e da criação subjetiva de significados pelo estudante, definir é, pela formalização

---

[9]https://ifunny.co/picture/tudo-oque-e-conceito-tudo-noticias-imagens-videos-compras-dicionario-KOOQRVQ39 - Acesso em 01 de set. 2020 às 15:59

> manipular símbolos, registros, sinais da linguagem específica da área de conhecimento, na qual está imersa o objeto matemático, o conceito em estudo. (LAUDARES, 2013, p. 9)

Ao ensinarmos ou nos expressarmos sobre as frações estas duas palavras_ conceito e definição, costumam vir à tona e como professores nem sempre percebemos esta diferenciação e que talvez o seu uso indiscriminado possa ser um dos aspectos que contribua para confundir a compreensão dos alunos.

Desse modo, buscamos entender o significado da palavra fração que em latim significa *frangere*, ato de" quebrar", de "dividir em partes", de "quebrar algo em partes", mas esta divisão não pode ser de qualquer forma, as partes desta unidade, do todo necessita ser dividido em partes congruentes, e isto significa que os estudantes precisam ter consciência de que os tamanhos destas partes são iguais, mas não obrigatoriamente a forma (WALLE, 2009, p. 324).

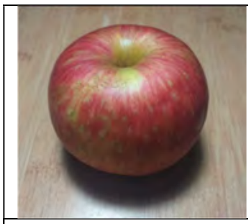
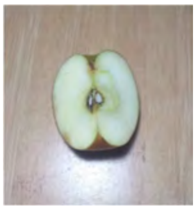
Ao pensarmos em fração, não lembramos automaticamente de todos os seus significados, porque este conceito abrange diferentes interpretações: relação parte-todo, relação parte-parte, razão e proporção, estatística, função, como relatam os autores Lima (2013), Nunes et al (2003) e Behr et al (1992).

Por outro lado, essas diferentes interpretações não são ensinadas de uma única vez, vai depender do ciclo no qual o estudante se encontra, conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o 1º e 2º ciclos referem se ao Ensino Fundamental I e o 3º ciclo referem se ao 6º e 7º ano do Ensino Fundamental II, já a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) não se referem a ciclos e sim em anos escolares. Para os 2 primeiros ciclos o autor Nunes et al (2003) apresentam cinco significados para o conceito de fração, sendo eles: número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo, e para o 3º ciclo que é o foco da nossa pesquisa, os PCN, "partindo da exploração de seus significados, tais como: a relação parte-todo, quociente, razão e operador" (BRASIL, 1998, p. 66). Os autores, Moreira e Ferreira (2008) associam estes múltiplos significados da fração como subconstrutos da noção de número racional.

Conforme os ciclos de estudo são completados pelos estudantes, as representações de frações vão sendo modificadas e incorporando outros significados como: porcentagem, proporção, estatística, função, probabilidade e desta forma, "a construção do conceito irá acontecendo à medida que o professor desenvolva uma variedade de situações, assim um trabalho contínuo e progressivo, ao longo do Ensino Fundamental, possibilitará ampliar os significados das frações." (GIMENEZ E BAIRRAL, 2005, p. 12)

Quando estudamos os números racionais, nós professores sabemos que iremos ensinar as frações, no entanto, perguntamos: será que sabemos realmente o que é fração e o que é número fracionário? Pois, existe uma singela relevância que faz diferença. Quando nos referimos a fração, estamos representando numericamente certa parte(s) de um todo, ou de uma unidade. Por exemplo: um quarto de uma maçã.

Tabela 3: Representação da Fração Contínuas

			
O todo ou a unidade	A metade	A metade da metade	A quarta parte

Fonte: Elaboração da autora

Leitura: Um quarto da maçã – 1/4 da maçã

Fração como representação numérica dessa parte: 1/4

Tabela 4: Representação da Fração Discretas

			
O todo ou a unidade	A metade	A metade da metade	A quarta parte

Fonte: Elaboração da autora

Agora quando falamos de número fracionário referimo-nos a comparação destes números com os números naturais e entre si, a colocação deles na reta numérica e a realização das operações. Assim, Bertoni (2009) resume:

> Fração: representa tanto certas partes da unidade quanto o registro numérico associado a essas partes. Número fracionário: é o número único (embora com várias representações) associado a toda uma classe de frações equivalentes.
> Pode ser identificado com um número racional positivo. (BERTONI, 2009, p. 23).

Esta diferença é geralmente generalizada em fração, o que dificulta o entendimento do conceito, como afirma Bertoni:

> Essa intenção não fica bem consubstanciada. As operações com os símbolos numéricos fracionários surgem de repente, na forma de regras. Os alunos não compreendem os significados iniciais desses números e as relações entre eles, como ocorre quando começam a perceber o sentido dos números naturais. Assim, não constroem os conceitos de número fracionário. (BERTONI, 2009, p.20)

Por mais que a nossa atenção esteja voltada para as frações, consideramos importante discutir os diferentes contextos em que estes números aparecem, isto é, para que os estudantes percebam a clareza na formação do conceito é compreender que estes números conduzem a várias e diferentes percepções, quais sejam:

> - A de que há uma ampliação do que era suscetível de ser quantificado. Isto é, sem os fracionários, só se podia quantificar coleções constituídas apenas de objetos inteiros. Com os fracionários, é possível quantificar coleções formadas por unidades e partes delas, oriundas de divisões em partes iguais;
> - A de que é possível comparar, em termos das quantidades que representam, esses números entre si e com os números naturais;
> - A do reconhecimento de que os novos números se entremeiam entre os números naturais;
> - A do posicionamento dos mesmos na reta numérica;
> - A do significado das operações entre eles. (BERTONI, 2009, p.21)

Dessa forma observamos que o conceito não está restrito a uma única direção, mas sim a várias, dependendo daquilo que o sujeito já conhece. Com esse intuito, o número racional é abordado em Dante (2018), da seguinte forma, nos Anos Finais do Ensino Fundamental I (5º ano), ele sugere compreender o número racional, com dois números inteiros a e b, com b ≠ 0, teremos um número racional e este número representa uma divisão ou razão entre a e b, e esta representação é chamada de fração, no qual a é o numerador e o b é o denominador, com um traço na horizontal no meio destes números e de vez em quando com um traço inclinado.

O traço representado na fração significa a operação divisão, que quando apresentado com o traço é um número fracionário e quando realizado a divisão é um número decimal, em ambos os casos são um número racional e entre estes estão os números naturais, inteiros, decimais e dízimas periódicas (DANTE, 2018). Assim, temos a definição do conjunto dos números racionais, como:

$$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathrm{Z} \text{ com } b \neq 0\}$$

Preferimos não utilizar o termo: dois números separados por um traço, pois como informa Gimenez e Bairral (2005), é uma concepção errônea comumente apresentada pelos estudantes.

$\frac{a}{b}$, onde a é o numerador e o b é o denominador, com $b \neq 0$.

O subconstruto parte-todo em Freire e Lima (2012), se baseia na teoria dos Três Mundos da Matemática de (TALL, 2004 e 2013), em que este é caracterizado pela permanência de pelo menos três diferentes tipos de conceitos: os objetos corporificados, os "proceitos" simbólicos e os conceitos axiomáticos e que são definidos por Lima (2007) como:

> (...) Os objetos corporificados, tais como, os elementos da Geometria, gráficos e outros, podem, inicialmente, ser fisicamente manipulados e, posteriormente, concebidos como objetos mentais. Os "proceitos" simbólicos são conceitos matemáticos que necessitam de símbolos para serem representados, como números ou equações algébricas. Por fim, os conceitos axiomáticos são axiomas, definições, teoremas, usados para servir de base para o sistema axiomático com o qual desenvolvemos a Matemática formal. (LIMA, 2007, p. 70)

A explicação destes conceitos tenta justificar a lacuna existente entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números racionais:

> Entendemos que justamente na passagem da 4ª para a 5ª série há uma lacuna no entendimento do aluno, dificultando a aprendizagem dos números racionais na forma fracionária, pelo fato de o aluno não mais aprender com exemplos manipuláveis, pertencentes ao mundo conceitual corporificado, e passar a aprender efetuando ações com símbolos para representar conceitos, que pertencem ao mundo "proceitual" simbólico. (FREIRE e LIMA, 2012, p. 4)

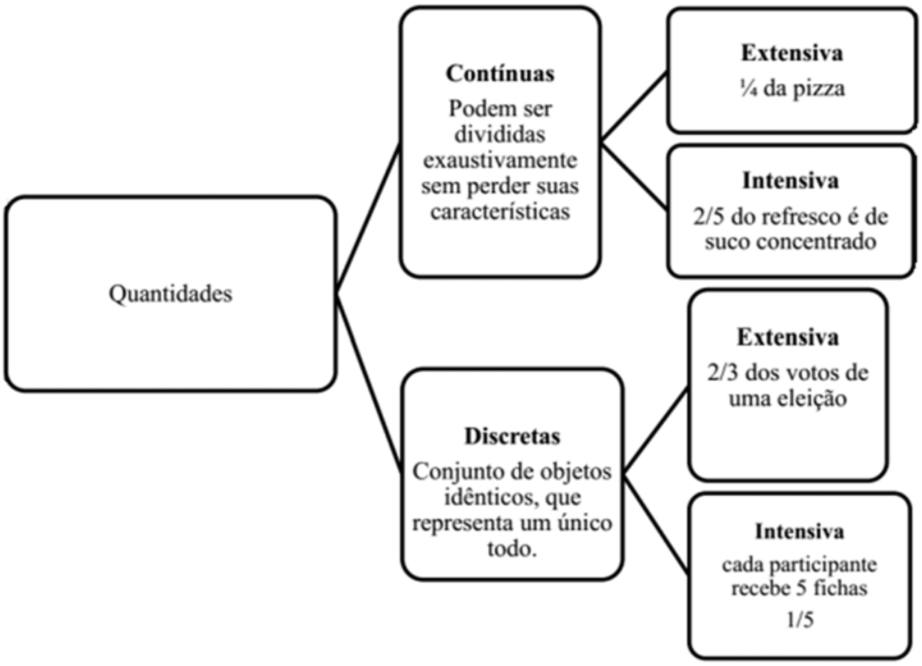
Mas, nas considerações finais os autores Freire e Lima (2012) informam que ao aplicarem questões envolvendo o subconstruto parte-todo, os alunos apreciam a utilização das características dos objetos corporificados, onde compreendem a necessidade da contagem das partes divididas na figura e as partes destacadas ou tomadas, mas os alunos não as conectam com as características simbólicas e formais.

Nesse momento, a quantificação na fração possui características específicas. As quantidades divididas "exaustivamente" quando não perdem as suas características são chamadas de contínuas. Por exemplo, um atleta percorre uma pista no qual parte dela anda de bicicleta e a outra corre, esta relação entre as maneiras que o atleta percorre esta pista, gera uma fração que envolve quantidades contínuas. As quantidades referentes a um conjunto de objetos idênticos, que representa o todo, e a divisão deste todo resultam em subconjuntos com o mesmo número de objetos, são denominadas discretas (NUNES et al, 2003). Como exemplo podemos pensar num conjunto de cinco vestidos, dos quais dois são azuis e três são lilás. A representação dos vestidos lilás em relação ao total é a fração 3/5.

Conforme Nunes et al (2003), a classificação de uma quantidade é dita extensiva quando se comparam duas grandezas de mesma natureza e na mesma lógica parte-todo, como foi o exemplo da pista citado acima. A que tem a relação entre duas grandezas diferentes é dita intensiva, para este caso, podemos exemplificar a produção do concreto utilizado na construção civil, em que existe uma relação entre a quantidade de areia e de cimento.

A figura 3 representa as quatro possibilidades de relação entre as grandezas.

Figura 3 - Natureza das quantidades



Fonte: Carvalho (2017)

Diante deste cenário, podemos pensar um pouco mais sobre as possibilidades que envolvem a construção do conceito de fração e elaborar tarefas utilizando materiais manipuláveis para estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e auxiliar na visualização e comparação entre as partes e entre as partes e o todo.

3.2 Materiais manipuláveis físicos

Quando se ingressa na escola, cada professor trabalha seguindo metodologias específicas de acordo com as suas disciplinas. Em linhas gerais, fica a cargo do professor escolher qual metodologia de ensino se enquadra melhor para o entendimento do conteúdo a ser estudado. Por este motivo, futuros docentes podem ter dúvidas sobre que recursos usar, de que forma organizar a sala de aula (organizar os alunos individualmente em filas, em duplas ou em grupos), mas esta escolha faz parte tanto do que entende ser o processo de ensino e de aprendizagem quanto de sua criatividade e das possibilidades materiais da instituição de ensino pois depende se ela tem materiais didático-pedagógicos e mesmo um laboratório de matemática.

Conhecer os materiais disponíveis na escola, se houver, ou criar algum requer o estudo prévio deles e para isso é necessário manipulá-los e colocar seu conhecimento específico em relação com o recurso de modo que ele possa contribuir para a construção do conhecimento do conceito que se deseja abordar. O material serve meio para a comunicação entre professor e o aluno enquanto o estudante manipula e busca identificar suas características. Desta forma se entende que eles são instrumentos e produtos de e para a produção do conhecimento. Kindel et alii. (2019), afirmam que:

> A ação do professor que ensina Matemática quando usa materiais manipulativos envolve rotinas, tais como: conhecer o material; experienciar tarefas; observar e intervir nas ações dos alunos, modificar, quando necessário, as propostas iniciais; avaliar; aprofundar o estudo sobre o tema (KINDEL et al, 2019, p. 13).

Material manipulável é um dos recursos pedagógicos que auxilia e proporciona, tanto para quem ensina quanto para quem aprende o acesso aos conteúdos matemáticos que de certa forma estão escondidos entre os parágrafos dos livros didáticos.

Os materiais manipuláveis podem ser físicos e virtuais. Como físicos são entendidos todos aqueles que podem ser pegos com as mãos e podem ser classificados em: estruturados – são aqueles que foram ou são elaborados com fins pedagógicos (geoplano, material dourado, disco de frações, régua de frações, cubo de frações, Frac-soma 235, entre outros), e não estruturados – são aqueles que são adaptados para fins pedagógicos (palitos, canudos, grãos, pedras, outros).

Os materiais manipuláveis virtuais são aqueles que são manipulados virtualmente, como os softwares e aplicativos, o que diferencia um do outro é exatamente os movimentos que são proporcionados através do clique do mouse ou através do toque em telas de computadores.

Conforme Kindel (2021)[10], a maneira adequada da utilização do material é que potencializa a aprendizagem, ou seja, um material sofisticado ou complexo, por si só não funciona. É preciso que o professor tenha conhecimento de suas potencialidades e limitações para que a sua manipulação surta o efeito desejado.

---

[10] Vídeo disponível no Youtube pela Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=VVP4d9WInfE&t=57s. Acesso em: 20 de jul. 2021.

Existem muitos autores que vêm estudando as potencialidades de materiais específicos para cada conteúdo, estudando o impacto dos laboratórios de matemática para a aprendizagem dos alunos bem como a importância da realização das feiras e eventos de matemática. Neste sentido, as pesquisas de Silva (2021), Pereira (2021), Neis (2019), Mendonça (2019), Ribeiro (2019), Santos (2019) e Filho (2017) abordam o assunto sobre materiais manipuláveis de forma contribuir para conhecimento matemático e mostram a transformação benéfica ao utilizá-los.

Em Kindel e Hamada (2021) são apresentados materiais manipuláveis estruturados que auxiliam no estudo de frações e em cada material é possível abordar aspectos específicos. Em cada tipo é possível identificar potencialidades e limitações para a aprendizagem.

Para desenvolver nossa pesquisa, optamos por escolher o papel como material a ser usado para a confecção de um material manipulável, conjunto de partes fracionadas, que possa ser utilizado pelos alunos. Um dos fatores que contribuiu para a sua escolha vem do fato que nem todas as escolas possuem materiais didático pedagógicos disponíveis. Ou seja, por ser de fácil acesso e de baixo custo, cada aluno poderá confeccionar o seu material para estudar frações e ter acesso a ele sempre que desejar ou necessitar. Quanto ao tipo de papel, não precisa ser necessariamente um papel branquinho que nunca foi usado, pode-se utilizar papel reciclável. O cuidado que se deve ter na escolha do papel está relacionado à gramatura e espessura do papel porque se a folha for muito espessa torna-se difícil realizar as dobras e se for muito fina e maleável demais cria dificuldade tanto na hora de dobrar quanto na apresentação das partes cortadas que representarão as diferentes frações.

Entre as diferentes formas que podem ser usadas para trabalhar frações escolhemos duas: o quadrado, forma básica do origami, e o círculo, associando-a à pizza cujo exemplo aparece comumente nos livros didáticos ou é usado nas explicações dadas pelo professor.

Ao se dividir o quadrado é possível que surjam figuras diferentes_ retângulos, triângulos e quadrados menores, que dependem da forma como ele foi dobrado para ser cortado. Estas partes com formas diferentes quando são comparadas entre si são fundamentais para a compreensão de que diferentes representações de metades de um mesmo inteiro são equivalentes entre si e "aliadas a uma reflexão intelectual sobre a experiência realizada é fundamental para o aprendizado da geometria" (Amâncio e Gazire, 2015) também. Por exemplo, ao determinar a metade de um quadrado este pode ser representado por um retângulo quando dobrado paralelamente aos seus lados ou por triângulos se o quadrado for dobrado pela diagonal. Ambas as formas são a metade do quadrado dado e, portanto, possuem a mesma área.

A maneira de analisar o material em construção requer quatro elementos fundamentais: o objeto, o desenho, o conceito e a imagem mental que influenciam no processo de ensino tanto da aprendizagem de conceitos geométricos como de frações.

Esses autores destacam ainda que aspectos como o intuitivo, o experimental e o teórico para o conhecimento geométrico são fundamentais para a aprendizagem e que o professor precisa considerá-los, pois os alunos podem recorrer a eles sempre que sentirem necessidade para aprender um novo conceito.

Pais (2000, apud Amâncio e Gazire, 2015), quando se refere ao objeto, está relacionando-o aos materiais didáticos ou modelos que exprimem algum conceito geométrico. E salienta que:

> é importante que os alunos tenham oportunidade de manipular objetos para construir os conceitos geométricos, no entanto, a manipulação não deve limitar-se ao nível sensitivo. O material didático deve ser usado como um instrumento para a aquisição de conhecimentos geométricos e não com um fim em si mesmo. Assim, a manipulação deve estar associada a uma atividade intelectual, para que o aluno possa estabelecer relação entre a prática e a teoria. (PAIS, 2000, apud Amâncio e Gazire, 2015, p. 4)

O desenho é a forma de ilustrar os conceitos e esse recurso é o mais usufruído nas aulas de geometria. Pais (1996), acredita que os desenhos conservam uma natureza particular e concreta, já que os conceitos possuem natureza abstrata. E são destes conceitos geométricos que surgem as imagens mentais. Considera ser difícil definir imagem mental, mas relata que “uma pessoa tem uma dessas imagens quando ela é capaz de enunciar de forma descritiva, propriedades de um objeto ou de um desenho na ausência desses elementos.” (PAIS, 1996, p. 70).

A natureza das imagens mentais pode ser abstrata, quando estão relacionadas aos conceitos e subjetiva, quando se afastam dos conceitos matemáticos. Ao formar imagens mentais precisa-se levar em consideração as experiências adquiridas pelos alunos ao longo da escolaridade e fora dela, desde que estas imagens possam ter aspectos qualitativos e quantitativos para que a construção do conceito entre em consonância com o objeto, o desenho e as imagens mentais. De um modo geral, temos o costume de desenhar uma figura sempre na mesma posição e direção, e quando alteramos sua posição, os alunos acreditam que o conceito matemático se modificou. Um exemplo, é a representação do quadrado em os lados são desenhados paralelamente aos lados do papel, isto é, horizontal e verticalmente e quando mudamos sua posição de modo a que seus lados fiquem situados obliquamente, o aluno acredita se tratar de um losango. Por outro lado, dificilmente desenhamos ou encontramos a representação do losango com os lados paralelos à folha de papel.

Kaleff e Rosa (2016), afirmam que quando uma imagem mental é gerada, uma visualização mental está conectada com o conceito matemático, esta imagem "transportada" para o físico, permite representações variadas através do uso de materiais manipuláveis facilitando a comunicação do que está sendo pensado e contribuindo para a possibilidade de se desenhar o quadrado, por exemplo, em outras posições. Ou seja, as ações realizadas com as mãos e os olhos, concretizam o que a mente contempla.

Para Loddi (2015), o prolongamento da mente são as mãos, para quem o "conhecimento se dá através de manipulação, experimentação, riscos, gestos e o pensamento é construído através dos sentidos".

Quando nos referimos à frase "colocar a mão na massa" propomos uma ação para a compreensão de alguns aspectos daquilo que se busca ensinar e aprender. Incluir o aspecto investigativo da criação requer visualizar os processos e procedimentos dos domínios subjetivo, perceptivo, intuitivo e físico, como também nos domínios objetivo, racional e mental. Pallasmaa (2013), nos diz que:

> A união entre os olhos, as mãos e a mente criam uma imagem que não é apenas um registro visual do objeto: ela é o objeto. [...] No momento em que o jogador de um esporte com bola golpeia ou pega a bola, o complexo entre olhos, mãos e mente já realizou cálculos instantâneos e inconscientes sobre as posições espaciais relativas às velocidades e os movimentos, bem como já fez uma série de planejamentos estratégicos. Essa cansativa tarefa de fundir as dimensões do tempo [...] em uma ação que leva uma fração de segundo, é apenas possível graças a prática assídua que culminou na corporificação da tarefa, tornando-a um ingrediente do senso de identidade pessoal do atleta, em vez de fazer com que ele enfrente a situação como uma tarefa externa e desvinculada de seu corpo. (PALLASMAA, 2013 p. 84-5)

Nesse processo de criação, Del Grande (1994, apud Lorenzato, 2015, p. 27), contribui em informar que no período escolar desenvolve-se a aprendizagem de geometria no sentido de adquirir uma percepção espacial. E complementa que "para reconhecerem que duas figuras possuem uma mesma forma, geralmente as crianças se utilizam do transporte de uma figura sobre ou ao lado de outra. Esse movimento pode ser de translação, de rotação ou de reflexão". (DEL GRANDE, 1994, apud Lorenzato, 2015, p. 27).

Kaleff (2015), diz que para realização desses movimentos a habilidade de visualização está relacionada com o desenvolvimento do pensamento geométrico. Ou seja:

> Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre desenhos, imagens, diagramas, em nossas mentes, sobre papel ou com

> ferramentas tecnológica, com o propósito de representar e comunicar informações, de pensar e desenvolver ideias previamente desconhecidas e de divulgar entendimentos (KALEFF, 2015, p. 3)

Com base na experimentação de se poder colocar partes de figuras umas sobre as outras, de poder transladar, rotacionar, refletir e comparar com a figura inteira pensamos em usar a arte da dobradura e do origami para estudar o conceito de frações e estabelecer comparações entre as diferentes partes.

3.3 O *Origami* como recurso para discutir fração

> Todo *origami* começa quando pomos as mãos em movimento. Há uma grande diferença entre conhecer alguma coisa através da mente e conhecer a mesma coisa através do tato.
>
> Tomoko Fuse (1990)

Esta seção aborda as colaborações da arte do *Origami*, através da história, simbologia e a relação do ensino e da aprendizagem de frações como parte de "quantidades contínuas que podem ser divididas exaustivamente sem perder suas características e apresentadas na sua forma extensiva" como definido por Carvalho (2017) e para tanto escolhemos o quadrado_ figura base do origami, como uma das formas geométricas a serem usadas para representar a unidade.

3.3.1 História do *Origami*

Não se sabe com exatidão qual a origem do *Origami.* Alguns pesquisadores informam que ela se originou há cerca de 2000 anos na China, quando ocorreu a invenção do papel, mas este fato não evidencia o surgimento do *Origami*. O papel, era feito de seda e não dobrável, e foi usado como principal material para a escrita. Por mais que o *Origami* seja de origem japonesa, precisamos destacar que também houve contribuições dos países europeus para esta arte. Segundo Takamori, et al[11](n.d.):

> O *origami* clássico japonês e o europeu são muito diferentes, levando-se a acreditar que foram desenvolvidos independentemente. Com a Revolução Meiji em meados do século XIX, o Japão deixou de ser um estado feudal e passou a ser um estado moderno, abrindo suas fronteiras para o ocidente e dando início à industrialização. Como consequência, houve um intercâmbio entre Japão e Europa e a fusão entre os *origamis* ocidentais e orientais. Formava-se assim, a base do chamado "*origami* tradicional". O *origami* que popularmente se conhece é produto dessa mistura de

[11]Disponível em: https://alb.org.br/arquivo-morto/edicoes_anteriores/anais16/sem15dpf/sm15ss12_05.pdf. Acesso: 24 out, 2021

> culturas, dessa troca entre grupos étnicos diferentes, do reinventar constante de nomes e formas. (TAKAMORI, n.d., p. 2)

Este intercâmbio entre Japão e Europa possibilitou a fusão do *origami* oriental e ocidental. Por mais que o *Origami* seja popularmente considerado uma cultura original japonesa, houve influência na arte vindas do Japão e da Europa e que foi divulgado para outros continentes. Nesta época o Japão começou também a produzir o seu papel de *origami*, na figura geométrica de um quadrado, colorido apenas de um lado. E a partir daí, final do século XIX ou início do XX recebe o nome de *Origami* moderno, pelo mestre japonês *Akira Yoshizawa*, que nasceu em 1911 e foi o criador de muitos modelos.

O *Origami* é uma palavra de origem japonesa composta pelo verbo dobrar (折り=*ori*) e do substantivo papel (紙=*kami*), que significa literalmente "dobrar papel". É uma arte milenar que através da dobradura de papéis, em forma de quadrado perfeito, segundo Lang (2003), tem o objetivo de reproduzir animais, figuras humanas, objetos e elementos da natureza. Hayasaka e Nishida[12] acrescentam a importância, a transformação deste papel:

> Para se fazer o ***ORIGAMI***, tradicionalmente, começa-se com um papel cortado em forma de um quadrado perfeito. A inspiração dos ***origamistas*** (as pessoas que se dedicam à arte do *Origami*) está, principalmente, nos elementos da Natureza e nos objetos do dia-a-dia. Para o *origamista*, o ato de dobrar o papel representa a transformação da vida e ele tem a consciência de que esse pedaço, um dia, foi a semente de uma planta que germinou, cresceu e se transformou numa árvore. E que depois, o homem transformou a planta em folhas de papel, cortando-as em quadrados, dobrando-as em várias formas geométricas representando animais, plantas ou outros objetos. Onde os outros viam apenas uma folha quadrada, o *origamista* pode ver a origem de todas as formas se transbordando. Tradicionalmente, nada é cortado, colado ou desenhado. Para o mestre *origamista*, Akira Yoshizawa, o *origami* é um diálogo entre o artista e o papel. (HAYASAKA e NISHIDA, n.d., p.1)

Popularmente conhecido no Brasil como dobradura e direcionado para o uso da diversão ou arte, as figuras de *origami* sinalizadas por Robert J. Lang (2010) reservam uma beleza estética que cativa tanto o amador como o matemático, porque traz consigo a partir das construções menos elaboradas até as mais relevantes, por intermédio da definição de uma sequência de dobragem, a formação simplista do conceito.

Ao observar esta dinâmica, uma dúvida surgiu em relação aos termos *Origami* e dobradura, no sentido de saber qual a distinção entre eles. Notamos que uma palavra está

---

[12] Disponível em: <http://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami.htm>. Acesso em 08 de ago. de 2022.

linkada a outra, isto é, para realizar a arte do *Origami* é necessário fazer dobraduras e exercer passos sequenciais para construção da figura em si.

O *Origami* é a arte da dobradura e as dobraduras são as ações, as dobras, realizadas para a construção do *Origami*. Nakayama e Andrade (2022), afirmam que existe uma sutil diferença entre eles. Nos *Origamis* "não são permitidos colagem e nem recortes com tesoura, normalmente são dobras feitas em um papel quadrado ou retangular, já na dobradura se pode usar destes dois recursos, além de que o papel pode estar em formas diferentes". Lima e Coelho[13] abordam esta diferenciação de forma similar:

> A arte consiste basicamente em dobrar papel, no início, sua prática exigia que não houvesse cortes, nem colagens e só era considerado como *origami* se suas dobras fossem feitas a partir de um pedaço de papel quadrangular. Hoje em dia muitos ainda seguem esse princípio, mas, por vezes, já se é permitido cortes, colagens, papéis retangulares e até em outros formatos". (LIMA e COELHO, 2019, p. 6)

Ao dobrarmos o papel e observarmos as dobras é possível identificarmos duas formas diferentes e que são denominadas dobras primárias em *origami*: a "dobra vale" e a "dobra montanha", observe a figura 4. De acordo com Lang (2010), por mais que o *origami* seja complexo e detalhado, a sua composição é obtida a partir de diversas dobras[14] vale e dobras montanha para formar diferentes representações de objetos, animais, pessoas, entre outros.

Figura 4 - Composição básica do *origami*: Dobras-montanha e Dobras-vale

Fonte: Elaborado pela autora

No entanto, ao combinarmos mais de uma dobra montanha e dobra vale obtemos um arranjo complexo que requer desenvolvimento manual, raciocinar e focar no objeto, como afirmam Rossi e Teixeira (2013):

> Se se considerar um *origami* clássico, feito a partir de um único papel sem cortes ou cola, o que possibilita seu potencial complexidade é o arranjo como suas dobras vales e montanhas estarão dispostas ao longo do papel. E essa disposição diz respeito não apenas ao espaço ocupado por uma ou outra dobra ou aos seus diversos tamanhos, mas à trama maquinal que o *origami* demanda: é necessário torcer, explorar, construir, marcar, mapear, transformar o papel em algo incognoscível até então. Não se trata apenas de desenvolver gestos manuais, mas raciocinar sobre e

---

[13] Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2019/TRABALHO_EV127_MD1_SA13_ID1827_10042019004015.pdf. Acesso: 22 jan 2022
[14] https://youtu.be/zD6TuFe8BDM

> com o objeto, de maneira que ele traga em si um devir *origami*. (ROSSI e TEIXEIRA, 2013, p. 167)

Com estas intenções e construções temos a figura *Tsuru*, que representa uma ave ou está associada a uma cegonha ou “grou” que é o símbolo do *Origami*, e que no Japão significa saúde, boa sorte, fertilidade e felicidade e que também vendo sendo usada como símbolo da paz para o mundo. A figura 5 mostra esta representação e para visualizar como é feita a sua construção, assista o vídeo em: https://youtu.be/gVS9bvPOUWI.

Figura 5 - *Origami* tradicional do Tsuru

Fonte: Elaborado pela autora

A partir desta ideia, símbolo da paz, que o *Origami* se tornou para o mundo, buscamos identificar que tipo de ligação pode existir entre esta dobradura e a disciplina de Matemática.

Em nosso trabalho, utilizamos o termo dobradura pois para obtermos as representações de diferentes frações teremos que cortar o papel e para tanto nos utilizamos das dobras e dos cortes com a tesoura.

3.3.2 A matemática e a dobradura

Ao utilizarmos as dobraduras referimo-nos simultaneamente a arte do *Origami* que é uma ferramenta ou recurso metodológico (pedagógico) que vem sendo utilizada na educação em diversas disciplinas, promovendo a interdisciplinaridade entre elas. Além de ser implementada em alguns cursos de formação em design, arquitetura e urbanismo, por meio da modelagem para desenvolver técnicas e processos que inspiram os estudantes na aplicação de dobras em seus projetos, relata Loddi (2014).

No ensino, encontramos trabalhos de Maciel (2022), Oliveira (2022), Silva e Barbosa (2022), inserindo o *Origami* como ferramenta para o ensino e aprendizagem de geometria espacial e plana.

Apesar de não termos encontrado dissertações e nem artigos que direcione para o nosso propósito, notamos que são mencionados em alguns documentos a importância do trabalho com o *origami*, pois possibilita o estudo de diversas ramificações da Matemática como: Aritmética, Fração, noções de Proporcionalidade, Álgebra e Função. E Takamori afirma que a obra "*Hiden Sembazuru Orikata*", em 1797, "há uma presença da divisão de um papel em diferentes partes indicando o trabalho com frações e proporção".

Além destes ramos estudados em matemática, não podemos esquecer da geometria que é ressaltado por Kindel (2010) e Nascimento (2012), na análise das marcas das dobras deixadas no papel em que se pode estudar alguns conceitos geométricos como as posições relativas de retas ou de duas ou mais retas comparadas entre si, medidas de ângulos, simetrias, diferentes tipos de dimensão, entre outros.

Temos outros fatores importantes que Rêgo (2003) recomenda para realização de um bom trabalho com *origami*:

a. verificar se o formato do papel está adequado ao solicitado pela atividade
b. efetuar os vincos com firmeza e precisão para criar os eixos de simetria corretamente
c. realizar tentativas antes de executar a versão final do *origami* para auxiliar na compreensão dos passos
d. escolher um papel com espessura e textura adequadas para a realização das dobraduras
e. determinar as dimensões iniciais do papel para facilitar a execução das dobras pelos alunos.

Ao utilizarmos esse recurso pedagógico que permite essa variedade no estudo da matemática, existem os objetivos que auxiliam no desenvolvimento, conforme retrata o informativo do consulado do Japão (2015):

- Esquema corporal;
- Motricidade fina (coordenação da mão e dos dedos para fazer as dobraduras);
- Discriminação visual (noção de tamanho, cor, forma, posição e sentido);
- Discriminação auditiva (nos sons do papel e das músicas - intensidade e ritmo);
- Memória visual (memória da sequência das dobras);
- Percepção tátil (percepção da textura do papel e das linhas formadas pelas dobras);
- Criatividade.

Com as recomendações, desenvolvimentos e habilidades mostradas acima notamos que as reflexões sobre as dobraduras, implementadas pela arte milenar do *origami*, a matemática pode se tornar uma disciplina mais “leve”, “divertida”, "descontraída", “compartilhada”, com o objetivo de entender que pode se ampliar o conhecimento, na construção de um conceito e descobrir ou aperfeiçoar aptidões já manifesta nos alunos.

Para compreender como e o que se deve trabalhar em sala de aula de matemática sobre o conceito de fração buscamos analisar as propostas curriculares do Ensino Básico e do curso de Licenciatura em Matemática (local e público de nossa pesquisa).

4. OS DOCUMENTOS OFICIAIS PARA O ESTUDO DE FRAÇÃO E A FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Neste capítulo apresentamos as contribuições dos documentos oficiais da educação para o estudo de fração no Ensino Básico tendo como base os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e a grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Pública da Baixada Fluminense.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) é um documento que auxilia na execução do trabalho diário do professor para que os alunos dominem os conhecimentos necessários para crescerem como cidadãos. Com esses objetivo é exposto à ideia de que os alunos apresentam dificuldades na aprendizagem dos números racionais "[...] porque supõe ruptura de ideias construídas para os números naturais" (BRASIL, 1998, p. 101).

Mesmo que os números racionais sejam ensinados nos anos iniciais pode-se observar que existem algumas lacunas entre os conjuntos, ou seja, a transição do conjunto dos números naturais segue um ritmo de aprendizagem diferente daquela existente no conjunto dos números racionais. Por exemplo, é ensinada a contagem dos números naturais, mas não é o mesmo raciocínio para contagem dos números racionais. E para corroborar os PCN, (1998, p. 100-101) dizem que os alunos "chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma decimal".

Os números racionais quando representados na forma de fração, possuem várias interpretações e uma delas é a divisão, ao realizarmos esta operação o resultado nos remete a várias representações a serem compreendidas em sua amplitude, não apenas ensinadas com regras para no final resolver o problema em questão. Em sintonia Freitas e Barbosa (2016), sinalizam que:

> o ensino de frações não pode ficar restrito à aplicação de um conjunto de técnicas que culminou na resolução de problemas. É preciso reconhecer que a aprendizagem de frações supõe algumas rupturas com as ideias já construídas pelos estudantes a respeito dos números naturais. (FREITAS E BARBOSA, 2016, p.1)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. Apresenta uma noção de progressão de complexidade, isto é, as frações são relembradas de maneira gradual e a cada ano se acrescenta algum conceito. Veja na tabela, as orientações elencadas na BNCC envolvendo os objetos de conhecimento e as habilidades necessárias a serem desenvolvidas para o ensino de fração ano a ano:

Tabela 5: Objetos e Habilidades da BNCC

Ano	Objetos do Conhecimento	Habilidades
2º	Não é especificado, mas aborda as noções de dobro, metade, triplo e terça parte	(EF02MA08) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.
3º	Não é especificado, porém faz comparações dos números naturais com os números racionais.	(EF03MA09) Associar o quociente de uma divisão com o resto de um número natural por 2, 3, 4, 5 e 10 às ideias de metade, terça, quarta, quita e décima partes.
4º	Números racionais: frações unitárias mais usuais	(EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/10) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.
5º	Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica	(EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.
	Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência.	EF05MA04) Identificar frações equivalentes. (EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica;
	Cálculo de porcentagens e representação fracionária.	(EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros; (EF05MA07) Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com números naturais e com números racionais, cuja representação decimal seja finita, utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos; (EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
6º	Frações: significados (parte-todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações.	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. (EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionárias e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. (EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural,

		com e sem uso de calculadora. (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
7º	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.	(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. (EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura pode ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos. (EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. (EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. (EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
	Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações.	(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica. (EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias. (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais
8º	Porcentagem.	(EF08MA04) Resolver e elaborar problemas, envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
	Dízimas periódicas: fração geratriz.	(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.
9º	Potências com expoentes negativos e fracionários.	(EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.

Fonte: BNCC (2018, p. 280-319)

Observamos que o estudo de frações começa no 2º ano, com as ideias de dobro, metade, triplo e terça parte; no 3º ano, apresentam-se as divisões com restos e acrescenta-se as ideias de quarta, quinta e décima parte; no 4º ano, são reconhecidas as frações unitárias 1/2, 1/3 e 1/10, assim como as frações menores e maiores que a unidade, com a utilização da reta numérica como recurso para a visualização são identificadas as frações equivalentes e são comparados e ordenados os números racionais positivos; no 5º ano são realizados cálculos de porcentagem e associadas as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100%, são resolvidos e elaborados problemas de adição, subtração, multiplicação e divisão com números naturais e racionais em que a representação decimal seja finita. E no 6º ano, as frações são compreendidas, comparadas e ordenadas, associadas às ideias de partes de inteiros (parte/todo) e resultados de divisão (quociente), identificadas as frações equivalentes. Os numéros racionais positivos são expressos nas formas fracionárias e decimais, estabelece-se as relações entre as representações, de forma a passar de uma representação para outra, além de representá-las na reta numérica, inclui-se também a resolução e elaboração de problemas que envolvam cálculos com frações de uma quantidade, envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão. Ou seja, no 6º ano, são revisados os tópicos de frações abordados no Ensino Fundamental I.

Esta forma como a BNCC apresenta as habilidades parece ser adequada para o ensino, até porque a construção dos conceitos, especificamente neste caso, as frações, precisam fazer sentido no cotidiano, como cita Bertoni (2009):

> O foco principal é tornar clara para a criança a existência de situações significativas do contexto que demandam a introdução de novos números. Números têm que funcionar na vida, não só em figuras divididas, onde nem adquirem verdadeiramente esse significado. (BERTONI, 2009, p. 12).

As representações apresentadas nos livros didáticos de figuras divididas em partes iguais no qual o aluno identifica a representação do todo como denominador, e as partes pintadas ou “tomadas” como numerador, assim como algumas regras que servem para realização dos cálculos, parecem ser suficientes para o próprio aluno ter a impressão de que sabem sobre frações. (NUNES, 1997, p. 191). Mas, será que os alunos sabem responder estas perguntas: (1) um meio dividido por 2, quanto dá? (2) meu irmão bebeu a metade da garrafa de suco de uva e eu bebi a metade do que sobrou, quanto ficou na garrafa? (3) de que forma podemos dividir 10 quindins para 6 crianças, se não deixamos sobrar nada?

Dependendo da situação algumas perguntas são respondidas imediatamente, outras o aluno recorre ao uso de alguma ferramenta, outros podem se lembrar das regras ensinadas pelo(a) professor(a) para encontrarem uma resposta, e, frequentemente, não explicam com clareza como chegaram na resposta.

Uma das formas que pode auxiliar o aluno é usar ferramentas de manipulação, conforme cita Bittar e Freitas (2005), “o estudo de frações, nas séries iniciais do Ensino Fundamental, poderia ser introduzido por meio de questionamentos e situações-problemas a partir da manipulação de materiais concretos e de situações do cotidiano”. Assim, entendemos que as reformas curriculares nos orientam sobre o que deve ser ensinado, mas a forma como será feito em sala de aula dependerá de cada professor. E como futuros professores desenvolverão o ensino de frações com seus alunos?

Araújo e Jesus (2017), dizem que formação inicial é quando o professor durante a sua formação acadêmica adquire suporte “que garanta ao futuro docente, desempenhar o seu ofício com qualidade, porque o mesmo obteve conhecimento com professores, que são experientes e ministram conteúdos para o seu aprimoramento como profissional".

Com base nessa ótica, direcionamos o nosso olhar para o currículo do curso de formação do professor de matemática e buscamos identificar quais são as orientações dadas pelo PARECER CNE/CES6 1.302/2001, cujo documento apresenta as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Licenciatura e Matemática (BRASIL, 2001).

O Projeto Pedagógico do curso de graduação de Licenciatura em Matemática do Instituto Multidisciplinar da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, IM/UFRRJ, com sede no município de Nova Iguaçu/RJ, apresenta um curso alinhado com as normas da legislação acima, apresentando uma justificativa de proposta que sincroniza com os objetivos gerais do curso: "oferecer ao aluno os conteúdos matemáticos, indispensáveis ao futuro professor, e uma formação pedagógica consistente, tornando-o capaz de analisar e compreender os novos paradigmas de educação e de trabalho, reconhecendo as dimensões culturais, políticas, sociais e econômicas da Educação". (PROJETO PEDAGÓGICO DO CURSO, 2009, p. 11).

O projeto do curso de matemática apresenta as linhas curriculares organizadas em grupos que contemplam a formação específica, as áreas afins, a formação filosófica e histórica e a formação pedagógica. Neste último conteúdo é proposto fundamentar a ação pedagógica na atualidade e discutir a prática do educador e aperfeiçoá-la. Para atender este objetivo estão elencadas algumas disciplinas, entre elas a de Ensino de Matemática I, que é oferecida no 6º período e cuja ementa apresenta as seguintes metas:

> Questões atuais da educação matemática. Análise das teorias do conhecimento como instrumento de conhecimento matemático. Discussão e construção dos diferentes conjuntos numéricos. Formas e medidas geométricas e suas possíveis combinações. O processo de algebrização, aritmetização. Diferentes abordagens sobre a metodologia de ensino de matemática. Procedimentos de ensino e aprendizagem da matemática. Recursos didáticos para o ensino da matemática. (PROPOSTA PEDAGÓGICA, 2009, p. 64)

A proposta no seu âmbito geral cumpre com as "regras" dispostas nas leis, porém algumas dificuldades ainda existem, e uma delas é a *dupla descontinuidade* criticada por Felix Klein (2004), que significa uma ruptura entre o que os futuros professores de matemática aprendem nos cursos universitários e o que foi aprendido anteriormente, como alunos na escola básica; e por outro lado entre a matemática dos cursos universitários e a prática futura em sala da aula na escola básica. Para corroborar com esta visão do autor, há pesquisas recentes que apontam que "a formação do professor parece estar distante e desconectada do trabalho de ensinar matemática, da prática dos professores" (RANGEL; GIRALDO; MACULAN, 2015, p. 47).

Essa discussão permite contribuir na reflexão de um círculo vicioso entre o conteúdo, saberes e prática, como mostra a figura 7.

Figura 6 - Conteúdos, saberes e prática

Fonte: Autores do artigo – Práticas docentes compartilhadas: integrando saberes emergentes da prática na formação inicial de professores de Matemática 1

Ensinar requer uma análise crítica sobre a prática, nesse contexto Freire (2021) contribui dizendo que:

> A prática docente crítica, implicante do pensar certo, envolve o movimento dinâmico, dialético, entre o fazer e o pensar sobre o fazer. O saber que a prática docente espontânea ou quase espontânea, "desarmada", indiscutivelmente produz é um saber ingênuo, um saber de experiência feito, a que falta a rigorosidade metódica que caracteriza a *curiosidade epistemológica* do sujeito. Este não é o saber que a rigorosidade do pensar certo procura. Por isso, é fundamental que, na prática da formação docente, o aprendiz de educador assume que o indispensável pensar certo não é presente dos deuses nem se acha nos guias de professores que iluminados intelectuais escrevem desde o centro do poder, mas, pelo contrário, o pensar certo que supera o ingênuo tem que ser produzido pelo próprio aprendiz em comunhão com o professor formador. (FREIRE, 2021, p. 39)

Ter um olhar crítico da prática, mostra o quanto o professor pode aperfeiçoar, aprimorar e desenvolver o seu papel em sala de aula e perceber que o professor precisa atuar como um mediador. É como se o professor oferecesse uma gama de variedades de descobertas e direcionasse o aluno para construção do seu próprio conhecimento, até o instante que ele compreenda e faça a integração com o mundo atual, como cita Scolaro (2008):

> Portanto, compreender que o professor atua como mediador entre aluno e o conhecimento, é acima de tudo reconhecer que o professor deve ser um profissional formador, integrado ao mundo de hoje, responsável socialmente pela formação do cidadão e, principalmente, um eterno aprendiz. Logo, tem de estar continuamente pesquisando e aperfeiçoando-se, para buscar "inovar e inovar-se". Deve-se considerar que são infinitos os desafios que afligem a Educação e que consequentemente acabam por afetar diretamente o professor e suas visões de mundo. Por essa razão, ressalta-se que a formação do professor por si só não dá conta desta gama de desafios, o que também não é uma novidade no que se remete a

> Educação, pois tal formação não deve estar limitada a uma conclusão de curso superior, porque embora esta formação propicie expansão de conhecimentos aos professores, se estes não buscarem uma continuidade correm o risco de se tornarem estagnados e arraigados a conceitos que com certeza não darão conta dos desafios educacionais que vêm sendo trazidos por este modelo de sociedade atual. (SCOLARO, 2008, p. 2)

Assim, o origami e as dobraduras são uma das formas de pertencimento a esta variedade de possibilidades em que suas diferentes representações podem auxiliar na mediação de discursos e trocas de conhecimentos.

Para dinamizarmos esses discursos, a formação de grupos contribui para o debate entre os licenciandos, enquanto elaboram, através das dobraduras e recortes e respondam as tarefas.

Em Sfard (2008) é abordado à funcionalidade do discurso e linguagem em matemática como forma de comunicação, trazendo uma mediação visual e a realização visual dos símbolos matemáticos. E relata sobre o discurso dos objetos matemáticos, com as suas diversas representações, buscando regularidades no comportamento dos objetos de discurso. E para que a mediação pedagógica durante a realização das atividades com as dobraduras recomenda-se ao professor ficar atento em "algumas circunstâncias que podem ocorrer durante a execução dos procedimentos" (RÊGO, 2003, p.15):

1) as construções realizadas pelos alunos devem ser acompanhadas, passo-a passo, por um instrutor, que pode ser o próprio professor ou algum aluno monitor que possua maior facilidade e treinamento prévio;

2) o instrutor deve utilizar um papel com dimensão maior do que os alunos para que todos visualizem os detalhes dos procedimentos;

3) a escolha da dobradura deve obedecer a uma graduação de dificuldade progressiva, pois mesmo as dobraduras mais simples podem conter diversos conceitos matemáticos a serem explorados;

4) durante a confecção do *origami*, o instrutor deve sempre utilizar a linguagem matemática adequada para favorecer a compreensão correta dos conceitos geométricos por parte dos alunos;

5) a organização da sala é importante e deve valorizar o trabalho em grupo para que os alunos comparem os trabalhos executados e elaborem diagramas detalhados sobre suas próprias construções;

6) deve-se respeitar os diferentes níveis de aprendizagem durante a execução das dobraduras, sendo frequente que determinados alunos necessitem de maior prática para realizar os *origamis* do modo desejado;

7) sempre ter em mente os objetivos pretendidos com a execução do *origami*: quais conteúdos matemáticos serão abrangidos, que tipo de estrutura será utilizada (diagramas, orientações dirigidas, etc), como a sala será organizada, etc".

Aconselha-se ao professor que realiza as dobraduras durante as aulas, explicar cada etapa das dobras, mostrar outros conceitos matemáticos que estão envolvidos na execução da construção do material (*kit de frações)*, no uso dos instrumentos de medida e se necessário acompanhar os vídeos de orientação que estão disponíveis neste trabalho.

Júnior et al (2019), salienta que a opção para se usar algum tipo de tarefa dependerá dos objetivos pretendidos de seus elaboradores, pois é possível observar que elas podem oferecer caminhos para a aprendizagem de conteúdos de Matemática, mudança na prática dos professores, metodologias apropriadas que funcionem para a compreensão, realização de pesquisas que articulem com os objetivos, criação de modelos matemáticos para os conteúdos desenvolvidos, utilização de elementos históricos para a formação de conceitos e aprendizagem dos alunos.

Em vista das orientações para o estudo de frações nos documentos oficiais e da grade do curso de licenciatura, apresentamos a metodologia da pesquisa a ser realizada com os graduandos de matemática.

5 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentamos a metodologia implementada nesta pesquisa qualitativa, a fim de analisar o desenvolvimento do pensamento matemático dos licenciandos de matemática, da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, sede Nova Iguaçu, com atividades investigativas/exploratórias para a construção do conceito de fração com a utilização de dois *kits* realizados por dobraduras no papel, em formas geométrica quadrado e círculo com as suas respectivas divisões.

Uma metodologia favorável para análise deste ambiente de aprendizagem em que possibilita uma articulação entre os envolvidos no ensino e na investigação é *o Design Based Research* (DBR).

Em Mendes, et al (2016) “em termos históricos, a experiência de ensino enquanto modalidade de Design Research, surge para conferir respostas à necessidade de investigar sobre práticas de ensino e aprendizagem em, numa tentativa de aproximar a prática de investigação da prática de ensino”.

Segundo Matta, Silva e Boaventura (2014), a DBR, possui uma metodologia de pesquisa qualitativa, de desenvolvimento investigativo e aplicável, pretendendo encontrar soluções práticas e inovadoras, que possibilitem generalizações e possam facilitar a resolução dos problemas da educação. Com essa visão, Ponte (2016) afirma:

> Este tipo de investigação é muito atrativo para os investigadores cujo principal interesse é encontrar soluções robustas, eficazes e praticáveis para os problemas educativos. De alguma forma, ela representa um desenvolvimento, no sentido de uma maior sofisticação, relativamente a outras formas de intervenção de base científica usadas em educação, como as experiências de ensino do fim do século XX e os projetos de investigação-ação (PONTE, 2016, p.78).

Esta linha de pesquisa foi disseminada no início da década de 1990 visando uma metodologia voltada para intervenção no qual associam aspectos teóricos e práticos para uma pesquisa.

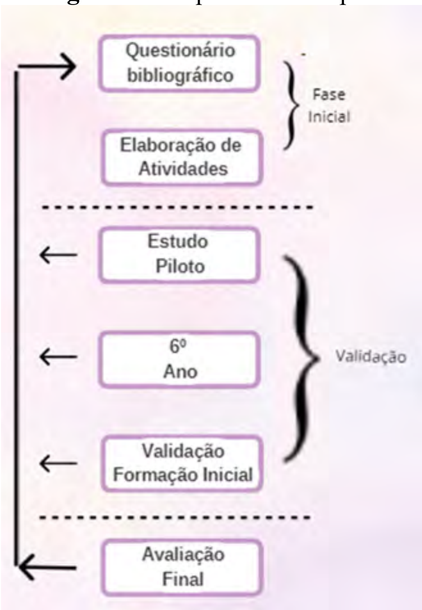
A DBR possui características por Mckenney e Reeves (2012) a serem destacadas: 1- *teoricamente orientada*, no qual refere se a teoria como sendo o ponto chave, onde são os pilares para sustentação do estudo de Frações. Essa base teórica através de uma revisão bibliográfica possibilitou-nos a elaboração de uma proposta prática que permite ser estudada. 2 - *Intervencionista*, quando aplicado às atividades o resultado gera um produto para fins pedagógicos. 3 - *Colaborativa*, onde o investigador se apresenta como mediador, sem influenciar nas respostas, permitindo que as dificuldades apresentadas sejam compartilhadas e validadas em conjunto, ao ponto de chegarem a um consenso. 4 - *Fundamentalmente responsiva*, conforme os debates e as intervenções ocorrerem durante a aplicação das atividades, o conhecimento se amplia por meio de um amplo diálogo com a prática. E, 5 – *interativa*, com essa reciprocidade há um processo de arquitetura cognitiva que estabelecerá a construção de soluções práticas que podem ser aperfeiçoadas e melhoradas conforme a necessidade e/ou possibilidade.

Segundo Matos (2016), os problemas relacionados com o ensino e aprendizagem da matemática requerem simultaneamente uma atenção à prática, mas também uma reflexão sobre essa prática. Assim, Kindel (1998, 2012), Ponte (2003) e Canavarro (2011) acreditam que é necessário que os alunos sejam o foco da atividade matemática e para isso o professor deve propor situações em que os estudantes possam trabalhar em pequenos grupos e desta forma discutir as situações-problemas entre si podendo contribuir para a manifestação dos seus pontos de vista tanto individual quanto coletivamente ao relatar suas estratégias para o grupo maior, a turma toda.

Com base nesta dinâmica foram construídos os *kits* com a participação e diálogos durante a confecção e analisadas um conjunto de tarefas que inspiram e encaminham um roteiro para a realização do material manipulável físico papel, utilizando as dobraduras como técnicas do *Origami* e quando necessário a utilização de materiais manipulativos físicos: régua, esquadros, compasso e transferidor aos licenciandos de matemática da UFRRJ, na modalidade presencial.

Antes de chegarmos à estrutura "definitiva" da pesquisa passamos por várias etapas e transformações que está representada no esquema abaixo:

Figura 7 - Esquema das etapas



Fonte: Elaborado pela autora

O nosso estudo piloto foi aplicado pela primeira vez a três alunos licenciandos de matemática, do curso de Ensino de Matemática I, da UFRRJ, em cinco aulas no mês de julho de 2021, via online, para entender como seria a dinâmica.

Elaboramos um questionário na plataforma do *Google Docs*, para os licenciandos responderem via endereço eletrônico (*link*), em seguida elaboramos as construções dos *kits* que seriam feitos com a divisão do triângulo equilátero, do quadrado, do círculo, do pentágono e hexágono regular, sendo que os dois últimos foram descartados durante a realização da primeira oficina pois verificamos que eram muitas figuras e que não era necessário aprender a fazer as divisões de todas elas. Vários são os motivos, sendo a técnica usada para dividi-los em tantas partes a mais complexa, para citar um exemplo, pense em encontrar 1/7 do pentágono, por exemplo, a ideia era construir e discutir um material que fosse adequado para ser feito com estudantes do 5º e 6º anos e a divisão do triângulo, pentágono e hexágono envolvia aprender muitos processos para realizar as divisões por valores entre 2 e 10. Assim, já no primeiro curso ao apresentarmos uma oficina no EEMAT, com uma estrutura mais enxuta; ou seja, trabalhamos o quadrado e o círculo e discutimos com os professores as vantagens e desvantagens de se fazer com o triângulo. Diante dos comentários, sugestões e reflexões feitas, optamos por fazer apenas com as duas figuras restantes. Em seguida aplicamos também numa turma de 6º ano, que a pesquisadora dava aula, para entender e compreender de fato se as alterações realizadas surtiram o "mesmo efeito", porém com um olhar diferenciado, até porque o nicho era diferente. Toda esta trajetória foi um preparatório para que de fato agora, fosse aplicado aos licenciandos de matemática.

Com base nestas reflexões, fomos a campo com a proposta de realizar e analisar a confecção de apenas dois conjuntos (Kit de frações) envolvendo o quadrado e o círculo. Segue um resumo das etapas descrevendo em linhas gerais o tipo de tarefa e o objetivo de cada uma delas.

Tabela 6: Ordem dos procedimentos

Tarefas	**Tarefas**	**Objetivos**
Sondagem	* Construindo o Conceito de Fração _ olhares através da dobradura - Formulários *Google*	* Conhecer o licenciando: dados pessoais e conhecimentos específicos em relação à educação e ao estudo de frações
1	* Dobra e redobra: construção e divisão do quadrado em metades	* Aprender a achar um quadrado em uma folha A4 * Dividir em metades e sua potência
2	* As cores nestas metades	* Buscar uma relação com as cores e as frações
3	* A trissecção no quadrado * Divisão do quadrado em partes fracionadas distintas	* Dividir o quadrado em n partes iguais usando técnicas de desenho geométrico, manuseando o par de esquadros e dobradura
4	* Ficha 1 – questões sobre o *kit* quadrado	* Realizar atividades com a utilização do *kit* quadrado
5	* Dobra e redobra: construção e divisão no círculo	* Aprender a manusear o compasso * Achar as metades * Aprender a manusear o transferidor
6	* Ficha 2 – questões sobre o *kit* círculo	* Realizar atividades com a utilização do *kit* círculo

Fonte: Elaboração da autora

No âmbito geral, ficou desta maneira:

1º) Utilizamos o *Google Docs* para criarmos o link de um questionário, em que os alunos deveriam responder perguntas referentes a dados pessoais e conhecimentos específicos em relação à educação e ao estudo de frações;

2º) Construção do *kit* no **quadrado**

3º) Responder os itens da ficha **1**;

4º) Construção do *kit* no **círculo**

5º) Responder os itens da ficha **2**.

Lembramos ao leitor que a pergunta da pesquisa é analisar de que maneira os licenciando de matemática se desenvolvem com atividades exploratórias/investigativas para a construção do conceito de fração?

Para responder esta questão propusemos a criação de um produto educacional com a construção de dois *kits*: um na figura geométrica quadrado e a outra no círculo, com apresentação de um roteiro em videoaulas, na plataforma *YouTube* para realização dos mesmos.

E elaboramos duas fichas com atividades para aplicação dos *kits* construídos, para analisarmos esses desenvolvimentos e as interações.

Assim sendo, apresentamos o local, os sujeitos da pesquisa e os instrumentos de coleta e de análise de dados.

5.1 Local e Sujeitos de Pesquisa

A pesquisa foi realizada no Instituto Multidisciplinar da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, denotado por IM/UFRRJ, com sede no município de Nova Iguaçu/RJ, na turma da professora regente da disciplina Ensino na Matemática I, orientadora desta pesquisa. E os sujeitos de pesquisas compreendidos no presente estudo, foram os licenciandos do curso de Matemática da UFRRJ, na modalidade presencial, no qual a participação foi voluntária e autorizada pelos participantes.

5.2 Coleta de Dados da pesquisa de campo

A coleta de dados para realização da pesquisa foi dividida em três etapas: aplicação de questionário de sondagem, elaboração do conjunto de frações com dobradura e instrumentos de medida, aplicação das fichas 1 e 2 após a realização de cada um dos conjuntos de frações.

Na primeira etapa, a aplicação de um questionário de sondagem elaborado no *Google Docs*, que apresentava a seguinte organização: dados pessoais, acadêmicos, profissionais e sobre conhecimento de fração, para conhecermos e sabermos o que os participantes trazem de conhecimento.

Na segunda etapa, a construção dos *kits* quadrado e círculo. Optamos em começarmos pelo quadrado por apresentarem divisões específicas, ou seja, foram realizadas as metades e em seguida as frações do tipo 1/3, 1/5, 1/6, 1/7, 1/9 e 1/10, por necessidade de utilizarem instrumentos para construção e depois no círculo, com instrumento de medida.

E na terceira etapa: aplicação das fichas 1 e 2 com atividades sobre frações e utilização dos *kits*.

Para a coleta foram utilizados os seguintes instrumentos:

O questionário individual para conhecermos os licenciandos, no sentido pessoal, acadêmico, profissional e o que o eles conheciam sobre fração. O que segundo Gil (2011. p.128), define como uma “técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas, tendo por objetivo o conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas etc.”. Desse modo é propício para fins acadêmicos, além de organizações empreendedoras.

As gravações em áudio foram realizadas com o aparelho celular da pesquisadora, porém nos três primeiros encontros, a pesquisadora perdeu alguns áudios porque aproveitou o aparelho para registrar os momentos em que os licenciandos realizavam as atividades.

As atividades foram acompanhadas e em alguns momentos fotografadas. Já as fichas 1 e 2 foram realizadas em duplas e entregues a pesquisadora.

O diário de campo foi baseado nas descrições apresentadas por Kindel (1998, p. 38-44), com notas feitas diariamente após a realização de cada um dos encontros com os participantes.

5.3 Materiais utilizados

Os recursos materiais (folha de papel sulfite, cartolina, papéis coloridos, tesoura, estilete), os instrumentos de medida_ régua e transferidor e os instrumentos para a construção de figuras geométricas_ par de esquadros e compasso, utilizados para a realização das atividades fazem parte do acervo do Laboratório de Observações, Vivências e Experiências em Educação Matemática situado no Instituto Multidisciplinar da Universidade.

5.4 Análise de Dados

A análise será feita a partir do surgimento dos comentários nos momentos em que os licenciandos tiverem construindo os kits, ou seja, quando forem realizar cada dobradura para fazerem as divisões.

Para o registro, durante as aulas, foram realizadas gravações em áudio para acompanharmos as discussões durante a realização das construções; fotos para registrar algumas etapas do desenvolvimento das dobras e do uso dos materiais de apoio_réguas, compasso, transferidor e par de esquadros, tesoura para o corte das partes. No diário de campo, realizado após o término dos encontros, foram feitas anotações referentes ao processo da aplicação das etapas e anotações sobre os procedimentos usados pelos licenciandos.

As fichas 1 e 2 foram elaboradas com o propósito de: (EF02MA08) que diz: Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais e (EF04MA09) que diz: reconhecer as frações unitárias mais usuais (1/2, 1/3, 1/10) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso. Conforme o BNCC.

Para responderem as fichas 1 e 2, com apresentação de atividades propostas sobre frações com a utilização dos *kits*, os alunos sentaram-se em duplas para dialogar, trocarem informações, responderem individualmente e entregarem as fichas. Segundo Grymuza e Rêgo (2014), às atividades surgem como desenvolvimento das funções psíquicas que decorre de um processo de apropriação de algum saber que transforma as atividades externa em interna. E mostra a relevância entre os sujeitos e a atividades entre o sujeito e o objeto de aprendizagem.

Assim, a pesquisa tem como foco analisar as interações dos estudantes com as atividades de frações, isso é, de que forma os licenciandos de matemática se posicionam diante das atividades que buscam potencializar o uso da dobradura e dos materiais manipuláveis como recurso metodológico no ensino de frações, para tanto, usaremos o diário de campo, as gravações de áudios, os registros escritos dos licenciandos e fotos.

Sobre as respostas, foi criada uma tipologia para considerar as semelhanças e diferenças nas respostas dadas, às estratégias de resolução, o uso dos materiais e a habilidade na realização das dobraduras. Yin (2016) introduz um ciclo de cinco fases para realizar a análise dos dados, que são compilar, decompor, recompor (e arranjar), interpretar e concluir, o que permite uma organização para essa pesquisa.

6. Quem dobra e redobra sempre fica com a maior parte?

Neste capítulo, descrevemos o ambiente, as atividades realizadas com os licenciandos. Os encontros foram realizados presencialmente, em alguns dias em sala de aula e em outros no laboratório da Universidade, em Nova Iguaçu, no turno da noite. Os dados da pesquisa foram coletados conforme as tarefas foram sendo realizadas cujos procedimentos foram realizados em dois ambientes distintos: o questionário conhecendo você e os termos de autorização de participação na pesquisa foram realizados virtualmente e as tarefas e elaboração do material individual foram realizadas presencialmente nas aulas da disciplina de Ensino de Matemática I que ora acontecem no Laboratório de Observações, Vivências e Experiências em Educação Matemática_LOVE_EM, ora nas salas de aula, ambas no mesmo Instituto.

A etapa denominada por sondagem, se deu com a entrada da pesquisadora, em dezembro de 2022 no grupo do *WhatsApp* da turma chamado EnsMath 1 - 2022.2, para o envio do acesso eletrônico (*link*) do questionário aos licenciandos, o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido_TCLE (Anexo I), contendo entre outros aspectos o informe sobre os procedimentos da pesquisa e esclarecimentos sobre a possibilidade de participarem ou não da pesquisa. Apresentamos a seguir os desdobramentos das atividades.

Conhecendo os participantes

Para conhecer o perfil dos estudantes disponibilizamos um questionário de sondagem via google forms. No questionário de sondagem denominado "Construindo o conceito de fração: olhares através da dobradura" buscamos obter as seguintes informações: dados pessoais, acadêmicos, profissionais e sobre conhecimento de fração.

De vinte estudantes da turma, nove responderam inicialmente ao questionário, mas conforme as aulas foram sendo realizadas mais três alunos resolveram participar e responderam positivamente ao questionário e querendo participar da pesquisa. Desta forma, ficamos com doze licenciandos participando da/na pesquisa.

Considerando que a pesquisa aconteceria durante as aulas da disciplina, a turma foi dividida em dois grupos; ou seja, naquele formado peles estudantes que não quiseram participar da pesquisa e no que foi formado pelos estudantes que participariam da pesquisa. Entretanto, todos os alunos da turma realizaram as atividades propostas: elaborar o kit de frações e responder aos itens das respectivas fichas de trabalho (fichas 1 e 2) contendo questões sobre o material e o conteúdo sobre frações usando o material. Diante do exposto, o desenvolvimento das aulas foi realizada com a organização da turma nesses dois grupos de modo que a pesquisadora focou nos licenciandos que optaram em participar da pesquisa, mas auxiliava também os licenciandos que não quiserem participar e a professora regente intervia apenas no grupo que não participava da pesquisa.

Na análise **sobre o perfil dos estudantes**, identificamos que todos estão no 6º período em que a disciplina é ofertada de acordo com a grade curricular do curso. Dos doze licenciandos que optaram em participar da pesquisa, sete são do sexo masculino e cinco do sexo feminino e dentre eles apenas dois se pronunciaram como já tendo participado de outras pesquisas.

Com relação à prática profissional, apenas um dos licenciandos participou do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), assim como também já fez Residência Pedagógica e metade dos alunos está cumprindo o Estágio Obrigatório atuando no Ensino Fundamental II, porém, por mais que estivessem nessa esfera educacional, nenhum deles ensina o conteúdo de fração, pois se sentem "inseguros". Dois estudantes atuam em escolas, como professor regente, da Rede Privada de Ensino, um no Ensino Fundamental II e outro no Ensino Médio.

Observar se que a maioria dos licenciandos participantes da pesquisa não atuam profissionalmente, mas consideram a relevância da pesquisa.

Sobre as **questões referentes ao conteúdo específico**, as questões estão organizadas da seguinte forma: os itens 19 a 23 se referem ao uso de materiais manipuláveis; os itens 24 a 26 versam sobre a realização de algum curso de extensão e nos itens 27 a 33 são questões referentes sobre o ensino e a aprendizagem de frações.

Embora todos considerassem importante usar material manipulável em sala de aula, porque acreditam deixar a aprendizagem mais divertida, instrutiva e intuitiva de maneira lúdica, além do material didático ajudar o aluno a reter o conhecimento, desenvolver a visualização nem todos conheciam algum material; ou seja, cinco licenciandos disseram não conhecer nenhum material didático e sete disseram que sim. Os materiais listados foram: papel quadriculado, ábaco, jogos, gráfico de pizza, Frac-soma 235, cubos do tipo Lego[15], Tangram e Disco de frações.

[15] Disponível em: https://www.oncube.com.br/cubo-magico-3x3x3-building-blocks-fanxin-lego. Acesso em 31 de julho de 2023

As justificativas dadas para o uso do material consideravam como elemento principal características relacionadas ao lúdico e ao prazer, aspectos esses apontados por Smole, Diniz e Cândido (2007, p. 12), quando afirmam que "a dimensão lúdica envolve desafio, surpresa, possibilidade de fazer de novo, de querer superar os obstáculos iniciais e o incômodo por não controlar todos os resultados" e que também foi entendida por eles ao realizarem a confecção do material para o estudo de frações.

Todos os licenciandos informaram que nunca fizeram **curso de extensão** sobre frações e nem usando *Origami*, nem sobre qualquer outro conteúdo de matemática e muito menos em aulas de Matemática. Sendo assim, torna-se bastante significativo a proposta a ser realizada com e para eles. Além disso, concordando com Silva (2020, p.33), acreditamos que utilizar *Origami* como recurso pedagógico contribui para o "desenvolvimento do raciocínio investigativo e cognitivo, por sua vez, trabalhando os conceitos matemáticos pertinente a cada atividade da dobradura, desenvolvendo a criatividade e a psicomotricidade do aluno".

Com relação ao item em pedíamos que **contassem um pouco sobre a sua experiência como aluno, estagiário ou professor e/ou como participante de pesquisas sobre o tema**, a maioria dos licenciandos se posicionou como aluno e disseram ter tido dificuldades para aprender o conteúdo, uma das respostas foi: "até o ensino médio eu não sabia fazer as operações com frações. Eu entendia o conceito, mas não aprendi a fazer as operações".

Sobre **como explicaria o que é fração**, três tipos de respostas apareceram: 1 - relação à parte/todo, 2 - operação de divisão e 3 - como razão. Sendo que a maioria dos licenciandos respondeu que a fração está relacionada à parte/todo. Esta resposta, nos leva a considerar as observações de Gimenez e Bairral (2005) ao afirmarem que "quando se associa a fração a uma parte de uma figura, ficamos induzidos a "pensar" que as frações são partes, pois sabemos que a parte é menor que o todo". Este tipo de resposta evidencia que, apesar dos estudantes estarem em vias de concluir o curso de licenciatura em matemática, as suas concepções sobre frações e números racionais não considera as outras características.

Quanto aos **pré-requisitos para compreender fração,** os licenciandos apontaram as **o**perações justificando-a como necessária para que se "consiga resolver fração sem muita dificuldade". E, para **introduzir o conceito de fração no 6º ano**, a maioria respondeu que usaria "situações do dia-a-dia, como distribuição de comida, objetos ou separação de dinheiro". Exemplos de relação parte/todo, entretanto não souberam explicitar ou explicar como organizariam uma sequência didática.

Com base nesses resultados, fomos para o campo pensando em discutir com eles, enquanto confeccionariam o material, outros aspectos que devem ser abordados no estudo das frações, além da relação parte/todo.

1º encontro_ Roda de apresentação seguida da confecção do kit quadrado

Esta atividade ocorreu em três encontros. O primeiro encontro se deu em dois momentos: no início, a professora regente apresentou a pesquisadora e em informou que ela também daria maiores detalhamentos sobre o andamento da pesquisa, seus questionamentos, objetivos e justificativa para realiza-la. Em seguida, foi realizado a confecção do quadrado e a determinação das divisões por 2, sucessivamente, para se obter o kit de frações a partir do quadrado. No segundo, foi refeito o momento 2 do primeiro encontro, agora com papeis coloridos e já receberam material suficiente para a realização do próximo encontro. E por fim, no terceiro encontro, terminaram de fazer o kit do quadrado, para a divisão em partes diferentes daquelas cujo denominador é potência de 2; ou seja, para obter as frações 1/3, 1/5, 1/6, 1/7, 1/9 e 1/10.

Momento 1: Roda de conversa

O primeiro encontro, foi realizado em sala de aula, os estudantes inicialmente estavam sentados em fila, na foto da figura 8, vemos parte da turma.

Figura 8 - Participantes da turma

Fonte: Arquivo da autora

Nos primeiros instantes foi feito um breve relato sobre a pesquisa em que descrevemos suscintamente as fases anteriores do projeto de pesquisa; ou seja, que o material havia sido experimentado anteriormente com uma turma de licenciandos, remotamente durante a pandemia, em um minicurso para professores no EEMAT e com uma turma do 6º ano. Em todos esses grupos, tanto as tarefas quanto o tipo de figuras foram testadas. A ideia inicial era produzirmos um kit de frações usando o triângulo equilátero, o quadrado, o pentágono e o hexágono regular, mas à medida que fomos desenvolvendo as atividades fomos percebendo limitações ao mesmo tempo em que percebemos que o quadrado e o círculo satisfaziam as necessidades de nosso estudo, apresentar e discutir frações representadas de diferentes formas com denominadores que variavam entre 1 e 10. Em seguida, 5 folhas de papel A4, rascunho, para cada participante ou não da pesquisa visto que a pesquisa seria realizada no contexto das aulas de Ensino de Matemática e portanto, as atividades fariam parte do tema a ser discutido nela.

Momento 2: Construindo o kit de frações com o quadrado.

A abordagem teve início apresentando um breve histórico sobre o papel, sobre a origem do *origami* e sua diferença para a dobradura. Foi justificado também o motivo pelo qual estamos usando o papel para elaborar o kit porque é um material de fácil acesso em qualquer escola e de baixo custo além de propiciar que cada aluno possa ter o seu material para consulta sempre que desejar e houver necessidade de esclarecimento e ajuda para resolver seus exercícios. Esclarecemos ainda que nem sempre as escolas dispõem de Laboratório de Matemática ou de Informática e muitas vezes nem material manipulável possuem.

Na transcrição do áudio ou do registro feito usamos os seguintes códigos. Quando as discussões estiverem acontecendo no grande grupo nos referimos da seguinte forma aos participantes: L (para licenciandos) pois não temos gravação individual do participante, PE (para a pesquisadora) e PR (para a professora regente da turma) e no caso em que estiver conversando individualmente usamos o nome escolhido.

> *PE: Pegue uma folha e faça um quadrado, usando apenas as mãos, sem usar instrumentos de medida.*

Alguns alunos ficaram sem saber o que fazer. E perguntaram:

> *L: Como assim? Uma única dobra?*

PE: Pensem e reflitam de que maneira vocês podem construir o quadrado nesta folha que é um retângulo.

PR: Não é para desenhar um quadrado e sim transformar essa folha em um quadrado.

L1: Voltamos ao 6º ano…

PE: Claro que existe uma maneira de fazer, mas estamos aqui para tentar e discutirmos sobre as construções.

Muitos estavam receosos em fazer, por medo de errar, como se houvesse apenas aquele papel e caso errassem não teriam mais papéis para fazer.

O aprendizado implica romper com muitas certezas e saberes construídos ao longo da vida escolar, considerar essas rupturas, visa jogar luz sobre a origem das dificuldades enfrentadas na aprendizagem desse novo campo numérico como também sensibilizá-los sobre as dificuldades que os seus alunos possam ter. Desta forma, o professor pode antecipar esses erros e gerar discussões em torno deles, assim os estudantes percebem quais as certezas, as propriedades e relações que funcionam com as frações e quais não podem ser transportadas (BROITMAN, 2011).

Enquanto os licenciando produziam os quadrados a pesquisadora circulava entre eles e observando o que cada um fazia e como fazia e verificou que um aluno havia utilizado a folha A4 toda para representar um quadrado, então perguntou:

PE: O que você construiu é um quadrado?

Moreno: Sim

PE: Como você garante que é um quadrado?

Moreno: Tem quatro lados iguais, eu fiz assim e assim (foi mostrando como fez)

Figura 9 - Representação do quadrado

Fonte: Arquivo da autora

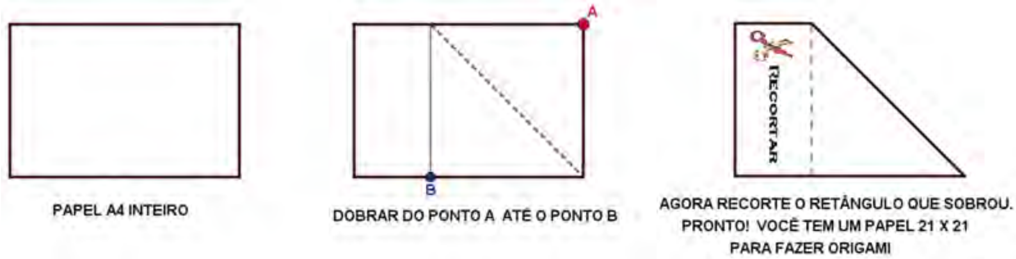
Outra licencianda perguntou:

Reby: Podemos usar régua?

PE: A intenção é utilizarmos apenas as dobraduras.

Depois que um dos estudantes conseguiu fazer, rapidamente a informação se espalhou pela sala pois passaram a trocar informações e a fazer o quadrado transportando a medida do menor lado (largura) do retângulo para o maior lado (comprimento), e retirar o excesso da folha A4, ou outra maneira de dizer a mesma ideia, é levar uma das pontas (vértices) da folha até o lado oposto da mesma folha.

Figura 10: Levando o vértice A para o outro lado do papel



Fonte: Elaborado pela autora.

Quando todos os licenciandos tinham o seu quadrado de papel em mãos a pesquisadora levantou questionamentos sobre outras formas de se obter o quadrado.

PE: Existe outra maneira de achar o quadrado?

L_ Sim.

PE: Como?

Juanimado: Sobrepondo uma folha na outra.

PE: Pode mostrar?

Juanimado: Sim.

PE: Prefere esta maneira de fazer ou a anterior?

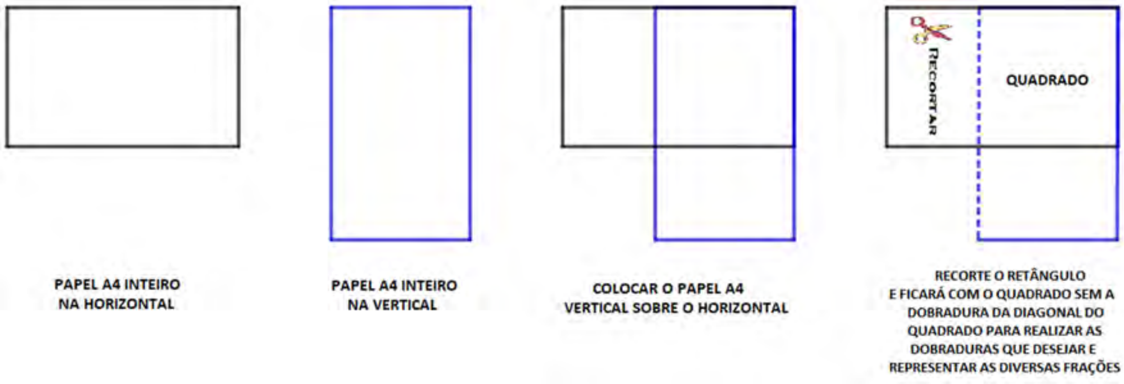
Julianimado: Esta.

PE: Por que?

Julianimado: Porque não deixa a diagonal na folha, ou seja, a marca, a dobradura na folha.

A segunda maneira é colocar uma folha A4 sobrepondo, sendo uma na vertical e a outra na horizontal e da mesma forma que a anterior tirar o excesso de folha A4. Ou seja, o lado menor da folha A4 é sobreposta no lado maior da outra folha A4, desta forma o quadrado é formado e o excesso da folha é retirado. Assim, foram mostradas as duas maneiras para construir o quadrado. Ambas abordam o mesmo conceito de transporte de medidas. Veja a construção desta forma de representar na figura 11.

Figura 11 - Outra forma de representar o quadrado



Fonte: Elaborado pela autora.

Em seguida solicitamos que replicassem essa resolução nas outras 4 folhas A4, para que ficassem com 5 quadrados, ou seja, um quadrado em cada folha.

PE: O que significa este quadrado para o kit de fração?

L: Representa o todo, a unidade.

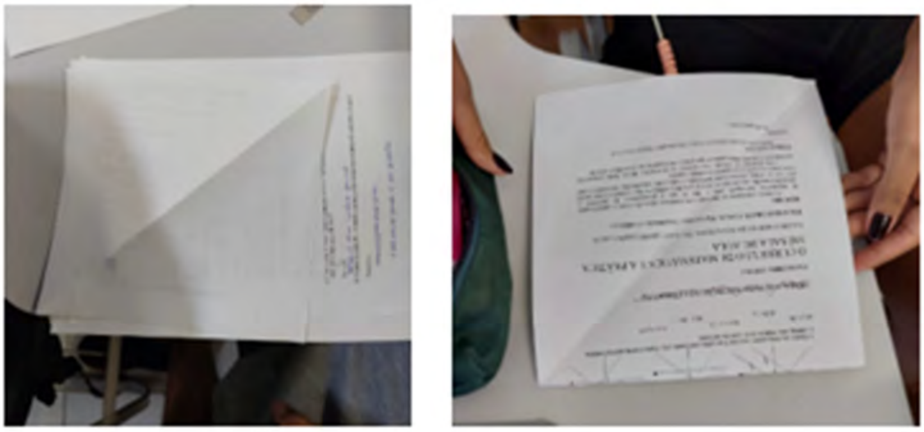
Dando continuidade, foi solicitado que representassem o meio do quadrado. Nesse momento a pesquisadora observou que a palavra meio não foi apropriada, porque os licenciandos pensaram que era para achar um ponto O no centro do quadrado e fizeram duas diagonais para representá-lo, determinando assim o meio do quadrado. A pesquisadora reformulando a pergunta:

PE: Representar a metade do quadrado.

Reby: Ah sim, agora entendi, um meio do quadrado.

Os que transportaram a medida da largura para o comprimento, logo observaram que a dobra que fizeram para construção do quadrado era a diagonal do quadrado, desta forma logo acharam a metade, ou seja, a representação de 1/2.

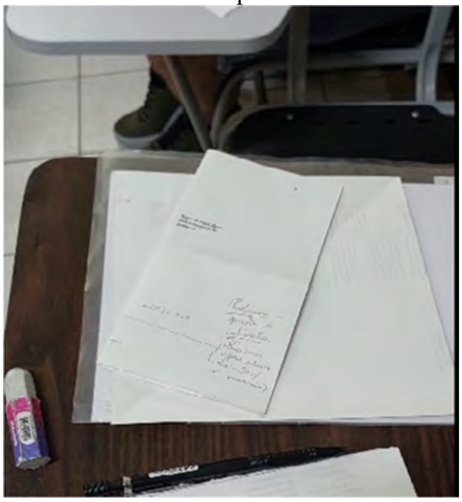
Figura 12 – Representação da metade do quadrado



Fonte: Arquivo da autora

Outros licenciandos preferiram dobrar na vertical ou na horizontal, ou seja, dobrando paralelamente ao lado do quadrado.

Figura 13 – Outra maneira de representar a metade do quadrado



Fonte: Arquivo da autora

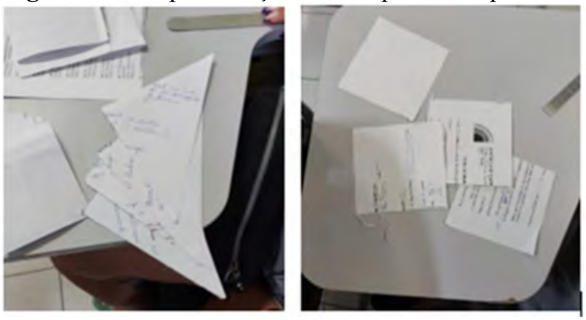
Observações importantes sobre a gravação: Como a sala é grande, a gravação pegava todo o ambiente, captou-se muitos ruídos e como a pesquisadora tirou fotos com o mesmo celular que estava gravando, ela pensou que continuaria gravando enquanto fotografava, porém não foi isso que ocorreu, a gravação foi até 11:30 minutos. Voltamos a pesquisa.

PE: Com essa metade em mãos, qual a melhor fração para representar agora?

L: A fração um quarto, ou metade da metade.

Para os que dobraram na diagonal obtiveram como metade do quadrado, o triângulo. Dando continuidade, dobrando novamente ao meio a nova figura obtinham agora dois novos triângulos de cada metade. Esse processo continua indefinidamente obtendo sempre novos triângulos quando se dobra o triângulo anterior ao meio. Os que dobraram na vertical ou horizontal, obtiveram como metade a representação de um retângulo como figura geométrica e quando dobraram este pela metade, obtiveram o quadrado novamente e assim sucessivamente. Na figura 14, vemos a quarta parte representada por triângulos e quadrados.

Figura 14 – Representação de um quarto no quadrado



Fonte: Arquivo da autora

Como a intenção é explorar as possíveis dobragem dobrando-se sucessivamente pedimos que pensassem se haveria outras formas geométricas. Rapidamente começaram a pensar e disseram que sim, conforme registro.

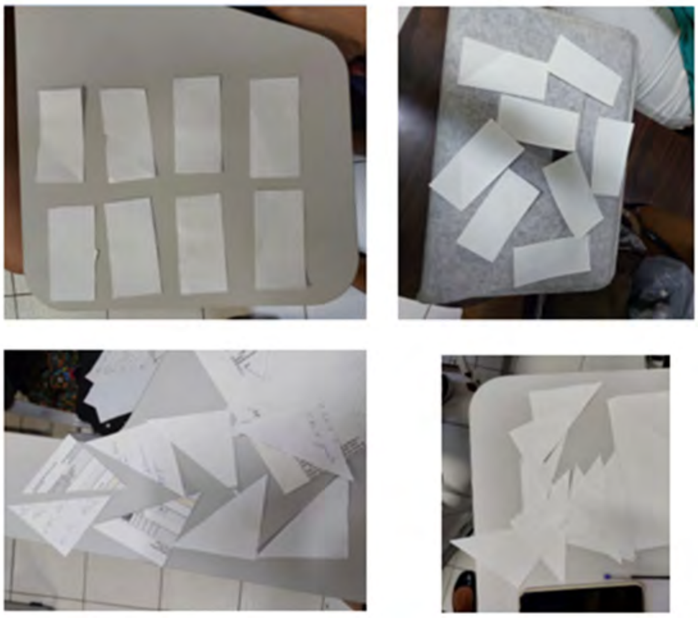
> *PE: Temos outra maneira de dobrarmos, de descobrirmos 1/4. Como?*
> *L: Sim. Achamos a metade dobrando na vertical e em vez de dobrarmos na horizontal, dobramos na vertical novamente. Sendo representado em tiras.*

Figura 15 – Outra representação de um quarto no quadrado

Fonte: Arquivo da autora

Os licenciandos não tiveram dificuldades para determinar a sequência de dobras e relacionaram com a ideia de sempre poder encontrar a metade da metade. Consequentemente notaram que a próxima fração a ser representada seria um oitavo (1/8), o que significava dobrar o papel ao meio a partir das representações de um quarto (1/4).

Figura 16 – Representação de um oitavo do quadrado



Fonte: Arquivo da autora

Com estas representações os licenciandos perceberam que existem várias maneiras de se obter as frações, e que esta sequência pode se estender para 1/16, 1/32 e assim por diante bastando para isso, ir dobrando a figura ou o pedaço anterior ao meio indefinidamente

Depois de explorar as metades das metades do quadrado, pode se colocar números unidade (todo) e em seguida perguntar aos alunos as metades e os dobros, mostrando através das peças, as relações que foram atribuídas com os números e em seguida transportamos esse mesmo pensamento para o estudo de porcentagem. Por exemplo: Se o quadrado valer 100%, a peça que corresponde à metade vale 50% então 1/2 = 50%, 1/4 é 25% e 1/8 é 12,5%.

Outro estudo que podemos levar em consideração são as figuras geométricas, conforme são feitas as dobraduras e cortadas, quais são as figuras que vão surgindo no processo.

Esse momento foi significativo para os licenciandos, porque conseguiram entender o potencial do material manipulável e ampliaram o seu universo de possibilidades, quanto ao uso de estratégias para avançar no processo de ensino-aprendizagem.

Segundo Brointman (2011) a partir do uso desse tipo de estratégia é possível aproximar esse conteúdo da vida dos alunos com questões que envolvam frações. Tendo em vista, que problemas como esses despertam o hábito do cálculo mental.

Figura 17 – *Kit* do quadrado

Fonte: Arquivo da autora

Uma das discussões realizadas a partir da obtenção das diferentes formas representando a metade do quadrado questionava-se se o triângulo era igual ao retângulo. Foi interessante observar que alguns licenciandos ficaram em dúvida. Evidentemente se considerarmos a forma as metades não são iguais, mas se considerarmos a relação parte/todo sim, e, além disso, se calcularmos a área de cada uma destas figuras, elas também são iguais.

Para sistematizar, pode-se identificar a seguinte sequência de formas a partir dos possíveis desdobramentos para se obter a metade da metade indefinidamente. Observe o quadro sinóptico a seguir:

Tabela 7: Metade das metades

1	1/2	1/4	1/8	1/16
Figuras representativas				
				Quadrado
		Quadrado	Retângulo	Retângulo
				Triângulo
			Quadrado	Retângulo
	Retângulo			Retângulo
Quadrado				Quadrado
		Retângulo	Retângulo	Triângulo
				Triângulo
			Triângulo	
		Triângulo	Triângulo	Triângulo
	Triângulo	Triângulo	Triângulo	Triângulo

Fonte: Elaborado pela autora

Ou seja, ao dividirmos um quadrado ao meio, obtêm-se retângulo ou triângulo ao dividirmos o triângulo obtém sempre novos triângulos e ao dividirmos um retângulo podemos obter quadrados, triângulos ou retângulos.

2º encontro: Continuando a primeira atividade.

Nesse encontro, os licenciandos pediram para não avançarmos e retomarmos as dobras da aula anterior (potência de dois), pois gostariam de fazer as partes e fazer as dobras com mais cuidado. Sendo assim, foram-lhes dados folhas coloridas e estiletes e tesouras para cortarem nas dobras. Concordamos e aproveitamos para refletirmos sobre o tamanho do papel, isto é, se não seria melhor trabalharmos com a metade da folha A4, visto que o quadrado unitário havia ficado muito grande dificultando a visualização de todas as partes sobre as carteiras.

> *PE: O que vocês acham de trabalhar com esse tamanho de papel?*
>
> *L: Achamos grande para trabalharmos na carteira escolar. Como sugestão, poderíamos elaborar o kit com a metade da folha A4. Ou seja, construir o quadrado na metade da folha A4.*

Como os licenciandos concordaram em trabalhar com o quadrado obtido a partir da metade da folha A4, cada dupla recebeu uma folha colorida. E, para criar um padrão de referência estipulamos as cores para cada fração, ficando assim: para o inteiro, o todo - Branco, para 1/2 (um meio) - Pink, para 1/4 (um quarto) - Vermelho e para 1/8 (um oitavo) - Rosa.

> *PE: E em relação a gramatura, espessura do papel, o que acharam?*
>
> *L: Parece confortável, não vemos problemas em trabalhar um este tipo de papel.*

Esta pergunta surgiu, pois, alguns dos papéis era de cartolina ou papel cartão. Mas, todos adoraram a ideia das cores, pois ficaria mais fácil se comunicar com os alunos e entre si, se referindo a elas.

3º encontro: Continuando o kit quadrado.

Nesse dia, a aula foi no laboratório de matemática da Universidade, pois as mesas são maiores e lá está disponível todo o tipo de material (tesouras, esquadros, réguas, compassos, estiletes) necessário para a confecção do kit quadrado.

Segundo Lorenzato (2006), um laboratório é “uma sala-ambiente para estruturar, organizar, planejar e fazer acontecer o pensar matemático, é um espaço para facilitar, tanto o aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, por fim, aprender a aprender” (p. 7). Neste laboratório há duas mesas redondas e uma retangular, uma bancada na lateral e outra bancada onde se pode trabalhar em pé. Os licenciandos que estavam fazendo parte da pesquisa sentaram juntos, ocupando duas mesas e os demais licenciandos ocuparam a outra mesa e uma das bancadas. Sobre elas estavam também todo o material necessário para dar continuidade a confecção do kit.

Figura 18 – Laboratório da UFRRJ – Nova Iguaçu

Fonte: Arquivo da autora

Começamos relembrando um pouco da aula anterior, as metades e prosseguimos o ensino sobre as frações que fossem maiores e iguais a um décimo, cujo denominador é diferente de 2, 4, 8; ou seja, as frações 1/3, 1/5, 1/6, 1/7, 1/9 e 1/10.

Solicitamos que os licenciandos encontrassem 1/3 do quadrado.

L: Pode usar a régua?

PE: Por enquanto, usando apenas a dobradura.

Alguns licenciandos observaram que para realizar as dobras para encontrar as frações cujos denominadores é potência de 2, não havia muito mistério, o pensamento era simples, ou seja, era dobrar indefinidamente encontrando sempre a metade da metade, porém para os “denominadores ímpares” a ideia era diferente, não conseguiriam fazer o mesmo processo. Problema este, já descrito no Papiro de Rhind que data do século XVIII a. C. nele, essa divisão é apresentada como sendo a trissecção do quadrado conforme nos relata Fossa (2009, p. 159).

A maioria dos alunos conseguiram fazer usando a ideia de “sanfonar” o papel, ou seja, dobrando-o como um “leque”. Sobre a dobra obtida a pesquisa levanta questionamentos.

PE: Isso garante que é um terço mesmo? Ou não?

Reby: Sim, garante, porque está no mesmo tamanho.

PE: Todos conseguiram, fazendo "sanfonado"?

Taís: Não necessariamente…

Caio: A primeira dobra nunca fica extremamente fiel.

Moreno: O meu não ficou certinho, não. Sobra ou falta um pouquinho na folha.

PE: Para os que conseguiram fazer através do "sanfonado", vocês conseguem fazer da mesma forma para acharem um quinto ou um sétimo ou um nono?

Começaram a tentar e descobriram, que para encontrar um sexto, que é exatamente a metade de 1/3 que basta dobrar ao meio.

PR: Dá para fazer, mas é igual? É um sétimo mesmo? Porque a questão toda é essa, dividir por sete beleza, mas um sétimo não é qualquer divisão por sete.

Diante da dificuldade para se achar um terço e praticamente impossibilidade de se encontrar 1/5 e 1/7 por sanfonamento, os estudantes passam a querer usar os instrumentos de medida.

Reby falando com Juanimado: Entendi que você já tinha achado…

E continuaram tentando…

Reby: Já pode usar a régua?

PE: Ainda não. Por que você quer usar a régua?

Reby: Para ver qual é a medida e dividir por cinco.

Juanimado: É a prova real.

Moreno: Apanhei para fazer um terço, imagina um quinto, um sétimo!

Taís: Tá vendo? A medida quando dobra uma falta… tem que dobrar mais.

Mary: Não está dando certo, meu Deus!

Cauã: Vai ficar bem pequenininho…

Permaneceram tentando por um bom tempo, rodavam o papel para depois apertar e marcar as dobras e realizar as divisões necessárias. *A professora regente brincou: Você é muito boa em fazer a "sanfoninha"*. Enfim, estava complicado, perceberam que dessa maneira nem sempre a divisão é certa ou exata, isto é, fica sobrando ou faltando um pouco da folha, assim, convenceram-se de que era difícil, mas não tinham tanta certeza do que estavam fazendo. Quando um licenciando que não estava fazendo parte da pesquisa informou que havia conseguido, *a pesquisadora perguntou: Ok. Como você explicaria para o seu aluno? Ele diz: Não sei.*

> *PE: Vocês conhecem alguma técnica geométrica para realizar as dobraduras que nos forneceria uma divisão o mais próximo do preciso, do exato, das partes iguais.*
>
> *L: Não.*

Então, a pesquisadora explicou:

> *PE: Dobrar o quadrado na diagonal, em seguida dobrar o quadrado na metade de forma vertical, depois a diagonal deste retângulo, o ponto de interseção entre estes segmentos será a terça parte do quadrado.*

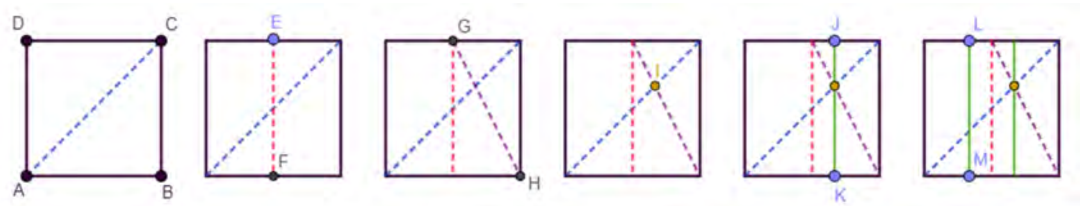
A dificuldade neste momento foi interpretar a ordem do procedimento, ou seja, raciocinar cada etapa e realizar as dobras. Dependendo de como é realizada a diagonal do retângulo, às vezes, encontra-se ou não o ponto de interseção. Reby comenta:

> *Só se for na quina. E aí disse que está diagonal não procedia e que seria interessante traçar a outra diagonal.*

Tiveram dúvidas de como este ponto marcaria 1/3, então *a pesquisadora informa que a partir do lado do quadrado, poderiam utilizar uma paralela.*

Na figura 19 são apresentadas as dobraduras para encontrar os terços no quadrado e a explicação para justificar essas dobraduras está relacionado a semelhança de triângulos.[16]

Figura 19: Processo das dobraduras para achar 1/3



Fonte: Elaborado pela pesquisadora

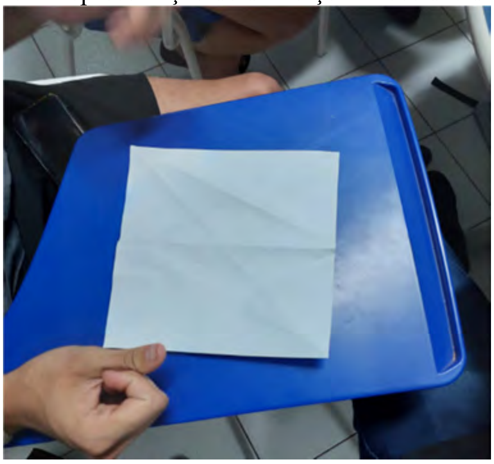
Os alunos tiveram dificuldades em descobrir qual diagonal do retângulo deveria ser dobrada para encontrar o ponto de interseção.

O trabalho com divisões de papéis, com quantidades discretas (que podem ser contadas) e contínuas (áreas, volumes), ajuda na compreensão desse universo numérico.

[16] Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/87/45.html. Acesso em 30 de julho de 2023.

Assim, é possível assimilar que no conhecimento dos números naturais, 3 é maior que 2, mas no domínio dos Racionais a fração 1/3 é menor que 1/2.[17]

Figura 20 – Representação de um terço através das diagonais



Fonte: Arquivo da autora

Quando conseguiram, os licenciandos logo questionaram:

L: Como fazer um 1/5?

O diálogo entre eles mostra a dificuldade para fazer estas dobras, raciocinar sobre elas e associá-las com as demais frações. Mesmo assim seguem tentando, se ajudando e comentando, conforme o relato descrito a seguir:

L1:este lado está maior que este...

L2: deveríamos aprender Origami na escola"

L3: isso aqui é coisa para outro "rolo". Se eu me perdi e não consigo aprender, como eu vou conseguir ensinar isso para as crianças?"

L4: a criança aprende mais rápido.

L: Papo reto, agora de verdade, como vamos ensinar isso para ela?

E encerraram a conversa aqui.

A professora regente solicitou que eles comentassem no relatório por que que executando essas etapas obtemos a fração 1/3?

PE: Será que este mesmo raciocínio serve para 1/5?

Os licenciandos começaram a tentar e refletir…

L: é quase isso, certo?

E o outro licenciando: está acabando com as minhas esperanças.

PR: o que você disse que é?

[17] Revista Nova Escola. Nova ordem numérica. Fundação Victor Cevita. São Paulo: Abril, 2008.

O licenciando disse: a gente fez a diagonal do primeiro retângulo do quadrado, para achar 1/3, que formou um retângulo menor, nesse 1/3 achando a diagonal deste retângulo, nós acharíamos 1/5 e 1/7.

PR: A partir de 1/3?

L: Sim.

Então vamos pensar, *professora regente: Se pra você achar 1/3, você dobra o papel na diagonal da metade, para você achar 1/5…*

L1: Tem que pegar de 1/4, neste caso.

PR: Não sei.

L2: É isso, ela já deu spoiler.

PR deixa a dúvida no ar: Ou é um 1/3 ou é 1/4!

E o L afirma: É 1/4, seguindo a lógica.

PE: Tenta fazer para saber se é verdade, se é isso realmente que acontece.

E ele diz: vou fazer, vou fazer, vou pegar o papel.

E eles comentam entre si: ô, para achar 1/3, a gente acha a metade do quadrado que é meio, para achar 1/5, a gente acha 1/4 do quadrado, para achar 1/7 a gente acha 1/6 do quadrado.

Foi perguntado a outra parte da turma se eles concordavam com o raciocínio dos outros dois licenciandos, responderam tentando.

Uma observação seria importante salientarmos aqui que a partir desse momento foram tiradas fotos e a gravação de áudio foi interrompida, tendo ficado apenas os registros no diário de campo da pesquisadora.

O processo para encontrar 1/5 foi demorado, alguns queriam chegar logo no resultado que dividiam o quadrado em quatro partes iguais e depois não sabiam o que fazer, que era a diagonal do quadrado e a diagonal desse 1/4. Para facilitar a dobra da diagonal de um quarto, os licenciandos estavam usando a régua, pois não estavam conseguindo realizar esta etapa apenas com dobradura.

Depois de muita discussão foi lhes ensinado o processo em que se traça auxiliar para dividir um segmento qualquer em partes iguais e que deveria ser usado para encontrar as outras frações, partes do quadrado, mas que também é valido para fazer as divisões da aula anterior. Antes de realizar a divisão no quadrado entregamos uma folha rascunho para eles entenderem o processo, para depois realizarem no quadrado. Pedimos para traçarem uma reta e marcassem sobre essa reta dois pontos A e B, no ponto A, traçassem uma outra reta (concorrente) que não fosse perpendicular. Com o compasso, abriram as hastes na medida que quisessem e marcaram três vezes nesta última reta, que chamamos de reta suporte, na última marcação, ligariam até o ponto B e com a utilização dos esquadros traçaram as paralelas dos pontos marcados na reta.

Informamos aos licenciandos que esse procedimento é chamado em desenho geométrico de divisão em n partes iguais. E eles fizeram a comparação com o Teorema de Tales.

Todos os alunos fizeram, a novidade foi exatamente utilizar os materiais, pois não tinham noção de como usá-los e gostaram de aprender como manuseá-los. Observaram e entenderam que com este método de transporte de medidas podiam realizar qualquer divisão.

Foi quando fizeram este processo de fato, no quadrado. No início tiveram dúvidas para acharem os pontos A e B no quadrado e perguntaram: *onde e como iriam traçar a reta.* Neste momento a maioria preferiu utilizar a diagonal do quadrado e fazer as devidas dobraduras, outro instante desafiador foi utilizar o par de esquadros, qual triângulo se movimenta, qual oferece o suporte ao outro. Enfim, dúvidas de principiantes.

Encadear dedutivamente relações matemáticas não é uma aquisição espontânea dos alunos, mas sim produto de um trabalho intencional pedagógico (SAVOVSKY, 1997).

Naquele instante, notamos a alegria, a descontração, o interesse, o compartilhamento, a troca dos que aprendem primeiro e ensinam os outros, uma sintonia mútua para que todos pudessem caminhar juntos. Logo após, perceberam que com esquadros de 45º é ruim para traçar as paralelas, preferiram o maior, porque oferecia maior segurança, e não ficavam limitados ao deslizar o esquadro "maior". E ficaram felizes quando aprenderam a mexer nos esquadros.

L: Aprendi a mexer nos esquadros!

Tem até um momento que um licenciando fala com o outro:

vem que o "papai" vai te ensinar! Eles foram se ajudando.

Em seguida foram distribuídos os papéis coloridos para eles fazerem 1/3, 1/5, 1/7, 1/9 e 1/10 e completarem o *kit* dos quadrados para os quais foram definidas as seguintes cores: 1/3 (um terço) – Amarelo, 1/5 (um quinto) – Azul, 1/6 (um sexto) - Laranja, 1/7 (um sétimo) – Verde, 1/9 (um nono) – Amarelo Forte e 1/10 (um décimo) - Lilás.

Figura 21 – Construção dos licenciandos

Fonte: Arquivo da autora

Ao final deste encontro os licenciandos se organizaram, colocaram os instrumentos nos seus respectivos lugares e finalizamos a aula.

Ao final da construção do *kit* quadrado percebemos que não faria sentido a construção sem entendermos se os licenciandos saberiam trabalhar em sala de aula com esse material, por esse motivo elaboramos uma tarefa com questões sobre as frações utilizando o *kit* quadrado e que segue:

TAREFA 1: Refletindo sobre a ação, fazer o kit quadrado

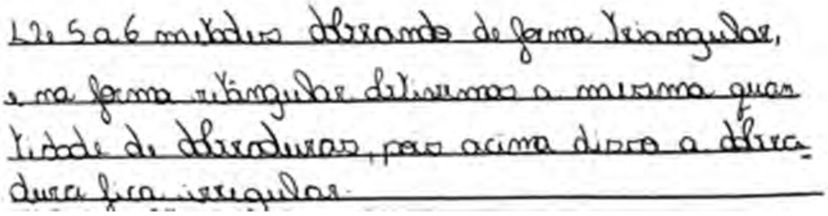
No quarto encontro, aplicamos a tarefa que denominamos “Ficha 1” com questões sobre frações presentes no *kit* quadrado. Para realizar esta atividade, a turma foi organizada em dupla, podiam conversar entre si, mas as deveriam responder individualmente a ficha. Não houve intervenção do professor e nem da pesquisadora nas respostas dos licenciandos. Apenas orientações organizacionais e de que poderiam também fazer uso dos materiais confeccionados.

Nesta aula, estavam presentes nove dos 12 participantes, sendo que uma fez sozinha, pois não havia participado do processo anterior, fazer o kit, pois encontrava-se enferma. Mas, para responder a ficha foi lhe emprestado um material.

No item 1-a, tivemos dois tipos de respostas para explicar até onde poderiam encontrar as metades dobrando o quadrado inicial.

Limitação dada pelo recurso. Ou seja, o papel só permite um número finito de vezes em que ele pode ser dobrado sobre si mesmo. De um modo geral, se limita a seis vezes, podendo em alguns casos chegar a 8 vezes, independentemente do tamanho original do papel. O limitante para efetuar as dobras está relacionado à gramatura da folha de papel. Entre as justificativas encontramos aquelas que usam a quantidade de dobras.

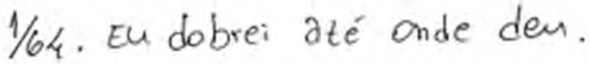
Figura 22 – Resposta 1 do item 1-a


De 5 a 6 metades dobrando de forma triangular, e na forma retangular obtivemos a mesma quantidade de dobraduras, pois acima disso a dobradura fica irregular.

Fonte: Resposta do aluno

E aquelas que associam o limite como sendo a fração.

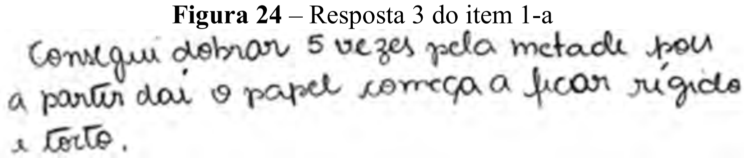
Figura 23 – Resposta 2 do item 1-a


1/64. Eu dobrei até onde deu.

Fonte: Resposta do aluno

Ou aquelas que associam a ideia matemática com a quantidade de dobras

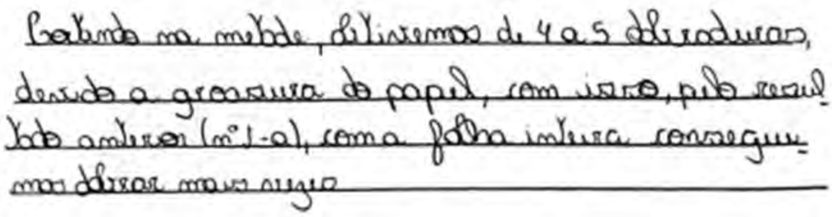
Figura 24 – Resposta 3 do item 1-a


Consegui dobrar 5 vezes pela metade pois a partir daí o papel começa a ficar rígido e torto.

Fonte: Resposta do aluno

No item 1-b, continuaram com dois tipos de respostas para explicar que ao usar metade da folha A4, até onde poderiam encontrar as metades dobrando a folha inteira. As respostas foram parecidas com o item 1-a. As que justificaram pela quantidade de dobras.

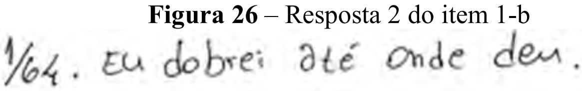
Figura 25 – Resposta 1 do item 1-b


Baseando na metade, obtivemos de 4 a 5 dobraduras, devido a grossura do papel, com isso, pelo resultado anterior (nº 1-a), com a folha inteira conseguimos dobrar mais uma.

Fonte: Resposta do aluno

E os que associaram o limite como sendo a fração.

Figura 26 – Resposta 2 do item 1-b

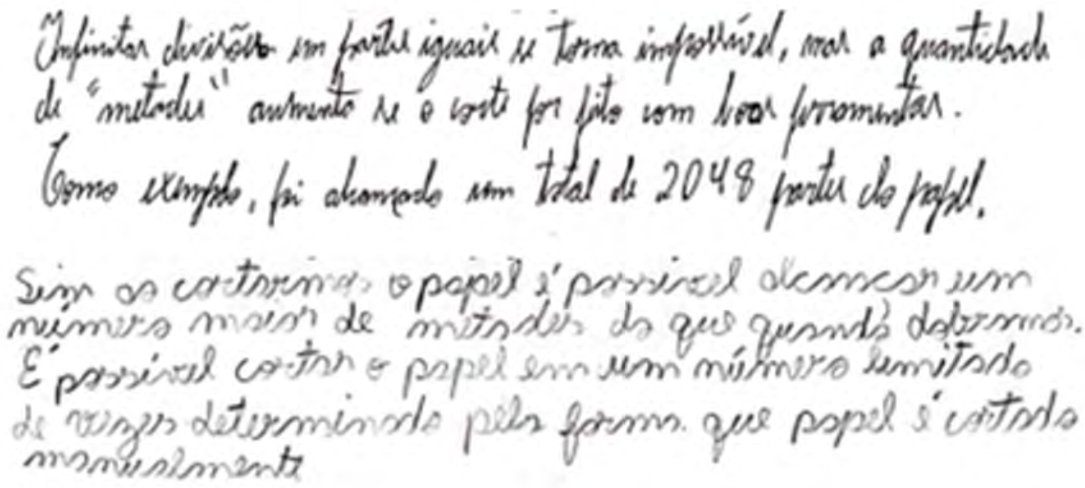

1/64. Eu dobrei até onde deu.

Fonte: Resposta do aluno

No item 1-c, tivemos um tipo de resposta para explicar que se ao cortar o quadrado poderiam ser encontradas metades indefinidamente ou não e explicar o motivo.

Os licenciandos justificaram o limite em função das limitações do recurso e do instrumento usado para cortar, com isso foram até onde encontraram um pedaço em que não era mais possível dividir. Justificativas encontradas.

Figura 27 – Respostas do item 1-c


Infinitas divisões em partes iguais se torna impossível, mas a quantidade de "metades" aumenta se o corte for feito com boas ferramentas.
Como exemplo, foi alcançado um total de 2048 partes do papel.

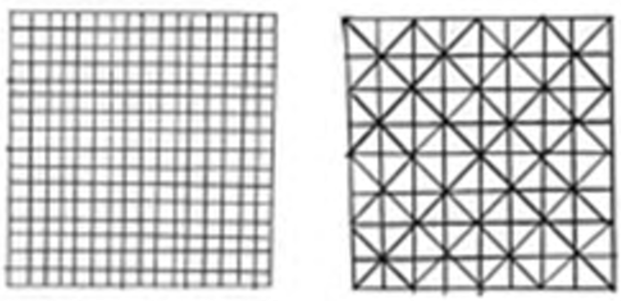
Sim, ao cortarmos o papel é possível alcançar um número maior de metades do que quando dobramos. É possível cortar o papel em um número limitado de vezes determinado pela forma que papel é cortado manualmente

Fonte: Resposta do aluno

No item 1-d, as respostas foram de três tipos para explicar de forma desenhada um quadrado em metades de metades indefinidamente. Para a análise, apresentamos os desenhos.

Utiliza as retas horizontais e verticais para mostrar em quantos quadradinhos poderiam ser feitos no quadrado e o na figura ao lado acrescenta as diagonais

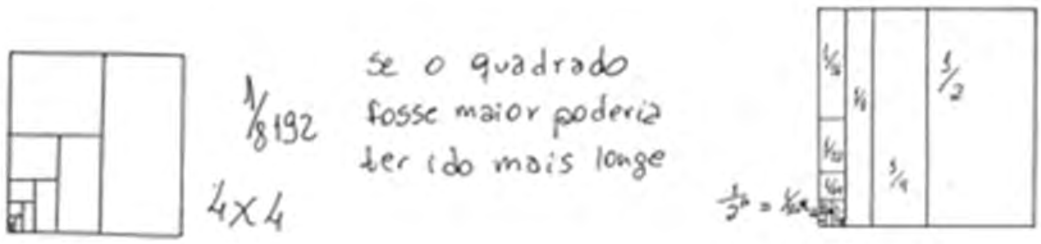
Figura 28 – Respostas do item 1-d



Fonte: Resposta dos alunos

Os licenciandos apresentam formas diferentes de representarem as metades das metades do quadrado.

Figura 29 – Outras respostas do item 1-d

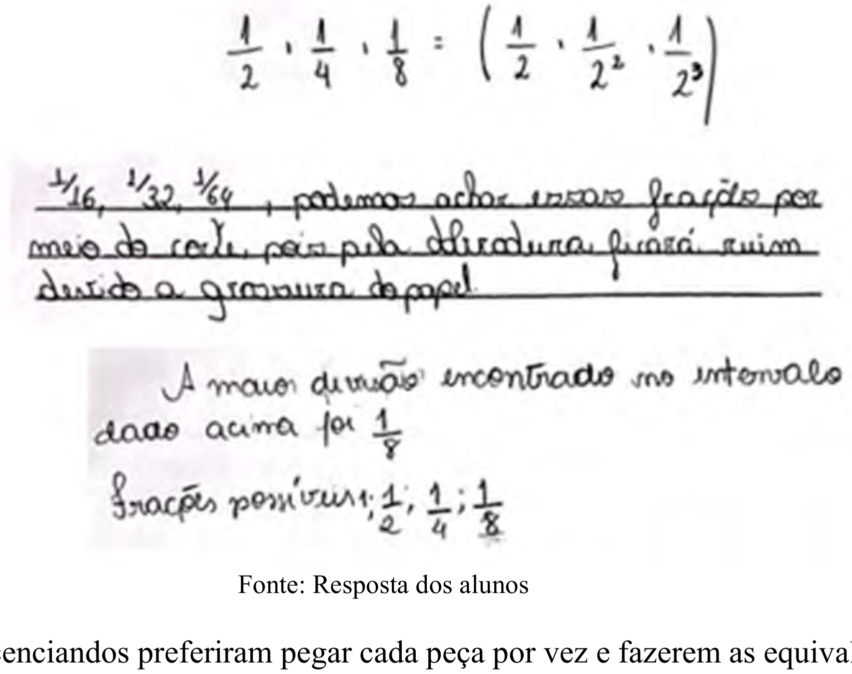


Fonte: Resposta dos alunos

No item 2-a obtivemos dois tipos de respostas para explicar todas as frações cujo denominador é potência de dois, que estivessem compreendidas entre 1/10 e 1.

As respostas dos licenciandos mostraram que ficaram presos aos modelos prototípicos em que todas as vezes que se pergunta algo envolvendo intervalos se pergunta do menor para o maior e como a pergunta foi em ordem invertida, eles apresentaram respostas presos na ideia de intervalo do seu conhecimento e não se atentaram que precisavam mudar a ordem para que as respostas estivessem corretas.

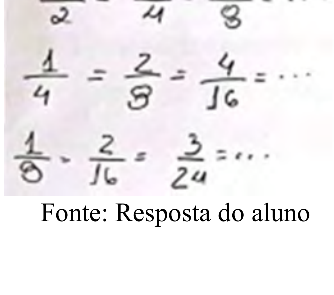
Figura 30 – Respostas 1 do item 2-a



Fonte: Resposta dos alunos

Outros licenciandos preferiram pegar cada peça por vez e fazerem as equivalências:

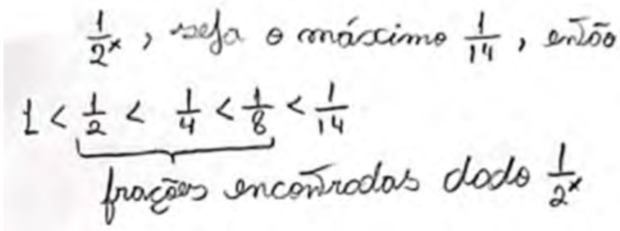
Figura 31 – Respostas 2 do item 2-a



Fonte: Resposta do aluno

E outro respondeu por comparação.

Figura 32 – Resposta 3 do item 2-a


$\frac{1}{2^x}$, seja o máximo $\frac{1}{14}$, então

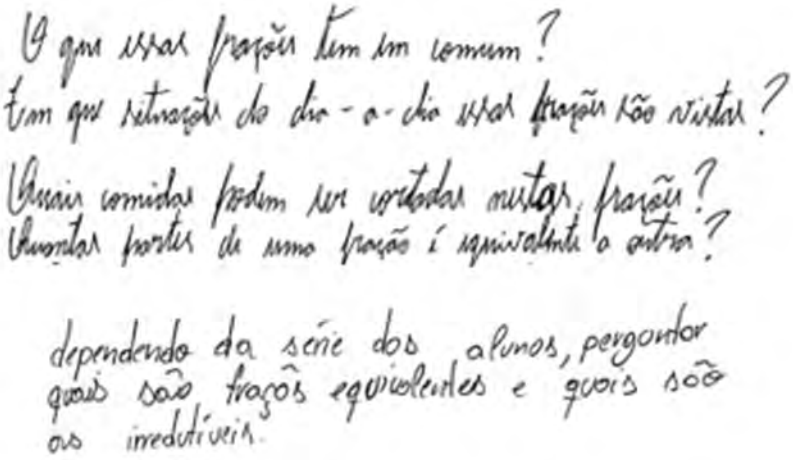
$1 < \underbrace{\frac{1}{2} < \frac{1}{4} < \frac{1}{8}}_{\text{frações encontradas dado } \frac{1}{2^x}} < \frac{1}{14}$

Fonte: Resposta do aluno

No item 2-b, tivemos a generalização da resposta para explicar que pergunta o licenciando faria ao seu aluno para as respostas do item anterior.

A maioria dos licenciandos perguntaria aos alunos sobre a equivalência de frações, levando em consideração o ano que os licenciandos estariam lecionando.

Figura 33 – Respostas do item 2-b


O que essas frações tem em comum?
Em que situações do dia-a-dia essas frações são vistas?
Quais comidas podem ser cortadas nessas frações?
Quantas partes de uma fração é equivalente a outra?

dependendo da série dos alunos, perguntar quais são frações equivalentes e quais são os irredutíveis.

Fonte: Respostas dos alunos

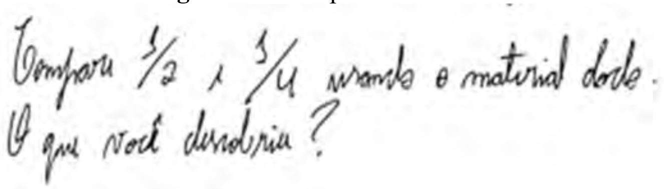
No item 2-c, tivemos alguns conceitos matemáticos que prevaleceram, como: escala e grandeza, proporção, divisão, equivalência, multiplicação e simplificação.

No item 2-d, as respostas apresentadas não correspondiam com o uso do material confeccionado, pois mostraram frações que não existiam no material.

No item 2-e, tivemos dois tipos de respostas para elaboração de uma pergunta ao aluno que irá descobrir a equivalência de frações.

Uma delas é pegar uma peça e pedir para encontrar outras que se igualem a ela.

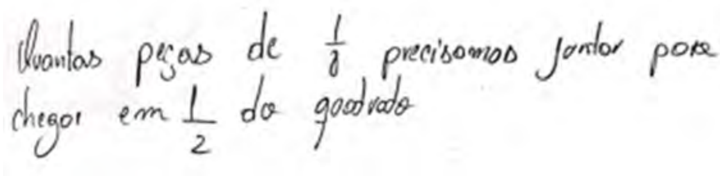
Figura 34 – Resposta do item 2-e


Compare 1/2 e 3/4 usando o material dado.
O que você descobriu?

Fonte: Resposta do aluno

A outra é usar duas frações para serem comparadas.

Figura 35 – Outra resposta do item 2-e


Quantas peças de $\frac{1}{8}$ precisamos juntar para chegar em $\frac{1}{2}$ do quadrado

Fonte: Resposta do aluno

Nos itens 3 e 4, pedimos para os licenciandos mostrarem como construiriam e trabalhariam com o material numa turma de 6º ano. Observamos que foi importante inserir essas questões envolvendo as operações, pois elas confirmam a não habilidade de trabalhar com o material, visto que as respostas ficaram no plano das ideias ou foram apresentadas outras situações confirmando que não sabem usar o material. Por esse motivo retiramos esses itens da ficha 1.

Ao utilizar o conhecimento de que dispõem para construir saberes e enfrentar obstáculos surge o debate de ideias, o que regula e estimula a produção de explicações. E no final da aula entregaram a ficha 1.

5º encontro: Construindo o kit círculo

No quinto encontro, a aula foi no laboratório para construirmos o *kit* círculo. Devido aos ocorridos nas aulas anteriores, em relação ao áudio, a pesquisadora pediu a licencianda Reby para colocar o celular dela na mesa e gravar a aula, para registrar o que os licenciandos iam falando e o celular da pesquisadora ficou disponível para tirar as fotos.

Figura 36 – Laboratório da UFRRJ – Nova Iguaçu

Fonte: Arquivo da autora

Todos receberam uma folha rascunho para aprenderem a utilizar o compasso, a pesquisadora apresentou os nomes de cada parte e explicou o objetivo do instrumento. Todos conheciam, mas alguns nunca tinham usado. Desenharam várias circunferências com tamanhos diferentes para que pudessem aprender e treinar até que o círculo saísse perfeito.

Como para alguns era novidade, tiveram uma certa dificuldade, mas a pesquisadora explicou: *quando forem construir circunferências, nunca peguem nas hastes do compasso e sim nessa parte de cima, faça com os dedos o movimento de pinça e gira, porque se você pegar nas hastes sem querer você perde a medida do raio ou o transporte de medida.*

Explicamos que na falta do compasso, poderiam usar algo que fosse no formato de um círculo para traçarem uma circunferência. Na nossa pesquisa apresentamos um objeto que ficou obsoleto, que é o Compact Disc - CD. Hoje em dia, ele não é mais utilizado, porém o tamanho dele é ideal para a construção das circunferências, porque o raio é de seis centímetros.

PR: Vocês vão preferir utilizar o compasso ou o CD?

Alguns L: CD.

Reby: Quero fazer com o compasso. Qual é o diâmetro?

PE: O raio é 6 centímetros, o mesmo do CD. Você está colocando 3 centímetros.

Reby: Entendi 6 centímetros de diâmetro.

Ela consertou a medida e continuou fazendo círculos.

Figura 37 – Treinando a construção das circunferências

Fonte: Arquivo da autora

Pedimos para os licenciandos fazerem dez círculos, para realizar as dobraduras e divisões em nove círculos e um representou o todo, a unidade. Alguns tiveram a ideia de desenhar apenas uma circunferência e sobrepor os nove papéis coloridos, grampear as folhas e cortar de uma única vez os círculos, outros preferiram fazer um a um, por receio de não ficarem bem feitos.

Figura 38 – Construção dos círculos

Fonte: Arquivo da autora

Alvo: Posso usar esse aqui como molde?

PE: Sim, pode.

Juanimado: O artesanal mesmo, é fazer de olho.

Alvo: Kkkkkk

Juanimado: O artesanal mesmo era pegar o CD passar uma bela de uma cola e encher de purpurina. Kkkkkkk

Reby: Uhhhhh!!! Eu gosto de purpurina.

Os que já haviam cortado estavam ansiosos para realizarem as divisões. Começaram a perguntar quais cores correspondem a qual fração?

PE: as mesmas cores-fração que foram representadas no kit quadrado será também no kit círculo. Será que vocês lembram?

Juanimado: Branco, pink, amarelo, vermelho, azul, laranja, verde, rosa - magenta, amarelo forte e lilás.

PE: Não tinha magenta, não. Kkk

Juanimado: Esse tom não é rosa, é magenta. Magenta é 100% cor.

A discussão rolou em torno da cor, pigmentação, que foi para o desenho animado, Pista de Blue, que passa em Nick e a cachorrinha era cor magenta, começaram a cantar a música do desenho. Os licenciandos estavam se divertindo, porém não perdiam o foco na construção dos círculos, porque ficaram alguns momentos em silêncio, com trocas de caneta, lápis e papéis coloridos.

No momento em que um dos licenciandos cortam os círculos de uma só vez, um licenciando comenta que essa atitude desvaloriza os que aprenderam a utilizar a tesoura e pensa numa revolução de máquinas – Revolução Industrial, fazendo o montante, em uma única vez.

> *Reby: Rápido, prático… Olha gente, eu grampeei, saiu mais rápido… Não temos tempo a perder…*
>
> *Alvo: Tem mais papéis aí?*
>
> *Juanimado: Aqui. A Reby é uma máquina industrial, não há tempo para erros.*
>
> *Reby: Kkk, eu não tenho tempo.*
>
> *Juanimado: É esse tipo de pensamento que "ferra" todos os profissionais de artesanatos, sabia? Você mecaniza o processo de mínimo esforço que quem aprendeu cortar com tesourinha, se "ferra".*

Alguns licenciandos continuam comentando sobre o assunto, quando a

> *Reby: Me perdi nas cores, professora quais são as cores?*
>
> *Juanimado: São 10 cores.*
>
> *Reby: O branco conta como uma cor?*
>
> *PR: Sim, conta como uma cor.*
>
> *Mary: Caramba, fiz errado, não acredito! Me empresta a régua, por favor.*

Às vezes eles brincavam e conversavam assuntos de jovens ou cantavam e um colega lembrava ao outro que estava sendo gravado e aí paravam e riam.

> *Reby: É agora que a gente começa a achar um meio, um terço… fazer as divisões?*
>
> *Aldo: Você já fez todos os círculos?*
>
> *Reby: Sim, não posso perder tempo.*
>
> *Mary: Ela grampeou todas as cores e cortou de uma só vez.*

E esse assunto rendeu.

> *Reby: Olha só, cortando um por um…*
>
> *Mary: Mas isso é terapêutico.*
>
> *Aldo e Juanimado: Exatamente.*

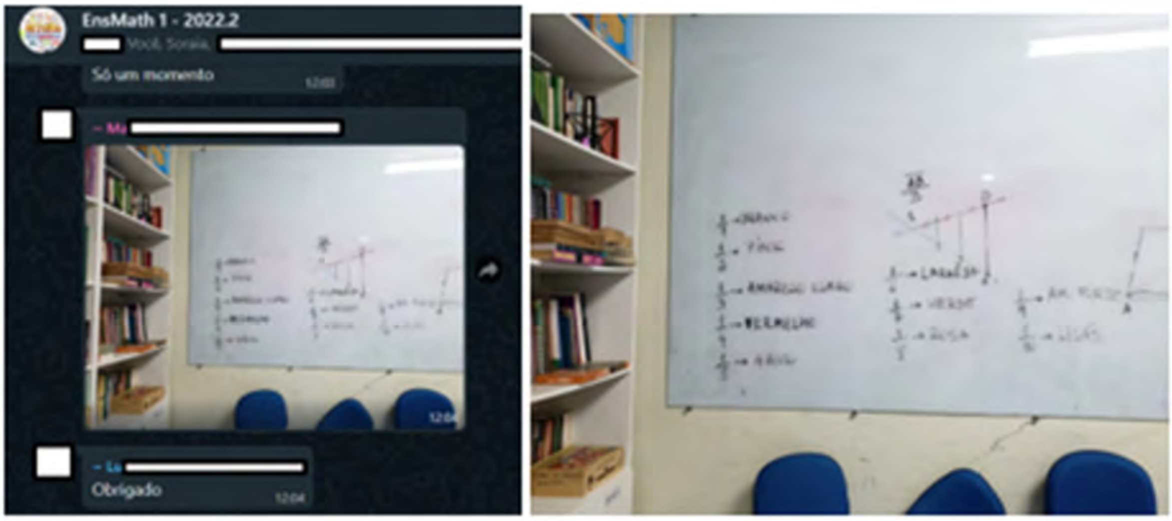
Falaram sobre crise de ansiedade que a Mary estava no ponto de ônibus e começou a passar mal, enfim surgiram outras conversas. E Mary reforça: Isso aqui está sendo terapêutico.

Reby: Cada um poderia pegar os seus círculos de cores aqui!

Juanimado: Isso se chama organização.

Nessa organização a Reby repara que tem dois laranjas e o Juanimado comenta: *viu esse é o erro de produção, a pressa.* E brincam com a Reby. Enquanto isso, alguém da turma pediu para colocarem no grupo da turma uma foto do quadro no qual a pesquisadora havia colocado as cores correspondentes a cada fração.

Figura 39 – Relembrando a relação frações-cores



Fonte: Arquivo da autora

Enquanto os licenciandos construíam os círculos, falaram das cores, industrialização, capitalismo e surgiu uma conversa:

Juanimado: Dá uma saudade da escola… dessa fase.

Reby: Pô, a gente não teve essas coisas na escola, quando a gente era criança, né!

PE: O que?

Juanimado: Eu não lembro de ter feito nada disso.

Reby: Essas brincadeiras assim…

PE: Esses materiais são pedidos na lista escolar e não usam.

Reby: É mesmo pedem e não usam nada. A gente usou essa paradinha dos esquadros… eu estou em uma escola e já falei pra todo mundo comprar. Achei muito bacana traçar paralelas com esquadros. Eu nunca tinha parado para pensar nisso.

Juanimado: E depois os pais reclamam que compram e não usam.

PE: Não só as paralelas como as perpendiculares também.

A pesquisadora mostra como traçar as perpendiculares, ela ficou maravilhada! Foi como se "abrisse" a mente, ou seja, uma visão construtiva para utilização do par de esquadros. A pesquisadora relembrou que poderia ter feito este processo quando fizeram a divisão em n partes iguais no quadrado. Comentou também que em desenho existe uma prancheta para o papel não deslizar e tudo mais, eles ficaram surpresos.

Reby: O par de esquadros só servem para isso ou serve para outra coisa?

Juanimado: Serve também para medição de ângulo.

Reby: Como assim?

PE: Aqui nós temos 90º...

Juanimado: 90, 45, 45 e 90, 60 e 30 graus. (Referiu se os ângulos dos esquadros)

PE: Você irá ver isso agora no círculo.

Mary: São dez ou onze círculos?

Aldo: São dez.

E voltaram à construção dos círculos, os que preferem cortar no montante, enquanto os outros licenciandos preferem fazer um a um por não terem habilidade com a tesoura, e falaram um pouco sobre o assunto. Como cortar tudo junto, vai depender do tipo da tesoura, com o uso da escolar, que é igual a essa, é melhor cortar de dois em dois.

Alguns licenciandos começaram o processo de dobradura e corte dos círculos para representar as frações. A Reby fez a metade e em seguida a pesquisadora perguntou: *depois dessa representação, qual divisão você pode fazer agora? Reby: Um quarto, a mesma sequência que fizemos no kit do quadrado. Pesquisadora: Isso, perfeito!*

A pesquisadora falou para toda a turma que podiam começar a representar as frações nas suas respectivas cores.

É importante oferecer oportunidades para confrontar ideias, o debate deve abrir espaço para os alunos explicarem suas hipóteses e refletirem com os colegas. Mas, para isso é preciso propor desafios, para que se produzam diferentes soluções, em que seja possível testar as diversas estratégias.

Voltando aos licenciandos que estavam participando da pesquisa, eles comentaram sobre quem já havia feito esse tipo de trabalho (trabalho manual) em sala de aula no Ensino Fundamental I, alguns falaram que sim, porque estudaram em rede particular e os que não fizeram, estudaram em rede pública e recordam que nem tesoura usaram. Reby disse que chegou ao ensino médio sem saber a Matemática Básica de fração. E disse que aprendeu muito num grupo de Olimpíadas de Matemática.

> *Andrade: Eu percebi que esse negócio não tem nada a ver com genética, porque o meu pai é muito bom em atividades manuais. E eu estou enrolado.*

Demoram muito para construção de todos os círculos e começaram as dobras e divisões. A Reby, já estava no um oitavo. E queria continuar, então disse:

> *Reby: Para fazer um terço, vou pegar 360º e dividir por 3, o que é igual a 120º. Quero fazer, quero o transferidor.*
>
> *PE: Espera um pouquinho para fazermos juntos.*

Foi solicitado que fizessem a dobraduras e os cortes das frações de potência de dois. Esperamos um tempo e começamos a refletir no um terço.

> *Juanimado: Vamos ter que usar o transferidor*
>
> *Reby: Para fazer um terço, eu pensei desse jeito 120º, 120º e 120º. A não ser que a professora conheça outro jeito sem o transferidor.*
>
> *PE: Isso mesmo, vocês já deram a resposta.*
>
> *Reby: Cadê o transferidor?*
>
> *PE: Não tem como utilizar outro método, porque é um círculo e a única ferramenta de medida é o transferidor e realmente vai ser como vocês falaram, 360º dividido por 3.*

O Juanimado estava tentando fazer as dobraduras para achar um sexto no círculo laranja, observe o que ele falou.

> *Juanimado: A minha ideia era aproximar o máximo possível os três cantos distintos do laranja, mesmo sabendo que eu vou ter uma margem de erro pequena, quando eu aproximar três pontas mais próximo possível eu vou gerar três cantos, a partir deles eu posso fazer… existe um tipo de dobradura que eu dá pra eu fazer isso, que eu vou pegar estes três pontos e forçar eles para dentro, e assim eu crio um eixo central, três pontas de aba aqui para cima e três de abas aqui pra baixo, quando eu abrir vai estar dividido em seis partes.*
>
> *Reby: O que garante que estes três lados aqui estão certo, são iguais?*
>
> *Juanimado: Quanto maior a aproximação dessas três abas que eu forçar, mais próximo dos 120º, o círculo vai estar dividido.*
>
> *Reby: Mas, pode não ser exato, vai ser aproximado.*

Juanimado: Exatamente, vai ser uma aproximação.

Reby: Onde tem o transferidor, professora?

Ela acha um guardado na mochila.

PE: Vocês sabem como utilizar o transferidor?

L: Sim.

PE: Tem certeza?

Reby: Sim.

Mesmo assim, a pesquisadora explicou aos licenciandos que ficaram tímidos e não responderam que não sabiam e a professora regente explicou aos que não estavam participando da pesquisa. Onde é para representar o ponto O (letra), que significa o centro do círculo no transferidor e a linha de fé que é onde fica posicionado o raio da circunferência.

A partir daqui eles entenderam o processo, que não teriam como fazer dobraduras exatas para acharem um quinto, um sétimo e um nono, sem usar o transferidor, a única maneira seria utilizar o transferidor, dividindo 360º em cinco, sete ou nove. Uma das licenciandas diz.

Mary: Deixou de ser terapêutico. Agora estou passando raiva com isso aqui para dobrar.

Aldo: Tem que dobrar? Não é só marcar e cortar?

Mary: Sim, mas eu preferi dobrar para depois cortar de uma vez.

Aldo: Ahhhh tá.

Mary: Essa gravação vai para onde depois?

Aldo e Reby: Para pesquisa. Nós assinamos um termo de consentimento, lembra?

Mary: Sim. (começaram a rir)

Ficaram um bom tempo em silêncio, depois voltaram a conversar.

Reby: Cara, o maneiro é que eu vou poder dar essa aula também para o pessoal do 9º ano, que está aprendendo geometria, tipo a questão de círculo e também a questão das retas paralelas, posso ensinar a usar os esquadros e quando for o ensino de triângulos, a questão de Pitágoras, posso introduzir os ângulos.

PE: Com certeza, essa é a ideia, aproveitar o que estamos aprendendo para ensinarmos aos alunos.

Reby: Ehhhh, gostei! Dá para ensinar também trigonometria.

PE: Isso mesmo.

Reby: Nossa gente! Adoro! (estava muito feliz)

A Reby compartilhou o que fez e se achou "burra" no sentido de ter feito um terço ter cortado e para fazer um sexto ela fez 360º dividiu por seis, marcou no círculo os 60º para depois cortar.

PE: Não é questão de ser mais inteligente ou "burra", vamos pensar: o que um sexto é de um terço?

Reby: A metade.

PE: Então, você pode pegar um terço marcar três vezes no círculo laranja e dobrar cada um terço na metade e assim terá um sexto.

Reby: Ah é mesmo!

Teve um debate interessante em relação à posição do profissional.

Pesquisadora pergunta ao Aldo: Você está fazendo o quê?

Ele fica um pouco desorientado e não responde.

PE: Ah tá um quinto.

Aldo: É isso! Por um momento até esqueci.

Reby: Por algum instante eu pensei que você tinha feito tudo errado.

PE: Kkk

Reby: Quando o professor vira para você e fala: você está fazendo o quê? Você já esqueceu até o que estava fazendo.

PE: Vocês têm que perder essa mania do medo.

Reby: Não professora, você não entende, o medo é constante na gente. Fizemos análise agora, a prova tinha umas 14 questões e eu só entreguei cinco, porque o restante eu não lembrava e o professor disse: vai lá rascunhar. Ele não me deixou ir embora sem rascunhar as questões. E disse: coloca no papel isso que você falou.

PE: Vocês têm preguiça de colocar as ideias de vocês no papel. Não pode, tem que colocar. E como futuros professores vocês irão cobrar isso dos alunos de vocês, podem ter certeza!

Esse tipo de conversa cessou e foram fazer a representação de um sétimo.

Re*by: Ihhh gente deu um probleminha aqui, 360º dividido por sete não é exato! É igual a 51,428571, vou fazer como 51,5.*

Aldo: Isso mesmo! Difícil, eh!

PE: Agora mais cuidado ainda vocês terão que ter ao usar o transferidor.

Reby: Pensei que você ia dizer que tem outro método.

PE: Ainda não tem como, não conheço nenhuma técnica de dobradura para fazer essa divisão.

A pesquisadora mediou em alguns momentos no uso do transferidor e de traçar, porque quiseram fazer a mão livre, sem usar a régua e convenceu-se que iria ficar torto.

Reby: Estou curtindo, vou usar isso aqui depois do Carnaval com as crianças.

PE: Que bom! A ideia é essa.

Reby: Cara eu queria que a gente tivesse uma matéria dessa todo período, porque assim iria incentivar muito mais a gente a continuar estudando para ser professor. Porque desde o início eu pensava assim: cara, eu só estou estudando para ter um diploma para poder dar uma aula que…

Juanimado: Né!

Reby: Eu entendo que tem conceitos que a gente aprende em álgebra, análise, qual a origem a gente ensina, ok. Mas, a gente não aprende a como dar uma aula didática, entendeu? Como dar uma aula que o aluno realmente aprenda. Isso a gente não aprende. A gente aprende na marra, lá na hora que a gente vai dar aula.

PE: Isso mesmo, essa é a nossa realidade. Por isso disciplinas como essa na faculdade, a princípio podem parecer bobas, mas traz uma gama de informações que na hora de elaborar a sua aula, vocês irão recordar, deste momento.

E continuamos falando um pouco mais desse assunto, o momento que há essa "separação" bacharelado e licenciatura na grade curricular, poderia ter os dois desde o início, porque assim aprenderíamos muito mais técnicas. E fez a contagem de anos que são ensinados no Ensino fundamental II e Ensino Médio, que são sete anos, e comentamos que se cada período tivéssemos uma disciplina de ensino de Matemática para cada ano específico, a gente daria aula para tudo, seria maravilhoso, espetacular. Perguntaram à professora regente se havia pré-requisito para a disciplina de Ensino da Matemática I e foi dito que não.

Voltamos a um sétimo.

Aldo: Vou fazer uma maracutaia.

PE: Cuidado, se não vai sair torto.

Aldo: Estou tentando fazer aqui, mas tem que ser no "olhômetro"

Juanimado: Você poderia marcar um centro.

Aldo: Como assim?

PE: Ele marcou o centro, mas está miudinho. Só não estou conseguindo entender, onde você está se baseando, para rodar assim!

Aldo: Os pontos estão marcados aqui, assim.

A pesquisadora foi conferir e estava correto. Enquanto a pesquisadora foi ver como os outros licenciandos estavam realizando as tarefas, havia uma licencianda que estava um pouco atrasada e comentou:

Mary: Como faço para achar um quinto?

Aldo: É a divisão de 360º por 5, o que é igual a 72º

Mary: Como marco isso?

Algo: Exatamente, esse é o desafio.

Mary: Kkk.

Aldo: Ninguém falou que seria fácil! Tirando a Reby, que sempre diz que é fácil.

Reby: Só não é fácil os relatórios, porque eu não sei escrever e aí eu sofro.

A Reby já estava fazendo um décimo e disse:

Reby: Quando chegarem no um décimo, peguem um quinto e dobrem na metade, porque a metade de um quinto é um décimo. Fica mais fácil.

Os licenciandos concordam com a Reby e ela mostra. Ela também colocou em jogo, o processo dela de industrialismo, ou seja, essa maneira dela fazer algumas etapas rápido, como cortar todos os círculos de uma só vez, o centro do círculo não fica em evidência e ela precisou usar a régua para achar o centro de cada um. Logo, ela mesma concluiu que mesmo que quisesse adiantar o trabalho, teve que parar para achar o centro e traçar o raio, para depois fazer as medições e em seguida cortar.

Ao produzir esta pesquisa, a licencianda Reby foi tendo várias ideias para reproduzir nas suas próprias aulas, como: posso avaliar os meus alunos geometricamente, pedir para eles usarem o transferidor, dividir em cinco iguais e traçar as retas. Porque marcar 72º no círculo pode parecer fácil, mas requer cuidados.

Aldo: Você está usando essa aula aqui para passar tudo para os seus alunos.

> *Reby: Claro, com certeza! Tenho que aprender as coisas aqui, pois é a única disciplina que nos ensina como dar aula. Nem didática aprendi a dar aula, para dizer que não aprendi nada, posso dizer que aprendi a fazer um plano de aula e nada mais.*

Os licenciandos lembram a ela que está gravando e ela para dizendo: *adoro os meus professores, aprendi bastante coisa, mas algumas coisas não serão úteis para as minhas aulas*. Todos começam a rir.

A Reby finaliza todo o *kit* do círculo e diz vou usar esse conhecimento em toda aula que fizer sentido. E começa a ajudar os colegas.

Na outra parte da sala, os licenciandos estavam com dificuldades de usar o transferidor, porque a professora regente perguntou qual estava sendo a dificuldade e eles responderam que era achar um terço.

Assim, à medida que os licenciandos foram finalizando, os instrumentos foram guardados nos seus respectivos lugares, jogaram os restos dos papéis no lixo e terminamos a aula. E quem não conseguiu terminar ficou de terminar o kit em casa e trazê-lo na próxima aula.

6º Encontro: Refletindo sobre o disco de frações

O sexto encontro, foi realizado na sala de aula, os licenciandos resolveram a “Ficha 2” em dupla, que foram diferentes do quarto encontro, porque foi um dia de chuva, no qual as pessoas chegaram atrasadas e por esse motivo as duplas não foram as mesmas. Houveram faltas e conforme os licenciandos chegavam à dupla já estava formada, então preferimos não alterá-las. Até porque é o que de fato ocorre quando estamos no nosso cotidiano, imprevistos acontecem, ou seja, trabalhamos no real e não com o ideal. Esse é um dos motivos da valorização de trabalharmos com o design na pesquisa, a realidade. Por mais que não estejamos trabalhando a definição de etnomatemática, a sala de aula é um etno espaço.

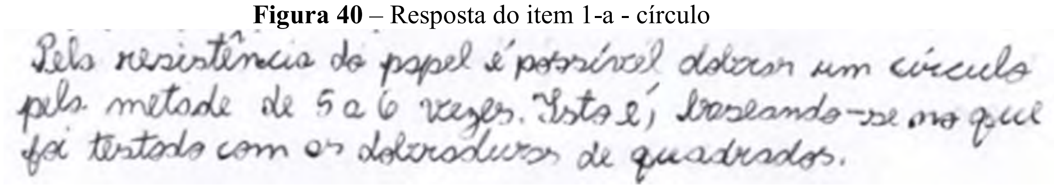
É o que se sucede com os professores, esquematizamos as aulas para serem realizadas de tal forma e nem sempre sai conforme o planejado podemos dizer que na verdade é um esboço para a realização.

Para Vergnaud (1933), os caminhos que os alunos percorrem para solucionar um problema devem ser valorizados. Sugere que diversas áreas do conhecimento sejam ensinadas sob a perspectiva dos campos conceituais, que nada mais são do que a apreensão progressiva de conceitos por meio de um conjunto variado de problemas, conteúdos, situações e estruturas e relações.

No item 1-a, tivemos dois tipos de respostas para explicar até onde poderiam encontrar as metades dobrando o círculo.

Não diferente do quadrado a limitação está no recurso, isto é, há um número finito de dobras. Geralmente, limita-se a quatro, até seis vezes. A gramatura da folha de papel limita a quantidade de dobras. Veja as justificativas encontradas.

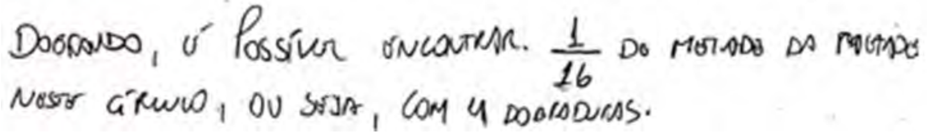
Figura 40 – Resposta do item 1-a - círculo


Pela resistência do papel é possível dobrar um círculo pela metade de 5 a 6 vezes. Isto é, baseando-se no que foi testado com as dobraduras de quadrados.

Fonte: Resposta do aluno

E as que associam o limite como sendo a fração:

Figura 41 – Outra resposta do item 1-a - círculo

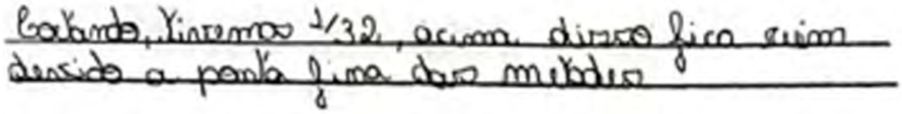

DOBRANDO, É POSSÍVEL ENCONTRAR $\frac{1}{16}$ DA METADE DA METADE NESTE CÍRCULO, OU SEJA, COM 4 DOBRADURAS.

Fonte: Resposta do aluno

No item 1-b, tivemos um único tipo de resposta para explicar que se ao cortar o círculo poderiam ser encontradas metades indefinidamente ou não e explicar o motivo.

Confirmaram a possibilidade de encontrar mais metades, uma ou duas e explicam que a ponta do recurso fica tão fina ao ponto de não mais conseguir utilizar a ferramenta de corte.

Figura 42 – Resposta do item 1-b - círculo


Cortando, tiveremos 1/32, acima disso fica ruim devido a ponta fina das metades

Fonte: Resposta do aluno

No item 1-c, ao compararem a quantidade de cortes realizados no círculo com a quantidade de cortes feitos no quadrado, a maior parte dos licenciandos responderam que no círculo foram menos cortes do que no quadrado, ou seja, no quadrado consegue-se cortar mais do que no círculo.

No item 1-d, as respostas foram de dois tipos para explicar de que forma é desenhado um círculo em metades de metades indefinidamente. Nessa análise, apresentamos os desenhos.

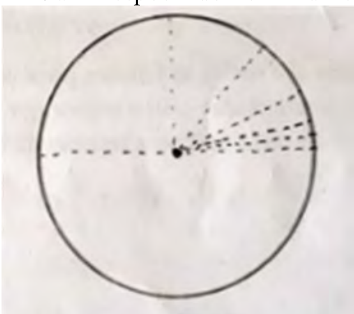
Os licenciandos tracejaram vários diâmetros, sem representar as metades, apenas dividiram o círculo.

Figura 43 – Resposta do item 1-d - círculo

Fonte: Resposta do aluno

Apenas um licenciando apresentou esta forma de representar as metades das metades do círculo.

Figura 44 – Outra resposta do item 1-d - círculo

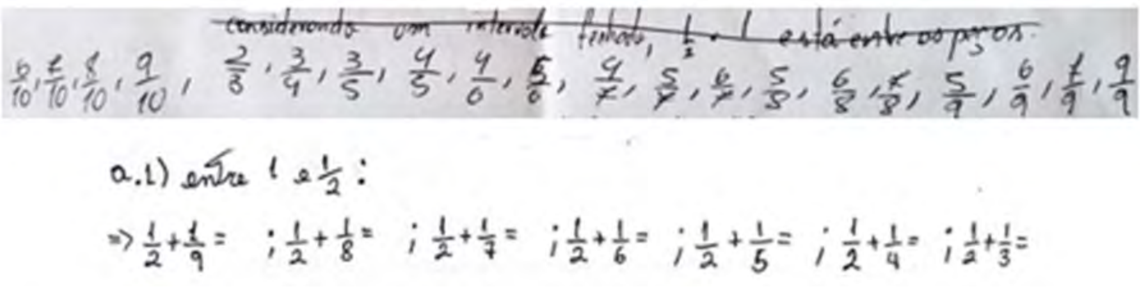


Fonte: Resposta do aluno

O item 2, tinha como objetivo representar todas as frações que estivessem entre:

Item 2-a.1) 1 e 1/2, os licenciados apresentaram frações maiores:

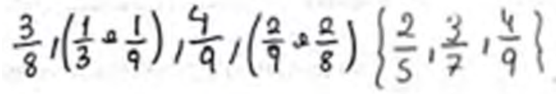
Figura 45 – Resposta do item 2 – a.1 - círculo



Fonte: Resposta do aluno

Item 2-a.2) 1/2 e 1/3, a maioria dos licenciados colocaram:

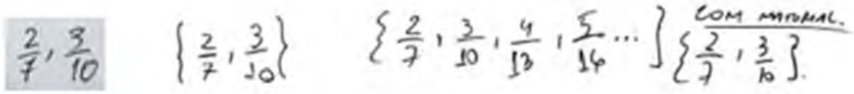
Figura 46 – Resposta do item 2 – a.2 - círculo



Fonte: Resposta do aluno

Item 2-a.3) 1/3 e 1/4, os licenciandos responderam no intervalo correto.

Figura 47 – Resposta do item 2 – a.3 - círculo



Fonte: Resposta do aluno

Item 2-a.4) 1/4 e 1/5, tivemos seis respostas com uma única fração: 2/9 e dois responderam que não há no material e dois não responderam.

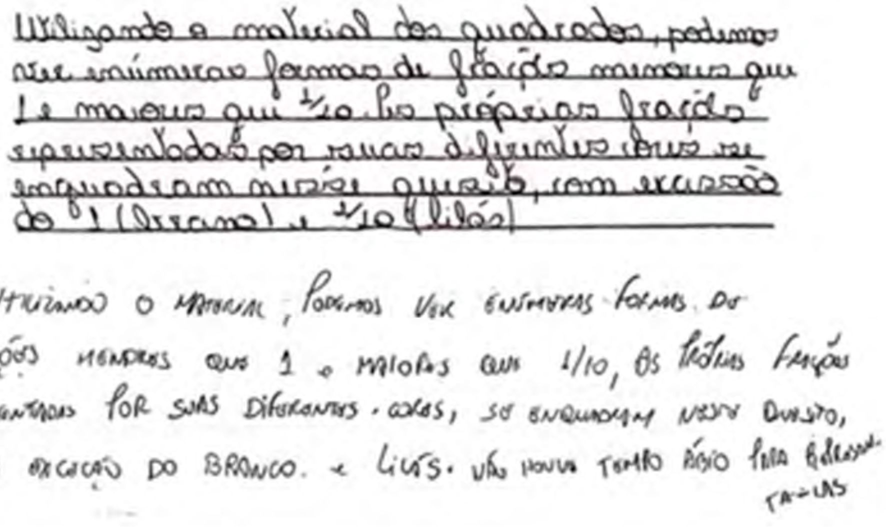
Item 2-a.6) 1/5 e 1/6, reconheceram que não há frações no material e apresentaram frações equivalentes fora no material.

Consequentemente notaram o mesmo resultado para os demais itens: 2-a.7) 1/6 e 1/7, - 2-a.8) 1/7 e 1/8, - 2-a.9) 1/8 e 1/9, - 2-a.10) 1/9 e 1/10, não há frações que correspondam ao intervalo solicitado.

No item 3, tivemos quatro tipos de respostas, sendo que quatro licenciandos não responderam, a ideia era informar todas as frações contidas no material que fossem maiores que 1/10 e menores que 1, e lembrava que podia unir peças para representar.

Dois licenciandos apresentaram as frações unitárias, de 1/2 até 1/10. Outros dois licenciandos mencionam que há inúmeras frações, mas não informaram quais eram

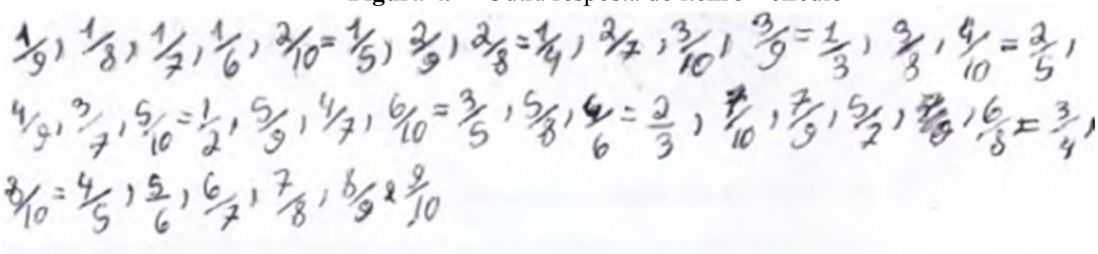
Figura 48 – Respostas do item 3 - círculo



Fonte: Resposta do aluno

Outro escreve que podemos representar as frações que listamos nos itens da questão 2 e para finalizar temos um licenciando que apresenta todas as frações.

Figura 49 – Outra resposta do item 3 - círculo

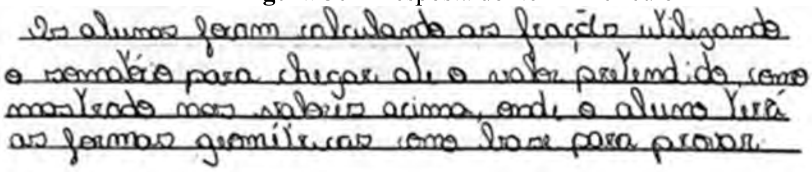


Fonte: Resposta do aluno

No item 4, tivemos um tipo de resposta para explicar todas as frações possíveis em que o denominador é potência de dois e que são maiores que 1/10 e menores que 1.

O somatório das frações é o que permite as possibilidades das representações fracionárias.

Figura 50 – Resposta do item 4 - círculo

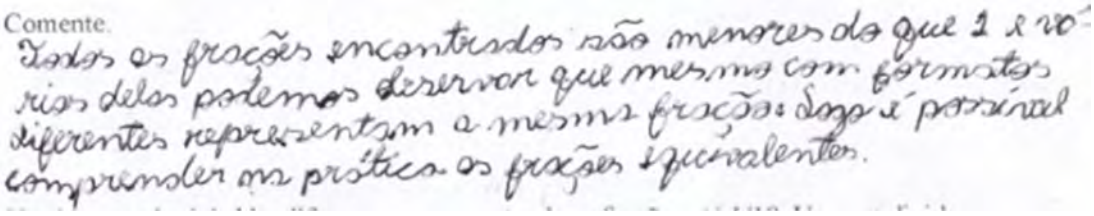


Fonte: Resposta do aluno

Nesse mesmo item, pede para comentar o por que os alunos do Ensino Médio, apresentaram as frações $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$; 1, respectivamente.

Um licenciando informou que eram frações menores que 1 e que algumas peças representavam a mesma fração.

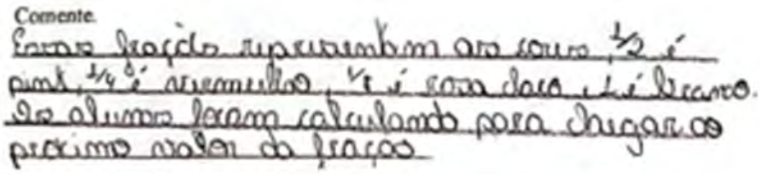
Figura 51 – Resposta comentada 1 do item 4 - círculo



Fonte: Resposta do aluno

Outros dois licenciandos relacionam as cores às respectivas frações, mas informa que os alunos chegaram próximo do valor da fração.

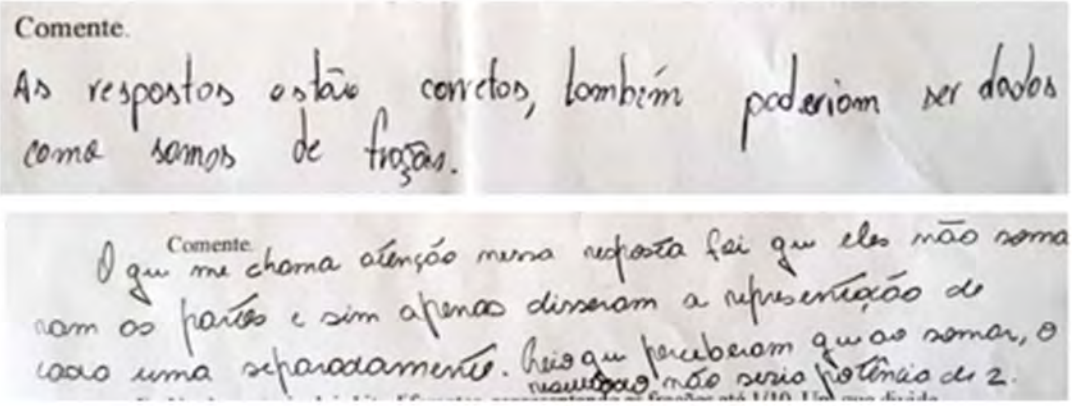
Figura 52 – Resposta comentada 2 do item 4 – círculo



Fonte: Resposta do aluno

E outros dois licenciandos perceberam a somas de frações.

Figura 53 – Respostas comentada 3 do item 4 – círculo

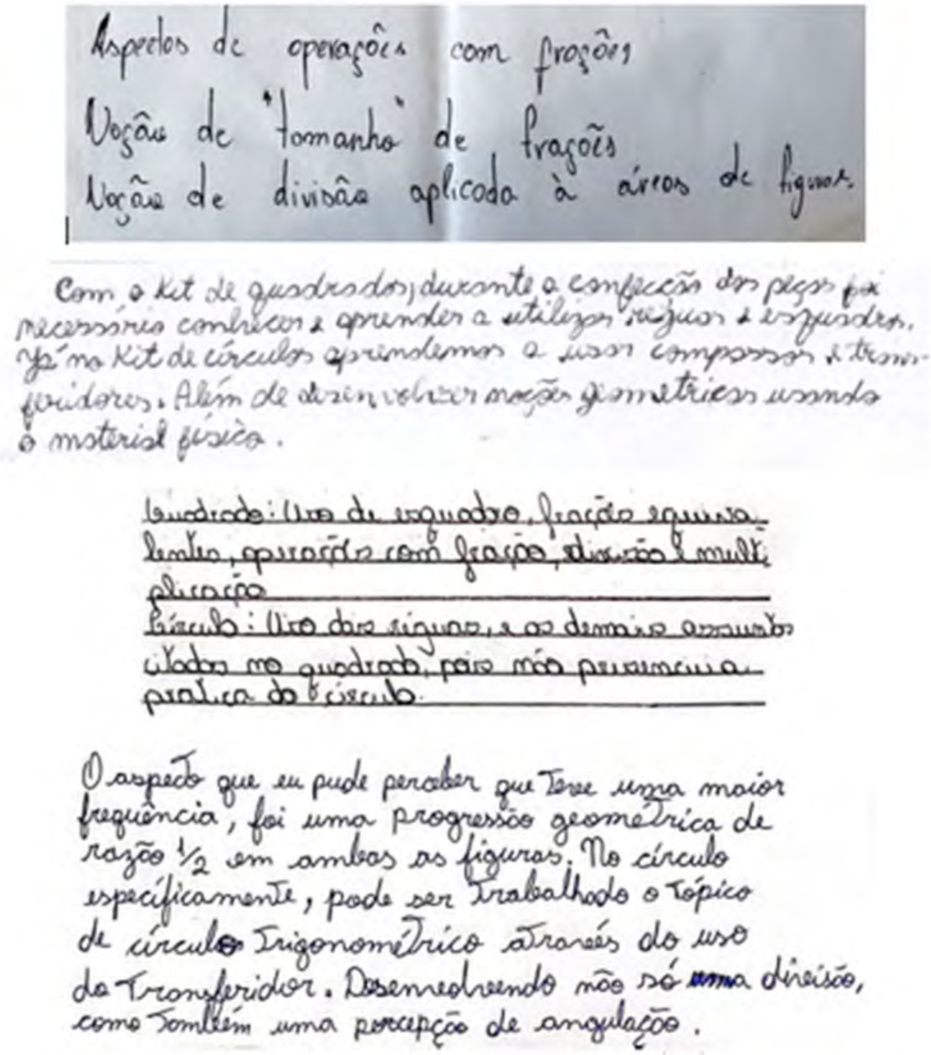

Comente.
As respostas estão corretas, também poderiam ser dadas como somas de frações.

Comente.
O que me chama atenção nessa resposta foi que eles não somaram as partes e sim apenas disseram a representação de cada uma separadamente. Acho que perceberam que ao somar, o numerador não seria potência de 2.

Fonte: Respostas dos alunos

No item 5, tivemos oito respostas dos licenciandos e dois não responderam, para relatar as habilidades desenvolvidas na construção de cada *kit*. Respostas do tipo:

Figura 54 – Respostas do item 5 - círculo


Aspectos de operações com frações
Noção de "tamanho" de frações
Noção de divisão aplicada à áreas de figuras

Com o kit de quadrados, durante a confecção das peças foi necessário conhecer e aprender a utilizar réguas e esquadros. Já no kit de círculos aprendemos a usar compassos e transferidores. Além de desenvolver noções geométricas usando o material físico.

Quadrado: Uso de esquadro, fração equivalentes, operação com fração, divisão e multiplicação
Círculo: Uso das figuras, e os demais assuntos citados no quadrado, pois não percebi a prática do círculo.

O aspecto que eu pude perceber que teve uma maior frequência, foi uma progressão geométrica de razão 1/2 em ambas as figuras. No círculo especificamente, pode ser trabalhado o tópico de círculo trigonométrico através do uso do transferidor. Desenvolvendo não só uma divisão, como também uma percepção de angulação.

Fonte: Respostas dos alunos

As estratégias encontradas, a maneira como os alunos defendem ou validam o que fizeram e a comparação com as soluções dos colegas têm tanto ou mais valor que o resultado certo. Cabe ressaltar, que é importante que o professor socialize as soluções encontradas pelos alunos. Essa prática ajuda a perceber as diferentes formas de encontrar a solução e permite que elas façam as escolhas dos procedimentos mais práticos e econômicos.

Desse modo, não se pode entender separadamente o desenvolvimento cognitivo e o aprendizado de um conceito. Desenvolvemos conceitos e representamos objetos e pensamentos por meio de suas características gerais, para enfrentar situações. E sempre há uma variedade enorme de situações envolvidas na formação de um conceito e também uma variedade de conceitos envolvidos numa situação. Juntos, eles formam sistemas progressivamente organizados, que devem ser estudados ao mesmo tempo (VERGNAUD, 1933).

Analisamos cada um dos encontros para entendermos como ocorre o processo em sala de aula e concordamos com Sfard (2008), quando diz que[18]

> O processo incessante de modificação do discurso que ocorre em qualquer comunidade é reflexivo. As regras discursivas da sala de aula de matemática, em vez de serem ditadas implicitamente pelo professor por meio de suas próprias ações discursivas, são um produto em evolução dos esforços colaborativos do professor e dos alunos. (SFARD, 2008, p. 202)

Com esses seis encontros tivemos a possibilidade de observar como os licenciandos de matemática se desenvolveram para construção dos *kits* e as respostas das fichas com a utilização dele. Para ilustrar apresentamos o relato de um dos participantes.

> *Realizamos novamente a construção de um material para o ensino das mesmas frações, porém agora material é da forma de um círculo, para a construção desse material utilizamos compasso, tesoura, lápis e transferidor. Esse material foi de certa forma mais fácil de ser construído pois com a utilização do transferidor bastou dividir 360º pelo denominador da fração, e marcar os pontos onde deveriam ser feito os cortes, esse material ficou mais fácil de construir junto do aluno. Os setores circulares eram feitos de forma bem mais fácil e rápida. Isso Também nos mostra a importância em se ter o transferidor para marcar os ângulos com maior clareza (Luc).*

---

[18] Tradução própria.

A cada etapa da dobradura a visualização foi importante para os licenciandos perceberem que foi possível fazer diferentes formas de representar cada fração em figuras geométricas diferentes e que as abordagens também são diferentes. Por exemplo, no caso das metades também foi possível discutir a possibilidade de se obter outras formas obtendo figuras diferentes partindo do eixo de simetria, como é o caso do símbolo do Iching.

Mas a dúvida ainda permanece no que diz respeito a área, por mais que as figuras sejam diferentes, como por exemplo, a metade do quadrado, quando dobrado na diagonal forma triângulos e quando dobrado na vertical ou horizontal formando retângulos. Observamos que alguns licenciandos ficaram presos na imagem. Foi preciso que calculassem aritmeticamente a área das figuras para perceberem que era a mesma. Portanto, quando nos referimos às diferentes formas, triângulo e retângulo, obtidas através da dobragem do quadrado com tendo a mesma quantidade estamos nos referindo à área dela.

Trabalhar com as crianças e ensinar matemática para elas não é intuitivo, por isso os conteúdos aparecem no currículo como tendo que ser abordado na forma de uma espiral, em um crescente, que hipoteticamente trás reflexões sobre o que foi visto anteriormente, no sentido de revisitar e aprofundar os conteúdos. No entanto, muitos estudantes quando chegam na faculdade, apresentam "buracos" ou "saltos" na aprendizagem de alguns conceitos e que não foram resolvidos durante o processo de aprendizagem ao longo de sua vida escolar e desta forma não conseguem pensar unissonamente em um proceito, num processo de conceito. Com esse tipo de trabalho, esperamos oportunizar reflexões sobre o que aprenderam e criar oportunidade para que eles estabeleçam conexões entre o que sabem e o que estão vivenciando no presente momento, que eles criem elos que se conectem e façam sentido tanto para o seu próprio domínio do conteúdo quanto lhes ofereça caminhos para atuar como professores.

Apresentamos a seguir, o roteiro de elaboração do produto educacional.

7 ELABORAÇÃO DO PRODUTO EDUCACIONAL

Ao observamos o empenho dos Licenciando em Matemática na construção dos *kits*, para o estudo de frações e outros conteúdos matemáticos que apareceram durante o processo, criamos como produto educacional videoaulas referentes a construção dos *kits* com os instrumentos geométricos necessários para a elaboração dos mesmos.

Para apresentação das videoaulas foi escolhido o "*YouTube* por ser uma plataforma de vídeos online, no qual os usuários podem assistir, criar e compartilhar vídeos pela internet. Fundada em 2005, a plataforma possui mais de um bilhão de usuários pelo mundo e a ideia do *YouTube* é que seus usuários possam não apenas consumir conteúdos na plataforma, mas também os produzir. Dessa forma, o *YouTube* é democrático não apenas no consumo, mas também na produção de seus conteúdos, principalmente em comparação à TV"[19].

Para criação de um canal há necessidade de criarmos um e-mail, e esse já existe desde 12 de janeiro de 2021, pois a pesquisadora estava com as ideias a "flor da pele", porém em vez de produzir foi com a elaboração do produto educacional, que surge uma experiência única, a oportunidade para usar esse meio de comunicação e produzir as videoaulas sobre o tema.

O canal se chama Universo das Ideias, com o link: @UniversodasIdeias-cm6js, a logomarca utilizada, estava disponível na internet, mas foi um pouco modoficada em alguns detalhes pela pesquisadora. Para reprodução dos vídeos foram utilizados o próprio celular da pesquisadora que serviu como câmera para as gravações, um suporte de celular emprestado, sem apresentação do rosto, uso das mãos, fala (oratória), o material manipulável de natureza física, papel, com a utilização da dobradura como técnica do *origami*, para realizar as divisões no papel, tesoura e os instrumentos par de esquadros, compasso, régua e transferidor.

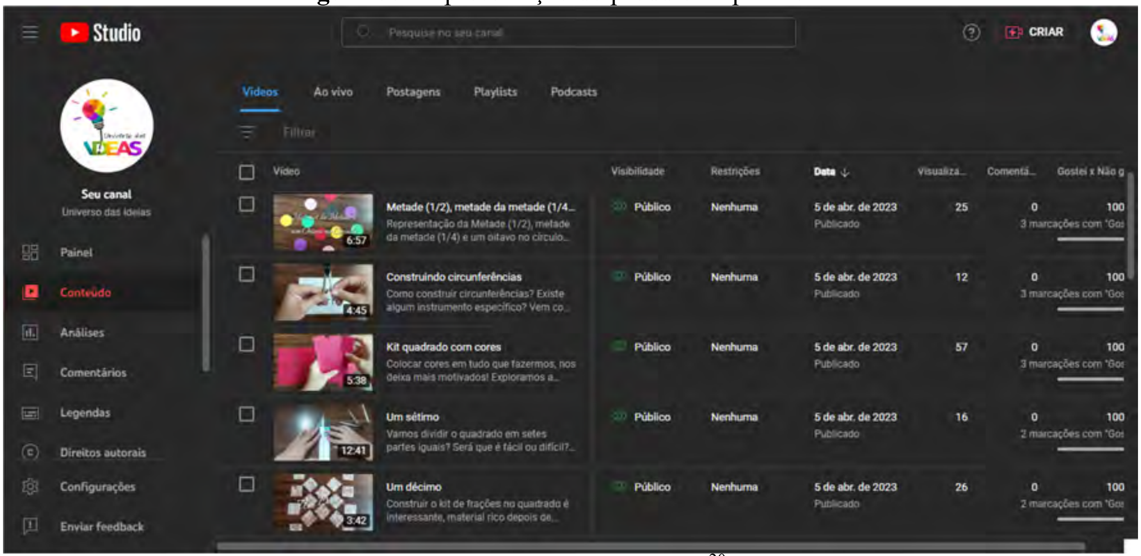
Todos os vídeos foram editados no aplicativo *CapCut*, com a apresentação de uma abertura que consta de figuras construídas e fotografadas pela pesquisadora, e todas as edições realizadas pela filha de uma amiga muito significativa na vida da pesquisadora, chamada Amanda Baia.

O canal consiste de vinte cinco vídeos, nos quais os dois primeiros abordam o tema do *Origami* – tipos de dobradura e construção do Tsuru e os vinte três referem se a construção dos *kits*, sendo quinze vídeos na figura geométrica quadrado e oito na figura geométrica no círculo.

[19] Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/. Acesso em 18 de abr de2023

Conforme são postados os vídeos, o *YouTube* coloca em ordem cronológica de baixo para cima, como é mostrado este posicionamento abaixo:

Figura 55 - Apresentação do produto na plataforma



Fonte: Plataforma *YouTube*[20]

A ordem dos vídeos foi apresentada conforme uma sequência de construção, ou seja, com a dobradura realizada para representar "tal" fração, qual a próxima dobradura será de entendimento prático para representar a próxima fração? Com este propósito foram executados todos vídeos.

A plataforma oferece um campo de descrição para cada postagem, em todas a pesquisadora colocou, uma breve chamada e a informação a seguir: Este canal tem o intuito de abranger ideias criativas que transbordam o ser. As publicações neste momento serão sobre a Arte do *Origami* com as suas respectivas dobraduras para criação de *kits* nas figuras geométricas regulares, para realização do trabalho de Mestrado do Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática – PPGEduCIMAT. Um produto educacional para Estudo de Frações.

7.1 Construção do *kit* quadrado

A construção desse *kit* na figura geométrica quadrado foi elaborada conforme uma sequência que corresponde a uma lógica não sequencial numérica, comparada com os números naturais e sim conforme as dobraduras foram sendo realizadas em um entendimento "breve".

[20] https://studio.youtube.com/channel/UCrSMx2ft0-ckfk8NKTdGlpg/videos/upload?filter=%5B%5D&sort=%7B%22columnType%22%3A%22date%22%2C%22sortOrder%22%3A%22DESCENDING%22%7D

Descrevemos na tabela 8 a ordem em que aparecem no *YouTube*, seu nome, os objetivos e o endereço de acesso (*link*) para seu acesso da construção do *kit* quadrado.

Tabela 8- Listagem dos vídeos do *Kit* Quadrado

CONSTRUÇÃO DO *KIT* QUADRADO

Nº	Nome	Objetivo	Link do vídeo
1	Construção do quadrado	Construir um quadrado em folha de papel A4	https://youtu.be/O3TB_hHH6u0
2	Metade do quadrado	Representar de diversas maneiras a metade do quadrado - 1/2	https://youtu.be/6CNqjU2FO1c
3	Metade da metade do quadrado	Achar a metade da metade do quadrado	https://youtu.be/FmBxO3a4INw
4	Outras formas de representar metade da metade	Representar de outra forma a metade da metade	https://youtu.be/bJx7ytAzI9s
5	Um oitavo do quadrado	Dobrar o quadrado para achar um oitavo	https://youtu.be/HF9PwKH9BsE
6	Mais ou menos um terço do quadrado	Mostrar que com a dobradura não fica exata a divisão	https://youtu.be/gR6VxjSe8kY
7	Manusear o par de esquadros	Aprender a utilizar o par de esquadros para traçar paralelas e perpendiculares	https://youtu.be/ZeoyHbsTYIM
8	Dividir o segmento dado em n partes iguais e um terço	Dividir o segmento em quantas partes desejar e representar a terça parte com esta técnica no papel	https://youtu.be/2u5_sypChcY
9	Outras maneiras de achar um terço	Mostrar com a dobradura como se acha 1/3	https://youtu.be/HObrX6AyQuQ
10	Um sexto	Mostrar que um sexto é a metade de 1/3	https://youtu.be/9DemDYCrfss
11	Um nono	Mostrar que um nono é a terça parte de 1/3	https://youtu.be/r59G7dsCFYY
12	Um quinto	Achar 1/5 por divisões de segmento ou dobradura	https://youtu.be/V9anT5ek0cE
13	Um décimo	Mostrar que um décimo é a metade de 1/5	https://youtu.be/aY9hzXxIKPQ
14	Um sétimo	Achar um sétimo por divisões de segmento ou dobradura	https://youtu.be/U80KYeM7TEk

15	*Kit* quadrado com cores	As cores contribuem para visualização e a relação com as frações	https://youtu.be/fRByfHHxMRs

Fonte: Elaboração da autora

A elaboração da relação frações e cores para todos os participantes terem um *kit* padronizado e contribuir na dinâmica do estudo de frações. Veja na figura 56 como foi representado.

Figura 56 – Relação frações e cores

Fonte: Elaborado pela autora

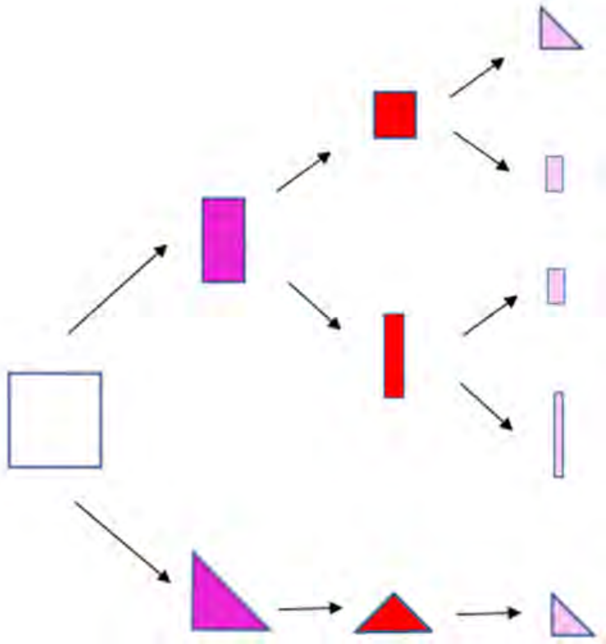
Pode se colar essas informações no envelope que for guardar as peças divididas.

Ao finalizarmos este kit observamos alguns acontecimentos interessantes que abordaremos no próximo tópico.

7.2 Reflexões das metades no quadrado

A elaboração dos vídeos mostra como as dobraduras podem nos auxiliar para representar as frações no quadrado e no círculo, no entanto é interessante destacar o raciocínio das metades ou das potências de dois na figura geométrica quadrado. Conforme as dobraduras são executadas figuras geométricas vão surgindo durante a construção. Vejamos na figura 57 estas representações.

Figura 57 – Representação das diferentes possibilidades de metades



Fonte: Elaboração da autora

Aqui podemos observar a diversidade de conteúdos matemáticos que podem ser explorados com este material manipulável físico, um deles são as formas geométricas: quadrado, retângulo e triângulo.

Ao dobrarmos o quadrado ao meio para achar a metade teremos duas figuras retângulo e triângulo. Reparamos que ao dobrarmos novamente ao meio desse um meio, achamos um quarto, ou seja, a metade da metade e as figuras são quadrado, retângulo e triângulo respectivamente, e com esta representação em mãos, realizamos a próxima dobra ao meio e nos deparamos com um oitavo, ou seja, a metade, da metade, da metade do quadrado. E as figuras são triângulo, retângulo, retângulo e triângulo.

Podemos explorar a potenciação quando questionamos a quantidade de vezes que podemos dobrar ou cortar o quadrado, ou seja, alguns licenciandos dobraram de seis a oito vezes, logo $2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$.

Quando comparamos apenas uma peça com as outras, analisamos e refletimos o que uma são para as outras, por mais que saibamos que são metades das metades e dobro, ao colocarmos números há uma dinâmica mais ágil pode ser tralhado com números naturais, como porcentagem também.

Outros conteúdos matemáticos que podem ser explorados com esses *kits* são: simetria, perímetro, área e sequência.

Esperamos com este produto educacional contribuir com os professores de matemática, assim como os que se interessam pela educação e que faça sentido a introdução deste material em suas salas de aula.

7.3 Construção do *kit* círculo

Desenvolvemos o *kit* na figura geométrica círculo, da mesma maneira que o *kit* anterior, realizamos os procedimentos similares e descrevemos na tabela 9 a ordem em que os vídeos aparecem no *YouTube*, seu nome, os objetivos e o endereço de acesso (*link)*, dos vídeos para construção do *kit* círculo.

Tabela 9 Listagem dos vídeos do *Kit* Círculo

CONSTRUÇÃO DO *KIT* CÍRCULO

Nº	Nome	Objetivo	Link do vídeo
1	Construindo circunferências	Aprender a utilizar o compasso	https://youtu.be/B0SKp_KIV2w
2	Metade - metade da metade e um oitavo do círculo	Com a dobradura achar 1/2 - 1/4 e 1/8 no círculo	https://youtu.be/k75bbIkazzg
3	Manusear o transferidor	Aprender a usar o transferidor	https://youtu.be/gUvoxH5ZVLg
4	Um terço e um sexto no círculo	Mostrar que para achar um terço precisa se do transferidor e consequentemente dobrando na metade, temos 1/6	https://youtu.be/hWW-Jsr16kE
5	Um quinto e um décimo no círculo	Mostrar que para achar um quinto precisa se do transferidor e consequentemente dobrando na meotade, temos 1/10	https://youtu.be/cWhfpxPFWas
6	Um sétimo e um nono no círculo	Mostrar que com a dobradura não é possível achar 1/7 e 1/9, mas pode se utilizar o transferidor	https://youtu.be/E9rftfPufnY
7	*Kit* círculo	Mostrar todas as frações com cores no círculo	https://youtu.be/Fv22-vDabC4
8	Guardar os *kits* no envelope	Mostrar como fazer um envelope para guardar os *kits*	https://youtu.be/Pq7sqlypUww

Fonte: Elaboração da autora

E aqui finalizamos o roteiro do produto que se encontra na íntegra no Apêndice D.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de matemática continua a ser um dos principais desafios no que se refere aos conteúdos abordados pelo docente, em particular para aqueles que ainda estão em formação.

Em nossa pesquisa, não encontramos referências em que tenha sido usado a dobradura para abordar o ensino de frações embora existam um número significativo de pesquisas envolvendo origami ou frações em sala de aula. Diante do exposto, partimos para o trabalho envolvendo o uso da dobradura abordando a técnica do *Origami* com as suas dobraduras, para relatar que a história mostra a sua criação e relevância, assim como a parte histórica da construção da utilização matemática para as divisões de terras, que foram significantes naquela época, porém contribuíram para mostrar de onde e como a necessidade de ampliar o conhecimento para alcançar o desejado.

Vale ressaltar ainda que a abordagem histórica de uma disciplina é uma maneira de observarmos as transformações, ou seja, de que forma os conceitos foram sendo aprimorados e utilizados no dia a dia. O mesmo ocorre quando os licenciandos lembram da sua fase infantil, ao utilizarem os materiais e entenderem com outra mentalidade a compressão de alcançar o objetivo e realizar. As recordações das memórias afetivas começam a ter um direcionamento significativo, intercalado com a trajetória de cada licenciando.

No questionário de apresentação a maioria dos participantes disse que não lecionavam, mas que estavam estagiando e disseram que, de um modo geral, o teórico não condiz com a prática. Com relação ao estudo de frações, alguns licenciandos afirmaram que tiveram dificuldades para entender o conteúdo e que se lembravam que a maioria de seus colegas de turma também e que verificam nas suas experiências como estagiários que a dificuldade de compreensão por parte dos estudantes do Ensino Básico permanece.

Conforme se lembravam das vivências que tinham sobre as frações aprendidas na infância, se posicionavam como adultos e percebiam que durante o período escolar tinham medo de errar e como não percebiam que este podia ser corrigido e estaria tudo bem. Entretanto, em alguns momentos, percebemos que alguns licenciandos ainda não se sentiam seguros para falar sobre suas dúvidas e muitas vezes aparecia ao expressar as ideias sobre as frações enquanto manipulavam o material. É interessante notar que, como educadores muitas vezes têm a sensação de que ao trabalharmos com os licenciandos, eles já entenderam o conceito e que a matéria está compreendida, mas, nem sempre é isso que ocorre. Perceber os próprios erros e inseguranças pode ajuda-los a perceber as dificuldades por que passam os seus futuros alunos, do Ensino Fundamental.

Outro aspecto a ser discutido é que enquanto muitas vezes os licenciandos se sentem cobrados em dar a resposta correta, os estudantes do 6º e 7º anos se sentem livres, sem preocupações na liberdade de se expressarem enquanto manipulam o material. É como se estivessem brincando de exploradores.

O material manipulável papel para realização das dobraduras possuem limites sejam pelo próprio material, como gramatura e tamanhos ou os recursos usados para realizar algumas tarefas, como a tesoura. Porém, as potencialidades na dobradura se tornam por um lado fácil por causa das representações das metades ou as potências de dois, por outro lado para fazer os terços, quintos e sétimos foi importante aprenderem a utilizar os instrumentos que geralmente são solicitados na lista de compras do material escolar, mas que poucas vezes são utilizados.

Aprender e entender o funcionamento do par de esquadros é importante, pois lhes permitiu perceber outras funcionalidades para além das aulas de desenho geométrico em que, de modo geral, se aprende a traçar retas e segmentos paralelos e perpendiculares. No nosso caso, serviu para dividir o quadrado em partes em que a dobradura se mostrou como um recurso bem mais complexo como é o caso das divisões por cinco, seis, sete, nove e dez. Assim como o uso do transferidor também serviu para facilitar encontrar estas divisões.

De um modo geral, ressaltamos que, no caso específico dos sujeitos desta pesquisa, o uso e manuseio dos materiais como o transferidor, par de esquadros e compasso, levaram a um avanço na compreensão dos conteúdos matemáticos, mostrando a relevância da confecção deles. Embora, no início, demonstrassem dificuldade em manuseá-los. Ao dividirem um segmento em n partes iguais e em seguida aplicar a técnica para a divisão dos lados do quadrado em três e cinco partes iguais e em seguida perceberam que para acharem sextos e décimos bastava dobrar o papel ao meio respectivamente.

Percebemos que a construção de todo o material – kit na sala de aula leva um tempo longo, interessante solicitar que algumas frações sejam feitas em casa e depois de todo o kit construído, elabore questões parecidas com as fichas 1 e 2 e permita os alunos mostrarem o entendimento do material. Outra alternativa é escolher uma das figuras (quadrado ou círculo) para realizá-la em sala de aula e a outra como trabalho de casa ou ainda, realizar parte da confecção de uma delas e executar as dobraduras e fazer análise sobre o que foi realizado de forma que os estudantes possam entender as principais noções de frações.

Destacar a importância de cada material manipulável é imprescindível, pois além da função lúdica que pode estar relacionada ao aspecto da diversão e permitir uma maior interação entre os participantes eles também estão associados ao ato de explorar conteúdos relacionais, como é o caso da relação parte todo e parte/parte presente no desenvolvimento dos dois kits e que podem contribuir o desenvolvimento da observação, comparação, ordenação, classificação entre outros aspectos cognitivos. Para além dessas duas funções, cabe ainda o registro de que o material aqui apresentado e pesquisado nos permitiu explorar conteúdos específicos, no caso, a noção de fração e a comparação entre as diferentes representações das frações considerando tanto aquelas que envolviam diferentes formas de representar a mesma fração quanto à comparação entre as representações de diferentes frações.

Com relação às tarefas 1 e 2 com questões sobre os materiais, os licenciandos tiveram duas posturas bem distintas ao responderem as questões apresentadas nas fichas. Na primeira, refletindo sobre as dobras realizadas no quadrado e a obtenção das diferentes divisões, parte/todo os estudantes ficaram limitados ao material, ou seja, à quantidade de dobras possíveis de serem realizadas e que esta dependia da gramatura da folha de papel. Em princípio não observaram que figuras diferentes podem representar a mesma área, como no caso em que podemos obter a metade do quadrado como sendo um retângulo ou um triângulo e que ambos possuem a mesma área, pois foram obtidos através da dobragem do papel de forma quadrada e que poderia ser dobrado através da sua diagonal ou não.

Já na segunda atividade, ficha 2, ao identificarem a resposta dada pelos estudantes do Ensino Médio, item 4, perceberam que era possível extrapolar o material ou manipular as peças dos *kits* e obter diferentes respostas, com isso viram que o material possibilita também fazer uso de diferentes representações para uma mesma ideia.

O produto resultante desta pesquisa é constituído de uma coleção de vídeos curtos e de um roteiro escrito contendo as atividades. A estratégia de ser micro vídeos oferece a oportunidade de trabalhar cada uma das etapas separadamente de forma que o professor possa usá-los em diferentes momentos permitindo ao professor criar o seu próprio para suas aulas de modo que o aluno possa assistir a esses vídeos quantas vezes se fizer necessário para realizar as dobras solicitadas. Espero que esta pesquisa e o produto educacional sejam de grande valia para os professores de matemática. E finalizo o trabalho com uma frase de Paulo Freire que diz: “Saber que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua própria produção ou a sua construção”.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia**. Edição revista e ampliada. 5ª ed. São Paulo. Martins Fontes, pág 194. 2007.

ABREU, L. A. de F; ALMEIDA, A. M. F. B de; FERREIRA, M. L; OLIVEIRA, C. A. A de e SCHUBRING, G. A história da matemática nos livros-texto de Cajori, Eves, Boyer e Struik. **Revista Brasileira de História da Ciência**, Rio de Janeiro, v. 13, n. 2, p. 280-297, jul |dez 2020.
Disponível em: https://www.sbhc.org.br/arquivo/download?ID_ARQUIVO=2893. Acesso: 05 jan. 2022.

ALMEIDA, I. A. T. A História da Matemática desencadeando reflexões no ensino de frações. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática**, Ceará, n. 20, p. 202 – 210. 2020.

ALMOULOUD, S. A**. Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ALVES, Thalita Tho Rodrigues. **A aprendizagem das frações e seus obstáculos**. 2018. 67 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal Da Paraíba.
Disponível em:
https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=8504254.
Acesso em: 18 jan. 2022.

AMÂNCIO, A.; GAZIRE, E. S. **O desenvolvimento do pensamento geométrico e as contribuições dos recursos didáticos no estudo dos quadriláteros.** VIDYA, v. 35, n. 2, p. 113-127, jul./dez., 2015 - Santa Maria, 2015. ISSN 2176-4603.

ANANIAS, Izabela Cesario Correa. **Transformação de frações em números: uma experiência no Ensino Fundamental**. 2019. 110 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Ensino de Matemática. Universidade de São Paulo, São Paulo.
Disponível em:
https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=7692610. Acesso em: 18 jan. 2022.

ARAUJO, M dos S. JESUS, A.S. **Formação inicial do professor de matemática e seus saberes pedagógicos**. Universidade Estadual de Goiás. Nº 02, V. 01. 2017.

BARBOSA, A. C. M ... [et al]. **Réguas de Cuisenaire: um olhar sobre materiais manipuláveis**. 1. Ed. – Petrópolis [RJ]: DP et Alii; Rio de Janeiro: FAPERJ, 2019. (LIVRO).

BEHR, M.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational number, ratio and proportion. In: Grows, D. A. (Ed), Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: MacMillan, p. 296-333, 1992.

BENINCA, Michele. **Investigando a Aprendizagem de Frações nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental II**. 2020. 120 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Espírito Santo. Disponível em:

https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=9400272. Acesso em 18 jan. 2022.

BERLINGOFF, W.P.; GOUVÊA, F.Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. Trad. ELZA GOMIDE, ELENA CASTRO. São Paulo: Edgard Blucher, 2010.

BERTINI, L. de F. Situações da Vida Cotidiana no Ensino de Frações: livros didáticos do início do século XX. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 27, n. 71, p.132-144, abr./jun. 2021. Disponível em: http://sbemrevista.kinghost.net/revista/index.php/emr/article/view/2421/2035. Acesso em: 28 jul. 2022.

BERTONI, Nilza Eigenheer. **Pedagogia – Educação e Linguagem Matemática IV – Frações e Números Fracionários**. Brasília: Universidade de Brasília. 2009.

BITTAR, Marilena; FREITAS, José Luiz Magalhães**. Fundamentos e metodologias de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental**. 2 edição, Campo Grande, MS: Ed. UFMS, 2005.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Blucher, Ed. Da Universidade de São Paulo, 1974. Tradução de Elza F. Gomide.

BOYER, C.B. MERZBACH, U. C. **História da matemática**. Trad. Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012. (pág 26)

BRASIL. **Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília, DF, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais** - Matemática: 1ª a 4ª série. Brasília, DF, v. 2, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação e Tecnologia do Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos: Matemática. Brasília. SEF/MEC, 1998.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais** - Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental: Matemática. Brasília, DF, 1998.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular** (BNCC). Brasília, DF, 2018.

BRASIL. **Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação**. Parecer n. 1302, de 6 de novembro de 2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Brasília: MEC/CNE.

BROITMAN, Claudia. **As Operações Matemáticas No Ensino Fundamental I**. São Paulo: Ática, 2011.

BRUNO, Thiago Ribeiro de Araújo. **Frações Contínuas e Aproximações de Reais por Racionais.** 2017. 52 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro.

Disponível em:
https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=4996821. Acesso em: 18 jan. 2022.

CANAVARRO, Ana Paula. **Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios**. Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Évora, v. 2, n. 13, p.11-18, dez. 2011.

CAPRA, Ana Paula Willms. **Laboratório de Ensino e Aprendizagem de Matemática: Tarefas Potencializadoras como Cenários de Investigação na Formação Continuada de Professores dos Anos Iniciais**. 2020. 228 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/5400/1/laboratorioensinoaprendizagemmatematica.pdf. Acesso em: 18 jan. 2022.

CARDOSO, G. P.; NERES, R L. **A mobilização e coordenação de registros de representação semióticos no ensino e aprendizagem de fração nos iniciais**. Educação Matemática em Revista, Brasília, v. 26, n. 72, p. 9-21, jul./set. 2021. Disponível em: http://sbemrevista.kinghost.net/revista/index.php/emr/article/view/2467. Acesso em: 28 jul. 2022.

CARVALHO, Euvaldo de Souza**. Sequência didática: uma proposta para o ensino do conceito de fração.** 2017. 103 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Tocantins. Disponível em:
https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5636927. Acesso em: 18 jan. 2022.

CELESTINO, K. G. **As frações em algumas civilizações antigas**. In: XIV Encontro Paranaense de Educação Matemática, III, 2017, Centro-Oeste. Unioste de Cascavel, EPREM, 2017.

CURTY, Andreia Caetano da Silva. **Números Racionais e suas Diferentes Representações.** 2016. 86 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro.
Disponível em: https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/28042016Andreia-Caetano-da-Silva-Curty.pdf. Acesso em: 19 jan. 2022.

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris Matemática**. [S.l.]: São Paulo, 2018.
DICIONÁRIO. Disponível em: https://questoesdeconcurso.net/dicionario/conceito. Acesso em 01 set. 2020.

DORNELES, Beatriz Vargas. **Princípios de contagem: uma construção progressiva**. In: Seminário Pesquisa em Educação: Região Sul, 5., 2004, Curitiba. Anais [...]. Curitiba: PUCPR, 2004. p. 1-12. CD-ROM.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Trad. Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FILHO, Roberto Loscha. **Fração: História, Teoria e Aplicações.** 2017. 105 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Estadual de Santa Cruz. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=4997571. Acesso em 18 jan. 2022.

FOSSA, Jonh A. et la. **Matemática e medida: três momentos históricos**. São Paulo: Editora Livraria da Física/SBHMat, 2009.

FREIRE, Paulo e LIMA, Rosana. **O Subconstruto parte-todo: uma análise com os três mundos da matemática**. Disponível em: https://livrozilla.com/doc/807646/o-subconstruto-parte-todo--uma-an%C3%A1lise-com-os-tr%C3%AAs-mundos. Acesso: 22 jul. 2022.

FREITAS, A. H. F e BARBOSA, G. dos S**. Diferentes significados da fração: um estudo diagnóstico com estudantes do curso de Pedagogia a distância.** Artigo no portal Educação Pública. Disponível em: https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/16/26/diferentes-significados-da-frao-um-estudo-diagnstico-com-estudantes-do-curso-de-pedagogia-a-distncia. Acesso: 09 fev. 2021.

FUSE, Tomoko. **Unit Origami: Multidimensional Transformation Japan Publications** April 1990.

FREIRE. Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa.** 69º edição. Rio de Janeiro/Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2021.

GELMAN, Rochel; GALLISTEL, Charles Randy. **The child's understanding of number**. Cambridge: Harvard University Press, 1978.

GIMENEZ, J.; BAIRRAL, M**. Frações no currículo do ensino fundamental: conceituação, jogos e atividades lúdicas**. Rio de Janeiro: Gepem/Edur, 2005.

GIANCATERINO, R. **A Matemática sem rituais**. Rio de Janeiro: Wak Ed., 2009, p.13.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. Ed. São Paulo: Atlas, 2011.

GRAVEMEIJER, K., COBB, P. (2013). **Design research from the learning design perspective**. In T. Plomp & N. Nieveen (Eds.), Educational design research, Part A: An introduction (pp. 72-113). Enschede: SLO.

GRYMUZA, A. M. G e RÊGO, R. G do**. Teoria da Atividade: uma possibilidade no ensino de matemática**. Revista Temas em Educação, João Pessoa, v.23, n.2, p. 117-138, jul.-dez. 2014.

GUEDES, Jessica Bruna Miranda. **O Teorema de Pincherle para Frações Contínuas**. 2018. 61 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Federal de São João Del-Rei, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5696484. Acesso em: 18 jan. 2022.

HAMADA, C. M. **Frações e Origami: um levantamento**. XXV Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática (EBRAPEM), realizado de 16 a 19 de novembro de 2021 de maneira online na cidade de Campina Grande - PB.

HAMADA, C; KINDEL, S. **Construção do conceito de fração com o uso do Origami.** Evento VIII Encontro de Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro. Volta Redonda, 04 dez. 2021.

IFRAH, G. **Os Números: a história e uma grande invenção**. 11. ed. Trad. Stella Maria de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 2010.

JUNIOR, J. C. M. et al. **Ensino de ciências e educação matemática 3** [recurso eletrônico] / Organizador Felipe Antônio Machado Fagundes Gonçalves. – Ponta Grossa, PR: Atena Editora, 2019. – (Ensino de ciências e educação matemática – v. 3)

KALEFF, A.M.M.R**. Formas, padrões, visualização e ilusão de ótica no ensino da geometria**. *Revista Vida,* Santa Maria, n. 2, p. 75-91, 2015.

KLEIN, Felix. Elementary mathematics from an advanced standpoint: Arithmetic, algebra, analysis. Courier Corporation, 2004.

KINDEL, D. S. et al. **Educação Matemática um olhar sobre materiais manipuláveis.** Rio de Janeiro: Faperj, 2019.

KINDEL, Dora Soraia. **Discutindo os racionais na 7ª série visando a noção de densidade**. 1998. 196 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Santa Úrsula Mestrado em Educação Matemática, Rio de Janeiro, 1998.

KINDEL, Dora Soraia. **Um ambiente colaborativo a distância: licenciandos dialogando sobre os infinitos**. 2012. 280 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2012.

LANDIM, E; MORAIS, M. das D. de. Análise praxeológica da abordagem de frações em um livro didático do 4º ano do ensino fundamental**. Revista Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.21, n.5, pp. 555-565, 2019. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/45552/pdf. Acesso em: 28 jul. 2022.

LANG, Robert J. Origami design secrets: mathematical methds for na ancient art. A K Peters, Ltd. 2003.

LANG, R. J. (Org.) Origami 4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education. Massachusetts: A K Peters, 2010.

LAUDARES, João Bosco. **O conceito e a definição em matemática: aprendizagem e compreensão**. Encontro Nacional de Educação Matemática – XI ENEM. Curitiba, PR. 2003.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, R. N**. Equações Algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, São Paulo. 2007.

LODDI, L. **Da folha à forma: o papel da dobradura no ensino de design e arquitetura**. Haud, E. (Orgs.). Anais do VII Seminário Nacional de Pesquisa em Arte e Cultura Visual Goiânia-GO: UFG, FAV, 2014 ISSN 2316-6479.

LORENZATO, S. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, S. **Desafios do contemporâneo que não é novo.** Revista Educação Matemática em Foco – 2012 - Campina Grande: EDUEPB, v1 - nº2, ISSN - 1981.6979, p.9 – 32), ago/dez 2012.

MACIEL, K. S B**. Ensino de Geometria: o uso do Origami nas aulas do 8º ano fundamental.** Trabalho de conclusão de curso. Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa. 2022.

MANDARINO, M. C. F e BELFORT, E. **Números naturais: conteúdo e forma**. Rio de Janeiro: Ministério da Educação: Universidade Federal do Rio de Janeiro, Laboratório de Pesquisa e Desenvolvimento em Ensino de Matemática e Ciências, 2006.

MATOS, Raphael Neves de. **Uma Contribuição para o Ensino Aprendizagem dos Números Racionais: a Relação entre Dízimas Periódicas e Progressões Geométricas**. 2017. 76 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede. Universidade Federal dos Vales do Jequitinhonha e Mucuri. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5079826. Acesso em 18 jan. 2022.

MATTA, A. E. R; SILVA, F. de P. S da; BOAVENTURA, E. M. **Design-Based Research ou Pesquisa de Desenvolvimento: Metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI**. Revista da FAEEBA – Educação e Contemporaneidade, Salvador, v. 23, n. 42, p. 23-36, jul./dez. 2014.

MCKENNEY, S.; REEVES, T. **Conducting educational design research**. Abingdon: Routledge, 2012.

MENDONCA, Glauce Ribeiro de Souza. **A Elaboração e Construção de Material Pedagógico como Metodologia do Processo Ensino Aprendizagem de Frações e Produtos Notáveis**. 2019. 104 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional Universidade Federal de Goiás. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=7661343. Acesso em: 18 jan. 2022.

MENDES, F.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA H. **Especificidades e desafios da *design research*: o exemplo de uma experiência de ensino no 1º ciclo**. Quadrante, Vol. XXV, nº 2, 2016.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, M. C. C. **A Teoria dos Subconstrutos e o Número Racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas** IN: Revista Bolema, Ano 21, no31, p.103-127. UNESP: Rio Claro, 2008.

MOTA, Reginaldo Vandre Menezes da. **Frações Decimais Periódicas e Suas Representações**. 2020. 79 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Estado do Rio De Janeiro. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=9426062 Acesso em: 18 jan. 2022.

NASCIMENTO, Adriana Vieira do. **Trabalhando a Geometria por meio do Origami**. O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense, Paraná, v. I. 2012.

NAKAYAMA, L; ANDRADE, L. **O uso da dobradura como recurso didático na construção da tábua de operações do grupo Diedral D_3**. XIV ENEM Encontro Nacional de Educação Matemática. Edição virtual de 11 a 15 jul. 2022.

NEIS, Vanderlei Silva. **A Utilização de Materiais Concretos no Ensino de Fração.** 2019. 76 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Oeste do Pará. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=9227097. Acesso em: 18 jan. 2022.

NUNES, Terezinha. et al. **The effect of situations on children's understanding of fractions**. Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Learning of Mathematics.Oxford, junho de 2003.

NUNES, T. e BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas. 1997.

OLIVEIRA, J. F. V.de**. Origamática: auxiliando no ensino /aprendizagem da geometria plana e espacial com o origami.** XIV Seminário Docentes 2022. Bienal Internacional do Livro do Ceará. 2022.

PAIS, Luís Carlos**. Intuição, Experiência e Teoria Geométrica**. In Zetetiké. v. 4, n. 6, julho/dezembro, p. 65-74, Campinas: CEMPEM /FE/ UNICAMP, 1996.

PAIS, Luís Carlos. **Uma análise do Significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria**. In ANPED, 2000. Disponível em: www.anped.org.br/23/textos/19/1919t.pdf. Acesso em 06 de fev. 2023.

PALLASMAA, Juhani. **As mãos inteligentes: A sabedoria Existencial e Corporalizada na Arquitetura**. Tradução de Alexandre Salvaterra. Porto Alegre: Bookman, 2013. 160p.

PERLIN, P. **A formação do professor dos anos iniciais do ensino fundamental no movimento de organização do ensino de frações: uma contribuição da atividade orientadora de ensino**. 2014. 196f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal de Santa Maria, Rio Grande do Sul, 2014. Disponível em: < https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/7129/PERLIN%2C%20PATRICIA.pdf?sequen ce=1&isAllowed=y>. Acesso em 18 jul. 2021.

PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma. **Didática da Matemática – Reflexões Psicopedagógicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, p. 75.

PEREIRA, Onesimo Rodrigues. **Uma Sequência Didática para o Ensino de Adição de Frações** 2017. 98 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Federal do Tocantins. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5638595. Acesso em: 18 jan. 2022.

PEREIRA, Sueli Cruz. **O Estudo de Frações a Partir de uma Perspectiva Conceitual: Proposta de Sequência Didática para o 7º Ano do Ensino Fundamental**. 2021. 152 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal do Espírito Santo. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=11076681. Acesso em: 19 jan. 2022.

PONTE, João Pedro Mendes da. **Investigar, ensinar e aprende**. Actas do Profmat, Lisboa, v. 3, n. 2, p.25-39, 2003.

PONTE, J. P. et al. **Investigação baseada em design para compreender e melhorar as práticas educativas**. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa. Quadrante, Vol. XXV, N.º 2, 2016.

____ Projeto Pedagógico do Curso Reformulação do curso de Licenciatura em Matemática. Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Instituto Multidisciplinar – Departamento de Tecnologia e Linguagens – Coordenação de Matemática. Nova Iguaçu. Dez, 2009.

WALLE, J. A. V. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6ª Edição. Porto Alegre: Artmed, 2009.

RANDOLPH, Justus (2009). **A Guide to Writing the Dissertation Literature Review**. Practical Assessment, Research & Evaluation: vol. 14, article 13. Disponível em: https://scholarworks.umass.edu/pare/vol14/iss1/13 . Acesso: 10 nov. 2021.

RANGEL, Leticia; GIRALDO, Victor; MACULAN FILHO, Nelson. **Conhecimento de matemática para o ensino: um estudo colaborativo sobre números racionais**. Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática, v. 8, n. 2, 2015.

RÊGO, Rogéria Gaudêncio; RÊGO, Rômulo Marinho do; GAUDÊNCIO JR, Severino. **A geometria do origami – Atividades de ensino através de dobraduras**. João Pessoa: Editora Universtiária UFPB, 2003.

RIBEIRO, Isabela Estephaneli Corty. **Uma Proposta Didática com a Utilização de Jogos, Materiais Manipulativos e Contextualização Visando o Ensino-Aprendizagem de Frações**. 2019. 198 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Rio de Janeiro
Disponível em:

https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=7925685.
Acesso em: 18 jan. 2022.

Culinária, Arte Tradicional, Cultura Pop e muito mais. n 02. Consulado Geral do Japão no Rio de Janeiro. 2015. Disponível em: www.rio.br.emb-japan.go.jp
Acesso em: 18 jan.2022.

ROCHA, Arlei Ubiratan da. **Racionais e Irracionais: Conjuntos em R, Algumas de suas Propriedades e Sugestões de Atividades para os Ensinos Fundamental e Médio**. 2017. 68 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Estadual de Londrina, Rio de Janeiro
Disponível em:
https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=5029439. Acesso em: 18 jan. 2022.

ROSSI, Dorival Campos; TEIXEIRA, Samanta Aline. **Origami científico: a linguagem das dobraduras no design contemporâneo**. Revistafaac, Bauru, v. 2, n. 2, p. 165-178, out. 2012/mar. 2013

SADOVSKY. **Gobierno de la ciudad de Buenos Aires**. Secretaría de Educación. Matemática. Documento de trabajo Nº 4. E.G.B. Buenos Aires, 1997. Disponível em: https://buenosaires.gob.ar/educacion/docentes/curriculum/documentos-de-desarrollo-curricular/matematica. Acesso em 26 abr. 2023.

SANTOS, Fabio Honorato dos. **Funções de Fibonacci: Um estudo sobre a razão áurea e a sequência de Fibonacci.** 2018. 55 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Alagoas, Rio de Janeiro. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=6338947. Acesso em: 18 jan. 2022.

SANTOS, Jose Carlos Medeiros dos. **Conceituação, Manipulação e Aplicação de Frações pelo Método de Singapura**. 2019. 150 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Alagoas, Rio de Janeiro
Disponível em:
<https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=7680671>
Acesso em: 18 jan. 2022.

SANTOS, Solange Ferreira dos. **O Uso do Tangram como Proposta no Ensino de Frações.** 2019. 116 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Federal de Goiás, Rio de Janeiro Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=8366333> Acesso em: 18 jan. 2022.

SCOLARO, M. A. **Ouso dos materiais didáticos manipuláveis como recurso pedagógico nas aulas de matemática.** FUNESP – PR. Especialista em Gestão Escolar – FACINTER – PR. 2008.

SFARD, Anna**. Thinking as Communicating, Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing**. Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paulo. 2008.

SILVA, H. J. de O. **Construções geométricas com régua e compasso e dobraduras**. Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Viçosa - Florestal, MG, 2018.

SILVA, Wallaci Antero Luz da. **Uma Proposta Didática para o Ensino de Operações com Números Racionais por Meio da Resolução de Problemas**. 2021. 123 f. Dissertação (Mestrado) Profissional em Matemática em Rede Nacional. Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Rio de Janeiro. Disponível em: <https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=10998204>. Acesso em: 19 jan. 2022.

SILVA, Milena Cristini da. **As contribuições pedagógicas do origami na formação inicial do pedagogo da UFF em Niterói e Santo Antônio de Pádua.** Santo Antônio de Pádua, 2020. p. 33.

SILVA, C. V. da e BARBOSA, D. E. F. **O uso do origami para o ensino de figuras geométricas planas: uma proposta de aula para o ensino fundamental**. 7º Conapesc. Congresso nacional de Pesquisa e Ensino em Ciências. 2022.

Smole, K. S.; Diniz, M. I.; Cândido, P. (2007). **Jogos de matemática de 1o a 5o ano**. Porto Alegre: Artmed. (Série cadernos do Mathema –Ensino Fundamental).

TAKAMORI, E. & et. al. (n.d.).**Origami como quebra-cabeça: estudo dos Poliedros de Platão.** Recuperado de http://www.alb.com.br/anais16/sem15dpf/sm15ss12_05.pdf.

TALL, D. O. **Thinking through three worlds of mathematics**. Proceedings of the 28th Meeting of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education. Bergen, Norway: Bergen. 2004. p. 281-288. (LIVRO)
TALL, D. **How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics** (1a ed.). New York, NY, USA: Cambridge University Press. 2013.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional.** Petrópolis, RJ: Vozes, 2014.

VERGNAUD. In: MOREIRA, Marco Antonio**. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a pesquisa nesta área**. UFRS: Porto Alegre, 2002. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/141212/000375268.pdf?sequence=1. Acesso em: 26 abr. 2023.

VIEIRA, Kennedy Almeida Sampaio. **O JOGO DUOTRI: uma possibilidade à compreensão dos números fracionários**. 2019. 51 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: Universidade Federal do Vale do São Francisco. Disponível em: https://sucupira.capes.gov.br/sucupira/public/consultas/coleta/trabalhoConclusao/viewTrabalhoConclusao.jsf?popup=true&id_trabalho=7766618. Acesso em: 18 jan. 2022.

YIN, Robert K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim**. Tradução: Daniel Bueno, revisão técnica: Dirceu da Silva. – Porto Alegre: Peno, 2016.

APÊNDICE

A - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) a participar, como voluntário (a), em uma pesquisa vinculada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática-PPGEduCIMAT/UFRRJ. Após ser esclarecido (a) sobre as informações a seguir, no caso de aceitar fazer parte do estudo, assine ao final deste documento. Em caso de recusa, você não será penalizado (a) de forma alguma. Em caso de dúvida, você pode procurar o Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Federal do Rio de Janeiro, telefone 2682-1201; 2681-4707; 2681-1220. Você receberá uma cópia desse Termo para ficar em sua posse.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA

Título do Projeto: "CONSTRUINDO O CONCEITO DE FRAÇÃO: OLHARES ATRAVÉS DO USO DE DOBRADURA E INSTRUMENTO DE MEDIDA"

Pesquisadores Responsáveis: Prof.ª Dr.ª Dora Soraia Kindel (Orientadora – UFRRJ) e Cristina Mayumi Hamada (Mestranda do PPGEduCIMAT)). Emails de contato: christtinahamada@gmail.com_e com a orientadora pelo email soraiakindel@yahoo.com.br Telefones da UFRRJ: (21) 2682-1841; 3783-3982.

♦Objetivo do Projeto: apresentar uma proposta de ensino de frações utilizando a técnica de dobradura (*origami*) e instrumentos de medida aos licenciandos do curso de matemática matriculados em uma universidade pública do estado do Rio de Janeiro, para abordar as frações por meio de sequências didáticas estruturadas, com base em situações exploratórias como metodologia de ensino com a utilização de algumas figuras planas e de técnicas de desenho geométrico como ferramenta.

♦Descrição da pesquisa, objetivos, detalhamento dos procedimentos metodológicos: a pesquisa pretende analisar, a interação e as narrativas dos alunos(as) da licenciatura em matemática, em relação aos conceitos de frações que trazem em sua aprendizagem. Os procedimentos metodológicos desta pesquisa serão desenvolvidos presencialmente, em sala de aula, mediado pela pesquisadora. A Pesquisa Narrativa, de característica qualitativa, levantará algumas questões pertinentes aos objetivos da pesquisa, e os alunos(as) farão as narrativas destas experiências e do recolhimento das respostas escritas para as atividades propostas e dos questionamentos feitos especificamente sobre as frações e os materiais envolvidos para o desenvolvimento do conteúdo.

♦Benefícios decorrentes da participação na pesquisa: Este estudo apresenta se importante para geração de um produto que proporcione aos professores um material de apoio por meio de videoaulas para auxiliá-los como uma prática inovadora em suas aulas sobre o tema de forma presencial ou a distância. Ou seja, o produto resultante desta pesquisa prevê o uso de pequenos vídeos mostrando o passo-a-passo das dobraduras e um caderno de atividades. Além do produto, também está previsto a divulgação em eventos e revistas específicas da área.

♦ Período de participação, sigilo e consentimento: As atividades serão realizadas em ambiente presencial, na sala de aula da disciplina de Ensino de Matemática. O anonimato e sigilo ficará garantido, pois em nenhum momento os nomes dos sujeitos serão divulgados, seja durante o desenvolvimento ou publicação da pesquisa. E a qualquer instante o sujeito, tem a liberdade para retirar o consentimento, sem prejuízo, risco ou penalidade de qualquer natureza.

♦ Riscos inerentes à participação na pesquisa: Por tratar de método não invasivo, não se prevê riscos e/ou prejuízos explícitos aos participantes em razão dos procedimentos da pesquisa, e nem possibilidades de danos imediatos ou posteriores, no plano individual ou coletivo, salvo aqueles julgados como subjetivos, mas que se apresentam como mínimos, isto é, o indivíduo pode se sentir embaraçado em responder algumas questões de questionário ou entrevista. Por isso, se prevê aos participantes o acompanhamento do pesquisador para os esclarecimentos e auxílio no que considerem necessário, de modo a garantir sua autonomia, bem como a compreensão adequada das perguntas e esclarecimentos de dúvidas decorrentes do desenvolvimento das atividades. Além disso, é garantido aos participantes que não sofrerão nenhuma premiação ou punição, exposição ou constrangimento por registrarem suas opiniões nas respostas.

♦Custos e remuneração: Embora não sejam previstos custos aos participantes da pesquisa, caso ocorram excepcionalmente, os pesquisadores responsáveis pela pesquisa se propõem a arcar com o custeio ou ressarcimento a quem de direito.

CONSENTIMENTO DA PARTICIPAÇÃO DA PESSOA COMO SUJEITO

Eu, abaixo assinado, concordo em participar do estudo descrito acima, como sujeito. Fui devidamente informado (a) e **esclarecido a)** pelo pesquisador sobre o estudo, os procedimentos nela envolvidos, assim como os possíveis riscos e benefícios decorrentes da minha participação. Foi-me garantido que posso retirar meu **consentimento** a qualquer momento, sem que isto leve a qualquer penalidade ou interrupção de meu acompanhamento, assistência, e desenvolvimento curricular. E, foi-me entregue uma cópia do presente termo.

Local e data: ___________________________, _______ de ________________ de 2023.

Nome (se desejar) e Assinatura:

____

Presenciamos a solicitação de consentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do sujeito em participar.

Testemunhas (não ligadas à equipe de pesquisadores):

Testemunha1:____

Testemunha2:____

Pesquisador responsável: Dora Soraia Kindel/Cristina Mayumi Hamada

B - Questionário de Sondagem

Construindo o Conceito de Fração: olhares através da Dobradura

Me chamo Cristina Mayumi Hamada e este questionário faz parte da minha pesquisa de Mestrado. Se surgirem dúvidas ao respondê-lo, entre em contato comigo através (21) 996200147.

*Obrigatório

1) Você está ciente que este formulário faz parte de uma pesquisa de Mestrado? *

Sim Não

2) Você aceita participar dessa pesquisa? *

Sim Não

3) Qual o seu nome? *

3.a) Lembrando que você não será identificado na pesquisa, você também pode escolher um apelido com o qual será identificado. Escolha-o.

Caso você aceite participar dessa pesquisa continue respondendo, em caso negativo não precisa responder aos demais itens.

4) Você já participou de alguma pesquisa em alguma universidade? Em caso afirmativo, qual área: Educação ou Matemática. Lembra do tema? E de que forma você atuou na pesquisa: participante ou ouvinte? *

Os itens a seguir são importantes para que possamos entrar em contato nas oficinas oferecidas remotamente.

5) Qual o seu e- mail? *

5.a) Qual o seu telefone (WhatsApp)? *

Conhecendo um pouco mais de você

As perguntas a seguir buscam identificar seu perfil estudantil e participação acadêmica na instituição.

6) Qual período você está cursando? *

7) Você participa do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) (um programa de incentivo e valorização do magistério e de aprimoramento do processo de formação de docentes para a educação básica, vinculado à Diretoria de Educação Básica Presencial – DEB – da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível)? *

Sim Não Já participei

8) Atualmente, você faz residência pedagógica? *

Sim Não Já fiz

9) Com quem?

10) Atualmente, você está fazendo estágio obrigatório? *

Sim Não Já fiz

11) Em qual(is) ano(s)?

12) Faz estágio voluntário? *

Sim Não

13) Com quem e para qual ano?

Atuação Profissional na Educação

14) Você já trabalha na área *

Sim Não

Os próximos itens você poderá optar em mais de uma, se for o caso.

15) Em que tipo de instituição?

Municipal Estadual Federal

16) Escola da rede pública do Ensino

Fundamental I Fundamental II Ensino Médio

17) Escola da rede privada do Ensino

Fundamental I Fundamental II Ensino Médio

Cursinho Pré vestibular ou cursinho voluntário

18) Em qual(is) ano(s) você atua?

A Fração

Os próximos itens se referem ao conteúdo específico do objeto de pesquisa com que iremos trabalhar

19)Você conhece algum material didático para o ensino de Fração? *

Sim Não

20) Qual(is)

21) Você acha importante o uso de material manipulável em sala de aula? *

Sim Não

22) Por que? *

23) Você conhece a arte do *Origami*? *

Sim Não

24) Você fez algum curso de extensão sobre Frações? *

Sim Não

25) Você já fez algum curso de extensão sobre *Origami*? *

Sim Não

26) Você já fez algum curso sobre o uso de *Origami* nas aulas de matemática? *

Sim Não

27) Conte um pouco sobre sua experiência com o conteúdo de Fração, seja como aluno, estagiário, professor e/ou pesquisador. *

28) Como você explicaria o que é Fração? *

29) Escolha pelo menos um pré-requisito que você considere importante para compreender Fração e justifique. *

30) Como você introduziria o conceito de Fração no 6º ano? *

31) Defina uma sequência didática? *

32) E como você apresentaria uma sequência didática para introduzir Frações? *

33) O que você espera aprender com estas atividades ou qual a sua expectativa em relação ao curso? *

C - Atividades

UFRRJ	**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO** **PPGEDUCIMAT – PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIÊNCIAS E MATEMÁTICA** **<u>Ficha 01</u>** **Aluno(a):** ____

Como trabalho semanal faça o seu relatório normalmente relatando o que aprendeu durante a semana e no final responda às seguintes perguntas.

1) a) Usando o quadrado a partir da folha A4 até que metade de metade é possível fazer, dobrando? Explique ou justifique sua resposta.

b) Se cortar a folha A4 ao meio e a partir daí fizer as dobras, você conseguirá ir até as mesmas frações que foi usando a folha inteira? Explique.

c) E se for cortando? Poderá encontrar mais metades de metades indefinidamente ou não? Até onde poderia ou conseguiria fazer, explique.

d) Desenhe um quadrado e em seguida desenhe metades de metades indefinidamente até onde for possível.

Escreva as frações que encontrou.

2) a) Quais são todas as frações possíveis de serem representadas com o seu material cujo denominador é potência de dois que são maiores que 1/10 e menor que 1_ o quadrado inteiro?

b) Que perguntas você faria para os seus alunos a partir das respostas dadas no item anterior?

c) Que conceitos matemáticos estão sendo explorados com as perguntas acima?

d) Que pergunta você faria usando o material que seja possível encontrar uma solução e não encontrar uma solução?

e) Que pergunta você faria para o aluno descobrir a equivalência de frações?

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
PPGEDUCIMAT – PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
Ficha 02
Aluno(a): ____

Na aula passada, você dobrou e cortou diferentes círculos para representar frações até 1/10. Com o material responda os itens a seguir.

1) a) Com o círculo construído, até que metade de metade é possível fazer, dobrando? Explique ou justifique sua resposta.

b) E se for cortando? Poderá encontrar mais metades de metades indefinidamente ou não? Até onde poderia ou conseguiria fazer, explique.

c) Você conseguiu fazer tantos cortes quanto fez no quadrado?

d) Desenhe um círculo e em seguida desenhe metades de metades indefinidamente até onde for possível.

2) **Escreva as frações que encontrou.**

a) Usando o material identifique que frações podem ser encontradas entre as frações abaixo, se houver. Em caso negativo, justifique sua resposta.

a.1) O círculo branco e a peça pink, isto é, 1 e 1/2?

a.2) A peça pink e a peça amarela, isto é, 1/2 e 1/3?

a.3) A peça amarela e a peça vermelha, isto é, 1/3 e 1/4?

a.4) A peça vermelha e a peça azul, isto é, 1/4 e 1/5?

a.5) A peça azul e a peça laranja, isto é, 1/5 e 1/6?

a.6) A peça laranja e a peça verde, isto é, 1/6 e 1/7?

a.7) A peça verde e a peça rosa, isto é, 1/7 e 1/8?

a.8) A peça rosa e a peça amarelo forte, isto é, 1/8 e 1/9?

a.9) A amarelo neon e a peça lilás, isto é, 1/9 e 1/10?

3) Quais são **todas** as frações possíveis de serem representadas com o seu material que são maiores que 1/10 e menor que 1? Lembrando que podem ser usadas mais de uma peça de cada tipo para representá-las? Escreva em ordem crescente de tamanho.

4) Trabalhando com os recortes fracionários foi proposto a dois estudantes do Ensino Médio que separassem as peças que foram obtidas dobrando e cortando o quadrado sucessivamente.

Quais são todas as frações possíveis de serem representadas com o seu material cujo denominador é potência de dois que são maiores que 1/10 e menor que 1_ o quadrado inteiro?

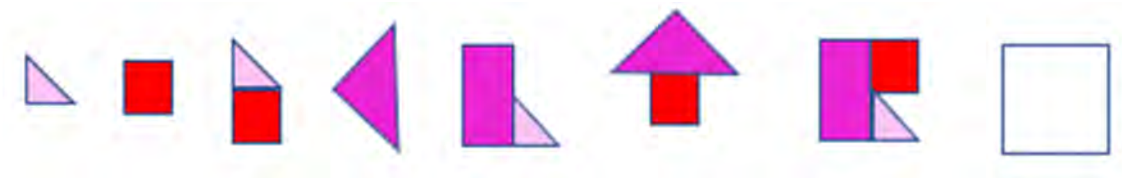
Eles pegaram uma peça de cada um do conjunto de peças rosas, vermelhas e pink

Em seguida, foi solicitado que pegasse uma peça de cada cor e as colocasse em ordem crescente ou decrescente. Ao que eles responderam, na ordem:

Branco, pink, vermelho e rosa ou

Rosa, vermelho, pink e branco. Veja desenho.

Feito isso, foi pedido que encontrassem alguma peça deste conjunto, para ser inserida entre cada uma das peças sequenciadas sobre a mesa. Depois de muito pensarem e testarem encontraram:



Comente a resposta

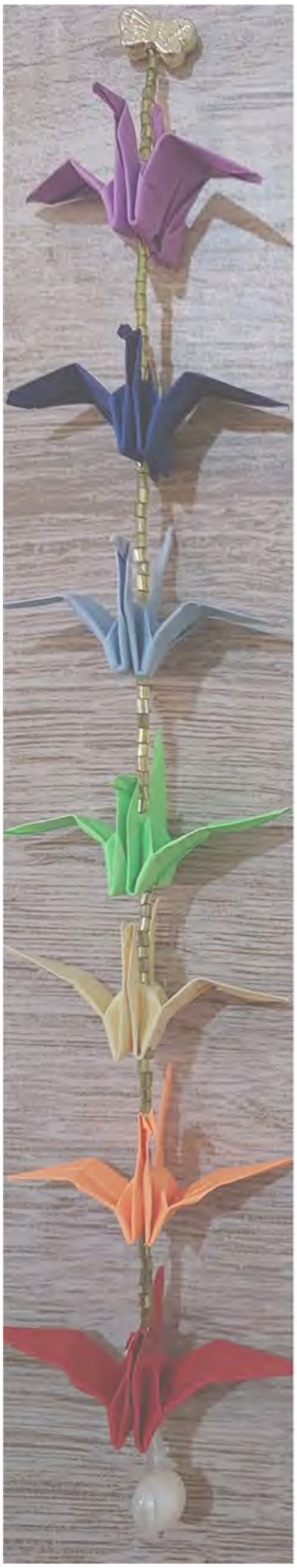
Ao serem questionados que frações estavam representadas, responderam:

$\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$; 1, respectivamente.

Comente.

5) Você construiu dois *kits* diferentes, representando as frações até 1/10. Um que divide o quadrado e outro que divide o círculo. Na sua opinião, quais habilidades são desenvolvidas em cada um deles, além de ver na prática como se dobra para obter as frações? Considere aspectos referentes ao recurso material e à aprendizagem matemática.

D – Produto Educacional



As dobras da arte do Origami para a Construção do Conceito de Fração: guia de atividades prática

Cristina Mayumi Hamada
Dora Soraia Kindel

As dobras da arte do Origami para a Construção do Conceito de Fração: guia de atividades prática

Cristina Mayumi Hamada

Orientadora: Profª Drª Dora Soraia Kindel

Seropédica - RJ
2023

Cristina Mayumi Hamada

As dobras da arte do Origami para a Construção do Conceito de Fração: guia de atividades prática

Produto apresentado à Banca Examinadora do Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática, da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre no Curso de Mestrado Profissional.

Orientadora: Profª Drª Dora Soraia Kindel

Seropédica - RJ
2023

APRESENTAÇÃO

A elaboração de um guia de atividades prática é um produto educacional da dissertação de Mestrado Profissional em Educação em Ciências e Matemática, da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, intitulada "Construção do conceito de fração: olhares através da dobradura", defendida no ano de 2023.

A questão norteadora para realização da dissertação foi de que maneira os licenciandos de matemática se desenvolvem com atividades exploratórias/investigativas para a construção do conceito de fração, de forma a potencializar as dobraduras em papel como recurso metodológico de ensino?

O produto educacional se constitui de vinte três videoaulas apresentadas na plataforma YouTube, referente a quinze vídeos para construção do kit na figura geométrica quadrado e oito vídeos para construção do kit na figura geométrica círculo, para o estudo do conceito de fração.

Além de outros conceitos matemáticos que aparecem no momento da elaboração dos kits e a aprendizagem com os instrumentos de medida.

PRODUTO EDUCACIONAL

Apresentar um produto educacional é uma maneira de tornar pública a realização da pesquisa ao longo do mestrado profissional, o que favorece a prática pedagógica com estratégias educacionais como recurso.

O produto educacional beneficiará de forma inspiradora aos professores de matemática e profissionais da educação que se interessar por esse assunto e caso necessário fazer as mudanças necessárias para aplicação.

O material se encontra no endereço eletrônico: @UniversodasIdeias-cm6js.

Apresenta se as construções dos kits na ordem que as dobraduras são executadas, relacionando a fração anterior com a próxima.

Construção do kit quadrado

No quadro 1, consta as etapas e o nome das atividades para construção do kit quadrado.

Quadro 1: Etapas e nome das atividades

Etapas	Nome das atividades
1º	Construção do quadrado
2º	Metade do quadrado
3º	Metade da metade do quadrado
4º	Outras formas de representar metade da metade
5º	Um oitavo do quadrado
6º	Mais ou menos um terço do quadrado
7º	Manusear o par de esquadros
8º	Dividir o segmento dado em n partes iguais e um terço
9º	Outras maneiras de achar um terço
10º	Um sexto
11º	Um nono
12º	Um quinto
13º	Um décimo
14º	Um sétimo
15º	Kit quadrado com cores

Fonte: Elaborado pela autora

1 – Construção do quadrado

Objetivo: Construir um quadrado em folha de papel A4

Descrição: A folha A4 é retangular, geralmente medindo (21 x 29) para fazer o quadrado pegue uma das pontas (vértice), leve-a até ao outro lado (comprimento) e marque na dobra. Esta dobra é denominada diagonal do quadrado. Após essa dobra "sobrará" um retângulo, recorte-a para ficar apenas o quadrado. Outra maneira é pegar duas folhas A4 e sobrepor uma a outra, sendo que uma na posição vertical e a outra na forma horizontal.

Link: https://youtu.be/O3TB_hHH6u0

Sugestão de conteúdo: Utilizar a metade da folha A4, ou seja, de uma folha fazer dois quadrados.

2 – Metade do quadrado
Objetivo: Representar de diversas maneiras a metade do quadrado
Descrição: Com o quadrado em mãos, pegar uma das pontas (vértice) e levar para o vértice oposto, dobrando na diagonal. Outra forma é pegar um dos vértices e levar para o vértice do mesmo lado, dobrando na vertical ou horizontal.
Link:https://youtu.be/6CNqjU2FO1c
Sugestão de conteúdo: Diagonal, metade, figura geométrica e rotação.

3 – Metade da metade do quadrado
Objetivo: Achar a metade da metade do quadrado
Descrição: Com a metade em forma de triângulo (diagonal), dobrar na metade, achando quatro triângulos. Ou com a outra metade em forma de retângulo (vertical ou horizontal), dobrar na metade, achando quatro quadrado.
Link: https://youtu.be/FmBxO3a4lNw
Sugestão de conteúdo: Figuras geométricas.

4 – Outras formas de representar metade da metade
Objetivo: Representar de outra forma a metade da metade
Descrição: Com a metade representada pela vertical ou horizontal, dobrar na metade de forma vertical ou horizontal, achando quatro retângulos.
Link: https://youtu.be/bJx7ytAzI9s
Sugestão de conteúdo: Figuras geométricas.

5 – Um oitavo do quadrado
Objetivo: Dobrar o quadrado para achar um oitavo
Descrição: Com a representação do quadrado dobrado em quatro partes iguais, dobra-lo mais uma vez para achar a metade desta quarta parte. Se estiver com a figura triângulo em mãos, que começou pela diagonal, dobre mais uma vez ao meio e achar os oitavos em forma triangular. Ou se estiver com a quarta parte em forma de quadrado, dobre novamente ao meio e terá os oitavos em forma retangular. E a outra maneira é se estiver com a quarta parte em forma de retângulo, dobre novamente ao meio e terá os oitavos em forma retangular.
Link: https://youtu.be/HF9PwKH9BsE
Sugestão de conteúdo: Figuras geométricas.

6 – Mais ou menos um terço do quadrado
Objetivo: Mostrar que com a dobradura não fica exata a divisão
Descrição: Tentar achar através da dobradura a terça parte do quadrado, buscar soluções para encontrar com as dobras o objetivo.
Link: https://youtu.be/gR6VxjSe8kY
Sugestão de conteúdo: Área.

7 – Manusear o par de esquadros
Objetivo: Aprender a utilizar o par de esquadros para traçar paralelas e perpendiculares
Descrição: Como não foi possível dobrar o quadrado com exatidão para achar a terça parte, utilizamos o instrumento par de esquadros. Descreve como é esta ferramenta e para que serve. O esquadro escaleno geralmente serve de suporte para o esquadro isósceles deslizar. Primeiramente, para traçar paralelas, trace uma reta, posicione o esquadro isósceles em cima dessa reta e coloque o esquadro escaleno na parte de baixo, segure-o firme e deslize o esquadro isósceles traçando as paralelas. E para fazer as perpendiculares, continue segurando firme o esquadro escaleno e rotacione no sentido horário o esquadro isósceles.
Link: https://youtu.be/ZeoyHbsTYIM
Sugestão de conteúdo: Estudar os triângulos – classificação por lados e ângulos. Paralelismo e perpendicularismo.

8 – Dividir o segmento dado em n partes iguais e um terço
Objetivo: Dividir o segmento em quantas partes desejar e representar a terça parte com esta técnica no papel
Descrição: Trace uma reta e marque dois pontos A e B (um segmento) em posições distintas na reta. Trace uma reta suporte a partir do ponto A, que não seja perpendicular, mas com um certo ângulo. Nesse momento conhece se o compasso, ele serve para transportar medidas. Abra-o na medida que desejar e marque n partes iguais na reta suporte, na última marcação ligue ao ponto B e com auxilio do par de esquadros trace as paralelas. Com este mesmo procedimento será realizado no quadrado para achar a terça parte no papel.
Link: https://youtu.be/2u5_sypChcY

9 – Outras maneiras de achar um terço
Objetivo: Mostrar com a dobradura como se acha 1/3
Descrição: Dobre o quadrado na diagonal, depois na vertical ou horizontal, dobrando nas duas formas para achar a metade do quadrado. Nesta última metade, dobre na diagonal desse retângulo, surgirá um ponto de intersecção entre a diagonal do quadrado com a diagonal do retângulo, esse ponto marcará um terço do quadrado. Utilizando o lado do quadrado como paralelas, dobre novamente para achar o outro terço.
Link: https://youtu.be/HObrX6AyQuQ
Sugestão de conteúdo: Ponto de interseção entre duas retas concorrentes.

10 – Um sexto
Objetivo: Mostrar que um sexto é a metade de 1/3
Descrição: Depois de dividir o quadrado em três partes iguais, dobre ao meio de forma horizontal e a outa maneira é de forma vertical, assim acha se o sexto de duas maneiras.
Link: https://youtu.be/9DemDYCrfss

11 – Um nono
Objetivo: Mostrar que um nono é a terça paetê de 1/3
Descrição: Com o quadrado dividido na vertical em três partes iguais, fará o mesmo processo na horizontal e a outra maneira é dividir o lado do quadrado em nove partes iguais, utilizando a técnica de dividir o segmento em nove partes iguais, no qual ficará todas as divisões na vertical ou horizontal.
Link: https://youtu.be/r59G7dsCFYY

12 – Um quinto
Objetivo: Achar 1/5 por divisões de segmento ou dobradura
Descrição: A primeira forma é através da técnica da divisão de segmentos em cinco partes iguais e a outra é o mesmo processo realizado no terço, dobrar na diagonal do quadrado, depois na vertical, achando as duas metades do quadrado de maneiras diferentes, em um dos lados achar a metade para encontrar a quarta parte, dobre na diagonal desse um quarto e o ponto de intersecção é um quinto, utilizando o lado do quadrado como paralelas, dobre mais quatro vezes e assim o quadrado estará dividido em cinco partes iguais.
Link: https://youtu.be/V9anT5ek0cE

13 – Um décimo

Objetivo: Mostrar que um décimo é a metade de 1/5

Descrição: Depois de dividir o quadrado em cinco partes iguais, dobre ao meio de forma horizontal e a outa maneira é de forma vertical, assim acha se o décimo de duas maneiras.

Link:https://youtu.be/aY9hzXxIKPQ

14 – Um sétimo

Objetivo: Achar um sétimo por divisões de segmento ou dobradura

Descrição: Através da divisão de segmentos em sete partes iguais é umas maneiras e a outra é através da diagonal do quadrado e achando a diagonal de um sexto, ponto de intersecção e dobrando utilizando o lado do quadrado como paralelas.

Link: https://youtu.be/U80KYeM7TEk

15 – Kit quadrado com cores

Objetivo: As cores contribuem para visualização e a relação com as frações

Descrição: A cada representação fracionária foi designada uma cor para padronizar e ajudar na visualização. Além da apresentação de todo o kit quadrado

Link: https://youtu.be/fRByfHHxMRs

Figura: Padronização das frações com as cores

Fonte: Elaborado pela autora

Construção do kit círculo

No quadro 2, consta as etapas e o nome das atividades para construção do kit círculo.

Quadro 2: Etapas e nome das atividades

Etapas	Nome das atividades
1º	Construindo circunferências
2º	Metade – metade da metade e um oitavo do círculo
3º	Manusear o transferidor
4º	Um terço e um sexto no círculo
5º	Um quinto e um décimo no círculo
6º	Um sétimo e um nono no círculo
7º	Kit círculo
8º	Guardar os kits no envelope

Fonte: Elaborado pela autora

1 – Construindo circunferências
Objetivo: Aprender a utilizar o compasso
Descrição: Apresentar o instrumento compasso e mostrar para que serve. Marcar um ponto O, que será denominado centro da circunferência, fincar a ponta seca do compasso nesse ponto, abrir o compasso na medida necessária, porém para ficar padronizado escolhemos a medida de raio seis centímetros e traçar a circunferência. E para treinar traçar várias circunferências com vários tamanhos de raio.
Link: https://youtu.be/B0SKp_KIV2w
Sugestão de conteúdo: Centro da circunferência, raio, diâmetro, corda, diferença entre circunferência e círculo.

2 – Metade – metade da metade e um oitavo do círculo
Objetivo: Com a dobradura achar 1/2 - 1/4 e 1/8 do círculo
Descrição: Dobrando ao meio para representar 1/2, em seguida ao meio novamente para representar 1/4 e ao meio novamente para representar 1/8.
Link: https://youtu.be/k75bbIkazzg

3 – Manusear o transferidor
Objetivo: Aprender a usar o transferidor
Descrição: Traçar um segmento OA, que representará o raio. O ponto O será posicionado o centro do transferidor e o segmento será onde se encontra a linha de fé do transferidor. Escolha o ângulo desejado, marque e ligue esta marcação ao centro da circunferência.
Link: https://youtu.be/gUvoxH5ZVLg
Sugestão de conteúdo: Ângulos

4 – Um terço e um sexto no círculo
Objetivo: Mostrar que para achar um terço precisa se do transferidor e consequentemente dobrando na metade, temos 1/6
Descrição: Com o círculo em mãos, traçar o raio, utilizando o transferidor para marcar 360º dividido por três, logo 120º, assim dividirá o círculo em três partes iguais, achando a terça parte. Para achar os sextos, dobre cada terço ao meio, assim terá seis partes iguais.
Link: https://youtu.be/hWW-Jsr16kE

5 – Um quinto e um décimo no círculo
Objetivo: Mostrar que para achar um terço precisa se do transferidor e consequentemente dobrando na metade, temos 1/10
Descrição: Com o círculo em mãos, traçar o raio, utilizando o transferidor para marcar 360º dividido por cinco, logo 72º, assim dividirá o círculo em cinco partes iguais, achando a quinta parte. Para achar os décimos, dobre cada quinta parte ao meio, assim terá dez partes iguais.
Link: https://youtu.be/cWhfpxPFWas

6 – Um sétimo e um nono no círculo
Objetivo: Mostrar que com a dobradura não é possível achar 1/7 e 1/9, mas pode se utilizar o transferidor
Descrição: Utilizando o transferidor para dividir o círculo em sete (360º : 7 = 51,42º, aproximadamente, 52º e em nove (360º : 9 = 40º). Desta maneira encontrará os sétimos e os nonos.
Link: https://youtu.be/E9rftfPufnY

7 – Kit círculo
Objetivo: Mostrar todas as frações com cores no círculo
Descrição: Apresentar todo o kit pronto com as respectivas frações com as suas cores, iguais a do kit quadrado.
Link: https://youtu.be/Fv22-vDabC4

8 – Guardar os kits no envelope
Objetivo: Mostrar como fazer um envelope para guardar os kits
Descrição: Com uma folha A4 dobrar menos que a metade, nas laterais dobrar menos que a espessura de um dedo e grampear. Coloque as peças do kit e fecha a parte de cima, como um envelope
Link: https://youtu.be/Pq7sqlypUww

Para maior detalhamento de como pode ser realizado em sala de aula, como ocorreu, veja a dissertação "Construção do conceito de fração: olhares através da dobradura", que estará disponível no site da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - UFRRJ.

E – Tsuru

Como forma de agradecimento pela participação, a pesquisadora presenteou a todos da turma com os tsurus.

Figura 58 – Presentes de Tsurus

Fonte: Elaborado pela autora