

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT

DISSERTAÇÃO

UTILIZAÇÃO DE JOGOS DE CASSINO E DO APP INVENTOR COMO
FERRAMENTAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

LUCIANO DA SILVA FERREIRA

Seropédica

2024



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE
NACIONAL - PROFMAT

UTILIZAÇÃO DE JOGOS DE CASSINO E DO APP INVENTOR COMO
FERRAMENTAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM MATEMÁTICA

LUCIANO DA SILVA FERREIRA

Sob a orientação do professor

André Luiz Martins Pereira

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro – como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre em Matemática.

Seropédica

2024

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Ferreira, Luciano da Silva, 1975-

F382u UTILIZALÇÃO DE JOGOS DE CASSINO E DO APP INVENTOR
COMO FERRAMENTA DE ENSINO E APRENDIZAGEM MATEMÁTICA /
Luciano da Silva Ferreira. - NILÓPOLIS, 2024.

114 f.

Orientador: ANDRÉ LUIZ MARTINS PEREIRA.
Dissertação(Mestrado). -- Universidade Federal Rural
do Rio de Janeiro, MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA (PROFMAT), 2024.

1. JOGOS DE CASSINO. 2. ANÁLISE COMBINATÓRIA. 3.
PROBABILIDADE. 4. APLICATIVO MÓVEL. 5. AULAS. I.
PEREIRA, ANDRÉ LUIZ MARTINS , 1980-, orient. II
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA (PROFMAT) III.
Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS



Seropédica-RJ, 25 de abril de 2024.

LUCIANO DA SILVA FERREIRA

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção de grau de Mestre, no Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, área de Concentração em Matemática.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 25/04/2024

ANDRE LUIZ MARTINS PEREIRA Drº UFRRJ (Orientador- Presidente da Banca)

EDIVALDO FIGUEIREDO FONTES JUNIOR Drº UFRRJ (membro interno)

ANDRÉ GUIMARÃES VALENTE Drº IFRJ-RJ (externo à Instituição)



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
SISTEMA INTEGRADO DE PATRIMÔNIO, ADMINISTRAÇÃO E
CONTRATOS

FOLHA DE ASSINATURAS

ATA N° ata/2024 - ICE (12.28.01.23)
(N° do Documento: 1450)

(N° do Protocolo: NÃO PROTOCOLADO)

(Assinado digitalmente em 29/04/2024 19:34)

ANDRÉ LUIZ MARTINS PEREIRA

PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
PROFMAT (12.28.01.00.00.65)

Matrícula: ###180#6

(Assinado digitalmente em 29/04/2024 18:33)

EDIVALDO FIGUEIREDO FONTES JUNIOR

PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR
DeptM (12.28.01.00.00.63)

Matrícula: ###648#5

(Assinado digitalmente em 29/04/2024 17:59)

ANDRÉ GUIMARÃES VALENTE

ASSINANTE EXTERNO
CPF: ###.###.577-##

Visualize o documento original em <https://sipac.ufrrj.br/documentos/> informando seu número: 1450, ano: 2024,

tipo: ATA, data de emissão: 29/04/2024 e o código de verificação: 12214f0dc6

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar quero agradecer a Deus pela minha vida e por permitir que chegasse a conquistar meus objetivos.

Aos meus professores do Profmat, em especial à professora Aline Maurício, que estudamos juntos na graduação e a reencontrei como professora do curso, e contribuíram enormemente para a minha trajetória até esse grande momento.

Ao professor André, meu orientador e coordenador do Profmat por ter acreditado no meu trabalho.

Aos meus colegas de turma, com união, dedicação e trocas de experiências, tornaram os estudos mais leves e dinâmicos, proporcionando momentos de alegria.

À minha esposa que sempre esteve ao meu lado me incentivando a seguir em frente em todos os momentos.

À minha filha Stephanie, que mesmo com pouca idade compreendeu a minha dedicação e os momentos em que eu precisei não estar presente ao seu lado.

Ao meu pai (in memoriam), juntamente com minha mãe, me educaram, para que eu me tornasse uma pessoa de bem e me ensinaram a não desistir mesmo que a luta seja árdua.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Finance Code 001.

RESUMO

FERREIRA, Luciano da Silva. **Utilização de jogos de cassino e do app inventor como ferramentas de ensino e aprendizagem matemática** 2024 Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2024

O trabalho proposto tem como finalidade melhorar a compreensão dos conteúdos de análise combinatória e probabilidade por meio de atividades que simulem alguns jogos de cassino, foi desenvolvido um aplicativo para aparelhos móveis com o objetivo de simular situações que envolvem esses jogos. No primeiro momento, serão explicados esses jogos (roleta, poker e blackjack) com suas regras. Após a apresentação desses jogos iremos abordar os conteúdos de análise combinatória e probabilidade necessários para a resolução do problema. Todo conteúdo apresentado na aula será exemplificado utilizando os mais variados jogos de cassino com o objetivo de estimular a curiosidade de todos os alunos. Iremos apresentar um aplicativo chamado *Casmath*, construído a partir do software App Inventor. Esse jogo consiste num quiz de perguntas e respostas relacionadas a situações que envolvam análise combinatória e probabilidade nos jogos de roleta, poker e blackjack. Para que essa aula possa ser aplicada, foi construída uma sequência didática com oito planos de aulas, onde cada aula tem duração de 1 hora e 40 minutos cada. Com isso, este trabalho mostra que o *Casmath* pode ser usado para auxiliar no ensino de análise combinatória e probabilidade.

Palavras-chave: análise combinatória, probabilidade, jogos de cassino, aplicativo móvel, App Inventor, planos de aulas, sequência didática

ABSTRACT

FERREIRA, Luciano da Silva. **Utilização de jogos de cassino e do app inventor como ferramentas de ensino e aprendizagem matemática** 2024 Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2024

The proposed work aims to improve understanding of the contents of combinatorial analysis and probability through activities that simulate some casino games. An application was developed for mobile devices with the aim of simulating situations involving these games. Firstly, these games (roulette, poker, and blackjack) will be explained with their rules. After presenting these games, we will address the combinatorial analysis and probability content necessary to solve the problem. All content presented in the class will be exemplified using the most varied casino games with the aim of stimulating the curiosity of all students. We will present a mobile app called *Casmath*, built using App Inventor software. This game consists of a question-and-answer quiz related to situations involving combinatorial analysis and probability in roulette, poker, and blackjack games. In order for this class to be applied, a didactic sequence was created with eight lesson plans, where each class lasts 1 hour and 40 minutes each. Therefore, this work shows that *Casmath* can be used to assist in teaching combinatorial analysis and probability.

Keywords: combinatorial analysis, probability, casino games, mobile application, App Inventor, lessons planes, teaching sequence

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - roleta européia	27
Figura 2 - roleta americana	27
Figura 3 - roleta francesa.....	28
Figura 4 – royal flush.....	30
Figura 5 – straight flush	30
Figura 6 - quadra.....	31
Figura 7 – full house	31
Figura 8 – flush.....	32
Figura 9 - sequência.....	32
Figura 10 - trio.....	33
Figura 11 - dois pares.....	33
Figura 12 - par	34
Figura 13 - carta alta.....	34
Figura 14 – valor das cartas no blackjack	35
Figura 15 - tela inicial	39
Figura 16 - alterando o idioma	39
Figura 17 - dando nome ao projeto	40
Figura 18 - aba designer	40
Figura 19 - aba blocos.....	41
Figura 20 - blocos	42
Figura 21 - blocos específicos	43
Figura 22 - adicionando tela	43
Figura 23 - dando o nome da tela.....	44
Figura 24 - testando o aplicativo.....	45
Figura 25 - compilação	45
Figura 26 - escaneamento	46
Figura 27 - galeria do MIT App Inventor.....	46
Figura 28 - privacidade	47
Figura 29 - tela inicial do Casmath	48
Figura 30 - programação do Casmath.....	49
Figura 31 - opções de jogo.....	49
Figura 32 - aba blocos do Casmath	50
Figura 33 - tela inicial do jogo de roleta (aba designer)	50
Figura 34 - tela inicial do jogo de roleta (aba blocos)	51
Figura 35 - questão do quiz (aba designer).....	51
Figura 36 - questão do quiz (aba blocos)	52
Figura 37 - mensagem avisando do erro (aba designer)	52
Figura 38 - mensagem avisando do erro (aba blocos)	53
Figura 39 - tela da resposta (aba designer)	53
Figura 40 - tela da resposta (aba blocos).....	54
Figura 41 - tela final do quiz (aba designer).....	54
Figura 42 - tela final do quiz (aba blocos).....	55
Figura 43 - questão de probabilidade envolvendo roleta	56
Figura 44 - resposta da questão	57

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LDB – Lei de Diretrizes e Bases

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

TIC – Tecnologia da Informação e Comunicação

MIT – Massachusetts Institute of Technology (Instituto de Tecnologia de Massachusetts)

PC – Personal Computer (Computador Pessoal)

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - vantagens e desvantagens do uso de jogos	20
Tabela 2 - vantagens e desvantagens do uso de tecnologias	23

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	13
1 – O USO DE JOGOS E DE TECNOLOGIA NO NSINO.....	16
1.1 – O uso de jogos no ensino de Matemática.....	16
1.2 – O uso de tecnologia no ensino de Matemática.....	21
2 – OS JOGOS DE CASSINO E SUAS REGRAS.....	26
2.1 – Roleta.....	26
2.2 – Poker.....	29
2.3 – Blackjack.....	35
3 – O APLICATIVO MIT APP INVENTOR.....	37
3.1 – Sobre o MIT AppInventor.....	37
3.2 – Construção do aplicativo Casmath a partir do MIT App Inventor 2.....	48
4 – APLICATIVO CASMATH.....	56
4.1 – Descrevendo o Casmath.....	56
4.2 – O uso do Casmath na sala de aula.....	66
5 – UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE.....	67
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	112
REFERÊNCIAS.....	113

INTRODUÇÃO

Ao atuar como professor da rede pública dos ensinos fundamental e médio, por experiência, o autor do presente trabalho tem observado em conjunto com outros professores de Matemática da rede de ensino básico, a enorme dificuldade por parte de uma significativa parcela dos alunos em entender os conceitos de análise combinatória e probabilidade. Acreditamos que a grande dificuldade de tais conteúdos se deve a maneira que é exposto em sala de aula. Observa-se que, usualmente tais conteúdos são precedidos de uma rápida exposição teórica e apresentação de fórmulas. Em função disso, os alunos geralmente decoram essas fórmulas e não percebem a utilidade desses conteúdos no cotidiano. Nem sempre são apresentados problemas reais para desafiá-los, motivá-los e gerar discussões na sala de aula, não só com o professor mais também entre os alunos. Também é importante salientar que a análise combinatória e a probabilidade são cobradas com grande frequência no ENEM e em concursos públicos nos quais só exigem o ensino médio concluído. Segundo Morales (2023), um estudo realizado sobre análise de incidência de questões de Matemática no ENEM aponta que 9% são de análise combinatória e probabilidade.

Por outro lado, os jogos têm sido uma ferramenta muito útil na facilitação do ensino e aprendizagem em Matemática dos anos iniciais até os anos finais do ensino fundamental. Já no ensino médio, os jogos podem ser uma ferramenta muito útil na absorção do conteúdo, fazendo com que os alunos não apenas decorem fórmulas e teoremas, mas sim os apliquem para resolver problemas propostos nos jogos.

Diante das dificuldades dos alunos nesses conteúdos, surge uma pergunta: Como os jogos de cassino podem ser utilizados em questões de análise combinatória e probabilidade?

Nos jogos de azar, ao contrário do que se pensa, não é apenas a sorte que define o vencedor do jogo, mas também conhecer as regras e o conteúdo matemático envolvido. Iremos descrever alguns jogos de azar e mostraremos que existem conceitos matemáticos como técnicas de contagem e probabilidade que auxiliem o jogador nas tomadas de decisão para obter sucesso no jogo.

Esse trabalho foi desenvolvido com o objetivo de contribuir no aprendizado de análise combinatória e probabilidade por meio de um aplicativo de celular que usa jogos de cassino e criação de uma sequência didática.

Para que esse objetivo seja alcançado, foi criado um aplicativo, chamado *Casmath*, a partir de um software chamado MIT App Inventor¹.

O trabalho proposto tem como finalidade melhorar a compreensão dos conteúdos de análise combinatória e probabilidade através do *Casmath* e da sequência didática será aplicada as aulas.

Além da introdução, das considerações finais e das referências, essa dissertação está dividida em cinco capítulos.

O primeiro capítulo faz um referencial teórico sobre a utilização de jogos e tecnologias no ensino de matemática.

O segundo capítulo aborda os jogos de cassino e suas histórias e regras. Os jogos de cassino que serão abordados são roleta, poker e blackjack.

O terceiro capítulo descreve o aplicativo MIT App Inventor, que é um software que permite criar outros aplicativos. Será descrito os comandos que são utilizados e suas vantagens e como foi criado o aplicativo *Casmath* e seus comandos utilizados para a construção.

O quarto capítulo descreve o aplicativo *Casmath*, criado a partir do App Inventor e suas aplicações nos ensinamentos de análise combinatória e probabilidade.

O quinto capítulo aborda uma sequência didática das aulas de análise combinatória e probabilidade. Essa sequência está dividida em 8 aulas. Cada aula tem duração de 1 hora e 40 minutos, o conteúdo abordado, os objetivos e a metodologia. Na última aula será apresentado aos alunos o aplicativo *Casmath*, em que eles poderão baixar em seus celulares.

Por fim teremos as considerações finais, as referências bibliográficas utilizadas para a realização desta dissertação.

É importante ressaltar que o propósito deste trabalho não é induzir os alunos a praticarem jogos de azar, e sim mostrar que a matemática está presente nesses jogos.

¹ <https://appinventor.mit.edu/>

Ressaltamos que as atividades e o aplicativo *Casmath* utilizam esses jogos de azar para abordar problemas de análise combinatória e probabilidade, de forma alguma as pessoas (alunos) que forem jogar o *Casmath* devem pensar que estão preparados para jogar jogos on line como poker, blackjack e roleta apostando dinheiro, fato que pode levar a sua ruína financeira. Só ter o conhecimento das regras dos jogos e do conhecimento teórico da análise combinatória e probabilidade não fará com que tenha sucesso desses jogos de azar, pois como diz o próprio nome, existe uma maior probabilidade que você perca, isto é, em outras palavras, o jogo é feito para você perder.

1 – O USO DE JOGOS E DE TECNOLOGIA NO ENSINO

Nesse capítulo, vamos abordar o uso de jogos e o uso de tecnologia no ensino de Matemática.

1.1 – O uso de jogos no ensino de Matemática

A matemática é vista como uma disciplina difícil para muitos estudantes. De acordo com Baumgartel (2016, p.1):

Acredita-se que o motivo dessa percepção seja o histórico de altos índices de reprovação associados à disciplina e, também, uma questão cultural, pois pode-se notar que os estudantes já apresentam uma aversão à disciplina mesmo que ainda não tenham passado por situações que revelem alguma grande dificuldade.

A dificuldade decorre da maneira como é ensinado, onde primeiramente a parte teórica é apresentada e, em seguida, são propostos exercícios e problemas que, na maioria das vezes, não estão relacionados ao mundo real.

Para superar essa dificuldade dos alunos, foram propostas várias metodologias de ensino. Uma delas é a utilização de jogos.

A palavra jogo vem do latim *jocus*, que significa brincadeira, divertimento. É toda e qualquer atividade em que exista a figura do jogador e regras que podem ser para ambiente restrito ou livre. Os jogos são atividades estruturadas, praticadas com fins recreativos e em alguns casos fazem parte de instrumentos educacionais. Geralmente envolvem estimulação mental ou física e em muitos casos ambos. Muitos deles ajudam a desenvolver habilidades práticas, servem como uma forma de exercícios, ou realizam um papel educativo, simulação ou psicológica.

O jogo no ensino da matemática pode ser definido como uma metodologia lúdica que tem por objetivo facilitar a compreensão do aluno nos vários conceitos matemáticos. Tendo em vista que se caracteriza por uma atividade prática, almeja-se que o aluno possa livremente traçar suas estratégias e experimentá-las. De acordo com Alves, Bianchin (2010, p.285)

Os jogos não são apenas uma forma de divertimento: são meios que contribuem e enriquecem o desenvolvimento intelectual. [...] Com jogos, a criança desenvolve o seu raciocínio e conduz o seu conhecimento de forma descontraída e espontânea: no jogar, ela constrói um espaço de experimentação, de transição entre o mundo interno e externo.

Ou seja, os jogos fazem parte da vida da criança, tanto como divertimento, como favorecendo o seu desenvolvimento intelectual. Na educação infantil e no ensino fundamental, é comum a utilização de jogos como uma ferramenta facilitadora de ensino dos conteúdos. No ensino médio, os conteúdos são ensinados através de aulas expositivas e, notadamente carece da utilização de jogos.

O jogo, além de tornar as aulas dinâmicas, pode ser útil para que o professor possa identificar as dificuldades dos alunos, servindo de diagnóstico de aprendizagem. É a partir dos jogos, no ambiente escolar, que o aluno constrói o conhecimento matemático.

Menon e Silva (2016), em seus artigos, destacam a importância da interação entre o professor e os alunos na realização dos jogos, pois o jogo tem se mostrado uma ferramenta que auxilia no ensino e na aprendizagem, favorecendo ao aluno a oportunidade de desenvolver sua capacidade de aprendizagem e, ao professor, a transmissão do conhecimento sem que o aluno fique com a imagem negativa, e comum, sobre a matemática.

Em relação ao uso de jogos para o ensino, Silva e Kodama (2004, p.5), em seu artigo, destacam a mudança de posição do professor, que deixa de ser comunicador de conhecimento e passa a ser observador, organizador, consultor, mediador, controlador e incentivador da aprendizagem, ao longo do processo de construção do saber pelo aluno.

A utilização dos jogos no ensino tem seus benefícios dentre os quais diminuem os bloqueios apresentados por muitos alunos que temem a matemática e sentem-se incapacitados de aprendê-la. De acordo com Teixeira, Apresentação (2014, p.304)

Por meio da utilização de jogos, o aluno constrói seu conhecimento de maneira ativa e dinâmica e os sujeitos envolvidos estão geralmente mais próprios à ajuda mútua e à análise dos erros e dos acertos, proporcionando uma reflexão em profundidade sobre os conceitos que estão sendo discutidos.

Outro benefício dos jogos é deixar os alunos mais focados e mais concentrados, além de trabalhar as habilidades socioemocionais como criatividade, trabalho em equipe, disciplina, autonomia e persistência.

A colaboração do jogo com a educação matemática e científica ajudam na resolução de situações problemas e o desenvolvimento de diversas habilidades como de raciocínio lógico e espacial, de concentração, de interpretação, de previsão, de análise e de tomada de decisão.

De acordo com Noé (2022): “A aplicação dos jogos em sala de aula surge como uma oportunidade de socializar os alunos, busca a cooperação mútua, participação da equipe na busca incessante de elucidar o problema proposto pelo professor.”

Ou seja, os jogos também podem fazer com que os alunos interajam entre si. Para que isso seja concretizado, o professor deve ter um planejamento organizado e um jogo que incentive o aluno a buscar o resultado, uma vez que o jogo seja interessante, desafiador.

A utilização dos jogos durante as aulas deixa o aluno motivado e interessado pela disciplina de modo que a aprendizagem se torne mais atraente e significativa. Durante as aulas com jogos, o aluno é participativo na sua aprendizagem, ao contrário das aulas tradicionais.

De acordo com Melo, Lima (2022) “A matemática é um processo permanente que não se esgota. Assim, por meio do jogo, o aluno se torna mais crítico e confiante para desenvolver seu raciocínio lógico matemático.”

Além disso, os jogos ajudam na construção dos conceitos, apresentando momentos desafiadores aos alunos a fim de colocá-los, constantemente, diante de situações problema.

E, segundo Freitas, Silveira (2018, p. 40), os jogos

[...]permitem que o jogador crie uma consciência de suas jogadas, sabendo onde erraram e tendo como resgatar as atividades realizadas para que possa, em um próximo momento, não repetir os mesmos erros. Esta consciência criada pelo jogador, faz com que ele pense, organize, repense e reorganize suas jogadas, fazendo com que o pensamento seja elaborado, reelaborado, enfim, reestruturado.

O professor tem um papel fundamental na utilização dos jogos, pois cabe a ele a responsabilidade de elaborar, criar regras, de modo que o aluno se sinta desafiado, desperte o interesse, tenha vontade de aprender e obtenha os resultados desejados.

As atitudes do aluno durante a realização dos jogos têm um significado muito grande na aprendizagem, desenvolvem a autoconfiança de maneira que os alunos aprendam a respeitar as limitações.

De acordo com Franco *et al.*, (2018)

O jogo é uma ferramenta indispensável para o professor, possibilitando o avanço no processo ensino aprendizagem, tanto na assimilação dos papéis sociais, e na compreensão das relações afetivas, como, principalmente na construção do conhecimento, o professor precisa estimular o desenvolvimento da criatividade e imaginação do aluno.

É fundamental a participação dos professores nas brincadeiras dos alunos para que o desenvolvimento intelectual do educando seja estimulado. O professor precisa também ter consciência de que o jogo estimula, envolve, interage, acolhe e motiva o aluno, possibilitando viver a aprendizagem de modo significativo.

O artigo 35, parágrafo 3 da LDB, Brasil (1996, art. 35 §3) diz: “O ensino médio, etapa final da educação básica, com duração mínima de três anos, terá como finalidades: o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico.”

Como o 2º parágrafo do artigo 3º da LDB se baseia na liberdade de aprender e ensinar, não há argumentos que impeça de abordar o tema do trabalho na sala de aula. E no 3º parágrafo do artigo 35 da LDB confirma o propósito de abordar o jogo de cassino no campo matemático, pois dessa maneira o aluno desenvolverá a sua autonomia intelectual e o seu pensamento crítico.

De acordo com a BNCC, Brasil, (2018, p. 216): “[...] Desse modo, recursos didáticos como malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, [...] têm um papel essencial para a compreensão e utilização de noções matemáticas. [...]”

Segundo os PCN, Brasil, (1998, p. 46)

Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações problemas que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros, uma vez que as situações sucedem-se rapidamente e podem ser corrigidas de forma natural, no decorrer da ação, sem deixar marcas negativas.

Os jogos deixaram de ser utilizados na sala de aula, em especial no ensino médio. Para muitos, a matemática é uma disciplina rígida, séria, em que não se pode brincar, jogar. Com isso, surge uma triste realidade, que é a falta de motivação e interesse dos alunos.

Há jogos que não fazem parte do cotidiano escolar, que são os jogos de azar. Esses jogos não dependem apenas da habilidade da estratégia, sendo necessário também ter sorte para ganhar. Dentre os jogos estão a roleta, as cartas de baralho como poker. E a Matemática está presente nesses jogos.

Os conteúdos de análise combinatória e probabilidade são aplicados em jogos de azar como os jogos de cassino. Por exemplo, calcular o número de maneiras distintas que uma

sequência de cartas num jogo de poker podem ser formadas; a probabilidade de se ganhar o jogo com uma única jogada.

Muitos jogos de azar estão sendo desenvolvidos em aplicativos que, de acordo com as novas tecnologias na educação, os aplicativos são ferramentas digitais na educação. Além disso, os alunos podem acessar conteúdos relevantes, mergulhar em um universo de novos conhecimentos e manter uma proximidade muito maior com os educadores.

O uso de jogos tem suas vantagens e desvantagens. De acordo com Grandó (2000), a tabela 1 seguinte mostra essas vantagens e desvantagens.

Tabela 1 - vantagens e desvantagens do uso de jogos

Vantagens	Desvantagens
<ul style="list-style-type: none"> - fixação de conceitos já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno; - introdução e desenvolvimento de conceitos de difícil compreensão; - desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas (desafio dos jogos); - aprender a tomar decisões e saber avaliá-las; - significação para conceitos aparentemente incompreensíveis; - propicia o relacionamento das diferentes disciplinas (interdisciplinaridade); - o jogo requer a participação ativa do aluno na construção do seu próprio conhecimento; - o jogo favorece a socialização entre os alunos e a conscientização do trabalho em equipe; - a utilização dos jogos é um fator de motivação para os alunos; - dentre outras coisas, o jogo favorece o desenvolvimento da criatividade, de senso crítico, da participação, da competição "sadia", da observação, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do prazer em aprender; - as atividades com jogos podem ser utilizadas para reforçar ou recuperar habilidades de que os alunos necessitem. Útil no trabalho com alunos de diferentes níveis; - as atividades com jogos permitem ao professor identificar, diagnosticar alguns erros de aprendizagem, as atitudes e as 	<ul style="list-style-type: none"> - quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um caráter puramente aleatório, tornando-se um "apêndice" em sala de aula. Os alunos jogam e se sentem motivados apenas pelo jogo, sem saber porque jogam; - o tempo gasto com as atividades de jogo em sala de aula é maior e, se o professor não estiver preparado, pode existir um sacrifício de outros conteúdos pela falta de tempo; - as falsas concepções de que se devem ensinar todos os conceitos através de jogos. Então as aulas, em geral, transformam-se em verdadeiros cassinos, também sem sentido algum para o aluno; - a perda da "ludicidade" do jogo pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo; - a coerção do professor, exigindo que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, destruindo a voluntariedade pertencente à natureza do jogo; - a dificuldade de acesso e disponibilidade de material sobre o uso de jogos no ensino, que possam vir a subsidiar o trabalho docente.

dificuldades dos alunos.	
--------------------------	--

Fonte: Grando (2000, p. 35)

De acordo com a tabela, podemos observar que as vantagens e as desvantagens da utilização de jogos estão relacionadas com o planejamento. Se os jogos forem bem planejados e com antecedência, terão resultados satisfatórios.

1.2 – O uso de tecnologia no ensino de Matemática

Desde que surgiu, a tecnologia tem sido inserida no nosso dia a dia de várias maneiras, com o objetivo de facilitar e tornar simples várias situações do nosso cotidiano.

De acordo com Silva, Paiva, Fortes (2017, p. 192)

Os aplicativos para dispositivos móveis têm facilitado a vida de muitas pessoas, além de favorecer uma ampla extensão de impacto no mundo da tecnologia, levando portabilidade e flexibilidade para vários tipos de negócios, seja automação residencial, saúde e bem-estar, armazenamento de informações na nuvem, meios de expor conhecimento, dentre outros.

Em se tratando de ensino, a tecnologia pode facilitar o ensino e a aprendizagem, sendo importante saber utilizar as ferramentas tecnológicas educacionais com o intuito de motivar, conquistar o aluno e ampliar o conhecimento deste.

No início desse século, o ensino da Matemática tem enfrentado muitos desafios. E um desses desafios, talvez o maior de todos, é a tecnologia digital, pois ela faz parte da vida diária dos alunos. Porém, essa tecnologia não é utilizada com frequência no ambiente escolar. Existe uma resistência do aluno em relação à Matemática que, para muitos, é vista como temida, difícil e pouco interessante. Para isso, o uso das tecnologias digitais pode ser um grande aliado para reduzir a distância entre o ensino do século XX e o aluno do século XXI.

Segundo Scheneider, Nunes (2019, p. 73): “Assim, se torna imperativo que se explore o potencial das tecnologias digitais por outros caminhos, de modo que esses recursos possam se tornar ferramentas auxiliares ao ensino da Matemática.”

No ensino da matemática, o uso das tecnologias surge na década de 1990, iniciando pelo computador, fundamental para o ensino e a aprendizagem, tornando intenso o uso de

softwares matemáticos educacionais, jogos, planilhas e imagens. Em seguida, pela internet, que traz a realidade virtual e ambiental, os *blogs*, os vídeos educacionais; até chegar ao smartphone que veio para facilitar o uso da calculadora, do gravador de áudio e vídeo e da internet.

De acordo com Amâncio, Sanzovo (2020): “A efetiva contribuição de softwares educativos no processo de ensino-aprendizagem está diretamente ligada aos recursos que eles disponibilizam e a forma como são utilizados.”

Mas não podemos deixar de lado os livros e cadernos. Podemos dizer que a tecnologia pode ser usada como complemento motivador, incentivando a participação do aluno.

Segundo Freire (1996, p. 147)

Isto é, as tecnologias na educação precisam estar a serviço de relações e produções de reconhecimentos, ajudando na curiosidade epistemológica através da expressão criativa e cooperativa, oportunizando uma formação democratizada dos saberes.

Para Paulo Freire, é necessário a ampliação do pensar crítico em relação às tecnologias como desafios do reconhecimento social, pois a capacidade e disponibilidade curiosa às tecnologias são saberes necessários à prática educativa.

O uso das tecnologias possui vários benefícios, entre os quais: tornar a aprendizagem mais dinâmica, lúdica e prática. E permite o entrosamento dos alunos com o conteúdo e o desenvolvimento das habilidades criativas.

Segundo a BNCC (Brasil, 2018, p.9), temos como uma das competências gerais da educação básica.

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

Por outro lado, o uso da tecnologia no ensino tem seus desafios e suas dificuldades, dentre as quais: falta de acesso aos recursos existentes, dificuldades de concentração do aluno, de contato com o tutor, entre outros fatores.

Já a LDB (Brasil, 1996) indica a inclusão das TIC (Tecnologia da Informação e Comunicação) como forma de alfabetização digital em todos os níveis de ensino, do fundamental ao superior.

De acordo como os PCN (Brasil, 1998, p.96)

"É indiscutível a necessidade crescente do uso de computadores pelos alunos como instrumento de aprendizagem escolar, para que possam estar atualizados em relação às novas tecnologias da informação e se instrumentalizarem para as demandas sociais presentes e futuras."

O uso das tecnologias em sala de aula, de acordo com Martiniano (2021), possui vantagens e desvantagens, conforme a tabela 2 seguinte.

Tabela 2 - vantagens e desvantagens do uso de tecnologias

Vantagens	Desvantagens
Personalidade do ensino Flexibilidade de horário e geográfica Otimização da comunicação com os pais Universalização do acesso à informação Facilitação das atividades Aulas mais dinâmicas Estimula o autodidatismo	Distração dos alunos Qualidade das informações Superficialidade de conteúdos

Fonte: Martiniano (2021)

O professor tem papel fundamental no ensino através das tecnologias, pois cabe a ele ter o interesse em mudar sua metodologia fazendo com que as aulas fiquem mais claras e dinâmicas, com o intuito de despertar o interesse dos alunos pela Matemática. O uso das tecnologias nas salas de aula proporciona um ambiente de aprendizagem distinto, em que os alunos desenvolvem atividades, explorem formas diferentes de resolução de problemas, discutam com os colegas os possíveis resultados.

Porém, o professor tem suas dificuldades de utilizar as tecnologias e essas dificuldades surgem durante a formação. De acordo com Cruz (2012)

Observa-se, muitas vezes, nas escolas que os professores têm vontade de utilizar novos recursos de informática no ensino de matemática. Por não terem a formação adequada esses profissionais se sentem inseguros e com medo de mudar a maneira de ensinar, pois para isso terão que rever e ampliar seus conhecimentos. Assim, em atividades com o uso de tecnologias a formação de professores é totalmente indispensável.

No ensino da Matemática, o uso das tecnologias proporciona o ensino-aprendizagem de forma lúdica, prática e de fácil compreensão das atividades elaboradas. Por meio dessas tecnologias, pode-se tornar as aulas perfeitas ao invés de, por exemplo realizar desenhos geométricos ou construir gráficos de funções no quadro.

Dentre as tecnologias utilizadas no ensino, estão os aplicativos.

Em relação ao ensino de matemática, de acordo com a BNCC (Brasil, p. 267): “Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.”, é uma das competências específicas de Matemática.

Os aplicativos têm sido uma ferramenta de muita importância no dia a dia, pois facilita a vida das pessoas em diversas situações. No ensino e aprendizagem, não poderia ser diferente.

Medeiros (2021), em sua dissertação, questiona se os aplicativos ajudam ou atrapalham. Segundo o autor, os alunos podem se tornar dependentes da tecnologia, e esta possa substituir os professores. Por outro lado, a tecnologia pode tornar o ensino mais lúdico, interativo e divertido.

O autor destaca que o uso das tecnologias pode causar o afastamento social, mas também a aproximação de pessoas e que somente quando as tecnologias são usadas inadequadamente, os objetivos não são alcançados. Além disso, o autor destaca o uso dos recursos tecnológicos pelos alunos em sala de aula. O mau uso não contribuiria para o ensino aprendizagem e o uso correto favoreceria que os alunos realizassem as atividades propostas e tivessem os objetivos alcançados.

Os aplicativos utilizados pelo estudioso são: Rei da Matemática, utilizado para resolver conteúdos como operações fundamentais, geometria, frações etc.; Tindin, utilizado para resolver problemas de Matemática Financeira; Geocon HD, utilizado para o ensino de Geometria, podendo, por exemplo, fazer construções geométricas com o dedo.

Schneider e Nunes (2019), em seus artigos, analisaram os aplicativos móveis que podem auxiliar no processo de aprendizagem da matemática através de uma oficina com aplicativos móveis em uma escola pública do estado do Espírito Santo.

Os autores relatam os desafios enfrentados pelos professores no ensino de matemática no início desse século, devido ao pouco uso dos recursos tecnológicos no ambiente escolar. Já que a tecnologia digital faz parte da vida da maioria dos alunos, em seu contexto diário. Sabendo da resistência do aluno com a disciplina e da imagem de ser temida pela maioria dos estudantes por acharem difícil e desestimulante, foi necessário o uso de tecnologias digitais para tornar o ensino fácil e interessante.

Os autores destacam a presença cada dia a mais das tecnologias e as inúmeras funções que elas nos proporcionam em que os recursos se tornaram indispensáveis e propõe que esses recursos possam desempenhar um papel fundamental no ambiente escolar. Com isso, o uso dos aplicativos pode melhorar o desempenho dos alunos e há necessidade de inovações no processo de ensino e aprendizagem no conteúdo matemático.

Os autores desenvolveram a pesquisa com alunos do 8º e 9º anos do ensino fundamental e 1º ano do ensino médio e constatando que mais de 90% deles tinham aparelhos de smartphone. Os aplicativos que foram apresentados pelos alunos foram: My Script Calculator, Saresp 2018 7º e 9º ano, Math Bot, Tuto Math, Volume Calculadora, socratic, Fórmulas matemáticas, Calculadora de trigonometria, Math calculator, Photomath, Khan Academy, Mathway, Meu professor de cálculo e calculadora científica. Constatou-se que 40% dos estudantes já haviam utilizado algum app para a aprendizagem da matemática.

Um artigo publicado por Elias, Rocha, Motta e Kalinke (2018) fala de um software de programação chamado Inventor. Esse software possibilita a construção de outros aplicativos para o ensino de Matemática. Com esse software de programação app Inventor, é possível trabalhar diversos conteúdos matemáticos de forma mais atrativa para os alunos. Nesse artigo, os autores, através do Inventor, criaram um aplicativo voltado para os conteúdos de Sequências Numéricas e Progressão Aritmética.

Os autores definem o app Inventor como um recurso gratuito para a criação de aplicativos para celulares e tablets que possuem o sistema operacional Android. Eles descrevem a programação e acreditam que o app pode ser trazido para dentro do contexto escolar.

Nos próximos capítulos iremos abordar o aplicativo Inventor e o aplicativo *Casmath*, criado a partir do Inventor.

2 – OS JOGOS DE CASSINO E SUAS REGRAS

De acordo com Andrade (2017)

Os jogos de azar são aqueles em que a probabilidade de vitória é menor que a probabilidade de derrota. Esses tipos de jogos não dependem de sorte ou azar e nem somente das habilidades do jogador, mas de uma realidade que foi produzida baseada em probabilidade matemática.

Nesse capítulo, vamos falar dos principais jogos de cassino, abordando um pouco as suas histórias e as suas regras. Os jogos são: roleta, poker e blackjack.

2.1– Roleta

A roleta deriva do francês *roulette*, que significa “roda pequena”. É considerada um jogo de azar, isto é, se baseia na sorte. Ela foi criada pelo matemático francês Blaise Pascal em meados do século 17. Sua correspondência com Pierre de Fermat levou ao desenvolvimento da teoria da probabilidade.

O jogo de roleta e suas regras surgiram em cassinos em Paris, França, por volta de 1790. Durante o século 19, os irmãos franceses Francois e Louis Blanc divulgaram o jogo de roleta em cassinos por toda a Europa.

O objetivo do jogo é apostar e determinar em que número ou cor (vermelho ou preto) a bola cairá quando parar de dar voltas

A roleta possui várias versões, sendo as três mais conhecidas: Roleta Europeia, Roleta Americana e Roleta Francesa.

A Roleta Europeia é a favorita dos jogadores. Tem a numeração do 1 ao 36 nas cores vermelha e preta e contém apenas um 0 na cor verde. A figura 1 mostra um modelo de roleta europeia.

Figura 1 - roleta europeia



Fonte: [Roleta Europeia E Casino Em Linha. Pista De Rodas. Ilustração De Vetor De Estilo Plano Ilustração do Vetor - Ilustração de possibilidade, apostar: 227107393 \(dreamstime.com\)](#)

A Roleta americana possui 38 casas, sendo do 1 ao 36, alternando nas cores vermelha e preta e as casas 0 e 00, na cor verde, o que aumenta a probabilidade de a casa vencer com uma vantagem de 5,26%. A figura 2 mostra um modelo de roleta americana.

Figura 2 - roleta americana



Fonte: [Imagens vetorais Ruleta americana | Depositphotos](#)

A Roleta Francesa é semelhante à europeia, mas possui regras e possibilidades mais complexas e é a versão mais vantajosa para o apostador. Ela possui 37 casas, do 0 ao 36, sendo

que o 0 possui a casa verde e os números de 1 a 36 possuem casas alternando nas cores vermelha e preta. A figura 3 mostra um modelo de roleta francesa.

Figura 3 - roleta francesa



Fonte: [Roleta Francesa Online - Jogue Online Grátis \(Demo\) \(roleta77brazil.com\)](http://roleta77brazil.com)

Em todas as versões, a mesa de roleta está organizada da seguinte forma:

- 1st 12 (primeira dúzia)
- 2nd 12 (segunda dúzia)
- 3rd 12 (terceira dúzia)
- 1 – 18 (números do 1 ao 18)
- 19 – 36 (números do 19 ao 36)
- Even (números pares)
- Odd (números ímpares)
- Black (preto)
- Red (vermelho)

2.2– Poker

O poker é um jogo de cartas jogado por duas ou mais pessoas; muito comum em cassinos. É considerado o jogo de cartas mais jogados e mais popular do mundo.

Ele existe desde 1829 e começou na cidade americana de Nova Orleans com os colonos franceses. O jogo envolvia blefes (ato de iludir o adversário) ou apostas originalmente chamadas de ‘Poque’, que eram semelhantes ao *draw*¹ poker de hoje.

Em 1837, o poker era jogado nos Estados Unidos com 5 cartas por jogador, de um baralho de 20 cartas. Daí, o jogo se espalhou rapidamente e em pouco tempo foi introduzido o baralho de 52 cartas.

De acordo com Oliveira (2019)

O sucesso de um jogador no pôquer está ligado a muitos fatores, como: inteligência, estratégia, raciocínio, conhecimentos matemáticos, sorte e controle emocional. Sendo assim é um jogo que desenvolve muitas habilidades. O pôquer é um jogo fascinante e naturalmente atrativo. Às vezes, pois por mais que o jogador considere com uma mão boa, o fator sorte pode alterar a situação e uma pequena Probabilidade de derrota pode se verificar.

Basicamente o *poker* se baseia em uma combinação de cartas que possuem valores diferentes. O objetivo no Poker é ganhar o pote, ou seja, levar a soma das apostas dos outros jogadores. O pote é ganho durante o *Showdown*² com a melhor mão (maior combinação de cinco cartas), ou pela desistência de todos os outros jogadores.

Os jogadores recebem, inicialmente, 2 cartas, que são exclusivas de cada jogador. A partir daí, 5 cartas são expostas na mesa, na medida em que o jogo avança. Os jogadores podem fazer qualquer combinação usando cinco das sete cartas que estão disponíveis, para formar a melhor mão possível.

O poker possui várias variantes de jogo. A variante mais jogada é o *Texas Hold'em*, muito popular na maioria dos cassinos. O *Texas Hold'em* possui uma vantagem de apresentar várias estratégias e táticas.

No *poker*, o Ás é a maior carta e o 2 a menor. Entretanto o Ás pode ser usado como caixa baixa para se fazer um Straight Flush. São cinco cartas em sequência e do mesmo naipe.

² O showdown ocorre no final de uma mão de poker. É o momento em que todos os jogadores ainda com cartas na mão devem revelar a força das suas hole cards. Nesse momento, o jogador com a mão mais forte ganhará o pote.

As mãos de poker são:

- **Royal Flush** – É a mão mais forte no poker. Trata-se de uma sequência formada por dez, valete, dama, rei e ás, sendo todos do mesmo naipe, p.ex. espadas. A figura 4 mostra um exemplo de *royal flush*.

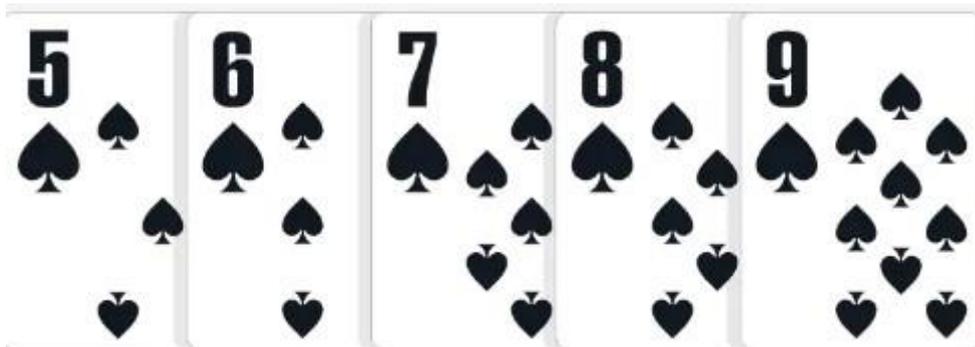
Figura 4 – *royal flush*



Fonte: <https://www.pokerstars.com/pt-BR/poker/>

- **Straight Flush** – É a segunda mão mais forte no *poker*. É composta por cinco cartas consecutivas do mesmo naipe. Se dois jogadores conseguirem um *straight flush*, o jogador com as cartas mais altas será o vencedor. A figura 5 mostra um exemplo de *straight flush*.

Figura 5 – *straight flush*



Fonte: <https://www.pokerstars.com/pt-BR/poker/>

- **Quadra** – Uma quadra são quatro cartas iguais, p.ex. quatro reis. Se dois jogadores tiverem uma quadra, então ganha aquele que tiver a quadra da carta com maior valor. Se ambos tiverem a mesma quadra (quatro cartas iguais na

mesa), então ganhará o jogador com a quinta carta mais alto. A figura 6 mostra um exemplo de quadra.

Figura 6 - quadra



Fonte: <https://www.pokerstars.com/pt-BR/poker/>

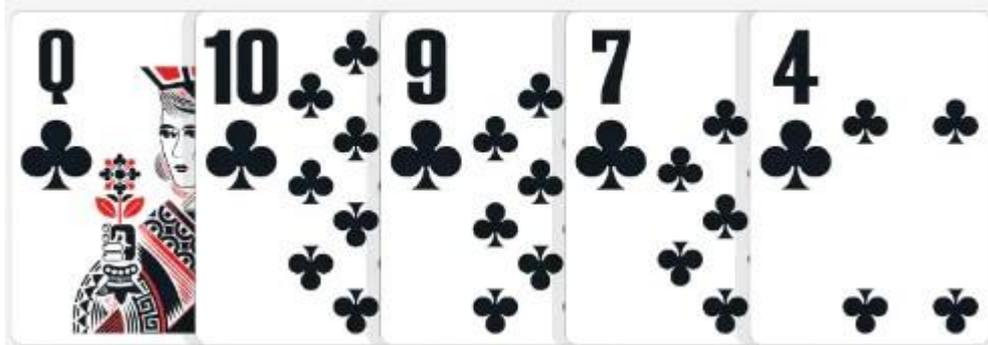
- **Full House** – Um *full house* é a combinação de um trio com um par. Se dois jogadores tiverem um *full house*, então ganhará aquele que tiver o trio maior. Se partilharem o mesmo trio, então o desempate será decidido pelo par. A figura 7 mostra um exemplo de *full house*.

Figura 7 – *full house*



Fonte: <https://www.pokerstars.com/pt-BR/poker/>

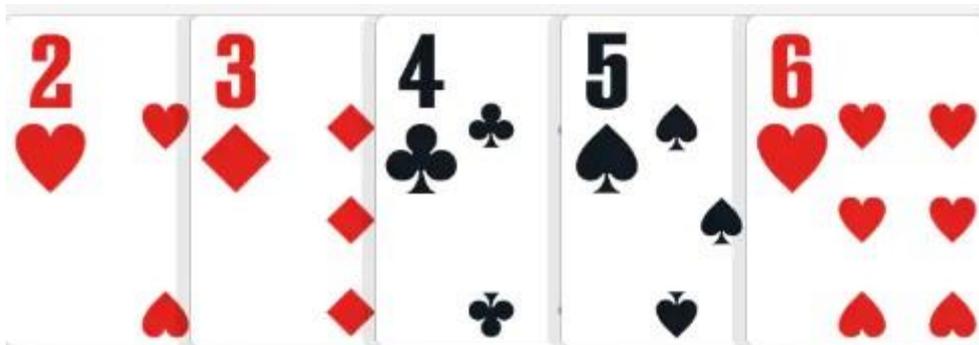
- **Flush** – Cinco cartas do mesmo naipe formam um *flush* (ou cor). Se dois jogadores tiverem um *flush*, então ganha aquele que tiver a carta mais alta. A figura 8 mostra um exemplo de *flush*.

Figura 8 – *flush*

Fonte: <https://www.pokerstars.com/pt-BR/poker/>

- **Sequência** – Cinco cartas consecutivas formam uma sequência (straight). Se dois jogadores tiverem uma sequência, então ganha aquele que tiver a carta mais alta. A figura 9 mostra um exemplo de sequência.

Figura 9 - sequência



Fonte: <https://www.pokerstars.com/pt-BR/poker/>

- **Trio** – Um trio (ou trinca) é uma combinação de poker formada por três cartas iguais. Se dois jogadores tiverem o mesmo trio, então as outras cartas, ou ambas as cartas, determinarão o vencedor, dado que uma mão de poker é sempre formada por cinco cartas. A figura 10 mostra um exemplo de trio.

Figura 10 - trio



Fonte: <https://www.pokerstars.com/pt-BR/poker/>

- **Dois pares** – Mãos com dois pares são, como é óbvio, compostas por dois pares. Se dois jogadores tiverem dois pares, o maior par determinará o vencedor. Se estes partilharem o maior par, então o desempate será decidido por quem tiver o melhor segundo par. Se também o partilharem, então o desempate será decidido pela quinta carta. A figura 11 mostra um exemplo de dois pares.

Figura 11 - dois pares



Fonte: <https://www.pokerstars.com/pt-BR/poker/>

- **Par** – Um par é composto por duas cartas iguais. Como uma mão de poker é sempre constituída por cinco cartas, as restantes cartas são os chamadas "kickers". No caso de dois jogadores partilharem o mesmo par, então ganhará aquele com melhor kicker. A figura 12 mostra um exemplo de par.

Figura 12 - par



Fonte: <https://www.pokerstars.com/pt-BR/poker/>

- **Carta alta** – Se não tiver nem mesmo um par, então você precisa olhar para a força das suas cartas de poker. Se dois jogadores no showdown não tiverem um par ou melhor, então o vencedor será aquele com as cartas mais altas. A figura 13 mostra um exemplo de carta alta.

Figura 13 - carta alta

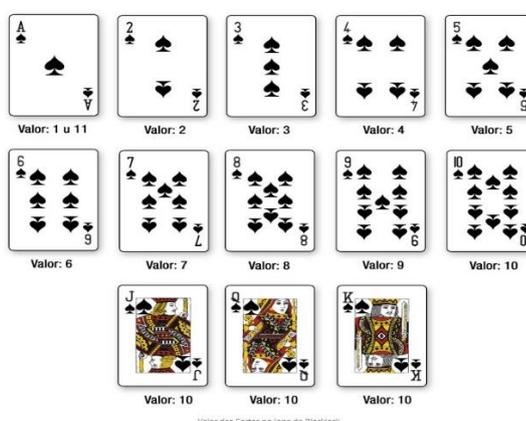


Fonte: <https://www.pokerstars.com/pt-BR/poker/>

2.3– Blackjack

O *blackjack* ou vinte-e-um é um jogo praticado com cartas em casinos e que pode ser jogado com 1 a 8 baralhos de 52 cartas. O objetivo do *blackjack* é derrotar o *dealer*³. Para fazer isso, você deve ter uma mão em que a pontuação seja mais elevada do que a mão do *dealer*, mas não exceda 21 no valor total. Como alternativa, você pode ganhar tendo uma pontuação menor que 22 quando o valor da mão do *dealer* ultrapassar 21. A figura 14 mostra o valor das cartas no *blackjack*.

Figura 14 – valor das cartas no *blackjack*



Fonte: [Introdução ao Blackjack - O Básico do Blackjack | Casino.es](#)

De acordo com Visitação (2022), o *Blackjack*, por ser um jogo que envolve Análise Combinatória e Probabilidade, é uma ferramenta que pode estimular de forma promissora a capacidade de dedução com base em cálculos e evidências.

Não se sabe ao certo como surgiu o *blackjack*. Acredita-se que o jogo seria uma adaptação do jogo francês *Vingt-et-um* (vinte e um). O *Vingt-et-um*, por sua vez, surgiu de um jogo italiano chamado *Sette e Mezzo* (Sete e Meio). O *Sette e Mezzo* era jogado com um baralho de 40 cartas, onde as cartas J (valetes), Q (damas) e K (reis) valiam meio ponto e do Ás ao 7 valiam de acordo com seu valor.

³ Um *dealer* de cassino é a pessoa encarregada de distribuir as cartas em jogos como *blackjack* ou pôquer, entre outros. O *dealer* é um profissional responsável pelo desenrolar das diferentes partidas e dos pagamentos das apostas. Ele precisa saber administrar corretamente a mesa de jogo e as apostas que são feitas.

No século 18, o jogo foi trazido para América do Norte pelos colonizadores franceses. Nessa época ficou conhecido apenas como 21.

Para começar a jogar 21 no baralho, serão necessários de 3 a 12 jogadores e 1 ou 2 baralhos sem coringas, dependendo do número de jogadores.

Com quantas cartas começa o jogo? Os jogadores colocam suas apostas e recebem duas cartas viradas para cima e o *dealer* (pessoa que distribui as cartas e administra o jogo), uma carta só ou duas cartas (uma de face para baixo), dependendo da variante sendo jogada.

E como funciona a pontuação no 21? Nesse jogo, as cartas 10, valetes, damas e reis têm valor dez. O Ás pode valer 1 ou 11 de acordo com sua escolha.

Quando você recebe suas cartas, pode escolher entre algumas ações. Você pode escolher pegar mais cartas, aumentando o valor de sua mão, ou manter sua mão, não adicionando mais cartas para não estourar.

As principais ações no jogo de blackjack são:

- **Dividir:** você transforma uma mão em duas, aumentando suas chances de ganhar. Você pode colocar uma nova aposta nessa mão, igual a mão original. Isso pode acontecer quando você recebe duas cartas de mesmo valor. Se você dividir dois áses, a maior parte das variantes de 21 restringem sua nova compra a apenas uma carta para cada mão.
- **Dobrar:** dobre sua aposta inicial após receber as duas primeiras cartas, recebendo uma carta extra para melhorar sua mão. Algumas variantes permitem dobrar após dividir, adicionando uma nova aposta e seguindo as regras normais.
- **Desistir:** alguns jogos permitem que você desista de sua mão e receba de volta metade de sua aposta original.

3 – O APLICATIVO MIT APP INVENTOR

Nesse capítulo, iremos abordar o aplicativo MIT App Inventor, como utilizá-lo, os seus comandos e suas vantagens. Também vamos abordar a construção do aplicativo *Casmath*, a partir do App Inventor. O próximo capítulo abordará mais detalhes sobre o uso do *Casmath* para os alunos do 3º ano do ensino médio.

3.1 – Sobre o MIT App Inventor

O MIT App Inventor, conhecido como App Inventor for Android, é um software criado pelo Google em meados de 2009. No ano de 2011, a Google encerrou as atividades com o App Inventor for Android e atualmente é mantida pelo Massachusetts Institute of Technology (MIT) (Instituto de Tecnologia de Massachusetts). Ele permite desenvolver aplicativos Android usando um navegador da Web e um *smartphone* ou *tablet*.

É também um ambiente virtual de programação intuitiva, que pode ser utilizado por iniciantes em programação, mesmo que a pessoa tenha pouco conhecimento de linguagem de programação, é possível criar aplicativos usando o App Inventor. A ferramenta usa programas de codificação baseado em blocos, no estilo “arrastar e soltar”, semelhantes aos de linguagem de codificação Scratch⁴. Ou seja, a ferramenta não possui uma linguagem de programação específica. Além disso, o software utiliza cores vivas, botões claros e novos usuários são orientados por um tutorial dentro da ferramenta.

Para Oliveira, Pereira, Teixeira (2021, p.3)

É possível criar aplicativos apenas ligando alguns poucos componentes com mínima interação algorítmica entre eles. Vários exemplos estão disponíveis e podem ser localizados em diversos repositórios nos quais os conceitos e conteúdo de algoritmos são minimamente abordados.

Elias, Rocha, Motta e Kalinke (2018, p.45) comentam:

⁴ Scratch é uma linguagem de programação em blocos, que permite a criação de histórias, animações, jogos e outras produções.

A perspectiva de poder criar aplicativos que informam e educam nos faz acreditar que o App Inventor pode ser trazido para o contexto escolar, juntamente com as Tecnologias Móveis, que já fazem parte do cotidiano dos estudantes fora da escola. A programação realizada pelo professor pode contribuir para o seu desenvolvimento profissional, instigando sua criatividade, o estimulando a se capacitar, quanto pode aproximá-lo de seus alunos.

Eles também acreditam (2018, p. 46) que: buscar compreender o funcionamento do App Inventor, bem como trazer o mesmo para dentro do contexto escolar pode contribuir com os processos de ensino e aprendizagem de matemática.

Quando se entra no MIT App Inventor, o usuário é direcionado por um tutorial (<https://appinventor.mit.edu>) no processo de codificação básica. O app pode ser testado no aparelho do criador, com códigos que utilizam o hardware disponível. Com isso, é possível executar ações no próprio celular.

O MIT App Inventor surgiu por meio de uma solicitação no dia 12 de julho de 2010 e divulgado publicamente no dia 15 de dezembro de 2010. Ele foi desenvolvido pelos professores Hal Abelson e Marf Friedman, do Departamento de Engenharia Elétrica e Ciência da Computação do MIT.

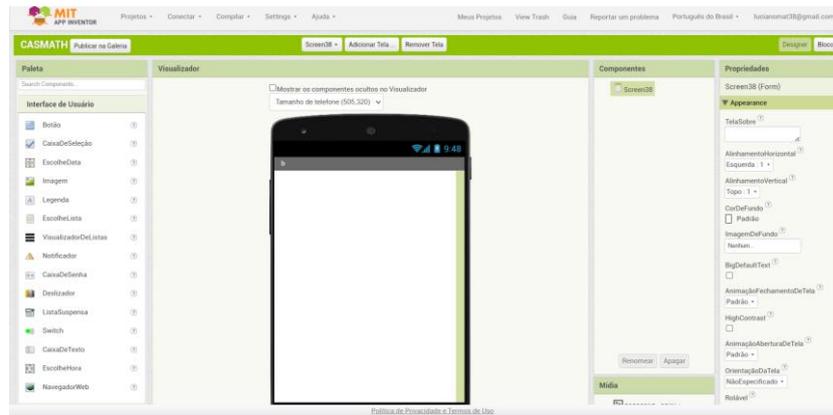
No dia 6 de dezembro de 2013 é lançado a segunda versão do software, o MIT App Inventor 2, que é a versão mais atual.

Para utilizar o App Inventor, é preciso conhecer os seus comandos, a sua organização e o seu funcionamento, de modo que daremos os primeiros passos para o acesso ao software.

Para acessar a plataforma do App Inventor, devemos executar as seguintes etapas:

1º) Entre no site <https://appinventor.mit.edu> conforme a figura 15 abaixo;

Figura 15 - tela inicial



Fonte: elaborada pelo autor

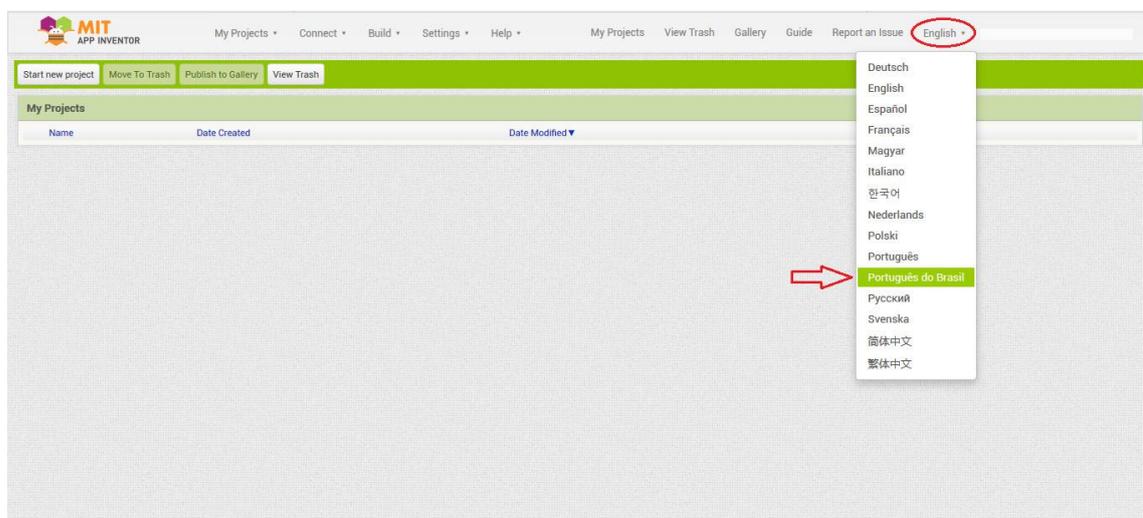
2º) É necessário que se tenha uma conta no Google. Se você possui, faça o login. Caso contrário, crie uma conta em: [https://accounts.google.com/signup/v2/webcreateaccount?continue=https%3A%2F%2Faccounts.google.com%2FManageAccount%3Fnc%3D1&hl=pt-br&flowName=GlifWebSignIn&flowEntr y=SignUp](https://accounts.google.com/signup/v2/webcreateaccount?continue=https%3A%2F%2Faccounts.google.com%2FManageAccount%3Fnc%3D1&hl=pt-br&flowName=GlifWebSignIn&flowEntr y=SignUp;);

3º) Depois de ter feito o login, surgirá uma aba, e nela clique em CONTINUE;

4º) Em seguida, surgirá uma nova aba, e nela clique em CLOSE;

5º) Como o idioma está em inglês, você deve alterá-lo para “português do Brasil”, conforme a figura 16;

Figura 16 - alterando o idioma

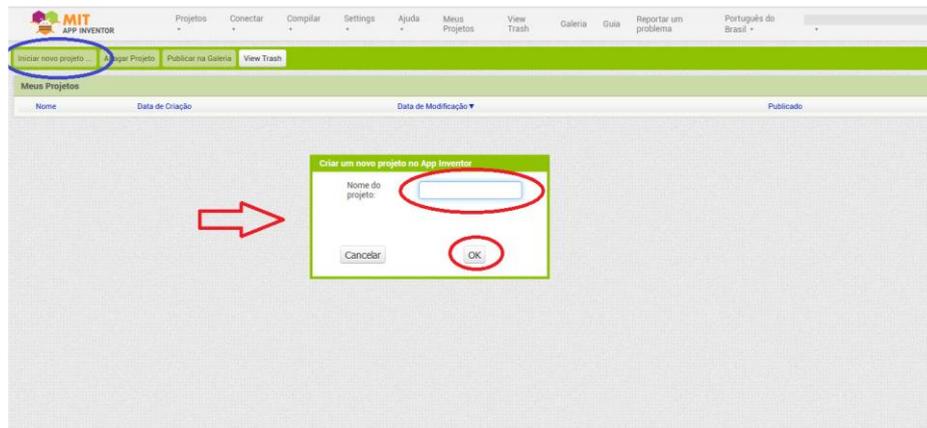


Fonte: desenvolvimento-de-aplicativos-matematicos-no-app-inventor.pdf

6º) Note que as duas abas anteriores se abrirão novamente. Para isso, repita os passos anteriores: clique em CONTINUE e depois clique em CLOSE;

A partir daí, você poderá dar início ao novo projeto. Observe que no canto superior esquerdo aparece a opção “Iniciar um novo projeto”. Clique e dê um nome ao projeto, conforme a figura 17.

Figura 17 - dando nome ao projeto

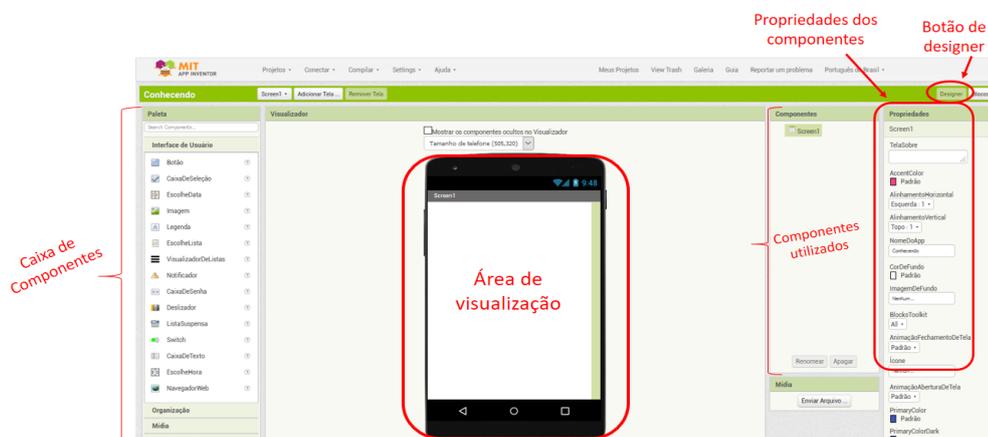


Fonte: desenvolvimento-de-aplicativos-matematicos-no-app-inventor.pdf

Depois de acessar e iniciar o novo projeto, a próxima etapa é explorar as abas. O MIT App Inventor possui duas abas: a aba de designer e a aba blocos.

A aba de designer é a aba utilizada para criar a aparência do aplicativo, onde ficarão inseridos todos os componentes necessários para que o aplicativo funcione. A figura 18 seguinte mostra a tela da aba designer.

Figura 18 - aba designer



Fonte: desenvolvimento-de-aplicativos-matematicos-no-app-inventor.pdf

Na aba designer temos as seguintes opções:

Paleta – é uma caixa de componentes, que estão divididos em seções. Ao clicar em uma seção, aparecerá várias opções. Por exemplo, na figura, na seção “Interface do usuário”, aparecerá opções como “Botão”, “Imagem” e “CaixaDeTexto”. Se o usuário quiser saber mais informações sobre cada opção, basta clicar em (?).

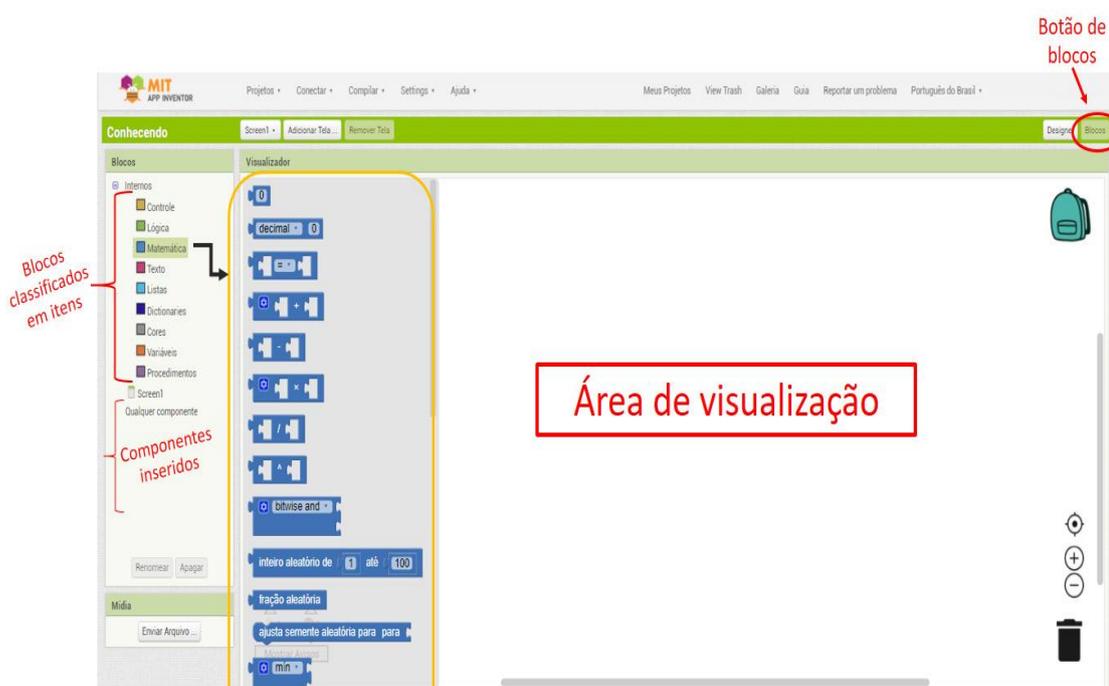
Componentes – é o local onde ficam todos os componentes utilizados no desenvolvimento do aplicativo.

Propriedades – é onde o usuário tem acesso às propriedades de cada componente. Para isso, deve-se clicar no campo onde aparecem os componentes utilizados. Pode-se mudar a cor, a forma, o tamanho e a imagem de cada componente

Visualizador – é o campo que descreve a forma de um celular ou tablet e é para onde as componentes são arrastadas e também podem ser organizadas de modo que a o aplicativo tenha a aparência desejada.

A aba blocos é a aba onde é criada a programação do aplicativo através da montagem de blocos, da mesma forma que se monta um quebra-cabeça. A figura 19 abaixo mostra a tela da aba blocos.

Figura 19 - aba blocos



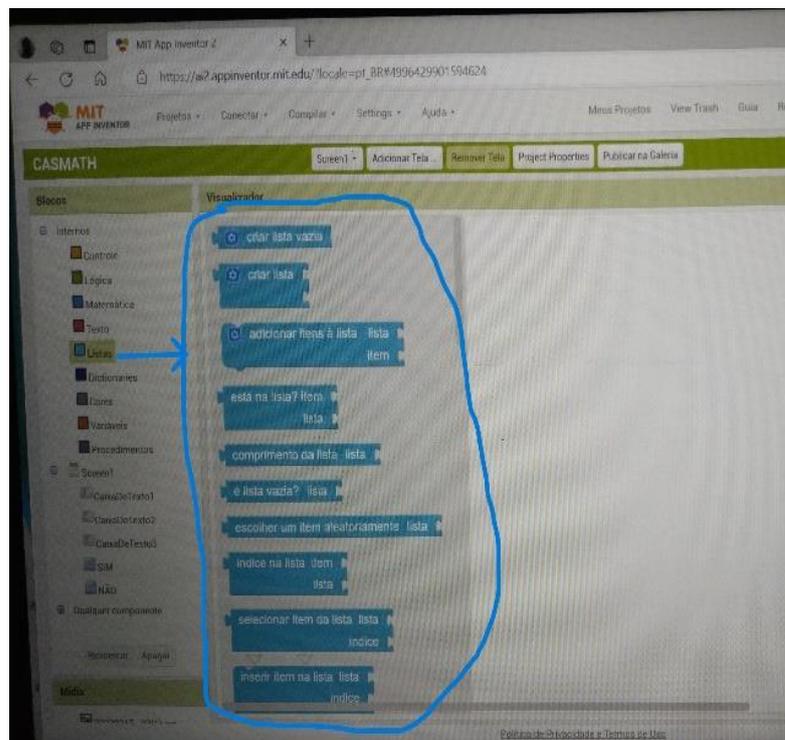
Fonte: desenvolvimento-de-aplicativos-matematicos-no-app-inventor.pdf

Na aba bloco temos as seguintes opções:

Botão de blocos – esse botão está na aba designer. Se o usuário desejar ir para a aba blocos, deverá clicar em “bloco”.

Blocos – são itens que, conforme a opção escolhida, ao clicar, todos os blocos que compõem esse item são exibidos. A figura 20 mostra o item “Lista” clicado e ao lado todos os blocos que referem a esse item.

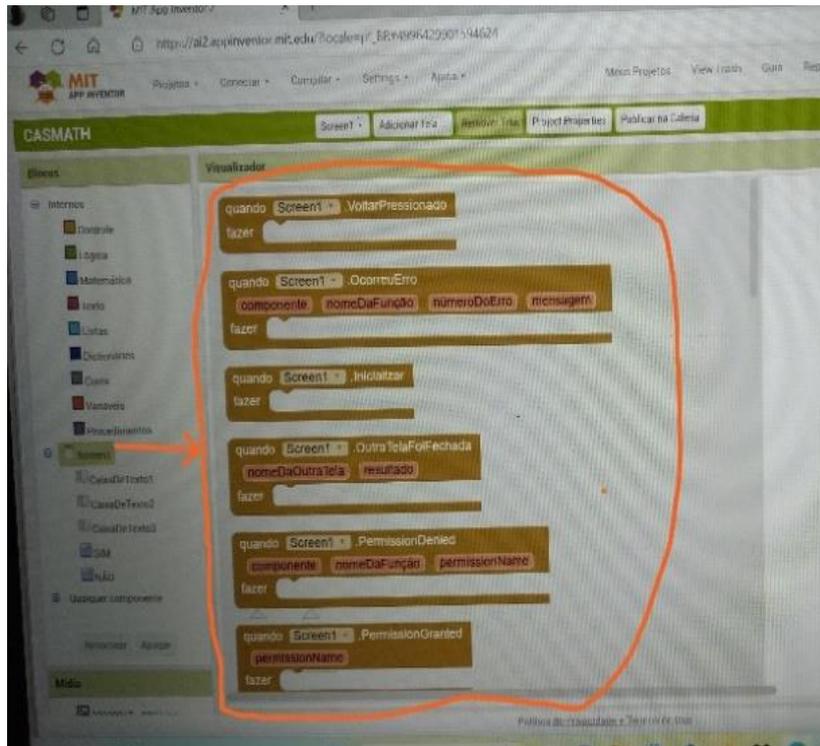
Figura 20 - blocos



Fonte: elaborada pelo autor

Blocos específicos – são os blocos dos componentes inseridos do item “Screen1” (nome dado à tela). A figura 21 mostra um exemplo de um bloco específico.

Figura 21 - blocos específicos



Fonte: elaborada pelo autor

Visualizador – é o local onde o aplicativo é programado e os blocos são arrastados para a montagem.

Para abrir mais telas, o usuário deverá clicar em “Adicionar tela”, conforme a figura 22.

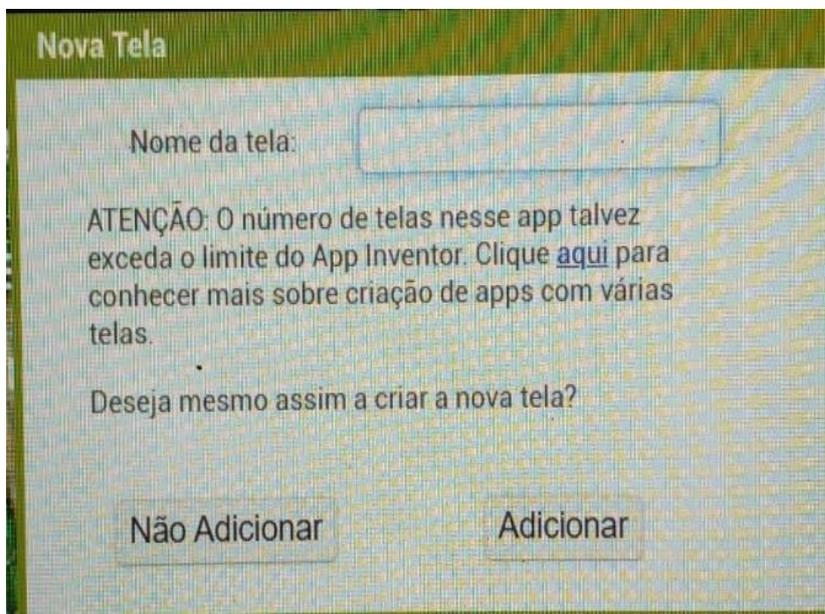
Figura 22 - adicionando tela



Fonte: elaborada pelo autor

Dê o nome da próxima tela e confirme clicando em adicionar, como mostra a figura 23.

Figura 23 - dando o nome da tela



Fonte: elaborada pelo autor

Depois de terminado, podemos testar o aplicativo. Essa é uma entre outras vantagens do MIT App Inventor. Testar o aplicativo é verificar se os componentes estão funcionando conforme o desejado e ajustá-los com o intuito de melhorar. Para fazer o teste o site do MIT App Inventor recomenda testar com o dispositivo Android (*smartphone* ou *tablet*) e o PC (computador ou *notebook*) conectados à internet. O *smartphone* serve para verificar o layout do aplicativo e testar sua funcionalidade, já o PC serve para corrigir eventuais falhas de programação.

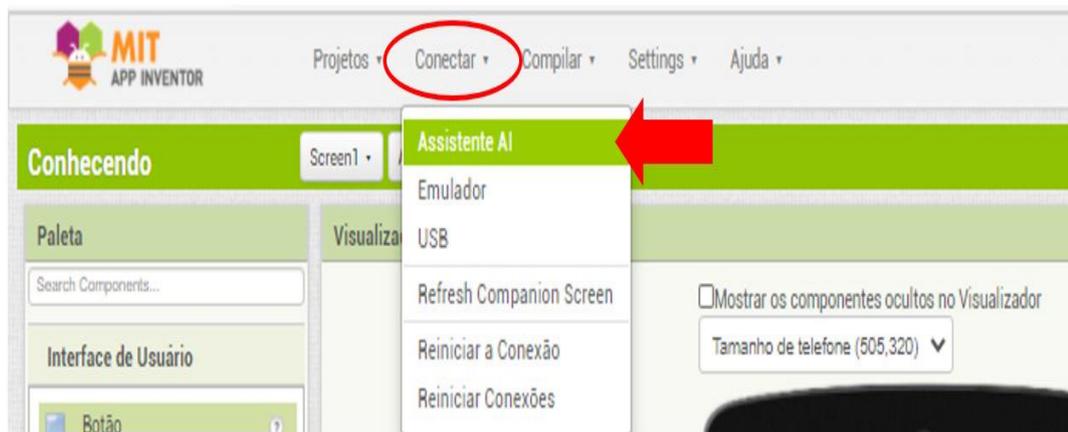
Para fazer o teste, o usuário deverá realizar as seguintes instruções:

1º) Acessar a loja de aplicativos do seu dispositivo Android (Google Play Store), digitar mit app inventor e clicar em instalar;

2º) Existe duas opções a serem seguidas conforme o número de dispositivos que você deseja testar o aplicativo:

2.1) Se for um aplicativo, o usuário deverá acessar o site do App Inventor 2 no computador e iniciar ou selecionar um projeto. Em seguida, no menu superior, clicar em “Conectar – Assistente AI”, de acordo com a figura 24.

Figura 24 - testando o aplicativo



Fonte: desenvolvimento-de-aplicativos-matematicos-no-app-inventor.pdf

2.2) Se for dois ou mais aplicativos, o usuário deverá clicar em “Compilar – App (fornecer o QR Code para o apk)”, no menu superior, de acordo com a figura 25.

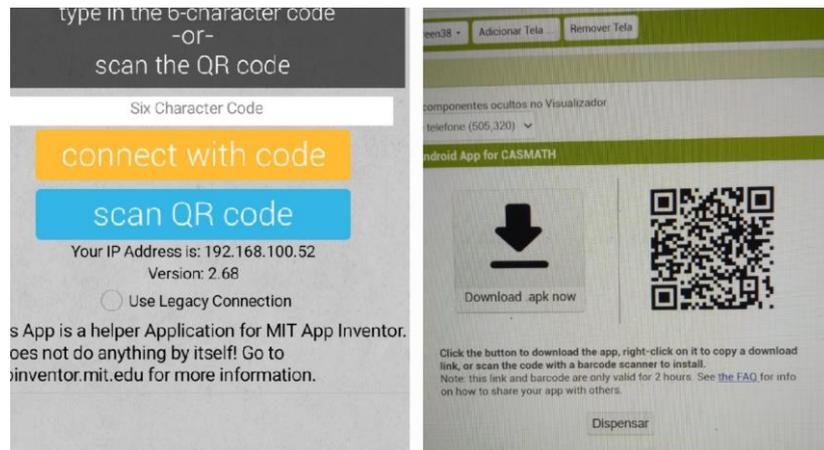
Figura 25 - compilação



Fonte: desenvolvimento-de-aplicativos-matematicos-no-app-inventor.pdf

Depois de realizar as etapas 1, 2.1 ou 2.2, o usuário deverá entrar no aplicativo MIT AI2 Companion no seu dispositivo (celular ou tablet) e clicar na opção “scan QR code” e em seguida escanear o QR code da tela do computador ou notebook ou digitar o código, conforme a figura 26.

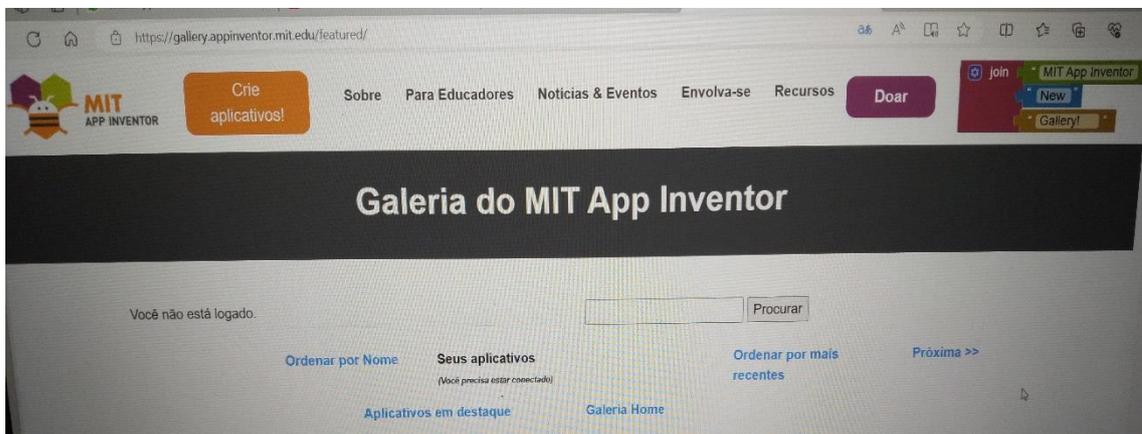
Figura 26 - escaneamento



Fonte: elaborada pelo autor

O MIT App Inventor tem uma galeria que contém aplicativos com vários temas que foram desenvolvidos pelos usuários. Para se ter acesso a essa galeria, é necessário possuir a conta no App Inventor. Uma vez que o usuário esteja na sua conta, ele deverá clicar na opção “os meus projetos” e logo depois na opção “login to gallery”, na parte superior da tela. Dessa forma, o usuário será encaminhado para a galeria, de acordo com a figura 27.

Figura 27 - galeria do MIT App Inventor



Fonte: elaborada pelo autor

Na galeria, o usuário pode ter acesso a outros aplicativos, buscando através de assuntos. Em relação à conta, o usuário pode preencher nome, e-mail e utilizar foto de perfil. Além disso, ele também pode optar pela privacidade dos aplicativos que ele criou. Basta o usuário clicar na opção “outras pessoas podem ver o seu perfil?”, conforme a figura 28. Ou seja, a pessoa pode ter acesso ao aplicativo, mas não pode acessar o perfil do usuário.

Figura 28 - privacidade

Você pode atualizar as informações da sua conta aqui.

Seu endereço de email:

Seu primeiro nome:

Seu último Nome:

Outras pessoas podem ver seu perfil?

Arquivo de imagem: Nenhum arquivo selecionado

Fonte: desenvolvimento-de-aplicativos-matematicos-no-app-inventor.pdf

Podemos observar que o App Inventor possui uma grande vantagem: a possibilidade de testar o aplicativo, enquanto está sendo desenvolvido. Depois de entrar em contato com o App Inventor, conhecer os comandos, testar e publicar na galeria, o usuário estará apto para desenvolver aplicativos.

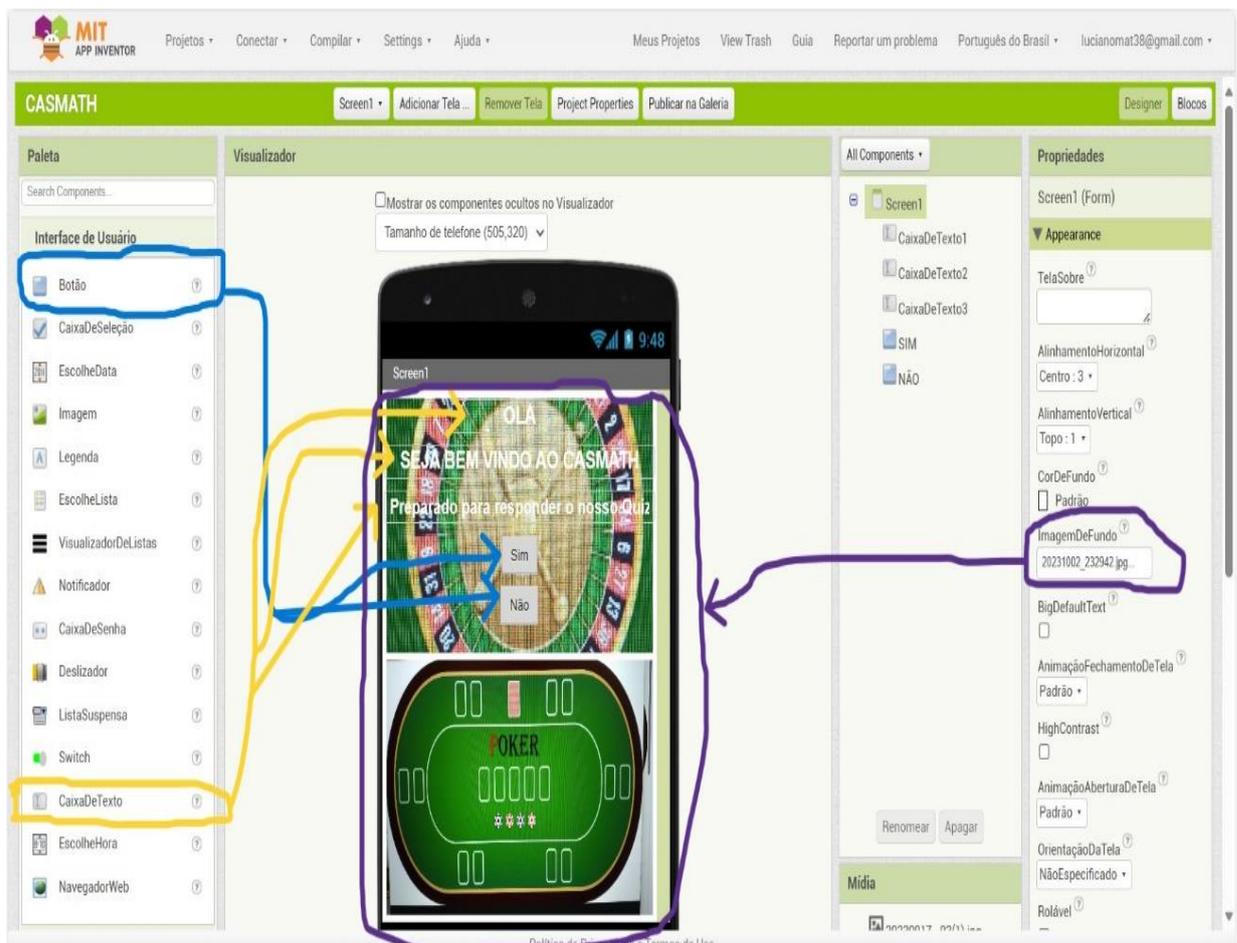
3.2 – Construção do aplicativo Casmath a partir do MIT App Inventor 2

Nessa seção, veremos como foi feita a construção do *Casmath*, a partir do MIT App Inventor 2.

Primeiramente, foi criado o nome do aplicativo, *Casmath*. Observe que o nome do aplicativo não pode conter espaços, pontuação e acentos.

Na aba designer, a primeira tela contém a tela inicial e nessa tela aparece duas caixas de texto, dois botões e uma imagem de fundo. A figura 29 mostra a primeira tela montada.

Figura 29 - tela inicial do *Casmath*



Fonte: elaborada pelo autor

Na aba blocos, vamos programar o funcionamento das componentes, de modo que queremos que o usuário entre no aplicativo quando clicar em “Sim”. A figura 30 mostra como foi feita essa programação.

Figura 30 - programação do *Casmath*



Fonte: elaborada pelo autor

Após clicar em “Sim”, o usuário irá para a segunda tela (chamada de Screen2). Nessa tela, o ele poderá escolher três opções de jogo. A figura 31 mostra a aba designer.

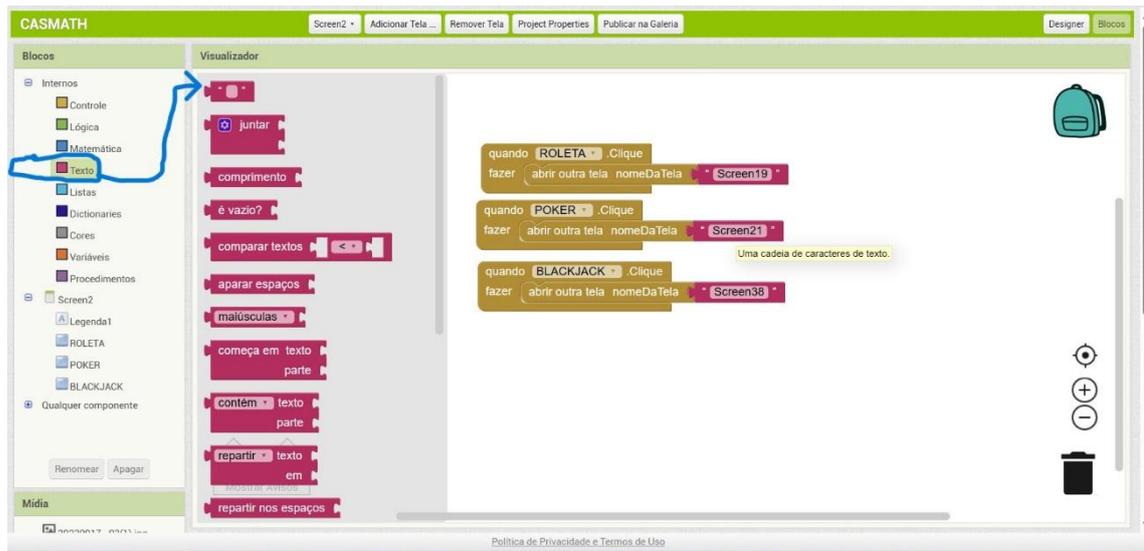
Figura 31 - opções de jogo



Fonte: elaborada pelo autor

Queremos que ao clicar em um botão, o usuário vá para o quis do jogo escolhido (Roleta, Poker e Blackjack). Para isso, na aba blocos, será inserido no componente “Texto” a opção “□”, onde nessa opção ficará o nome da tela. A figura 32 mostra a aba blocos correspondente.

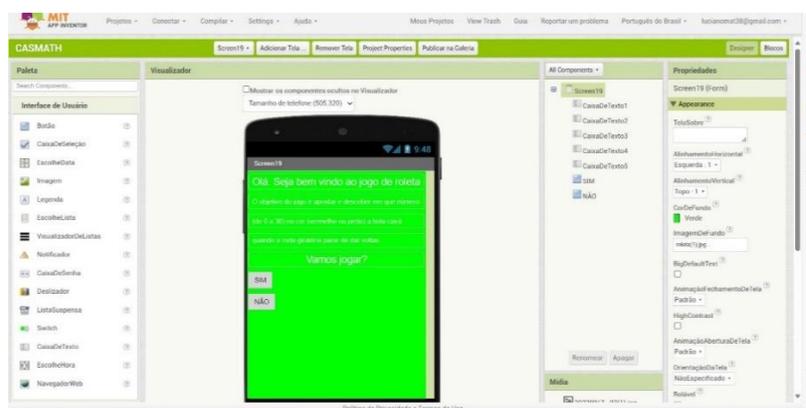
Figura 32 - aba blocos do *Casmath*



Fonte: elaborada pelo autor

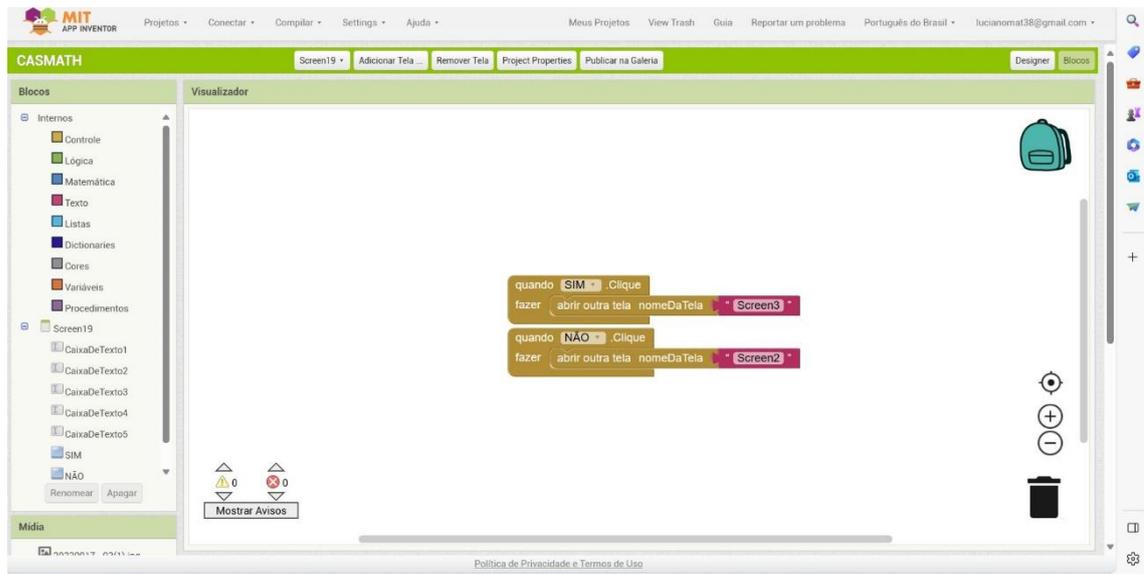
Suponha que o usuário escolha uma das opções de jogo (por exemplo, roleta). Ao clicar no botão, aparecerá na tela do celular ou tablet uma imagem de fundo, um texto explicando a regra do jogo e dois botões de opção de responder as perguntas ou sair do aplicativo. As figuras 33 e 34 seguintes mostram as abas designer e blocos correspondentes.

Figura 33 - tela inicial do jogo de roleta (aba designer)



Fonte: elaborada pelo autor

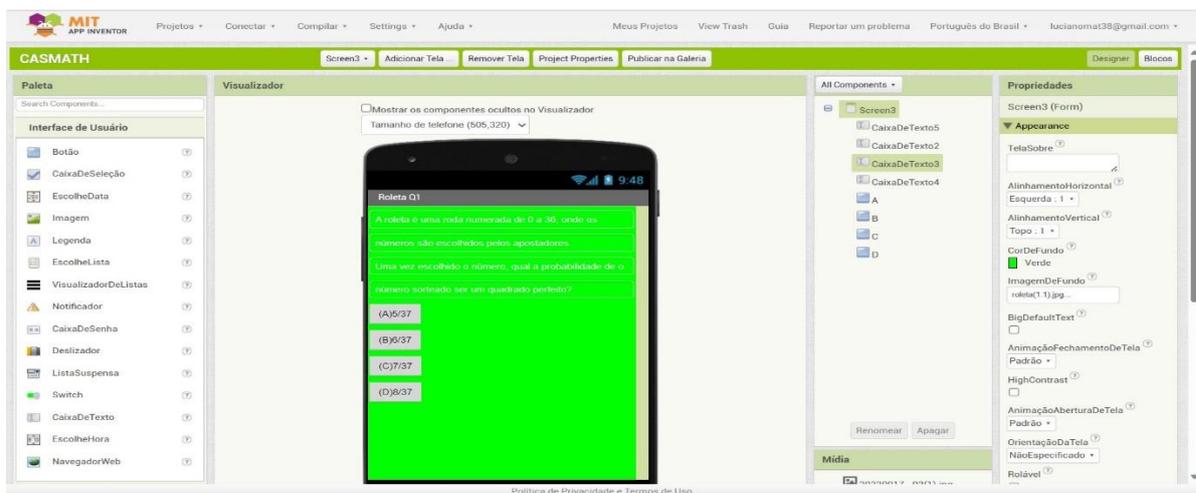
Figura 34 - tela inicial do jogo de roleta (aba blocos)



Fonte: elaborada pelo autor

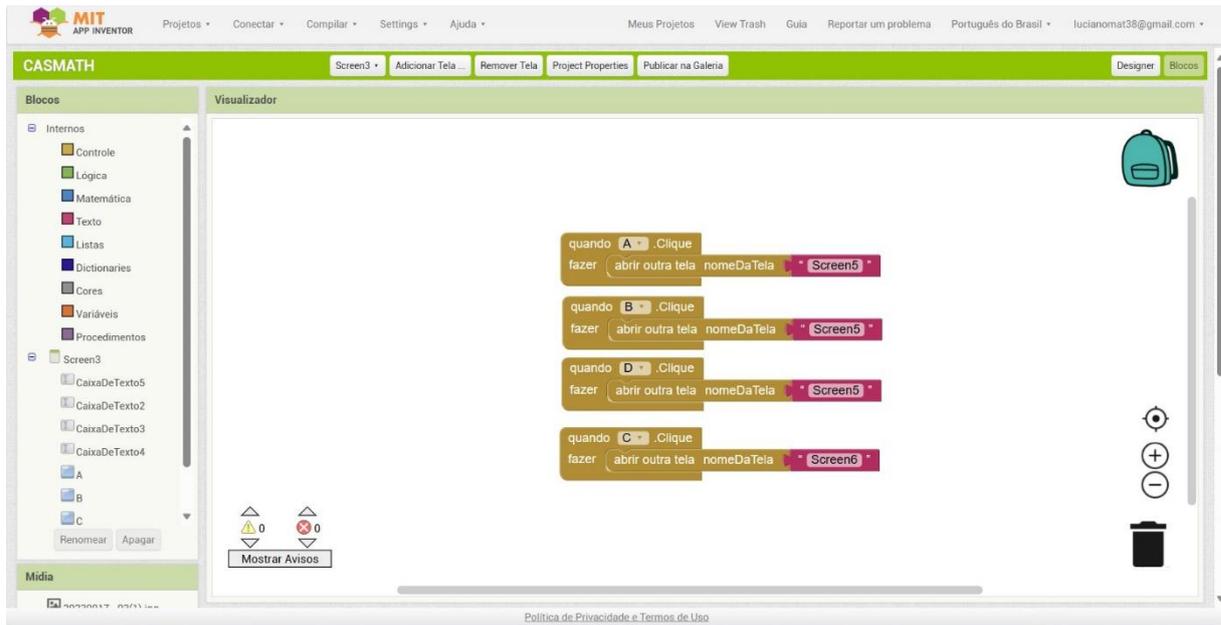
Se o usuário clicar em não, ele sairá do aplicativo. Caso contrário, ele irá para a primeira pergunta, onde ele deverá responder apenas uma alternativa. Caso ele responda corretamente, ele irá para a pergunta seguinte. Se ele responder errado, terá as seguintes opções: sair do aplicativo ou tentar novamente até acertar ou ver a resposta. As figuras 35, 36, 37 e 38 seguintes mostram as abas designer e blocos correspondentes.

Figura 35 - questão do quiz (aba designer)



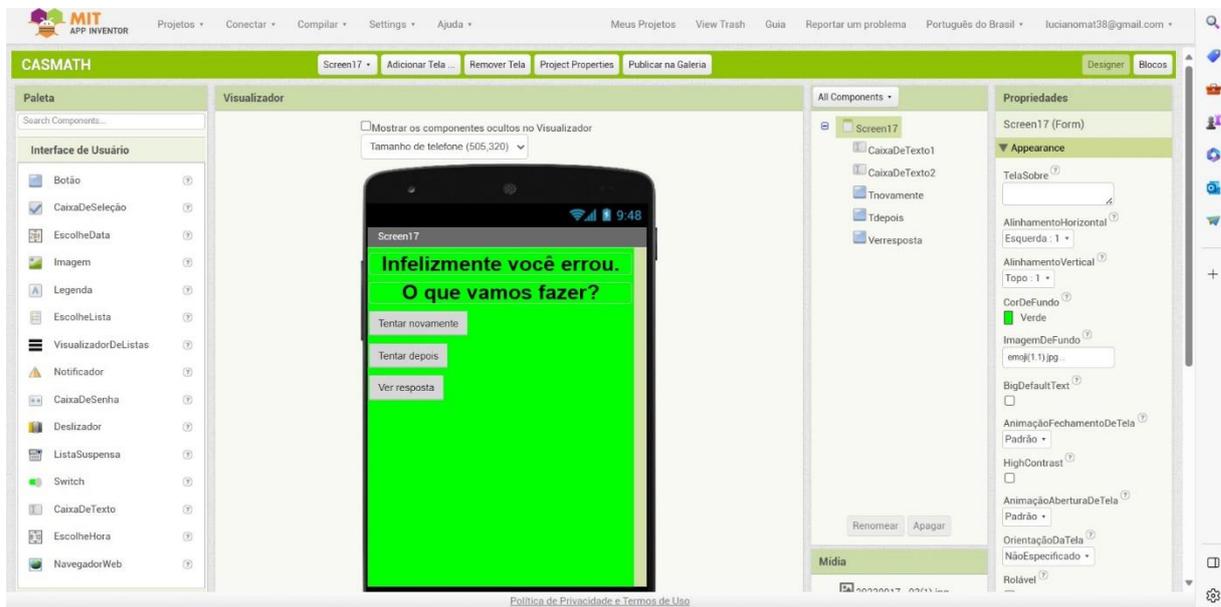
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 36 - questão do quiz (aba blocos)



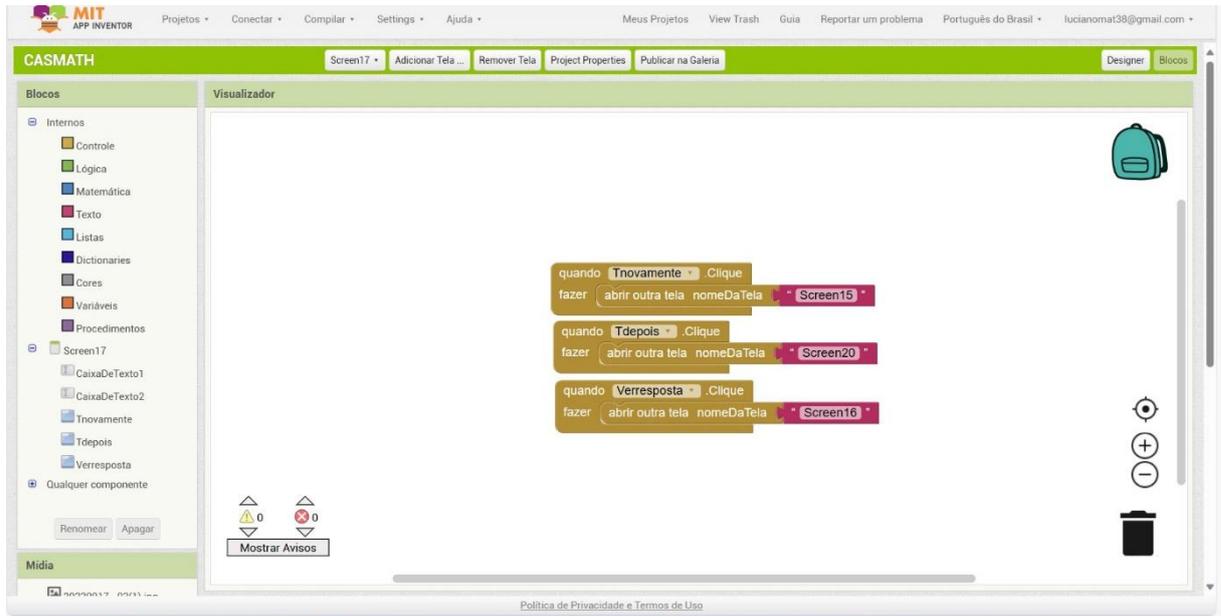
Fonte: elaborada pelo autor

Figura 37 - mensagem avisando do erro (aba designer)



Fonte: elaborada pelo autor

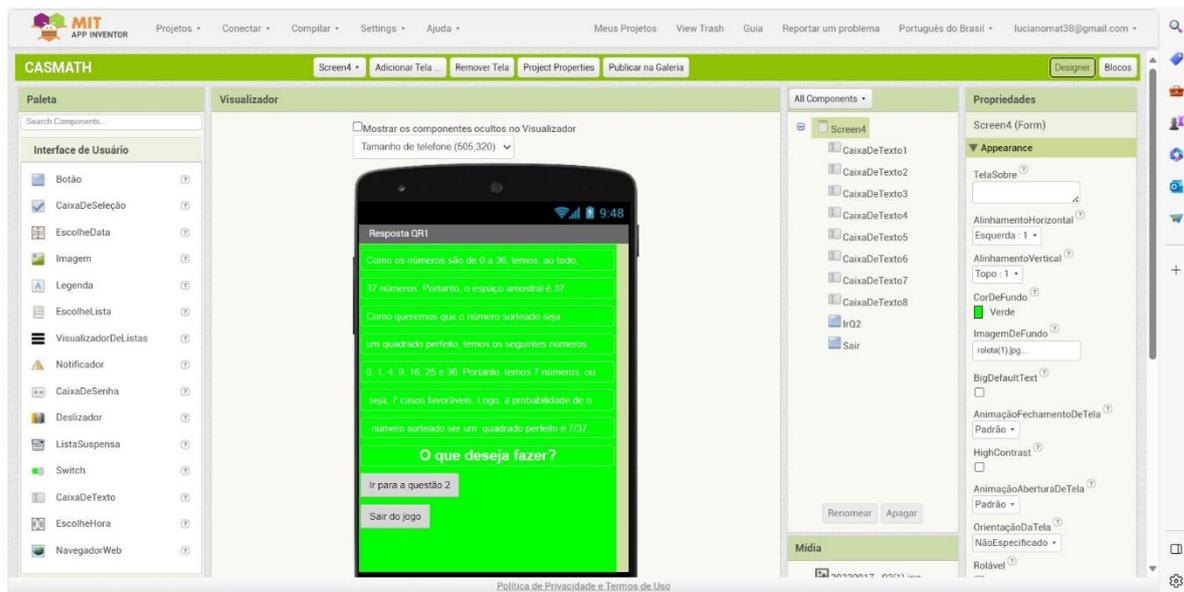
Figura 38 - mensagem avisando do erro (aba blocos)



Fonte: elaborada pelo autor

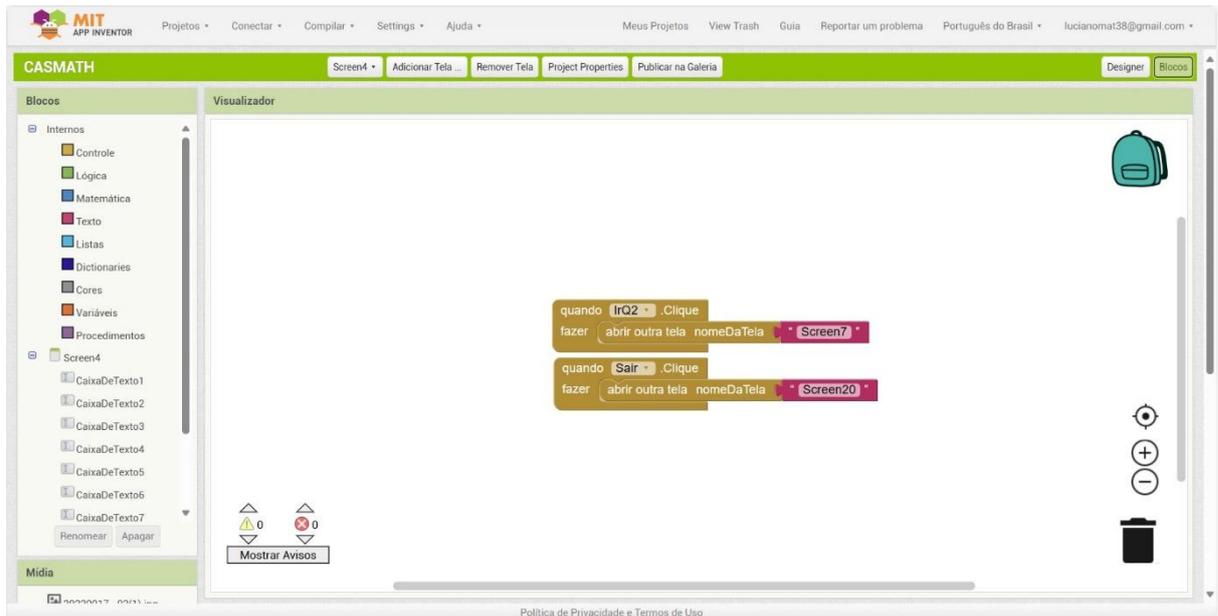
Quando o usuário clica em “Ver resposta”, aparecerá a resolução da questão e as opções de ir para a questão seguinte e sair do aplicativo. As figuras 39 e 40 mostram as abas designer e blocos.

Figura 39 - tela da resposta (aba designer)



Fonte: elaborada pelo autor

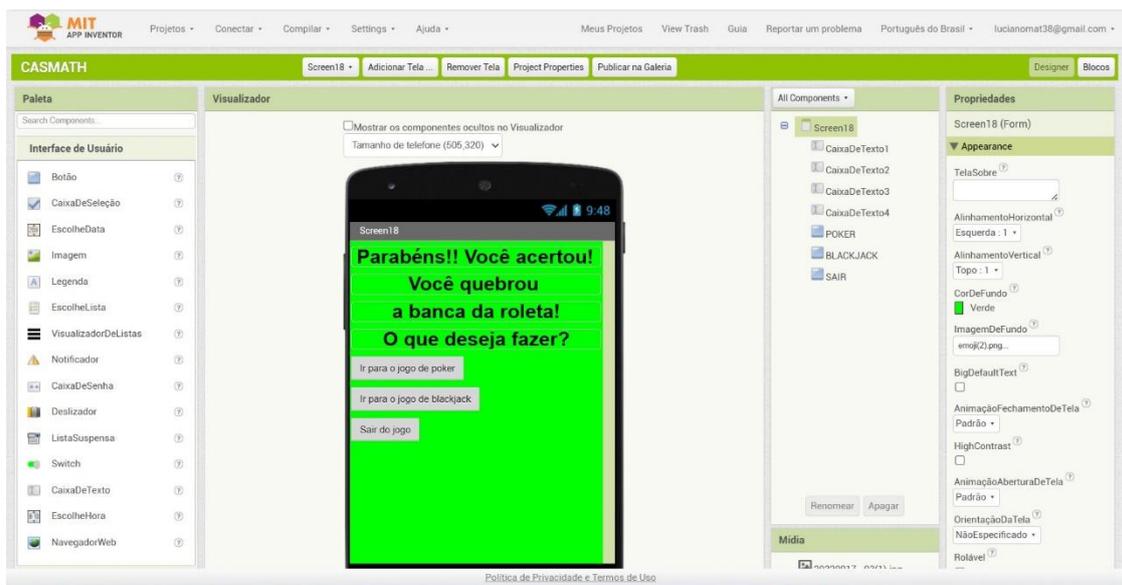
Figura 40 - tela da resposta (aba blocos)



Fonte: elaborada pelo autor

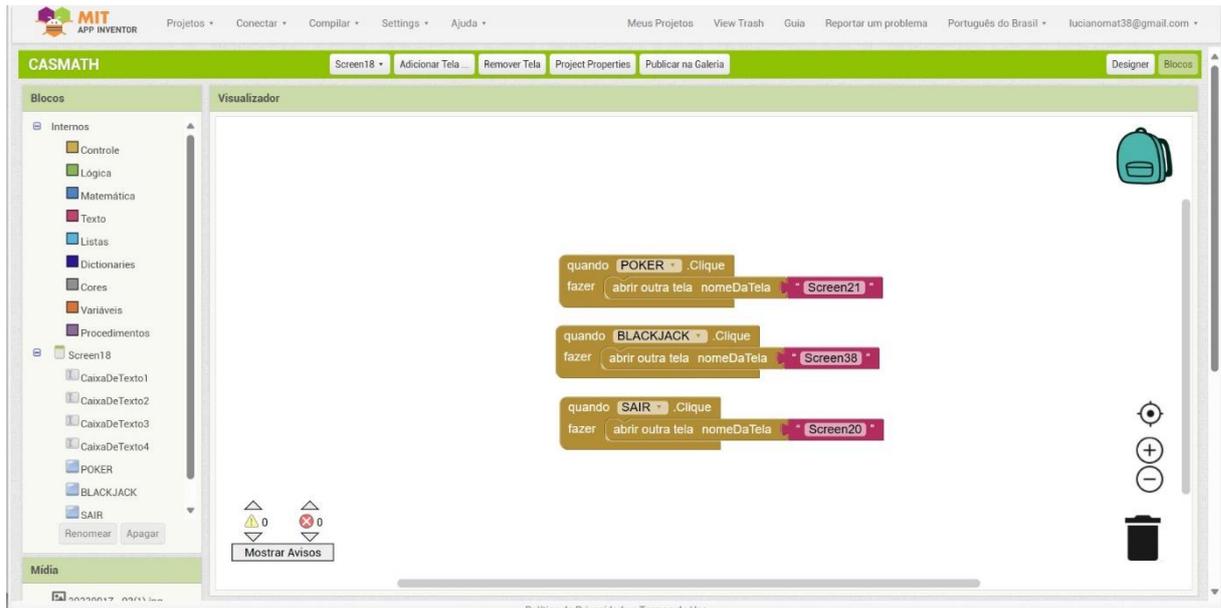
O procedimento se repete até a última questão. Se o usuário acertar a última questão, ele poderá escolher outros jogos ou sair do aplicativo, conforme mostram as figuras 41 e 42, que indicam as abas designer e blocos.

Figura 41 - tela final do quiz (aba designer)



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 42 - tela final do quiz (aba blocos)



Fonte: elaborada pelo autor

O procedimento é análogo para os jogos de poker e blackjack.

4 – APLICATIVO CASMATH

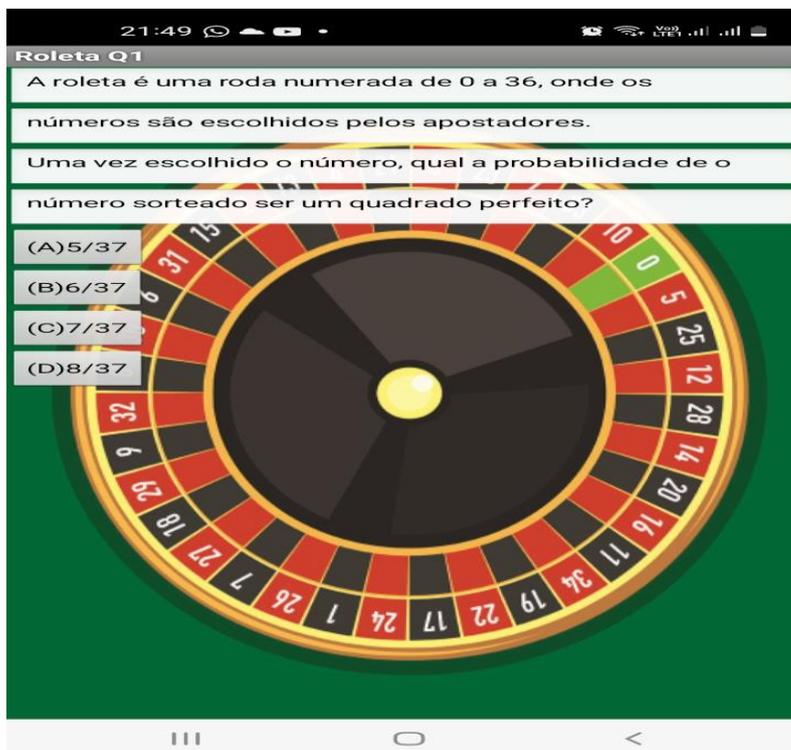
Nesse capítulo, abordaremos o aplicativo *Casmath* e sua aplicação nas aulas.

4.1 – Descrevendo o Casmath

O *Casmath*, como abordamos no capítulo anterior, é um aplicativo criado a partir do MIT App Inventor. Ele consiste em um quiz, um jogo de perguntas e respostas envolvendo análise combinatória e probabilidade, usando alguns dos mais famosos jogos de cassino como roleta, poker e blackjack. À medida que o jogador (aluno) vai respondendo uma pergunta de forma correta, uma nova pergunta com um nível de dificuldade maior será apresentada ao aluno.

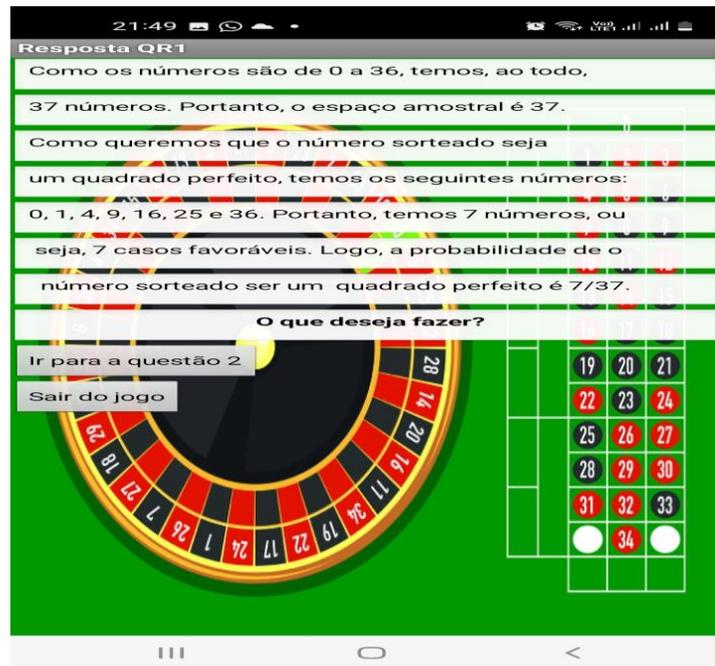
Em cada jogo de cassino, há 4 questões com 4 alternativas, sendo uma correta. Caso o usuário acerte a questão, ele vai para a questão seguinte. Caso contrário, ele pode escolher ver a resposta e ir para a questão seguinte ou sair do jogo. Ao chegar à última questão, ele pode ir para o próximo jogo ou sair do aplicativo. As figuras 43 e 44 mostram uma questão envolvendo jogo de roleta e sua solução respectivamente.

Figura 43 - questão de probabilidade envolvendo roleta



Fonte: elaborada pelo autor

Figura 44 - resposta da questão



Fonte: elaborada pelo autor

O aplicativo *Casmath* é usado nos conteúdos de análise combinatória e probabilidade. A seguir, veremos as questões que estão no jogo envolvendo análise combinatória e probabilidade e suas respectivas soluções. Vejamos primeiramente as questões envolvendo análise combinatória.

1) Em um jogo de poker, cada jogo é formado por 5 das 52 cartas do baralho. De quantas maneiras distintas podemos formar esse jogo?

- a) 2598940
- b) 2598950
- c) 2598960
- d) 2598970

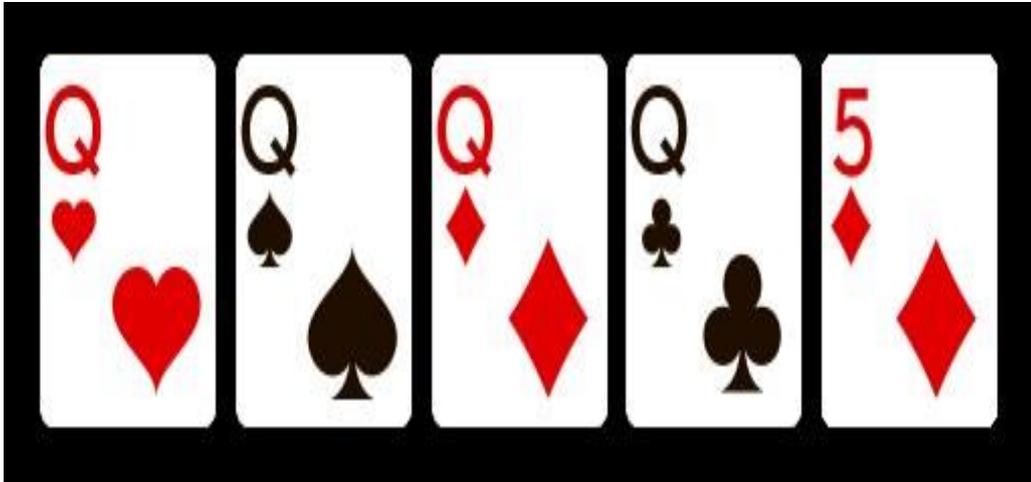
Solução:

Cada jogo é formado por 5 das 52 cartas do baralho. Logo, o número possível de maneiras é:

$$C_{52,5} = \frac{52!}{(52-5)! \cdot 5!} = \frac{52!}{47! \cdot 5!} = 2598960$$

Resposta: alternativa c

2) Em um jogo de poker, existe uma combinação chamada Quadra, que é formada por 4 cartas de mesmo valor (por exemplo, 4 ases, 4 reis etc.). Veja o exemplo abaixo.



De quantas maneiras é possível formar uma quadra?

- a) 624
- b) 634
- c) 644
- d) 654

Solução:

Para formar uma quadra, devemos ter 13 valores disponíveis (do ás ao rei) e 48 cartas disponíveis para formar a quinta carta da mão. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de maneiras possíveis é $13 \times 48 = 624$.

Resposta: alternativa a

3)No poker, o full house é uma combinação de três cartas de mesmo valor e duas cartas também de mesmo valor. A figura abaixo mostra um exemplo de full house.



De quantas maneiras é possível formar um full house?

a)3754

b)3744

c)3734

d)3724

Solução:

Como o full house é formado por uma trinca e um par, temos 13 valores para uma trinca e 12 valores para o par. Com isso, temos $C_{4,3} = 4$ maneiras de formar uma trinca e $C_{4,2} = 6$ maneiras de formar um par. Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de maneiras de formar um full house é $13 \times 12 \times 4 \times 6 = 3744$.

Resposta: alternativa b

4)No blackjack, o sabe-se que as cartas 10, J, Q e K valem 10 pontos, a carta A vale 1 ou 11 pontos e as outras cartas valem a pontuação conforme o valor da carta. De quantas maneiras é possível fazer 21 pontos com uma das cartas de 10 pontos e uma carta de ás?

a)128

b)138

c)148

d)158

Solução:

São 16 cartas que valem 10 pontos (10, J, Q e K de 4 naipes cada) 4 ases (1 de cada naipe). Essas cartas podem aparecer em qualquer ordem, podendo assim, serem permutadas, ou seja, calculando $P_2 = 2! = 2 \times 1 = 2$. Assim, $16 \times 4 \times 2 = 128$.

Resposta: alternativa a

5) Num jogo de blackjack, de quantas maneiras é possível fazer 21 pontos com as cartas de 6, 7 e 8 pontos?

a)394

b)384

c)374

d)364

Solução:

Temos 4 cartas de valor 6, 4 de valor 7 e 4 de valor 8. Cada uma com um naipe. Temos 3 cartas que podem permutar entre si, pois essas cartas podem aparecer em qualquer ordem. Portanto, o número de maneiras possíveis é:

$$4 \times 4 \times 4 \times P_3 = 64 \times 6 = 384$$

Resposta: alternativa b

Agora, vejamos as questões envolvendo probabilidade.

6) Em relação à questão 5, qual a probabilidade de fazer 21 pontos com as cartas 6, 7 e 8?

a) $\frac{28}{15675}$

b) $\frac{38}{15675}$

c) $\frac{48}{15675}$

d) $\frac{58}{15675}$

Solução:

Temos que a probabilidade de se retirar uma carta de 6 é $\frac{4}{52}$, de se retirar a carta 7 é $\frac{4}{51}$ e a carta 8 é $\frac{4}{50}$. Além disso, as cartas podem aparecer em qualquer ordem, ou seja, elas podem permutar entre si. Ou seja, temos permutações de 3 cartas. Isto é, $P_3 = 3! = 6$.

Logo, a probabilidade é:

$$\frac{4}{52} \cdot \frac{4}{51} \cdot \frac{4}{50} \cdot 6 = \frac{48}{15675}$$

Resposta: alternativa c

7) Em relação à questão 4, qual a probabilidade de se fazer 21 pontos com uma carta de 10 pontos e uma carta de ás?

a) $\frac{62}{663}$

b) $\frac{52}{663}$

c) $\frac{42}{663}$

d) $\frac{32}{663}$

Solução:

Temos que a probabilidade de retirar uma carta de 10 pontos é $\frac{16}{52}$ e a probabilidade de se retirar um ás é $\frac{4}{51}$. Como as cartas podem aparecer em qualquer ordem, temos:

$$2 \cdot \frac{16}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{32}{663}$$

Resposta: alternativa d

8) No poker, o royal straight flush ou sequência real é uma combinação das 5 maiores cartas do mesmo naipe em sequência, ou seja, do 10 ao ás. Veja o exemplo.



Qual a probabilidade de o jogador ganhar obtendo uma sequência real?

a) $\frac{4}{2598930}$

b) $\frac{4}{2598940}$

c) $\frac{4}{2598950}$

d) $\frac{4}{2598960}$

Solução:

Existem 4 sequências reais, sendo uma para cada naipe. Dessa forma, a probabilidade de se obter uma sequência real é $\frac{4}{2598960}$.

Resposta: alternativa d.

9) A roleta é uma roda numerada de 0 a 36, onde os números são escolhidos pelos apostadores. Uma vez escolhido o número, qual a probabilidade de o número sorteado ser um quadrado perfeito?

a) $\frac{5}{37}$

b) $\frac{6}{37}$

c) $\frac{7}{37}$

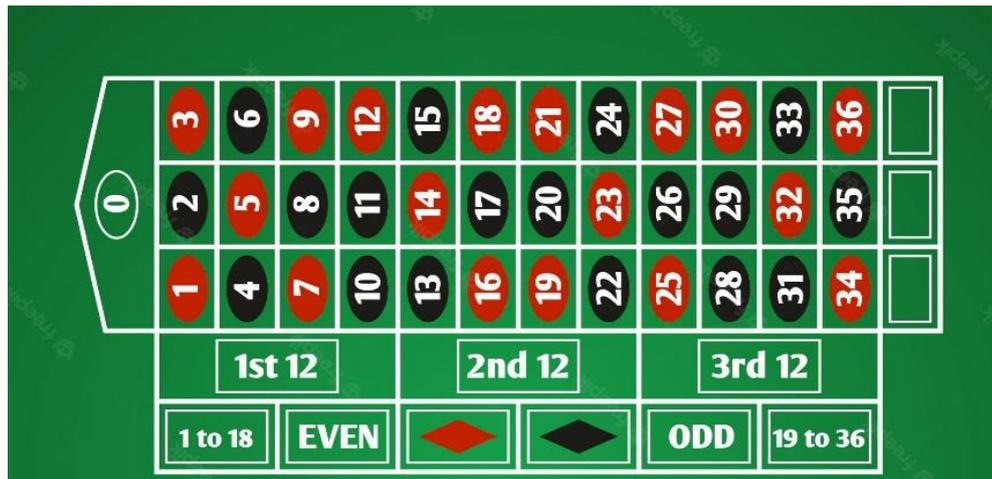
d) $\frac{8}{37}$

Solução:

Como os números são de 0 a 36, temos, ao todo, 37 números. Portanto, o espaço amostral é 37. Como queremos que o número sorteado seja um quadrado perfeito, temos os seguintes números: 0, 1, 4, 9, 16, 25 e 36. Portanto, temos 7 números, ou seja, 7 casos favoráveis. Logo, a probabilidade de o número sorteado ser um quadrado perfeito é $\frac{7}{37}$.

Resposta: alternativa c

10) Na figura abaixo, os números da roleta, de 1 a 36, aparecem marcados com a cor preta e com a cor vermelha. Escolhendo um número ao acaso, qual a probabilidade de o número sorteado ser par ou com a cor preta?



a) $\frac{26}{36}$

b) $\frac{27}{36}$

c) $\frac{28}{36}$

d) $\frac{29}{36}$

Solução:

Sejam os eventos A “ser número par” e B “ser número marcado em preto”. Temos 18 números pares e 18 números marcados de preto. Logo, $n(A) = 18$ e $n(B) = 18$. Daí, temos que $p(A) = \frac{18}{36}$ e $p(B) = \frac{18}{36}$. O evento “números que são pares e marcados com a cor preta” é definido

por $A \cap B$. Temos 10 números que são pares e marcados com a cor preta, ou seja $n(A \cap B) = 10$. Logo, $p(A \cap B) = \frac{10}{36}$. Logo, a probabilidade de o número sorteado ser par ou preto é:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) = \frac{18}{36} + \frac{18}{36} - \frac{10}{36} = \frac{26}{36}$$

Resposta: alternativa a

11) Na roleta, considerando os números de 1 a 36, qual a probabilidade de o número sorteado ser um múltiplo de 5 e vermelho?

a) $\frac{6}{36}$

b) $\frac{5}{36}$

c) $\frac{4}{36}$

d) $\frac{3}{36}$

Solução:

Sejam os eventos A, que é múltiplo de 5 e B, que é um número marcado de vermelho. Temos $n(A) = 7$ e $n(B) = 18$. Como queremos que o número sorteado seja ao mesmo tempo múltiplo de 5 e marcado com a cor vermelha, indicado por $A \cap B$, temos $A \cap B = \{5, 25, 30\}$, ou seja, $n(A \cap B) = 3$. Logo, $p(A \cap B) = \frac{3}{36}$.

Resposta: alternativa d

12) Qual a probabilidade de o número sorteado não possuir resto 3 quando dividido por 4 e não ser preto?

a) $\frac{32}{36}$

b) $\frac{30}{36}$

c) $\frac{28}{36}$

d) $\frac{26}{36}$

Solução:

Sejam os eventos A “deixam resto 3 quando divididos por 4” e B “ser preto”. Temos que:

$$A = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10, 11, 13, 15, 17, 20, 22, 24, 26, 28, 29, 31, 33, 35\}$$

Com isso, temos que $A \cap B = \{11, 15, 31, 35\}$ e $n(A \cap B) = 4$. Ou seja, a probabilidade de o número possuir resto 3 quando dividido por 4 e ser preto é $\frac{4}{36}$. Mas queremos o contrário. Daí, a probabilidade é:

$$1 - \frac{4}{36} = \frac{32}{36}$$

Resposta: alternativa a

4.2 – O uso do Casmath na sala de aula

Como já foi abordado, o *Casmath* poderá ser aplicado nos conteúdos de análise combinatória e probabilidade. Primeiramente será registrado no Play Store, para poder ser baixado de forma gratuita deve-se baixar, de forma gratuita, no Sistema Android em celulares e tablets. Com o *Casmath* baixado, ele poderá resolver as questões dos conteúdos citados anteriormente.

Para que o *Casmath* possa ser utilizado nas aulas de análise combinatória e probabilidade, é preciso que o aluno já tenha aprendido esses conteúdos. Com isso, ao responder as questões, ele não sentirá dificuldade ao resolvê-las. O aluno poderá resolver as questões não só durante as aulas como também fora da sala de aula.

O uso do *Casmath* na sala de aula é mais um exemplo do uso de tecnologia móvel nas aulas. A tecnologia móvel é a tecnologia que acompanha o usuário onde quer que ele esteja. Ela consiste em dispositivos móveis de comunicação e a tecnologia de rede que os conecta. Atualmente, a tecnologia móvel é composta por aparelhos conectados à internet, como smartphones, tablets e smartwatch. Essas são as últimas novidades em uma progressão que inclui pagers bidirecionais, laptops, celulares, aparelhos de navegação por GPS e muito mais.

As redes de comunicação que vinculam esses aparelhos são chamadas de tecnologia sem fio. Devido a essas redes, os aparelhos móveis compartilham voz, dados e aplicativos móveis.

De acordo com Freitas, Carvalho (2017, p. 48)

Diante de uma sociedade em que a informação está dentro de um smartphone, no qual diversas tarefas podem ser acessadas por simples toques na tela touchscreen implica em repensar a sala de aula como o único espaço para aprender e ensinar, isso porque, o aluno, orientado pelo seu professor pode acessar na internet a informação necessária para que complemente as suas aprendizagens matemáticas e dialogar com os colegas e o professor sobre o que aprendeu acerca de determinado conteúdo matemático.

Como a informação está dentro de um smartphone, não poderia ser diferente com os conteúdos de ensino.

5 – UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Nesse capítulo iremos abordar uma sequência didática de análise combinatória e probabilidade utilizando a temática dos jogos de cassino. A sequência didática constitui de oito aulas, sendo as cinco primeiras abordando o conteúdo de análise combinatória; a sexta e a sétima aulas abordam o conteúdo de probabilidade e a última aula utiliza o aplicativo *Casmath*.

Cada aula tem uma duração de 1 hora e 40 minutos, sendo dividida em 2 tempos de 50 minutos em cada aula, começaremos expondo os objetivos e a metodologia empregados e a seguir desenvolvemos os conteúdos que serão abordados. Os exemplos de cada conteúdo abordam os jogos de roleta, *poker* e *blackjack*.

As cinco primeiras aulas abordando o conteúdo de análise combinatória estão divididas de acordo com a seguinte sequência: a primeira aula é sobre o princípio fundamental da contagem e o fatorial de um número natural; a segunda aula é sobre permutações simples; a terceira é sobre arranjos simples; a quarta é sobre combinações simples e a quinta é sobre permutação com repetição.

A sexta e a sétima aulas que abordam o conteúdo de probabilidade estão divididas de acordo com a seguinte sequência: a sexta aula aborda a definição, dos conceitos que são usados em probabilidade e do cálculo da probabilidade; a sétima aula é a continuação da aula anterior onde aborda os cálculos de probabilidade envolvendo eventos complementares e união de eventos.

A oitava e última aula utiliza o aplicativo *Casmath* onde será feita uma revisão das aulas anteriores e os alunos utilizarão o *Casmath* para praticar os conteúdos de análise combinatória e probabilidade.

A seguir apresentaremos a sequência didática a serem feitas em oito aulas:

Aula 1

✓ **Duração:** 1h40min

✓ **Conteúdos:**

- Princípio Fundamental da Contagem;
- Fatorial de um número

✓ **Objetivos:**

- Conceituar o Princípio Fundamental da Contagem;
- Resolver problemas envolvendo Princípio Fundamental da Contagem;
- Conceituar Fatorial de um número natural;
- Calcular o Fatorial de um número natural.

✓ **Metodologia:**

- Apresentação da definição do Princípio Fundamental da Contagem;
- Exemplificação usando cartas de um baralho;
- Apresentação da definição do Fatorial de um número natural.

Princípio Fundamental da Contagem

Considere os conjuntos $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_n\}$. Podemos formar $m \cdot n$ pares ordenados (a_i, b_j) tais que $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

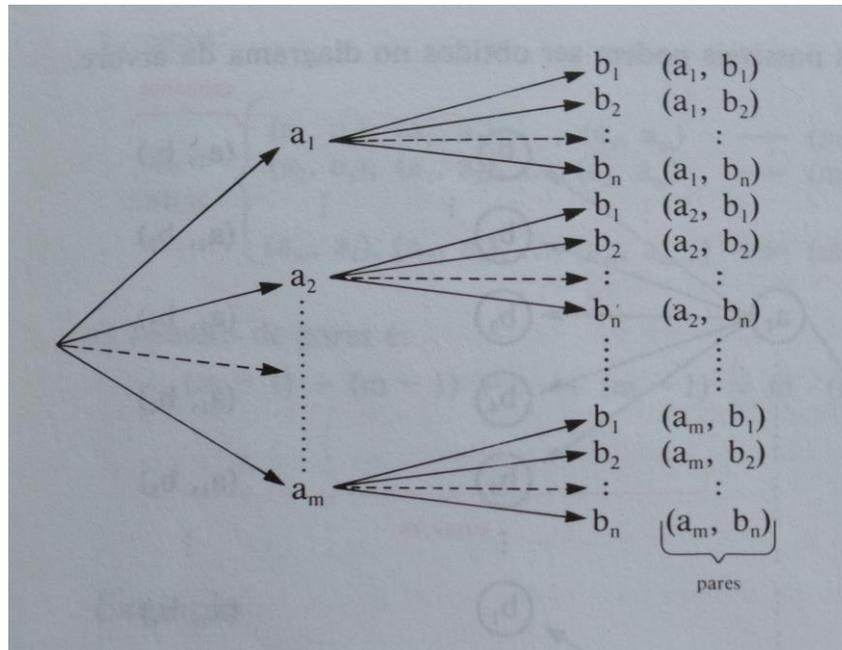
Demonstração:

(i) Vamos manter o primeiro elemento do par ordenado e variar o segundo.

$$m \text{ linhas} \begin{cases} (a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_n) \rightarrow n \text{ pares} \\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_2, b_n) \rightarrow n \text{ pares} \\ (a_3, b_1), (a_3, b_2), \dots, (a_3, b_n) \rightarrow n \text{ pares} \\ \vdots \\ (a_m, b_1), (a_m, b_2), \dots, (a_m, b_n) \rightarrow n \text{ pares} \end{cases}$$

Logo, o número de pares ordenados é $n + n + n + \dots + n = m \cdot n$.

(ii) Uma outra maneira de visualizarmos os pares ordenados é por modo de um diagrama, conhecido como diagrama da árvore, conforme a figura.



Exemplo 1:

Eu tenho 9 cartas com números (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10) e 4 cartas com letras: valete (J), damas (Q), reis (K) e ás (A). De quantas maneiras eu posso ter 2 cartas, sendo um número e uma letra?

Solução:

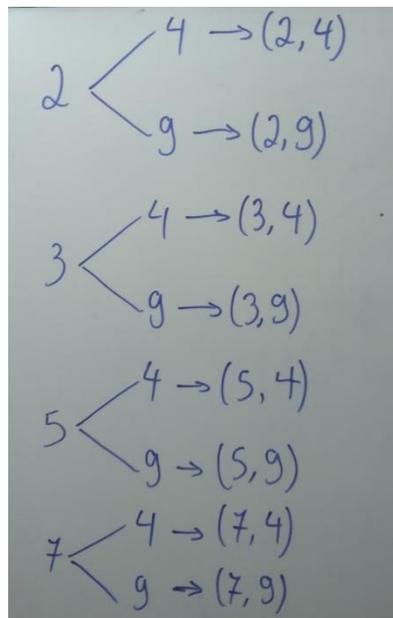
Como eu tenho 9 possibilidades de carta com número e 4 possibilidades de carta com letra, pelo princípio fundamental da contagem, temos $4 \cdot 9 = 36$ maneiras.

Exemplo 2:

Considere as cartas com os números de 2 a 9. De quantas maneiras podemos ter duas cartas, sendo uma carta de número primo e outra carta de um número quadrado perfeito?

Solução:

Das cartas do baralho com os números de 2 a 9, os números primos são 2, 3, 5 e 7 e os quadrados perfeitos são 4 e 9. Observe o diagrama de possibilidades.



Fonte: elaborada pelo autor

Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos $4 \cdot 2 = 8$ maneiras.

Fatorial

Nas resoluções de problemas envolvendo Princípio Fundamental da Contagem, é comum aparecerem multiplicações envolvendo números naturais consecutivos, como por exemplo, $27 \cdot 26 \cdot 25$; $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$; $16 \cdot 15 \cdot 14$; etc. na maioria das vezes é possível escrever essas multiplicações de uma forma resumida. Para isso, vamos estudar o fatorial de um número natural, que será útil na contagem dos agrupamentos que serão estudados a seguir.

Chama-se fatorial de um número natural n (indicamos por $n!$) a multiplicação de n por seus antecessores até o fator 1, ou seja:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Exemplos:

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Definimos $1! = 1$ e $0! = 1$.

Conforme n aumenta, o valor de $n!$ se torna muito maior e mais trabalhoso de se calcular. Com isso podemos fazer algumas simplificações. Observe:

- $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7 \cdot 6!$
- $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 5!$ ou ainda $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 5 \cdot 4!$

Os exemplos anteriores mostram que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos:

$$n! = n \cdot (n - 1)!$$

Por exemplo, para calcular $\frac{11!}{8!}$, podemos desenvolver o fatorial do número maior (11) até chegarmos ao fatorial do menor (8), ou seja:

$$\frac{11!}{8!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$$

Exemplo 1:

Calcule $7! - 5!$

Solução:

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$\text{Logo, } 7! - 5! = 5040 - 120 = 4920$$

Exemplo 2:

Calcule $\frac{9!}{10!}$.

Solução:

$$\frac{9!}{10!} = \frac{9!}{10 \cdot 9!} = \frac{1}{10}$$

Exemplo 3:

Simplifique a expressão $\frac{(n+3)!}{(n+2)!}$.

Solução:

$$\frac{(n+3)!}{(n+2)!} = \frac{(n+3) \cdot (n+2)!}{(n+2)!} = n+3$$

Aula 2

✓ **Duração:** 1h40min

✓ **Conteúdo:**

- Permutações simples

✓ **Objetivos:**

- Conceituar permutações simples;
- Resolver problemas envolvendo permutações simples

✓ **Metodologia:**

- Apresentação da definição de permutações simples;
- Exemplificação usando cartas de um baralho;

Permutações simples

Quando temos agrupamentos que envolvam todos os elementos do conjunto, esses agrupamentos são chamados de permutações simples. Seja $n \in \mathbb{N}$. **Permutações simples de n elementos distintos** é qualquer agrupamento desses n elementos. Vamos calcular o número de permutações de n elementos. Para isso, vamos considerar que cada permutação a ser obtida é feita em n etapas:

- 1ª etapa: existem n possibilidades;
- 2ª etapa: existem $n - 1$ possibilidades;
- 3ª etapa: existem $n - 2$ possibilidades;

.....

- enésima etapa: existe apenas 1 possibilidade.

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de permutações simples possíveis é:

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Portanto, sendo P_n o número de permutações simples de n elementos, temos: $P_n = n!$.

Exemplo 1: Calcular P_4 e P_5 .

Solução:

$$P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Exemplo 2: Considere as cartas do baralho: 2, 3, 4, 5 e 6. Quantas sequências podemos formar com essas cartas do mesmo naipe?

Solução:

Temos todas as 5 cartas para formar uma sequência. Nesse caso, temos:

$$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Como são 4 naipes, temos $4 \cdot 120 = 480$ sequências.

Exemplo 3: Quantos são os anagramas da palavra ROLETA?

Solução:

Anagramas são palavras que podem ser formadas a partir de uma, tendo sentido ou não. Como a palavra tem 6 letras e todas distintas, o número de anagramas é calculado por $P_6 = 6!$, ou seja:

$$P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

Exemplo 4: Considerando o exemplo anterior, quantos são os anagramas que começam por vogal?

Solução:

Como a palavra ROLETA tem 3 vogais, temos:

O _____

E _____

A _____

Se fixarmos as vogais, teremos 5 letras para serem permutadas, ou seja, teremos P_5 . Logo, o número de anagramas que começam por vogal é:

$$3 \cdot P_5 = 3 \cdot 5!$$

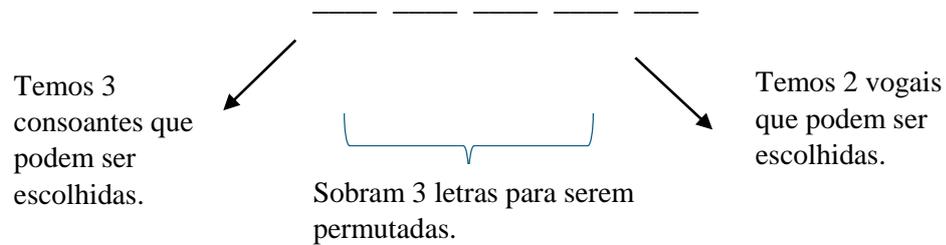
$$3 \cdot P_5 = 3 \cdot 120$$

$$3 \cdot P_5 = 480$$

Exemplo 5: quantos são os anagramas da palavra POKER que começam por consoante e terminam por vogal?

Solução:

A palavra tem 5 letras, sendo 2 vogais e 3 consoantes. Considere o esquema abaixo:

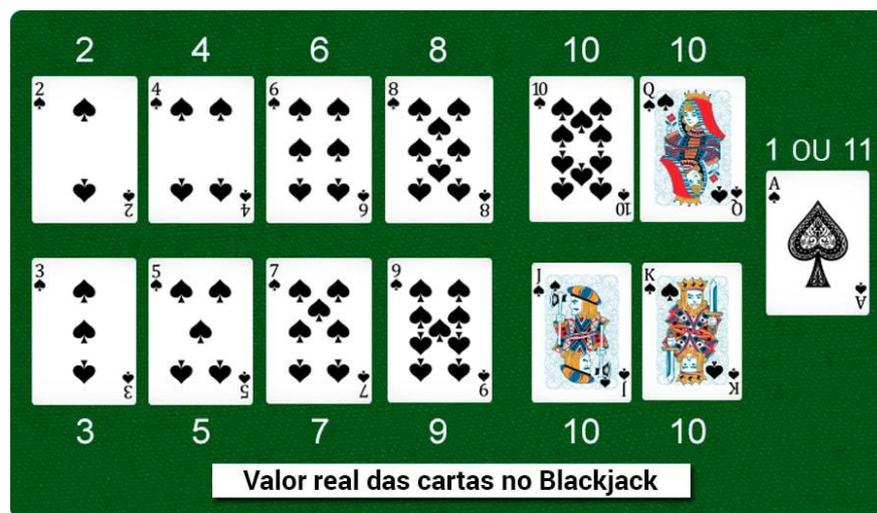


Logo, o número de anagramas que começam por consoante e terminam por vogal é:

$$3 \times P_3 \times 2 = 3 \times 3! \times 2$$

$$= 3 \times 6 \times 2 = 36$$

Exemplo 6: O blackjack é um jogo de cartas jogado em cassinos. O objetivo é fazer 21 pontos com no mínimo 3 cartas e no máximo 5. A figura mostra a pontuação das cartas no blackjack.



De quantas maneiras é possível fazer 21 pontos, usando as cartas de 2, 9 e 10 pontos?

Solução:

Para resolver esse problema, devemos considerar que:

1º) Temos 4 cartas de 2 e 4 cartas de 9, sendo uma de cada naipe;

2º) Para a carta de 10 pontos, temos as cartas 10, valete (J), dama (Q) e rei (K), isto é, 4 cartas. Como são 4 naipes, temos $4 \cdot 4 = 16$.

3º) Essas 3 cartas se permutam entre si, isto é, temos P_3 .

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos:

$$4 \cdot 4 \cdot 16 \cdot P_3 = 4 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 3!$$

$$4 \cdot 4 \cdot 16 \cdot P_3 = 4 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 6$$

$$4 \cdot 4 \cdot 16 \cdot P_3 = 1536$$

Agora, se quisermos saber o número de anagramas da palavra BLACKJACK? Observe que há letras repetidas nessa palavra, que já não se resolve por meio de permutações simples e sim por meio de um agrupamento chamado permutação com repetição, que será estudado nas próximas aulas.

Aula 3

- ✓ **Duração:** 1h40min

- ✓ **Conteúdo:**
 - Arranjos simples

- ✓ **Objetivos:**
 - Conceituar arranjos simples
 - Fazer o cálculo de arranjos simples
 - Resolver problemas envolvendo arranjos simples

- ✓ **Metodologia:**
 - Apresentação da definição de arranjos simples;
 - Exemplificação usando cartas de um baralho.

Arranjos simples

Sejam $n, p \in \mathbb{N}$ tais que $p \leq n$. Chamamos de **arranjos simples de n elementos tomados p a p** , qualquer agrupamento de p elementos distintos, escolhidos entre os n elementos dados. Os arranjos simples diferem pela ordem dos elementos. Ele é calculado pelo produto dos p fatores consecutivos e decrescentes começando por n . Indicando por $A_{n,p}$ o número de arranjos de n elementos tomados p a p , temos:

$$A_{n,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1)$$

Multiplicando e dividindo por $(n - p)!$, temos:

$$A_{n,p} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1) \cdot \frac{(n - p)!}{(n - p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - p + 1) \cdot (n - p) \cdot (n - p - 1) \cdot \dots \cdot 1}{(n - p)!} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

Logo:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n - p)!}$$

Exemplo 1: Calcular $A_{8,2}$.

Solução:

Sendo $n = 8$ e $p = 2$, temos:

$$A_{8,2} = \frac{8!}{(8 - 2)!} = \frac{8!}{6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 8 \cdot 7 = 56$$

Exemplo 2: Determine x para que $A_{x,2} = 42$.

Solução:

Usando a fórmula dos arranjos simples, temos:

$$A_{x,2} = 42$$

$$\frac{x!}{(x - 2)!} = 42$$

$$\frac{x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)!}{(x - 2)!} = 42$$

$$x \cdot (x - 1) = 42$$

$$x^2 - x = 42$$

$$x^2 - x - 42 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau acima, obtemos $x = 7$ e $x = -6$. Como queremos $x \in \mathbb{N}$, o valor $x = -6$ não serve. Portanto, $x = 7$.

Exemplo 3: Das 52 cartas de um baralho, 3 são retiradas sucessivamente e sem reposição. De quantas maneiras é possível obter uma sequência de cartas?

Solução:

Como todas as cartas são distintas, e elas são retiradas sem reposição, o número de sequências de cartas é:

$$A_{52,3} = \frac{52!}{(52 - 3)!} = \frac{52!}{49!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49!}{49!} = 52 \cdot 51 \cdot 50 = 132600$$

Exemplo 4: Considere as cartas do baralho: 2, 3, 4, 5 e 6. Quantas sequências de 3 cartas podemos formar?

Solução:

Considere as sequências 235 e 253. Elas são diferentes, ou seja, $235 \neq 253$. Com isso, temos um caso de arranjo de 5 elementos tomados 3 a 3. Daí, o número de sequências é:

$$A_{5,3} = \frac{5!}{(5 - 3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Exemplo 5: Considerando o exemplo anterior, quantas sequências de cartas iniciadas por números pares podem ser formadas?

Solução:

Queremos que a sequência comece por número par. Para isso, temos:

2 ___ ___

4 ___ ___

6 ___ ___

Nesse caso, temos $3 \cdot A_{4,2}$. Logo, a quantidade de sequências é:

$$3 \cdot A_{4,2} = 3 \cdot \frac{4!}{(4-2)!}$$

$$3 \cdot A_{4,2} = 3 \cdot \frac{4!}{2!}$$

$$3 \cdot A_{4,2} = 3 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!}$$

$$3 \cdot A_{4,2} = 3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$$

Exemplo 6: Das 13 cartas de um mesmo naipe, 4 são retiradas sem reposição. De quantas maneiras é possível formar uma sequência com essas cartas?

Solução: As cartas são distintas e são retiradas sem reposição. Logo o número de sequência é:

$$A_{13,4} = \frac{13!}{(13-4)!} = \frac{13!}{9!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 17160$$

Exemplo 7: Em relação ao exemplo anterior, das 13 cartas de cartas de copas e 13 cartas de espadas, são retiradas 3 cartas de copas e 2 cartas de espadas sem reposição. De quantas maneiras é possível formar uma sequência de 3 cartas de copas e 2 cartas de espadas?

Solução: As cartas são retiradas sem reposição. Temos que:

O número de maneiras de retirar 3 cartas de copas é:

$$A_{13,3} = \frac{13!}{(13-3)!} = \frac{13!}{10!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10!} = 13 \cdot 12 \cdot 11 = 1716$$

O número de maneiras de retirar 2 cartas de espadas é:

$$A_{13,2} = \frac{13!}{(13-2)!} = \frac{13!}{11!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11!}{11!} = 13 \cdot 12 = 156$$

Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de maneiras de formar uma sequência de 3 cartas de copas e 2 cartas de espadas sem reposição é:

$$A_{13,3} \cdot A_{13,2} = 1716 \cdot 156 = 267696$$

Aula 4

- ✓ **Duração:** 1h40min

- ✓ **Conteúdo:**
 - Combinações simples:

- ✓ **Objetivos:**
 - Conceituar combinações simples;
 - Fazer o cálculo de combinações simples;
 - Resolver problemas envolvendo combinações simples.

- ✓ **Metodologia:**
 - Apresentação da definição de combinações simples;
 - Exemplificação usando cartas de um baralho.

Combinações simples

Sejam $n, p \in \mathbb{N}$ tal que $p \leq n$. Chama-se **combinações simples de n elementos tomados p a p** qualquer subconjunto formado por p elementos distintos, escolhidos entre os n . É o agrupamento que não difere pela ordem dos elementos e sim pela natureza.

O cálculo das combinações de n elementos tomados p a p , indicado por $C_{n,p}$, é feito da seguinte maneira:

1º) Vamos determinar o número de agrupamentos ordenados (arranjos) formados por p elementos distintos, escolhidos entre os n elementos:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

2º) Vamos determinar o número de sequências distintas que podem ser formadas por p elementos (permutações de p elementos):

$$P_n = n!$$

3º) Qualquer permutação dos elementos de uma sequência dá origem a uma única combinação, o número de combinações de n elementos tomados p a p é:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_p}$$

$$C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!}$$

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}$$

Exemplo 1: Calcular $C_{7,5}$.

Solução:

Fazendo $n = 7$ e $p = 5$, temos:

$$C_{7,5} = \frac{7!}{(7-5)! \cdot 5!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = \frac{42}{2} = 21$$

Exemplo 2: Calcule x para que $C_{x,2} = 10$.

Solução:

Usando a fórmula de combinações simples, temos:

$$C_{x,2} = 10$$

$$\frac{x!}{(x-2)! \cdot 2!} = 10$$

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)!}{(x-2)! \cdot 2!} = 10$$

$$\frac{x \cdot (x-1)}{2!} = 10$$

$$x \cdot (x-1) = 10 \cdot 2$$

$$x^2 - x = 20$$

$$x^2 - x - 20 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau acima, obtemos $x = 5$ e $x = -4$. Como queremos $x \in \mathbb{N}$, não serve $x = -4$. Portanto, $x = 5$.

Exemplo 3: No jogo de poker, o objetivo é completar uma sequência de 5 cartas. Quantos jogos possíveis podem ser formados?

Solução:

Como queremos 5 das 52 cartas do baralho, o número de jogos possíveis é:

$$C_{52,5} = \frac{52!}{(52-5)! \cdot 5!} = \frac{52!}{47! \cdot 5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{47! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2598960$$

Exemplo 4: No jogo de poker, existe uma sequência de cartas chamada full house, que é uma combinação de um trio de cartas de mesmo valor com um par de cartas também de mesmo valor. A figura mostra um exemplo de full house, formada por três ases e dois setes.



De quantas maneiras é possível formar uma sequência de full house?

Solução:

Existe 13 valores para o trio e 12 valores para o par. Dentre as cartas de mesmo valor, o número de maneiras de calcular a trinca é dado por $C_{4,3}$ e o número de maneiras de calcular o par é dado por $C_{4,2}$. Portanto:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 3!}{1! \cdot 3!} = 4$$

$$C_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2} = 6$$

Logo, o número de maneiras é $13 \cdot 12 \cdot 4 \cdot 6 = 3744$.

Exemplo5: Sorteando simultaneamente 5 cartas, determine:

- o número de maneiras distintas de ocorrer o resultado do sorteio.
- o número de formas distintas é possível escolher as quatro cartas de ouros.
- o número de formas distintas de obter três espadas e duas copas.

Solução:

- Como não estamos levando em consideração a ordem das cartas, o número de maneiras é:

$$C_{52,5} = \frac{52!}{(52-5)! \cdot 5!} = \frac{52!}{47! \cdot 5!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{47! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2598960$$

b) Temos 13 cartas de ouros. O número de maneiras é:

$$C_{13,4} = \frac{13!}{(13-4) \cdot 4!} = \frac{13!}{9! \cdot 4!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 715$$

c) Temos 13 cartas de espadas e 13 cartas de copas. Temos que:

o número de maneiras de escolher 3 cartas de espadas é:

$$C_{13,3} = \frac{13!}{(13-3) \cdot 3!} = \frac{13!}{10! \cdot 3!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10!}{10! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 286$$

O número de maneiras de escolher 2 cartas de copas é:

$$C_{13,2} = \frac{13!}{(13-2) \cdot 2!} = \frac{13!}{11! \cdot 2!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11!}{11! \cdot 2 \cdot 1} = 78$$

Assim, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de maneiras de escolher 3 copas e 2 espadas é $286 \cdot 78 = 22308$

Aula 5

- ✓ **Duração:** 1h40min

- ✓ **Conteúdo:**
 - Permutação com repetição

- ✓ **Objetivos:**
 - Conceituar permutação com repetição
 - Resolver problemas envolvendo permutação com repetição

- ✓ **Metodologia:**
 - Apresentação da definição de combinações simples;
 - Exemplificação usando cartas de um baralho.

Permutação com repetição

Considere o conjunto $M = \{a_1, a_1, \dots, a_1, a_2, a_2, \dots, a_2, \dots, a_n\}$ tal que:

- a_1 se repete n_1 vezes;
- a_2 se repete n_2 vezes;
-
- a_n se repete n_n vezes

O número de permutações de n elementos nessas condições, indicado por $P_n^{n_1, n_2, \dots, n_n}$, é:

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_n} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_n!}$$

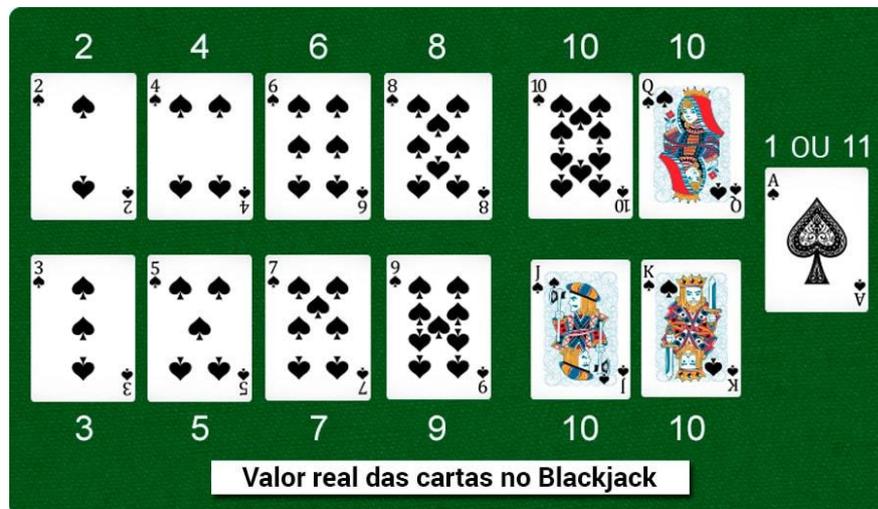
Exemplo1: O blackjack é um jogo de cartas utilizado em cassinos. Quantos são os anagramas da palavra BLACKJACK?

Solução:

A palavra tem 9 letras, sendo que as letras A, C e K se repetem (2 vezes cada). Portanto, o número de anagramas é:

$$P_9^{2,2,2} = \frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 3 = 45360$$

Exemplo 2: Em um jogo de blackjack, o objetivo é fazer 21 pontos. A figura mostra os valores das cartas.



De quantas maneiras é possível fazer 21 pontos com 3 cartas, sendo uma carta de às (A) e 2 cartas de 10 pontos?

Solução:

Para resolver esse problema, devemos considerar que:

1º) Temos 4 ases, sendo um de cada naipe (ás, ouros, paus e espadas), em que nesse caso o às vale 1 ponto;

2º) As cartas que valem 10 pontos são: 10, J, Q e K. Como são 4 naipes, temos $4 \cdot 4 = 16$ cartas;

3º) A próxima carta de 10 pontos não pode ser a mesma que a anterior. Ou seja, temos agora 15 cartas;

4º) Essa combinação gera uma permutação com repetição. Por exemplo, podemos ter uma trinca formada por um às e dois 10 (não levando em consideração o naipe). Ou seja, temos 3 cartas com duas repetições, que podem permutar entre si, que vamos indicar por P_3^2 .

Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de maneiras é:

$$4 \cdot 16 \cdot 15 \cdot P_3^2 = 960 \cdot \frac{3!}{2!} = 2880$$

Exemplo3: E se o jogador quiser fazer 21 pontos com 5 cartas, sendo 3 às e 2 noves, de quantas maneiras é possível?

Solução:

Para resolver esse problema, devemos considerar que:

1º) São 4 ases, 1 de cada naipe;

2º) Para o primeiro às, temos 4 possibilidades;

3º) Para o segundo às, temos 3 possibilidades;

4º) Para o terceiro às, temos 2 possibilidades;

5º) São 4 noves, também 1 de cada naipe;

6º) Para o primeiro 9, são 4 possibilidades;

7º) Para o segundo 9, são 3 possibilidades;

8º) Desconsiderando os naipes, as cartas de às e 9 se repetem 3 e 2 vezes, respectivamente. Com isso, temos 5 cartas com 3 e 2 repetições que podem permutar entre si e indicamos por $P_5^{3,2}$;

9º) Por exemplo, podemos ter (A, A, A, 9, 9) ou (A, 9, A, 9, A) ou (9, 9, A, A, A), etc.

Portanto, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de maneiras é:

$$4.3.2.4.3. P_5^{3,2} = 288 \cdot \frac{5!}{3!.2!} = 288 \cdot \frac{5.4.3!}{3!.2} = 288.10 = 2880$$

Exemplo 4: No jogo de blackjack, se tivermos as cartas 2, 3 e 6, de quantas maneiras é possível fazer 21 pontos:

a) com 4 cartas?

b) com 5 cartas?

Solução:

a) Inicialmente, temos as cartas 2, 3 e 6, que valem, respectivamente, 2, 3 e 6 pontos, totalizando 11. Para fazer 21 pontos, é necessário ter mais uma carta que vale 10 pontos que são o 10, o valete (J), a dama (Q) e o rei (K).

Para isso, temos que na 1ª, 2ª e 3ª cartas, temos 4 possibilidades cada, pois estamos levando em consideração os 4 naipes.

Para a 4ª carta, temos 16 possibilidades, pois são as quatro cartas de 10 pontos e os quatro naipes.

Essas 4 cartas se permutam entre si, logo temos P_4 . Logo, pelo Princípio Fundamental da contagem, temos:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 16 \cdot P_4 = 24576$$

Logo, o número de maneiras é 24576

b) Para fazer 21 pontos com 5 cartas, sendo inicialmente com as cartas 2, 3 e 6, devemos considerar os seguintes casos:

1º) as cartas 2, 3, 6, 9 e A, onde o às vale 1 ponto.

Para cada uma dessas cartas, temos 4 possibilidades. Essas cartas se permutam entre si, ou seja, temos P_5 . Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de maneiras é:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot P_5 = 122880$$

2º) as cartas 2, 3, 6 e duas cartas de 5.

Para as cartas 2, 3 e 6, temos 4 possibilidades. Para as cartas de 5, temos 4 possibilidades para o primeiro cinco e 3 possibilidades para o segundo, desconsiderando os naipes. Com isso, temos 5 cartas com duas repetições, que podem permutar entre si, ou seja, temos P_5^2 . Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de maneiras é:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot P_5^2 = 4^4 \cdot 3 \frac{5!}{2!} = 256 \cdot 3 \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!} = 768 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 46080$$

3º) uma carta de 2, duas cartas de 3 e uma carta de 6.

Nesse caso, precisaríamos de uma carta de 7 e de modo análogo ao caso anterior, temos 46080 maneiras.

4º) duas cartas de 2, uma carta de 3, e uma de 6.

Nesse caso, precisaríamos de uma carta de 8 e de modo análogo aos 2º e 3º casos, temos 46080 maneiras.

5º) uma carta de 2, uma de 3 e duas de 6.

Nesse caso, precisaríamos de uma carta de 4 e de modo análogo aos 2º, 3º e 4º casos, temos 46080 maneiras.

Logo, o número total de maneiras de se fazer 21 pontos com 5 cartas sendo as cartas 2, 3 e 6 é $122880 + 4 \times 46080 = 307200$.

Aula 6

- ✓ **Duração:** 1h40min

- ✓ **Conteúdo:**
 - Probabilidade

- ✓ **Objetivos:**
 - Conceituar probabilidade
 - Calcular a probabilidade de um evento

- ✓ **Metodologia:**
 - Apresentação da definição de probabilidade;
 - Exemplificação usando cartas de um baralho e roleta.

Probabilidade

A probabilidade é o estudo das chances de ocorrência de um resultado, que são obtidas pela razão entre os casos favoráveis e os casos possíveis. É por meio de uma probabilidade, por exemplo, que podemos saber a chance de se obter cara ou coroa num lançamento de uma moeda.

Dentro do estudo da probabilidade, existem algumas definições que são fundamentais na sua compreensão e no cálculo. São elas:

- **Experimento aleatório** – é qualquer experimento que pode apresentar resultados diferentes, quando repetido nas mesmas condições. Exemplos: jogar uma moeda e observar a face superior; jogar um dado e observar a face de cima.
- **Espaço amostral** – é o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Exemplo: Ao lançar uma moeda, a face superior pode aparecer cara (c) ou coroa (k). Sendo S o espaço amostral, temos que $S = \{c, k\}$ e $n(S) = 2$, onde $n(S)$ é definido como o número de elementos do espaço amostral.
- **Evento** – é qualquer subconjunto do espaço amostral. Exemplo: Considerando uma urna que contém 11 bolas numeradas de 1 a 11, temos o seguinte espaço amostral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$. Um exemplo de evento é a “ocorrência de um número par”. Indicando por A esse evento, temos $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ e $n(A) = 5$.

Em um experimento aleatório, no qual S é o espaço amostral, a probabilidade de ocorrer um evento E qualquer é o número $p(E)$, dado por:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

onde:

- $n(E)$ é o número de casos favoráveis (onde E é o evento que desejamos que ocorra) e:
- $n(S)$ é o número de casos possíveis.

Observações:

- Se $E = \emptyset$, então $p(E) = 0$ e se $E = S$, então $p(E) = 1$. Com isso, a probabilidade de ocorrer um evento E qualquer é um número maior ou igual a zero e menor ou igual a 1, ou seja, $0 \leq p(E) \leq 1$.
- É bastante comum representar uma probabilidade na forma de porcentagem. Portanto, podemos dizer que $0\% \leq p(E) \leq 100\%$.

Exemplo 1:

A roleta é um jogo em que consiste em uma roda giratória com os números de 0 a 36. Qual a probabilidade de o número sorteado ser um múltiplo de 7?

Solução:

Temos que o espaço amostral é formado pelos números de 0 a 36, num total de 37. Ou seja, o número de casos possíveis é 37 e indicamos por $n(S) = 37$.

O evento “ser múltiplo de 7” é formado pelos números 0, 7, 14, 21, 28 e 35, totalizando 6. Ou seja, o número de casos favoráveis é 6 e indicamos por $n(E) = 6$.

Sendo p a probabilidade de o número sorteado ser múltiplo de 7, temos que:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{6}{37}$$

Exemplo 2:

Num jogo de roleta, qual a probabilidade de o número sorteado ser um divisor de 8?

Solução:

Temos que o número de casos possíveis é 37, ou seja, $n(S) = 37$.

O evento “ser divisor de 8” é formado pelos números 1, 2, 4 e 8, num total de 4 números. Ou seja, o número de casos favoráveis é 4 e indicamos por $n(E) = 4$.

Logo, a probabilidade de o número sorteado ser um divisor de 8, indicado por p , é:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{37}$$

Exemplo 3:

Das 52 cartas de um baralho, uma é sorteada ao acaso. Qual a probabilidade da carta sorteada ser:

- a) um naipe de copas?
- b) um rei?
- c) uma dama de ouros?

Solução:

Em todos os itens, o espaço amostral é 52 e indicamos por $n(S) = 52$.

a) Para o naipe de copas, temos as seguintes cartas: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q e K, totalizando 13 cartas e temos $n(E) = 13$. Logo, a probabilidade é:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

b) Para a carta sorteada ser rei, temos 4, uma para cada naipe e temos $n(E) = 4$. Logo, a probabilidade é:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

c) Para a carta sorteada ser dama de ouros, temos uma única possibilidade e indicamos por $n(E) = 1$. Logo, a probabilidade é:

$$p(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{52}$$

Exemplo 4:

Das 52 cartas de um baralho, duas cartas são sorteadas ao acaso. Qual a probabilidade de as cartas sorteadas serem:

- a) paus?
- b) um valete e um rei?

Solução:

Como são duas cartas sorteadas simultaneamente, o espaço amostral será o número de maneiras de retirar duas cartas, que será calculado por:

$$C_{52,2} = \frac{52!}{(52-2)! \cdot 2!} = \frac{52!}{50! \cdot 2!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50!}{50! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{52 \cdot 51}{2 \cdot 1} = 1326$$

Ou seja, $n(S) = 1326$

- a) O número de maneiras de se retirar duas cartas de paus será calculado por:

$$C_{13,2} = \frac{13!}{(13-2)! \cdot 2!} = \frac{13!}{11! \cdot 2!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11!}{11! \cdot 2 \cdot 1} = \frac{13 \cdot 12}{2 \cdot 1} = 78$$

Ou seja, $n(E) = 78$. Logo, a probabilidade é:

$$p = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$$

b) Temos 4 cartas de valete e 4 cartas de rei. O número de maneiras de se retirar cada uma dessas cartas é:

$$C_{4,1} = \frac{4!}{(4-1)! \cdot 1!} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \frac{4 \cdot 3!}{3! \cdot 1} = 4$$

Isto é, temos 4 maneiras de retirar uma carta de valete e 4 maneiras de retirar uma carta de rei. Pelo Princípio Fundamental da Contagem, temos $4 \cdot 4 = 16$ e $n(E) = 16$. Logo, a probabilidade é:

$$p = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{16}{1326} = \frac{8}{663}$$

Aula 7

✓ **Duração:** 1h40min

✓ **Conteúdo:**

- Probabilidade

✓ **Objetivos:**

- Conceituar eventos complementares;
- Calcular a probabilidade de um evento complementar;
- Conceituar união de dois eventos;
- Calcular a probabilidade da união de dois ou mais eventos (adição de probabilidades)

✓ **Metodologia:**

- Apresentação da definição de eventos complementares;
- Apresentação da definição de união de dois eventos;
- Exemplificação usando cartas de um baralho e roleta.

Eventos complementares

Seja A um evento qualquer. Chama-se **evento complementar de A** , indicado por \bar{A} ou A^C , o evento em que A não ocorre. A soma da probabilidade de um evento A ($p(A)$) com a probabilidade de um evento complementar ($p(\bar{A})$) é igual a 1, ou seja:

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

Demonstração:

Sabendo que $A \cup \bar{A} = E$ e $A \cap \bar{A} = \emptyset$, temos:

$$n(A) + n(\bar{A}) = n(E)$$

Dividindo a igualdade por $n(E)$, tal que $n(E) \neq 0$:

$$\frac{n(A)}{n(E)} + \frac{n(\bar{A})}{n(E)} = \frac{n(E)}{n(E)}$$

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1$$

Exemplo 1:

Num jogo de roleta, qual a probabilidade de o número sorteado não ser múltiplo de 6?

Solução:

Seja A o evento ser múltiplo de 6. Temos: $E = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36\}$. Daí, $n(E) = 7$ e $n(S) = 37$. Portanto, a probabilidade é $p(E) = \frac{7}{37}$. Como queremos que o número sorteado não seja múltiplo de 6, indicaremos por \bar{E} . Com isso, temos:

$$p(E) + p(\bar{E}) = 1$$

$$\frac{7}{37} + p = 1$$

$$p(E) = 1 - \frac{1}{37}$$

$$p(E) = \frac{36}{37}$$

Exemplo 2:

Num baralho de 52 cartas, uma carta é sorteada ao acaso. Qual a probabilidade de a carta sorteada não ser um ás?

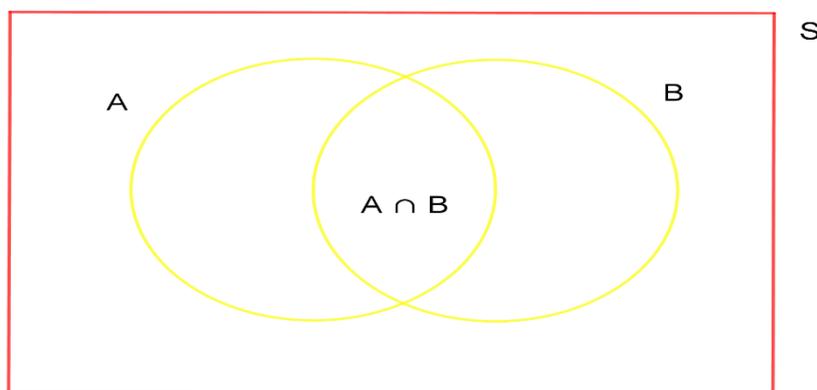
Solução:

Temos quatro cartas de ás. Logo, a probabilidade é $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$. Logo, a probabilidade de a carta não ser de ás é:

$$1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$$

União de eventos

Considere A e B dois eventos de um mesmo espaço amostral S. Da Teoria dos Conjuntos, temos:



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Dividindo membro a membro por $n(S) \neq 0$, temos:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Essa igualdade é conhecida como teoria da adição de probabilidades.

Observação: Se $A \cap B = \emptyset$, dizemos que os eventos A e B são **mutuamente exclusivos** e $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Exemplo 1:

Num jogo de roleta, qual a probabilidade de o número sorteado ser divisor de 36 ou um quadrado perfeito? Lembrando que na roleta são 37 números, de 0 a 36.

Solução:

Sejam os eventos A “ser divisor de 36” e B “ser um quadrado perfeito”. Temos:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}, n(A) = 9, p(A) = \frac{9}{37}$$

$$B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}, n(B) = 7, p(B) = \frac{7}{37}$$

$$A \cap B = \{1, 4, 9, 36\}, n(A \cap B) = 4, p(A \cap B) = \frac{4}{37}$$

Logo, a probabilidade de o número sorteado ser divisor de 36 ou um quadrado perfeito, indicado por $p(A \cup B)$, é:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B) = \frac{9}{37} + \frac{7}{37} - \frac{4}{37}$$

$$p(A \cup B) = \frac{12}{37}$$

Exemplo 2:

De um baralho de 52 cartas, qual a probabilidade de a carta sorteada ser um número primo ou múltiplo de 4?

Solução:

Sejam os eventos A “ser número primo” e B “ser múltiplo de 4”. Temos:

Os números primos na carta do baralho são 2, 3, 5 e 7. Como são 4 naipes, temos ao todo 16 cartas. Daí, $n(A) = 16$ e $p(A) = \frac{16}{52}$.

Os múltiplos de 4 na carta do baralho são 4 e 8. Como são 4 naipes, temos ao todo 8 cartas. Daí, $n(B) = 8$ e $p(B) = \frac{8}{52}$.

Observe que $A \cap B = \emptyset$, ou seja, os eventos A e B são mutuamente exclusivos e $p(A \cap B) = 0$. Logo, a probabilidade é:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

$$p(A \cup B) = \frac{16}{52} + \frac{8}{52} = \frac{24}{52} = \frac{6}{13}$$

Aula 8

✓ **Duração:** 1h40min

✓ **Conteúdos:**

- Análise combinatória;
- Probabilidade

✓ **Objetivos:**

- Calcular o número de permutações simples;
- Calcular o número de arranjos simples;
- Calcular o número de combinações simples;
- Calcular a probabilidade de um evento;
- Calcular a probabilidade de um evento complementar;
- Calcular a probabilidade da união de dois eventos
- Estimular os alunos a usar a tecnologia no ensino de matemática;
- Mostrar que pode ser prazeroso estudar fora do ambiente escolar usando recursos tecnológicos

✓ **Metodologia:**

- Revisão do conteúdo de análise combinatória;
- Revisão do conteúdo de probabilidade;
- Apresentação do aplicativo CASMATH.
- Utilização do aplicativo CASMATH

Exercícios de revisão do conteúdo de análise combinatória e probabilidade

1) Dadas as 52 cartas de um baralho, de quantas maneiras eu posso ter duas cartas sendo uma carta de número ímpar e uma carta com consoante?

Solução: Como eu tenho 4 possibilidades de carta com número ímpar de cada naipe e 3 cartas com consoante também de cada naipe, pelo princípio fundamental da contagem, temos $4 \cdot 3 = 12$ maneiras em cada naipe. Mas como as cartas do baralho tem 4 naipes, o número de maneiras é $12 \cdot 4 = 48$ maneiras.

2) Considere as cartas com os números de 2 a 10. De quantas maneiras podemos ter duas cartas, sendo a segunda carta o dobro da primeira do mesmo naipe?

Solução: Temos as seguintes possibilidades: (2, 4), (3, 6), (4, 8) e (5, 10). Logo, temos 4 maneiras.

3) Num jogo de blackjack, de quantas maneiras é possível fazer 21 pontos usando as cartas de 6, 7 e 8 pontos?

Solução: Temos 4 cartas de 6 pontos (1 em cada naipe). De modo análogo, temos 4 cartas de 7 pontos e 4 cartas de 8. Essas três cartas se permutam entre si, ou seja, temos P_3 . Logo, pelo princípio fundamental da contagem, temos:

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot P_3 = 64 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 384$$

4) Considere as cartas do baralho do 2 ao 9.

a) Quantas sequências de 3 cartas podemos formar do mesmo naipe?

b) Quantas sequências de 3 cartas podemos formar utilizando todos os naipes?

Solução:

a) Considere as sequências 467 e 476. Elas são diferentes, ou seja, $467 \neq 476$. Com isso, temos um caso de arranjo de 8 elementos tomados 3 a 3. Daí, o número de sequências é:

$$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Temos 4 naipes. Logo, o resultado desejado é $4 \cdot 336 = 1344$.

b) Considere as sequências 4 de paus, 6 de ouros e 7 de copas e a sequencia 4 de ouros, 6 de ouros e 7 de copas. Elas são diferentes, ou seja, a escolha de naipes diferentes dão sequências diferentes. Com isso, temos um caso de arranjo de $4 \cdot 8 = 32$ elementos tomados 3 a 3. Daí, o número de sequências é:

$$A_{32,3} = \frac{32!}{(32-3)!} = \frac{32!}{29!} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29!}{29!} = 32 \cdot 31 \cdot 30$$

5) No jogo de poker, existe uma combinação de cartas chamada flush, formada por cinco cartas do mesmo naipe que não estejam em sequência. A figura abaixo mostra um exemplo de um flush.



De quantas maneiras é possível formar um flush?

Solução: São 13 cartas de um naipe. Portanto, o número de maneiras de escolha é:

$$C_{13,5} = \frac{13!}{(13-5)! \cdot 5!} = \frac{13!}{8! \cdot 5!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1287$$

Dentro das 1287 maneiras, temos 10 que são sequências. Por exemplo, A, K, Q, J e 10. Daí, o número de maneiras é $1287 - 10 = 1277$. Como são 4 naipes de um baralho, o número de maneiras de formar um flush é $4 \times 1277 = 5108$.

6) Em um jogo de roleta, os números vão do 0 ao 36. Qual a probabilidade de sair um número múltiplo de 8?

Solução: Do 0 ao 36, temos 37 números. Desses, são múltiplos de 8: 0, 8, 16, 24 e 32, totalizando 5 números. Logo, a probabilidade é $\frac{5}{37}$.

7) Em um jogo de roleta, considerando os números de 0 a 36, qual a probabilidade de sair um número que não é um quadrado perfeito?

Solução: Temos que os números que são quadrados perfeitos são: 0, 1, 4, 9, 16, 25 e 36, ou seja, 7 números. Daí, temos que a probabilidade de sair um quadrado perfeito é $\frac{7}{37}$. Mas queremos o contrário, ou seja, que não seja quadrado perfeito. Logo, a probabilidade é:

$$1 - \frac{7}{37} = \frac{30}{37}$$

O aplicativo CASMATH

O *Casmath* é um aplicativo desenvolvido a partir do MIT App Inventor. Este aplicativo oferece um quiz com perguntas e respostas relacionadas à análise combinatória e probabilidade, utilizando conceitos de jogos de cassino populares, como roleta, poker e blackjack. Conforme o jogador (aluno) responde corretamente a uma pergunta, uma nova pergunta com um nível de dificuldade mais elevado é apresentada.

O *Casmath* poderá ser baixado, em breve, por meio de um *smartphone* ou *tablet* de forma gratuita. Para baixar o *Casmath*, você deverá entrar na Play Store do seu celular ou tablet e digitar o nome do aplicativo.

Depois de baixado, aparecerá a tela inicial, como na figura abaixo.



Ao clicar em SIM, você irá acessar as opções de jogo, conforme figura seguinte. Caso contrário, você sairá do aplicativo.



Cada jogo contém 4 questões objetivas em que o aluno só poderá escolher uma única opção. Caso ele acerte a opção, ele irá para a questão seguinte. Caso contrário, ele poderá verificar a resposta ou sair do aplicativo.

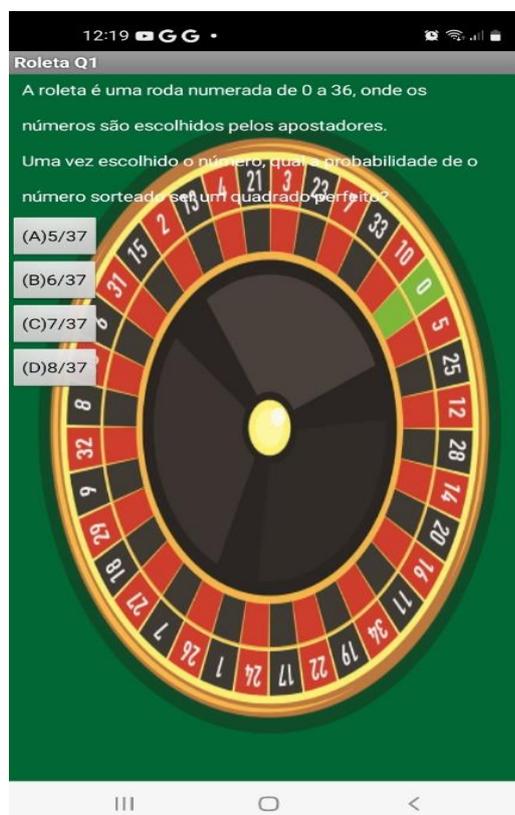
Ao escolher um dos jogos, aparecerá a seguinte tela, conforme as figuras.



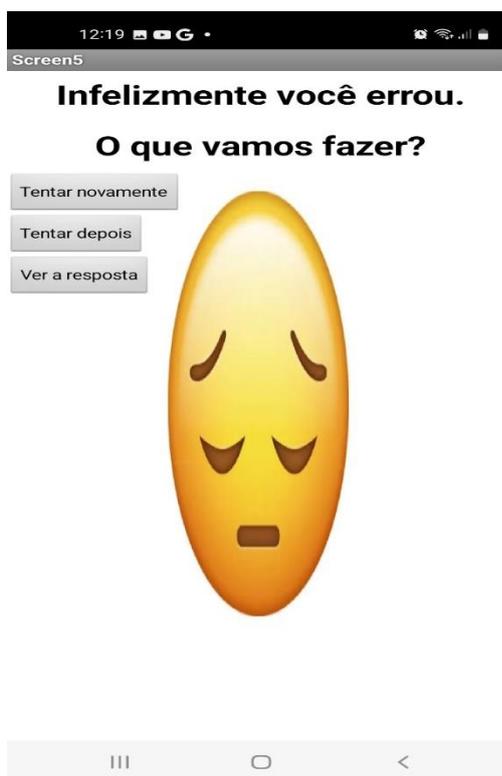


Em cada jogo, se o jogador clicar em SIM, aparecerá as questões com as alternativas. Caso contrário, ele voltará para a tela anterior.

Veja, por exemplo a primeira questão do jogo de roleta, de acordo com a figura.



Caso ele erre a questão, aparece a seguinte mensagem:



O aluno poderá escolher as opções “Tentar novamente”, “Tentar depois” ou “Ver a resposta”. Caso ele tente novamente, ele retornará à questão e marcará novamente a alternativa até a acertar. Caso ele escolha tentar depois, voltará à tela inicial do jogo. Caso ele escolha ver a resposta, aparecerá a resolução da questão e a sua resposta. A figura abaixo mostra a tela de “Ver a resposta”.

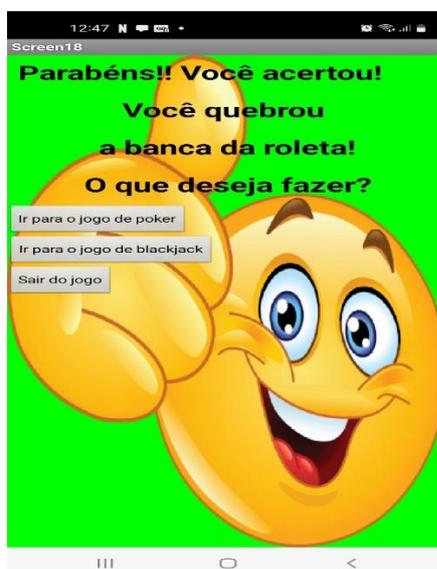


Observe que aparece as opções “Ir para a questão 2” e “Sair do jogo”. Ou seja, o aluno poderá escolher ir para a questão seguinte ou sair do jogo ou do aplicativo.

Caso ele acerte a questão, aparecerá a seguinte imagem.



Na última questão, se o aluno acertar a questão, ele poderá ir para os jogos restantes ou sair do aplicativo, conforme mostra a figura.



CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do exposto, evidenciamos que o Casmath é uma ferramenta essencial para facilitar o ensino de análise combinatória e probabilidade, tornando o processo de aprendizagem mais acessível e envolvente. Para alcançar esse resultado, diversas etapas foram percorridas.

Inicialmente, foi realizado um embasamento teórico sobre a aplicação de jogos e tecnologia no ensino, explorando suas propostas, benefícios, vantagens e desvantagens. Em seguida, foram abordados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) em relação ao uso dessas ferramentas, destacando o papel dos aplicativos móveis na promoção de um aprendizado mais dinâmico e interativo.

Posteriormente, foram analisados os jogos de cassino, como a roleta, o poker e o blackjack, essenciais para o desenvolvimento do Casmath e para a criação de questões relacionadas à análise combinatória e probabilidade. Foi crucial ressaltar que a abordagem dos jogos de azar teve como foco a presença da Matemática, sem incentivar a prática do jogo.

Além disso, foi realizada uma revisão do software MIT App Inventor, que possibilita a criação e teste de aplicativos de forma simplificada, sem a necessidade de conhecimento avançado em programação. A aplicação prática do Casmath, desenvolvido a partir desse software, foi demonstrada, destacando sua utilização em ambiente educacional.

Por fim, foram apresentadas as possíveis sequências didáticas de análise combinatória e probabilidade com a temática dos jogos de cassino, incluindo conteúdo, objetivos, metodologia e exemplos. O uso do aplicativo Casmath em sala de aula complementou esses ensinamentos, oferecendo uma abordagem inovadora e interativa para os alunos.

REFERÊNCIAS

ALVES, Luciana; BIANCHIN, Maysa Alahmar. **O jogo como recurso de aprendizagem**. Rev. Psicopedagogia, 27(83). São José do Rio Preto, Mai/Ago 2010. p. 282 – 287.

AMANCIO, Daniel de Traglia; SANZOVO, Daniel Trevisan. **Ensino de Matemática por meio das tecnologias digitais**. Revista Educação Pública, v. 20, nº 47, 8 de dezembro de 2020. Disponível em <https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/20/47/ensino-de-matemstica-pormeio-das-tecnologias-digitais>. Acesso em 19/01/2024 às 16:30

ANDRADE, R. T. **A probabilidade aplicada aos jogos de azar**. 70f. João Pessoa. Dissertação [Mestrado Profissional em Matemática] – UFPB, Paraíba, 2017.

BAUMGARTEL, P. O uso de jogos como metodologia de ensino da Matemática. In XX ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, Curitiba. **Anais** [...] Curitiba: Universidade Federal do Paraná. Disponível em < [gd2_priscila_baumgartel.pdf \(ufpr.br\)](#)>. Acesso em 12/01/2024 às 16:15.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino médio**, v. 2. Brasília MEC, 2006.

BRASIL. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**, LDB. 9394/1996. BRASIL. Disponível em www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/19394.htm. Acesso em [17/06/2023](#).

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

CRUZ, Flaviani Cristina da Silva. **O uso de tecnologias no ensino de Matemática**. 41 f. São José do Rio Preto. Monografia [Licenciatura em Matemática] – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. São Paulo, 2012. Disponível em <[o-uso-de-tecnologias-no-ensino-de-matematica---flaviani.pdf \(unesp.br\)](#)>. Acesso em 22/01/2024 às 21:10

ELIAS, A. P. A. J.; ROCHA, F. S. M.; MOTTA, M. S.; KALINKE, M. A. **Construindo aplicativos para o ensino de matemática utilizando o software de programação app Inventor**. Vitória. Revista Eletrônica DECT v. 8, n 2 pp 41 – 65, 2018.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários a prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 2004.

FREITAS, Raphael de Oliveira; CARVALHO, Mercedes. **Tecnologias móveis: tablets e smartphones no ensino da matemática**. Laplage em Revista v. 3, n. 2 pp 47-58, 2017. Disponível em <[Tecnologias móveis: tablets e smartphones no ensino da matemática \(redalyc.org\)](https://redalyc.org)>. Acesso em 15/02/2024 às 11:30.

FREITAS, F. M.; SILVEIRA, D. N. **Os jogos de azar e o ensino de probabilidade e análise combinatória**. Pesquisa em Ação Trilhando Caminhos em Educação. Ponta Grossa: Atena, p. 39-49, 2018.

FRANCO, Magda Aparecida de Oliveira *et al.* Jogos como ferramenta para favorecer a aprendizagem. In V CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 2018, Olinda. **Anais [...]** Olinda: Centro de Convenções de Pernambuco (CECON – PE). Disponível em <[TRABALHO_EV117_MD1_SA17_ID7680_07092018192407.pdf \(editorarealize.com.br\)](https://editorarealize.com.br)>. Acesso em 18/01/2024 às 22:30

GRANDO, R. C. **O Conhecimento Matemático e o Uso de Jogos na Sala de Aula**. 239 f. Campinas. Tese [doutorado] – Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2000

MARTINIANO, M. **Tecnologia na Educação: conheça as vantagens e desvantagens de levar tecnologia para a sala de aula**. Blog Flexge, 2021. Disponível em <[Vantagens e desvantagens da Tecnologia na Educação \(flexge.com\)](https://flexge.com)>. Acesso em 22/01/2024 às 21:45

MELO, Claudiano Henrique da Cunha; LIMA, Claudiney Nunes de. **A importância dos jogos no Ensino de Matemática no Ensino Fundamental II**. *Revista Educação Pública*, Rio de Janeiro, v.22, nº 39, 18 de outubro de 2022. Disponível em <<https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/22/39/a-importancia-dos-jogos-no-ensino-de-matematica-no-ensino-fundamental-ii>>. Acesso em 18/01/2024 às 21:10

MEDEIROS, A. P. S. **Aplicativos de Ensino: Uma breve discussão do uso na matemática**. 52f. João Pessoa. Dissertação [Mestrado Profissional em Matemática] – UFPB, Paraíba, 2021.

MENON, Lucimari Antoneli; SILVA, Karolina Barone Ribeiro da. **Os jogos no ensino da Matemática – entre o educativo e o lúdico**. In: Paraná: Secretaria de Estado de Educação. Superintendência de Educação. Os desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2016. Curitiba: SEED/PR, 2018, v.1 (Cadernos PDE). Disponível em <[OS JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA - ENTRE O EDUCATIVO E O LÚDICO \(diaadiaeducacao.pr.gov.br\)](http://osjogosnoensinodamatematica-entreoeducativoeoludico.diaadiaeducacao.pr.gov.br)>. Acesso em 06/07/2023 às 17:00.

MORALES, Juliana. **O que mais cai na prova de Matemática do Enem?**. Disponível em <https://guiadoestudante.abril.com.br/enem/enem-o-que-mais-cai-em-matematica-e-dicas-de-como-estudar/>. Acesso em 06/07/2023 às 17:30.

NOÉ, M. **A Importância dos Jogos no ensino da Matemática**. Canal do Educador. Disponível em <[A importância dos Jogos no Ensino da Matemática - Educador Brasil Escola \(uol.com.br\)](http://aimportancia.dos.jogos.no.ensino.da.matematica-educador.brasil.escola.uol.com.br)>. Acesso em 12/01/2024 às 21:50.

OLIVEIRA, Sérgio de; PEREIRA, Marconi de Arruda; TEIXEIRA, Fernando A. MIT App Inventor como Ambiente de Ensino de Algoritmos e Programação. In: WORKSHOP SOBRE EDUCAÇÃO EM COMPUTAÇÃO (WEI), 29., 2021, Evento Online. **Anais [...]**. Porto Alegre: Sociedade Brasileira de Computação, 2021. p. 61-70. ISSN 2595-6175. Disponível em: <https://doi.org/10.5753/wei.2021.15897>. Acesso em 07/01/2024 às 00:02.

OLIVEIRA, W. J. **O uso do pôquer como ferramenta para o ensino e a aprendizagem de probabilidade**. 81f. Catalão. Dissertação [Mestrado profissional em Matemática] – UFG, Goiás, 2019.

REICHERT, J. T.; MIECOANSKI, B.; KIST, M. **Desenvolvimento de aplicativos matemáticos com App Inventor**. Ponta Grossa: Atena, 2023. Disponível em <[Desenvolvimento de aplicativos matemáticos no APP Inventor : Atena Editora : Free Download, Borrow, and Streaming : Internet Archive](https://desenvolvimento.de.aplicativos.matematicos.no.app.inventor.atena.editora.free.download.borrow.and.streaming.internet.archive)> Acesso em 08/01/2024 às 11:34

SCHENEIDER, J.; NUNES, V. B. **Aplicativos Digitais no Contexto do Ensino de Matemática: Contribuições dos Alunos por Meio de Oficinas Temáticas**. Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco v. 8, n. 2 pp 72 – 84, 2019. Disponível em <[Vista do APLICATIVOS DIGITAIS NO CONTEXTO DO ENSINO DE MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES DOS ALUNOS POR MEIO DE OFICINAS TEMÁTICAS \(ifes.edu.br\)](#)> Acesso em 20/01/2024 às 22:15

SILVA, Aparecida Franciso da; KODAMA, Helena Matiko Yano. Jogos no Ensino da Matemática. *In* II BIENAL DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA, 2004, Salvador. **Anais** [...] Salvador: Universidade Federal da Bahia. Disponível em <[www.bienasbm.ufba.br/OFF11.pdf](#)>. Acesso em 06/07/2023 às 18:00

SILVA, Arício Medeiros da; PAIVA, Igor Galdino; FORTES, Denise Xavier. **Desenvolvimento de Aplicativo para Android com o uso do MIT App Inventor**. Paulo Afonso. Revista Científica da FASETE v. 11, n. 3 pp 191 – 203, 2017. Disponível em <[Vista do DESENVOLVIMENTO DE APLICATIVO PARA ANDROID COM USO DO MIT APP INVENTOR \(unirios.edu.br\)](#)>. Acesso em 20/01/2024 às 13:45.

TEIXEIRA, Ricardo Roberto Piazza; APRESENTAÇÃO, Kátia Regina dos Santos da. **Jogos em sala de aula e seus benefícios para a aprendizagem da matemática**. Revista Linhas, Florianópolis, v. 15, n. 28, p. 302 – 323, 2014

VISITAÇÃO S. S. **O jogo de blackjack em uma sequência didática para o ensino de análise combinatória e probabilidade**. 95 f. Feira de Santana. Dissertação [Mestrado Profissional em Matemática] – Departamento de Ciências Exatas. UEFS, Bahia, 2021.