

**UFRRJ**

**INSTITUTO DE EDUCAÇÃO / INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, CONTEXTOS**  
**CONTEMPORÂNEOS E DEMANDAS POPULARES**

**TESE**

**Visualizar é mais do que ver: um estudo sobre o processo de visualização  
utilizando papel, lápis e o aplicativo GeoGebra 3D**

**Thaís Fernanda de Oliveira Settimy**

**2022**



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO / INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, CONTEXTOS  
CONTEMPORÂNEOS E DEMANDAS POPULARES**

**VISUALIZAR É MAIS DO QUE VER: UM ESTUDO SOBRE O  
PROCESSO DE VISUALIZAÇÃO UTILIZANDO PAPEL, LÁPIS E O  
APLICATIVO GEOGEBRA 3D**

**THAÍS FERNANDA DE OLIVEIRA SETTIMY**

*Sob a orientação do Professor Doutor  
Marcelo Almeida Bairral*

Tese submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Doutora em Educação**, no Curso de Pós-Graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares, Área de Concentração em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares

Seropédica/Nova Iguaçu, RJ  
Novembro de 2022

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S495v Settimy, Thaís Fernanda de Oliveira, 1993-  
Visualizar é mais do que ver: um estudo sobre o  
processo de visualização utilizando papel, lápis e o  
aplicativo GeoGebra 3D / Thaís Fernanda de Oliveira  
Settimy. - Seropédica; Nova Iguaçu, 2022.  
106 f.: il.

Orientador: Marcelo Almeida Bairral.  
Tese (Doutorado). -- Universidade Federal Rural do Rio  
de Janeiro, Programa de Pós-Graduação em Educação,  
Contextos Contemporâneos e Demandas Populares, 2022.

1. Visão Espacial. 2. Ambientes de Geometria  
Dinâmica. 3. Licenciatura em Matemática. I. Bairral,  
Marcelo Almeida, 1969-, orient. II Universidade  
Federal Rural do Rio de Janeiro. Programa de Pós  
Graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e  
Demandas Populares III. Título.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de  
Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

This study was financed in part by the Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de  
Nível Superior - Brasil (CAPES) - Finance Code 001.



TERMO N° 1226/2022 - PPGEDUC (12.28.01.00.00.00.20)

Nº do Protocolo: 23083.073810/2022-21

Seropédica-RJ, 01 de dezembro de 2022.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO/INSTITUTO MULTIDISCIPLINAR  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO, CONTEXTOS CONTEMPORÂNEOS E DEMANDAS  
POPULARES

**THAÍS FERNANDA DE OLIVEIRA SETTIMY**

Tese submetida como requisito parcial para a obtenção do grau de **Doutora**, no Programa de Pós-Graduação em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares, Área de Concentração em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares.

TESE APROVADA EM 17/11/2022

Membros da banca:

MARCELO ALMEIDA BAIRRAL. Dr. UFRRJ (Orientador/Presidente da Banca).

BRUNO MATOS VIEIRA. Dr. UFRRJ (Examinador Externo ao Programa).

GISELA MARIA DA FONSECA PINTO. Dra. UFRRJ (Examinadora Externa ao Programa).

JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS. Dr. UNIFRA (Examinador Externo à Instituição).

RÚBIA BARCELOS AMARAL. Dra. UNESP (Examinadora Externa à Instituição).

*Documento não acessível publicamente*

(Assinado digitalmente em 01/12/2022 23:35)  
BRUNO MATOS VIEIRA  
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR  
DeptTPE (12.28.01.00.00.00.24)  
Matrícula: ####772#6

(Assinado digitalmente em 02/12/2022 08:09)  
GISELA MARIA DA FONSECA PINTO  
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR  
PPGEDUCIMAT (12.28.01.00.00.00.18)  
Matrícula: ####042#6

*(Assinado digitalmente em 01/12/2022 19:15)*  
MARCELO ALMEIDA BAIRRAL  
*PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR*  
*DeptTPE (12.28.01.00.00.00.24)*  
*Matrícula: ####988#2*

*(Assinado digitalmente em 05/12/2022 22:00)*  
RÚBIA BARCELOS AMARAL SCHIO  
*ASSINANTE EXTERNO*  
*CPF: ####.###.338-##*

*(Assinado digitalmente em 30/12/2022 09:05)*  
JOSÉ CARLOS PINTO LEIVAS  
*ASSINANTE EXTERNO*  
*CPF: ####.###.900-##*

Visualize o documento original em <https://sipac.ufrrj.br/public/documentos/index.jsp> informando seu número: **1226**, ano: **2022**, tipo: **TERMO**, data de emissão: **01/12/2022** e o código de verificação: **64bee46572**

## **DEDICATÓRIA**

À minha querida mãe **Maria da Penha** que sempre colocou a minha educação em primeiro lugar. Obrigada por ser minha maior incentivadora. Amo você.

Ao meu tio e padrinho **Josemilton** (in memorian). Tio Jó, eu consegui e você faz parte dessa conquista. Essa Tese é para você.

## AGRADECIMENTOS

Ao Vinícius pelo apoio incondicional, paciência e incentivo para que eu conseguisse finalizar esse trabalho. Não existem agradecimentos suficientes para expressar tudo o que você representa na minha vida. Amo você.

À Terê, minha cachorra fofa, por ter resgatado o melhor de mim e me presentear com seu amor puro e sincero. Sua chegada repentina me impulsionou a finalizar esse trabalho.

Ao meu padrasto Adelson pelo apoio e por sempre se mostrar disponível para ajudar no que fosse possível.

Às minhas primas Yasmin e Bruna que apesar da distância sempre acreditaram em mim. Agradeço pelas risadas e pelos momentos divertidos sempre que estivemos juntas.

A toda a minha família que sempre representou para mim um símbolo de união e força, mesmo com todas as adversidades.

À Gilda, Fernando, Vitor, Andriele e toda a minha família de Teresópolis que apesar da distância nunca deixaram de torcer por mim.

À Rosana Rebello, minha amiga querida que o digital me presenteou. Obrigada por toda a força que me deu. Mesmo de longe, nunca deixou de se fazer presente na minha vida, sempre desejando o meu sucesso.

À minha psicóloga Izabele. É até difícil expressar em palavras o quanto sou grata por ter você na minha vida. Obrigada por trazer luz nos momentos em que eu só conseguia enxergar escuridão. Você também foi um pilar fundamental para a conclusão deste trabalho.

Ao meu psiquiatra Ramiro pelo profissionalismo ímpar. Grata por ter encontrado um médico que se preocupou em me ajudar de fato e fazer com que os meus dias fossem menos pesados.

Ao meu orientador Marcelo Bairral pela confiança e pelas valiosas contribuições para a minha formação enquanto professora e pesquisadora ao longo dos anos.

Agradeço aos professores José, Rubia, Bruno e Gisela por aceitarem participar como banca examinadora deste trabalho.

À família GEPETICEM pelos momentos de troca tão valiosos ao longo desses anos. Sou grata por fazer parte de um grupo tão acolhedor.

Ao George Bravo, um dos meus grandes companheiros desta jornada acadêmica, pela amizade e disponibilidade em ajudar e dar suporte no momento em que mais precisei. Se hoje eu concluí este trabalho foi porque você uma das pessoas que não me deixou desistir.

À Soraya Izar pela parceria e amizade ao longo da minha trajetória acadêmica. Seu apoio também foi muito importante para que este trabalho fosse concluído.

Aos meus amigos e companheiros de trabalho Franciane, Norielem, Sílvia e Fabiano por serem para mim exemplo de união, responsabilidade e comprometimento com a educação do município de Angra dos Reis. Vocês fazem meus dias de trabalho serem mais leves e divertidos.

À Mariana, Lucinda e toda a equipe da Secretaria de Educação, Juventude e Inovação pela amizade e parceria. Agradeço por ter conhecido vocês este ano. Nunca vi tanta criatividade, alegria e empenho em uma equipe de trabalho.

Aos meus colegas do PPGEduc com quem compartilhei conhecimento e boas risadas.

Aos alunos de licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro que participaram desta pesquisa.

## RESUMO

SETTIMY, Thaís Fernanda de Oliveira. **Visualizar é mais do que ver: um estudo sobre o processo de visualização utilizando papel, lápis e o aplicativo GeoGebra 3D.** 2022. 106p. Tese (Doutorado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares). Instituto de Educação/Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica/Nova Iguaçu, RJ, 2022.

Em nosso cotidiano há uma variedade de formas e sólidos geométricos, principalmente as que possuem três dimensões. Contudo, muitas aulas de Matemática ainda estão centradas em identificar e nomear figuras planas e no uso de figuras estáticas. Assim, surge a necessidade de refletir a respeito do papel da Geometria no currículo de Matemática. Esta pesquisa tem como objetivo refletir sobre o papel da visualização no desenvolvimento do pensamento geométrico e analisar contribuições e dificuldades relacionadas a este processo em atividades de Geometria Espacial, utilizando papel e lápis e o GeoGebra em sua versão para *smartphone*. O trabalho de campo ocorreu ao longo do segundo semestre de 2019, no âmbito da disciplina Ensino de Matemática II, tendo como sujeitos de pesquisa quatorze Licenciandos em Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Os dados foram produzidos mediante registros escritos dos estudantes provenientes das folhas de atividades e da produção do quadro comparativo de conceitos e experiências sobre visualização e o ensino e a aprendizagem de Geometria, gravações de áudio, capturas e gravações da tela de seus *smartphones* utilizando o aplicativo GeoGebra. Identificamos inicialmente que os sujeitos demonstraram dificuldades em visualizar e representar as seções do cubo, além de apresentarem alguns impasses para justificar seus processos de resolução das atividades. A visualização, como uma habilidade importante do pensamento matemático, consiste em um processo individual que não é inato e, portanto, precisa ser ensinado. Resultados revelam que a visualização é importante para compreender conceitos geométricos. Cada aluno possui uma forma específica de aprender e ao dar a possibilidade de o estudante comunicar sua estratégia de resolução e compartilhar suas reflexões sobre a atividade, conseguimos compreender melhor sua forma de pensar e identificar suas dificuldades envolvendo a visualização. Isso só será possível mediante a implementação de práticas que incentivem a justificativa e que deem espaço para novas formas de pensar. As atividades desenvolvidas contribuíram para aumentar o nível de consciência dos futuros professores sobre o quanto é importante aprender a visualizar e estar aberto ao diálogo e reflexão sobre seu próprio aprendizado. Defendemos que a utilização de diferentes recursos didáticos favorece a experimentação, a construção e a manipulação de imagens mentais, assim como auxilia o estudante a superar dificuldades relacionadas à visualização e à representação, que devem ser vistas como processos imbricados. A pesquisa inova ao inserir atividades com o GeoGebra (em *smartphone* e em 3D) e por potencializar o desenvolvimento da visualização mediante registros e justificativas diversas.

**Palavras-chave:** Visão Espacial, Ambientes de Geometria Dinâmica, Licenciatura em Matemática.

## RESUMEN

SETTIMY, Thaís Fernanda de Oliveira. **Visualizar es más que ver: un estudio del proceso de visualización utilizando papel, lápiz y la aplicación GeoGebra 3D.** 2022. 106p. Tesis (Doctorado en Educación, Contextos Contemporáneos y Demandas Populares). Instituto de Educação/Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica/Nova Iguaçu, RJ, 2022.

En nuestra vida cotidiana existen una gran variedad de formas y sólidos geométricos, especialmente los que tienen tres dimensiones. Sin embargo, muchas clases de Matemáticas todavía se centran en identificar y nombrar figuras planas y el uso de figuras estáticas. Surge así la necesidad de reflexionar sobre el papel de la Geometría en el currículo de Matemáticas. Esta investigación tiene como objetivo reflexionar sobre el papel de la visualización en el desarrollo del pensamiento geométrico y analizar las contribuciones y dificultades relacionadas con este proceso en las actividades de Geometría Espacial, utilizando papel y lápiz y GeoGebra en su versión para teléfonos inteligentes. El trabajo de campo se realizó durante el segundo semestre de 2019, en el ámbito de la disciplina Enseñanza de las Matemáticas II, con catorce Estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Federal Rural de Rio de Janeiro como sujetos de investigación. Los datos fueron producidos a través de registros escritos de los estudiantes a partir de las fichas de actividades y la elaboración del cuadro comparativo de conceptos y experiencias sobre la visualización y la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, grabaciones de audio, capturas y grabaciones de la pantalla de sus smartphones utilizando la aplicación GeoGebra. Inicialmente, identificamos que los sujetos demostraron dificultades para visualizar y representar las secciones del cubo, además de presentar algunos impasses para justificar sus procesos de resolución de las actividades. La visualización, como una habilidad importante del pensamiento matemático, es un proceso individual que no es innato y, por lo tanto, debe enseñarse. De este modo, defendemos que el uso de diferentes recursos didácticos favorece la experimentación, construcción y manipulación de imágenes mentales, además de ayudar al alumno a superar las dificultades relacionadas con la visualización y la representación. Los resultados revelan que la visualización es importante para comprender los conceptos geométricos. Cada alumno tiene una forma específica de aprender y al darle la oportunidad al alumno de comunicar su estrategia de resolución y compartir sus reflexiones sobre la actividad, podemos comprender mejor su forma de pensar e identificar sus dificultades relacionadas con la visualización. Esto sólo será posible a través de la implementación de prácticas que fomenten la justificación y den cabida a nuevas formas de pensar. Las actividades desarrolladas contribuyeron a elevar el nivel de conciencia de los futuros docentes sobre lo importante que es aprender a visualizar y estar abiertos al diálogo y la reflexión sobre su propio aprendizaje.

**Palabras claves:** Visión Espacial, Ambientes de Geometría Dinámica, Licenciatura en Matemáticas.

## ABSTRACT

SETTIMY, Thaís Fernanda de Oliveira. **Visualizing is more than just seeing: a study of the visualization process using paper, pencil and the GeoGebra 3D application.** 2022. 106p. Thesis (Doctorate in Education, Contemporary Contexts and Popular Demands). Instituto de Educação/Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica/Nova Iguaçu, RJ, 2022.

In our daily lives there are a variety of shapes and geometric solids, especially those with three dimensions. However, many Mathematics classes are still centred on identifying and naming plane figures and the use of static figures. Thus, the need arises to reflect on the role of Geometry in the Mathematics curriculum. This research aims to reflect on the role of visualization in the development of geometric thinking and to analyze contributions and difficulties related to this process in Spatial Geometry activities, using paper and pencil and GeoGebra in its smartphone version. The field work took place during the second half of 2019, within the scope of the Teaching of Mathematics II discipline, with fourteen prospective mathematics teachers from the Federal Rural University of Rio de Janeiro as research subjects. The data were produced through written records of the students from the activity sheets and the production of the comparative table of concepts and experiences on visualization and the teaching and learning of Geometry, audio recordings, captures and recordings of the screen of their smartphones using the application GeoGebra. Initially, we identified that the subjects demonstrated difficulties in visualizing and representing the sections of the cube, in addition to presenting some impasses to justify their processes of solving the activities. Visualization, as an important mathematical thinking skill, is an individual process that is not innate and therefore needs to be taught. In this way, we defend that the use of different didactic resources favours the experimentation, construction, and manipulation of mental images, as well as helping the student to overcome difficulties related to visualization and representation. Results reveal that visualization is important to understand geometric concepts. Each student has a specific way of learning and by giving the student the opportunity to communicate their resolution strategy and share their reflections on the activity, we can better understand their way of thinking and identify their difficulties involving visualization. This will only be possible through the implementation of practices that encourage justification and make room for new ways of thinking. The activities developed contributed to raise the level of awareness of future teachers about how important it is to learn to visualize and be open to dialogue and reflection on their own learning.

**Keywords:** Spatial Vision, Dynamic Geometry Environments, Degree in Mathematics.

## **LISTA DE FIGURAS**

Figura 1 – Conceito figural como a interseção entre a definição e a imagem de um objeto

Figura 2 – Síntese do conceito de figura geométrica

Figura 3 – Atividade envolvendo a planificação do cubo

Figura 4 – Exemplo de demonstração visual

Figura 5 – Visualização em uma linha do tempo

Figura 6 – Comparativo entre o desenho e a construção de um cubo no aplicativo GeoGebra 3D

Figura 7 – Movimento cíclico da PD

Figura 8 – Ciclo da PD aplicada na pesquisa

Figura 9 – Atividade Analisando As Justificativas

Figura 10 – Mostra de materiais didáticos

Figura 11 – Resposta de Karina na primeira etapa

Figura 12 – Resposta de Karina na segunda etapa

Figura 13 – Resposta correta da segunda etapa

Figura 14 – Resposta de Karina na terceira etapa

Figura 15 – Algumas possibilidades de resposta correta da terceira etapa

Figura 16 – Justificativas de Karina na atividade Cortando o Cubo

Figura 17 – Resposta de Karina na quarta etapa

Figura 18 – Resposta correta da quarta etapa

Figura 19 – Resposta de Jane no primeiro item da atividade Seções De Um Cubo no GeoGebra 3D

Figura 20 – Resposta de Karina no primeiro item da atividade Seções De Um Cubo no GeoGebra 3D

Figura 21 – Resposta de Jane no segundo item da atividade Seções De Um Cubo no GeoGebra 3D

Figura 22 – Construção realizada no aplicativo GeoGebra 3D seguindo a descrição feita por Jane

Figura 23 – Construção realizada no aplicativo GeoGebra 3D para obter um hexágono como seção

Figura 24 – Resposta de Karina no segundo item da atividade Seções De Um Cubo no GeoGebra 3D

Figura 25 – Cubo feito de acrílico

Figura 26 – Resposta de Jane no terceiro item da atividade Seções De Um Cubo no GeoGebra 3D

Figura 27 – Resposta de Karina no terceiro item da atividade Seções De Um Cubo no GeoGebra 3D

## **LISTA DE QUADROS**

- Quadro 1 – Resumo das Sete Operações Mentais
- Quadro 2 – Os cinco tipos de imagens visuais
- Quadro 3 – As sete habilidades espaciais
- Quadro 4 – Cinco tipos de raciocínios em Geometria 3D
- Quadro 5 – Subcategorias da categoria Descobertas
- Quadro 6 – Subcategorias da categoria Dificuldades
- Quadro 7 – Descrição das fases da PD
- Quadro 8 – Descrição dos objetivos das atividades implementadas

## SUMÁRIO

<b>ABRINDO A TELA .....</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO I: O QUE FOI VISUALIZADO ATÉ O MOMENTO.....</b>	<b>4</b>
1.1 Visualização instigada pelo uso de tecnologias digitais .....	4
1.2 Pesquisas centradas no desenvolvimento da visualização .....	8
<b>CAPÍTULO II: VISUALIZAÇÃO DA TEORIA .....</b>	<b>11</b>
2.1 A relevância da Geometria para a aprendizagem matemática .....	11
2.2 As entidades mentais da Geometria.....	12
2.3 A aprendizagem geométrica e a visualização .....	15
2.4 Descobertas e dificuldades em torno da visualização.....	24
2.5 O aprendizado geométrico por meio dos Ambientes de Geometria Dinâmica.....	26
<b>CAPÍTULO III: VISÃO DA TRAJETÓRIA .....</b>	<b>31</b>
3.1 Organização do estudo .....	31
3.2 A metodologia Pesquisa de Desenvolvimento.....	32
3.3 A postura do pesquisador.....	37
3.4 Os sujeitos.....	37
3.5 Produção de dados de pesquisa.....	38
3.6 Atividades desenvolvidas .....	39
3.6.1 Discutindo Sobre o Cubo .....	42
3.6.2 Cortando o Cubo .....	42
3.6.3 Analisando As Justificativas .....	44
3.6.4 Pilha De Cubos.....	45
3.6.5 Analisando As Representações Das Vistas .....	47
3.6.6 Olhando Diferentemente .....	48
3.6.7 Tirando Fotos Interessantes.....	49
3.6.8 As Vistas De Uma Casa .....	50
3.6.9 Comparando As Três Tarefas.....	51
3.6.10 Seções De Um Tetraedro Regular no GeoGebra 3D .....	52
3.6.11 Seções De Um Cubo no GeoGebra 3D .....	52
3.6.12 Analisando Os Conceitos De Cubo.....	53
3.6.13 As Sete Operações Mentais.....	53
3.6.14 Contando As Faces.....	54
3.7 Instrumentos de avaliação utilizados .....	55

3.7.1 Quadro Comparativo .....	55
3.7.2 Diário continuado .....	56
3.7.3 Mostra de materiais didáticos .....	57
3.7.4 Prova escrita .....	57
3.7.5 Construções no aplicativo GeoGebra 3D .....	58
<b>CAPÍTULO IV: ANÁLISE DO QUE FOI VISUALIZADO .....</b>	<b>59</b>
4.1 Cortando o Cubo .....	59
4.2 Seções De Um Cubo no GeoGebra 3D .....	64
4.3 Relatos dos futuros professores sobre visualização e ensino de Geometria .....	70
<b>CAPÍTULO V: HORA DE FECHAR A TELA VISUALIZANDO OUTROS E NOVOS CAMINHOS.....</b>	<b>78</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>83</b>
<b>ANEXOS .....</b>	<b>89</b>
ANEXO A – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA E PESQUISA DA UFRRJ .....	89
ANEXO B – OBRA DA EXPOSIÇÃO “QUACORS E PRISMAS”, DE ASCÂNIO MMM .....	90
ANEXO C – PAINEL CRIADO POR ATHOS BULCÃO PARA A ÁREA EXTERNA DO TEATRO NACIONAL CLAUDIO SANTORO .....	91

## ABRINDO A TELA

Esta investigação surgiu a partir de Settimy (2014), fruto de um trabalho de Iniciação Científica (IC/CNPq) e da pesquisa de Mestrado de Settimy (2018), ambos desenvolvidos no âmbito do Grupo de Estudos e Pesquisas das Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação Matemática (GEPETICEM), sob a coordenação do Prof. Dr. Marcelo Almeida Bairral.

O estudo desenvolvido na graduação teve como objetivo elaborar e implementar situações para a melhoria do aprendizado de Geometria Espacial mediante atividades voltadas para a visualização de planificações e cortes (seções planas) do cubo, tendo como sujeitos de pesquisa alunos de licenciatura em Matemática.

A pesquisa de Mestrado teve como objetivo geral compreender a importância da visualização no desenvolvimento do pensamento geométrico, particularmente, analisar aspectos relacionados ao desenvolvimento da visualização de estudantes do 6º ano de uma escola pública em atividades de Geometria Espacial, utilizando recursos didáticos variados (papel e lápis, planificações articuladas, sólidos em acrílico e um vídeo da tela de uma construção feita no *software* GeoGebra).

A partir das pesquisas que foram desenvolvidas, refleti<sup>1</sup> a respeito do ensino de Geometria e com isso pude constatar que toda minha trajetória escolar foi marcada por um aprendizado geométrico baseado somente em cálculos de áreas e volumes, estimulando apenas a memorização de fórmulas.

Enquanto graduanda, aprendi que o ensino de Geometria é mais do que nomear figuras geométricas e aplicar fórmulas e, como consequência, compreendi que a visualização de formas geométricas deve ser encarada como uma habilidade importante a ser desenvolvida nos estudantes. Esse aprendizado refletiu diretamente em minha prática e foi possível desenvolver um trabalho que valorizasse o pensamento geométrico, mais especificamente em atividades voltadas para a visualização e representação de formas geométricas espaciais e de suas vistas.

A experiência como bolsista de IC me proporcionou frequentar um grupo de pesquisa desde o início da graduação. Participei de eventos científicos e pude conhecer outras cidades do Brasil. Essas experiências provavelmente não seriam possíveis se eu não estivesse

---

<sup>1</sup> Ao longo do trabalho transitarei entre a primeira pessoa do singular (quando estiver focada no meu próprio aprendizado) e no plural (ao me referir a reflexões compartilhadas com meu orientador e colegas do grupo de pesquisa).

recebendo o apoio do CNPq à pesquisa que estava desenvolvendo na graduação, já que não tinha condições financeiras de fazer tais viagens e nem de custear a minha hospedagem.

Esta tese de Doutorado é resultado do meu amadurecimento enquanto pesquisadora e do contato que tive com a pesquisa científica desde o primeiro ano de graduação. Justamente por ter consciência de que as experiências vivenciadas durante o período em que fui bolsista de IC não se aplicavam à realidade de todos os alunos de licenciatura em Matemática, pensei de que forma isso poderia impactar na prática desses futuros professores e comecei a pensar como a minha pesquisa poderia contribuir nesse sentido.

Dessa forma, surgiu o desejo de desenvolver uma investigação tendo licenciandos de Matemática como sujeitos, visando contribuir para o aperfeiçoamento da visualização dos mesmos e discutir com eles sobre a importância deste processo ser valorizado no ensino de Geometria.

Decidimos também pela utilização do GeoGebra em sua versão para *smartphone* como “parceiro” desta investigação, partindo do pressuposto de que este recurso enriqueceria o processo de desenvolvimento da visualização dos sujeitos de pesquisa. Esta decisão também se configurou como a retomada de um desejo advindo da pesquisa de Mestrado em que não foi possível utilizá-lo, visto que foi desenvolvida em uma escola pública onde a tecnologia informática era praticamente inexistente.

Desde 2016 atuo como professora dos Anos Finais do Ensino Fundamental no município de Angra dos Reis. Pude observar que os alunos têm muita dificuldade em visualizar e representar figuras geométricas, principalmente as tridimensionais. No entanto, minha experiência em sala de aula me permitiu observar que essas dificuldades podem ser minimizadas ao desenvolver atividades que explorem a visualização mediante a utilização de recursos didáticos variados.

Contudo, eu não queria que esse tipo de prática fosse desenvolvido apenas na minha sala de aula. Por isso, pensei em trabalhar no Doutorado com licenciandos de Matemática para que o meu conhecimento e interesse pelo tema fosse compartilhado com futuros professores e atingisse outros alunos que não fossem os meus.

Dessa forma, a presente investigação foi orientada pela seguinte questão: “Que contribuições atividades com foco na visualização trazem ao aprendizado de futuros professores de matemática, particularmente, situações com o uso de papel, lápis e do aplicativo GeoGebra 3D para *smartphone*?” . A partir desta questão temos como objetivo geral sublinhar a importância da visualização no desenvolvimento do pensamento geométrico na Licenciatura em Matemática. Os objetivos específicos consistiram em: identificar dificuldades relacionadas

ao processo de visualização em atividades de Geometria Espacial utilizando papel, lápis e o GeoGebra em sua versão para *smartphone*; e verificar contribuições das atividades em uma dinâmica que potencializa justificativas no desenvolvimento da visualização em futuros professores de Matemática.

O primeiro capítulo apresenta estudos que dialogam e promovem reflexões para esta pesquisa, focando em investigações centradas em instigar a visualização mediante a utilização de tecnologias digitais e as que se preocupavam com o desenvolvimento desta habilidade.

O segundo capítulo discute sobre a Geometria escolar, destacando as dificuldades referentes ao seu ensino e aprendizagem a partir de teorias encontradas na literatura que tratam do conceito e da imagem de figuras geométricas, do desenvolvimento da visualização com o intuito de minimizar as dificuldades relacionadas a ela, apresentando uma linha temporal de estudos a respeito deste processo. Além disso, também são evidenciadas as pesquisas envolvendo o aprendizado geométrico por meio dos Ambientes de Geometria Dinâmica, em particular no GeoGebra.

O terceiro capítulo descreve o cenário, os sujeitos, os procedimentos adotados para a produção de dados e a metodologia de pesquisa utilizada. O delineamento metodológico foi escolhido visando o desenvolvimento do processo de visualização a partir de atividades que exploram conceitos de Geometria Espacial.

O quarto capítulo apresenta uma análise da trajetória de duas alunas ao longo das implementações ocorridas, observando o processo de visualização das discentes, suas estratégias e dificuldades durante a realização das atividades.

O quinto capítulo possui reflexões a respeito da intervenção realizada e da análise de dados, mostrando a importância de um trabalho voltado para o desenvolvimento do pensamento visual por meio da utilização de papel, lápis e do aplicativo GeoGebra 3D e que se preocupa em estimular a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado por meio da justificativa de seus processos de resolução das atividades implementadas.

A tese defendida é que a utilização de diferentes recursos didáticos e mediante registros e justificativas diversas favorece a experimentação, a construção e a manipulação de imagens mentais, assim como auxilia o licenciando a superar dificuldades relacionadas à visualização e à representação, que devem ser vistas como processos imbricados.

## CAPÍTULO I: O QUE FOI VISUALIZADO ATÉ O MOMENTO

Este capítulo tem como objetivo apresentar estudos que dialogam e promovem reflexões para esta pesquisa. A seleção foi feita a partir de uma busca no Google Acadêmico<sup>2</sup> utilizando como palavras-chave os seguintes termos: visualização, Geometria Espacial, GeoGebra e Ambientes de Geometria Dinâmica.

Após a pesquisa das referidas palavras-chave, o critério de seleção foi feito a partir da leitura do título e do resumo, independentemente de ter sido artigo, dissertação ou tese. As investigações escolhidas tinham as seguintes particularidades: instigavam a visualização mediante a utilização de tecnologias digitais ou estavam centradas no desenvolvimento desta habilidade.

### 1.1 Visualização instigada pelo uso de tecnologias digitais

Em sua investigação, Miskulin (1999) abordou concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores na Educação e na sociedade. Seu estudo analisou os processos mentais e computacionais de dois alunos da 8<sup>a</sup> série do Ensino Fundamental (atual 9º ano) de uma escola particular de Campinas, em situações de resolução de problemas. Para isso, foi utilizado o ambiente Logo Tridimensional, que possibilitou resgatar e compreender os aspectos matemáticos e computacionais por meio da exploração e construção de conceitos geométricos, pois este ambiente estava sempre solicitando aos sujeitos pesquisados uma reflexão de seus procedimentos e reavaliações de suas estratégias.

Etcheverry et al. (2004) realizaram um relato de uma experiência desenvolvida com estudantes universitários. A proposta didática envolveu a visualização e a experimentação, trabalhando em um ambiente computacional no qual foi utilizado o *software* Derive 5 para o estudo de cônicas. Os resultados evidenciaram que a inserção do referido *software* contribuiu para fomentar as discussões entre os estudantes, modificando a dinâmica de aprendizagem e o papel do professor. Além disso, sua utilização permitiu um melhor aproveitamento do tempo para fazer as construções, tendo a possibilidade de traçar dois ou mais gráficos na mesma tela, podendo compará-los e fazer conjecturas a partir da visualização das mudanças que eles sofrem quando suas expressões algébricas são alteradas.

A pesquisa de Ferreira, Soares e Lima (2009) foi realizada com professores de Matemática, tendo como intuito investigar a contribuição dos Ambientes de Geometria Dinâmica em sua formação, no sentido de incentivá-los ao uso das demonstrações no ensino

---

<sup>2</sup> <https://scholar.google.com.br/>

da Geometria. As autoras constataram que os participantes tiveram um novo olhar para as demonstrações, passando a compreendê-las como um processo que pode e deve ser desenvolvido paralela e gradativamente ao ensino de Geometria, adaptando o formalismo de acordo com os níveis de desenvolvimento do aluno. A análise também permitiu identificar que os Ambientes de Geometria Dinâmica são um rico e eficiente recurso que proporciona uma aprendizagem interativa na qual o sujeito participa ativamente.

A investigação de Ritter (2011) apresentou uma proposta para o ensino de Geometria Espacial com a utilização do *software* Calques 3D, tendo como foco a visualização de objetos tridimensionais a partir de suas representações no plano. A partir de uma sequência didática desenvolvida para estudantes do Ensino Médio, com atividades voltadas para a visualização no Calques 3D, os alunos realizaram a construção de sólidos a partir de desenhos em perspectiva, por meio de planificações e utilizando apenas a descrição dos sólidos. Seus resultados evidenciaram uma melhora significativa na visualização dos discentes durante a realização das atividades desenvolvidas.

Mota e Laudares (2013) desenvolveram uma sequência didática com atividades voltadas ao desenvolvimento da visualização e representação de planos, cilindros e quádricas. Essas atividades, realizadas com licenciandos de Matemática, foram desenvolvidas articulando lápis e papel com o *software* Winplot. Os resultados evidenciaram uma melhor compreensão dos conceitos de Geometria Analítica por meio da exploração de situações envolvendo diferentes superfícies, articulando a equação à figura. Além disso, os autores também observaram que as dificuldades de visualizar e esboçar gráficos em três dimensões diminuíram ao longo da implementação.

Leivas (2014) fez uma pesquisa com alunos de um mestrado profissionalizante em ensino de Matemática, no âmbito de uma disciplina de Geometria. O pesquisador desenvolveu uma sequência didática com o intuito de investigar o problema de visualização e reconstrução de conceitos envolvendo prisma por meio do uso do Cabri 3D. A análise mostrou que os sujeitos, professores de diversos níveis de escolaridade, não possuíam o conceito de prisma esperado pelo pesquisador e que a manipulação das construções realizadas no Cabri 3D contribuiu para o desenvolvimento da visualização.

O estudo de Máximo (2016) teve como principal objetivo analisar o aprendizado de estudantes do Ensino Normal Médio em tarefas envolvendo a visualização e representação de poliedros, utilizando como recursos malha isométrica, caixa de Becker (modelos tridimensionais manipulados pelo tato), representações dinâmicas de poliedros no *software* s3D SecBuilder e materiais manipulativos como massa de modelar, papel branco, papel

quadriculado e/ou pontilhado, régua, compasso, canudos, linha e cartolina. A partir dos resultados de sua investigação, foi possível observar um bom desempenho dos sujeitos nas tarefas implementadas, sendo capazes de estabelecer correspondências pertinentes entre sólidos representados nos três ambientes mobilizados (representações em malha isométrica, caixa de Becker e no *software* s3D SecBuilder). Foram observadas dificuldades em relação à representação na malha isométrica, em que propriedades importantes dos sólidos não foram respeitadas (forma das faces, quantidade de faces, arestas e vértices) e nas tarefas que envolviam a construção da representação tridimensional de sólidos com materiais manipulativos, a partir de suas representações no *software* s3D SecBuilder, muitos discentes realizaram representações bidimensionais.

A investigação de Henrique (2017) foi baseada em atividades envolvendo polígonos, polígonos regulares e retas paralelas com uma transversal. Implementadas no laboratório de informática e em sala de aula, essas atividades tiveram como foco de análise o aprendizado de alunos do 8º e 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Rio Claro (RJ). Sua pesquisa analisou o desenvolvimento conceitual em uma prática docente baseada no diálogo, na argumentação e na escrita, entre outras formas de registro em uma reflexão com atividades a partir da utilização do GeoGebra convencional (desktop) e o GeoGebra aplicativo (versão para *smartphones*). Em relação às implementações de atividades com computadores, o autor destacou que ao realizar as atividades com computadores foram observadas as várias formas de visualização e construção de um objeto geométrico proporcionado pelo Ambiente de Geometria Dinâmica e a mediação, contribuindo para a construção e desenvolvimento do conceito de polígono regular. Além disso, o GeoGebra aplicativo (sua versão para *smartphone*) se apresentou como um recurso motivador durante as aulas, permitindo aos alunos a exploração da variância ou invariância de um conjunto de elementos (ângulos, posição de retas etc.). O autor apontou como um dos desafios a dificuldade de visualização de propriedades da construção quando a tela do *smartphone* era pequena.

Lima, Lins e Pereira (2018) desenvolveram um estudo que objetivou investigar tipos de provas e demonstrações matemáticas e nível de pensamento geométrico de alunos do 2º ano do Ensino Médio a partir de uma proposta didática realizada com lápis e papel e GeoGebra. As autoras apresentaram um estudo de caso de três alunos de uma escola pública da cidade de Areia, na Paraíba. Os resultados da investigação mostraram que para validar uma dada afirmação, o pensamento geométrico do trio de alunos estava em níveis iniciais, pois utilizaram desenhos para justificar as afirmações e observações e constatações para justificar as características físicas da figura.

Sampaio (2018) desenvolveu sua pesquisa com estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública municipal de São José dos Campos (SP). O objetivo de sua investigação era compreender como a visualização poderia ser potencializada em atividades de Geometria voltadas para a ideia de volume, utilizando o *software* GeoGebra. O movimento se mostrou como um aspecto importante para a compreensão do objeto geométrico, assim como a visualização favoreceu o aluno a realizar investigações de propriedades geométricas e para a formação da ideia geométrica de volume.

Bullmann (2018) propôs para estudantes do 3º ano do Ensino Médio uma sequência de ensino com atividades de tratamento e conversão dos registros de representação semiótica, considerando conceitos da Geometria Espacial e utilizando o *software* GeoGebra como recurso. As atividades tinham foco no processo de aprendizagem do conceito de área e volume e os resultados da pesquisa permitiram identificar que o processo de visualização, construção e raciocínio são estimulados por meio da utilização do GeoGebra e que os processos de aprendizagem se efetivam quando o estudante consegue atribuir sentidos e significados ao seu pensamento e na formação de conceitos, permitindo que o discente possa analisar, discutir, confirmar e refutar hipóteses.

Na pesquisa de Silva (2018) foram realizadas atividades de Geometria Espacial com estudantes do 2º ano do Ensino Médio, utilizando o GeoGebra em sua versão para *smartphone*. Este estudo possibilitou compreender como a Geometria Espacial é trabalhada nas escolas, analisando as dificuldades encontradas em seu ensino ao adotar o método tradicional, isto é, utilizando apenas livros, quadro e giz. Além disso, sua intervenção permitiu uma reflexão quanto às melhorias proporcionadas pela inserção de recursos tecnológicos no processo de ensino e aprendizagem, em particular, do GeoGebra em sua versão para *smartphones*. Sua investigação evidenciou que o GeoGebra se mostrou como recurso relevante ao processo de ensino e aprendizagem, contribuindo para que os alunos fossem estimulados a pensar matematicamente, além de permitir visualizar as propriedades e definições abordadas com maior facilidade.

O objetivo do estudo de Rodrigues (2019) foi analisar as contribuições de uma intervenção pedagógica realizada com estudantes de Ensino Médio, por meio de sequências didáticas utilizando o GeoGebra 3D em sua versão para *smartphone*, para a construção dos conceitos de área e volume de sólidos geométricos. Sua proposta contribuiu para uma abordagem mais interativa do Ensino de Geometria Espacial, além de tornar a produção do conhecimento matemático mais significativa e despertar a motivação dos discentes, sobretudo daqueles que apresentavam mais dificuldades de aprendizado.

## **1.2 Pesquisas centradas no desenvolvimento da visualização**

A investigação de Viana (2009) analisou as questões de Geometria Espacial das provas do Exame Nacional de Cursos (ENC) e do Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (Enade), considerando o período compreendido entre os anos de 1998 a 2005. Sua análise se baseou no tipo de enunciado e na estrutura conceitual requerida verificou que apesar de algumas questões exigirem estrutura algébrica ou aritmética, todas elas demandam a formação e manipulação de imagens mentais. Além disso, cinco das sete questões analisadas tinham o enunciado na forma verbal sem o apoio de figuras e isto dependia da habilidade de visualização para a resolução dos problemas propostos.

O trabalho de Kaleff, Rei e Garcia (1996) mostrou alguns resultados obtidos em uma pesquisa mais abrangente realizada com estudantes do último ano do Ensino Médio, alunos universitários e professores de Matemática, sobre a aquisição e a melhoria da habilidade de visualização. As autoras apresentaram questões a respeito da interpretação de desenhos que representam sólidos construídos por meio do empilhamento de cubos e do cálculo do volume desses sólidos a partir dos desenhos. As respostas dadas tanto pelos alunos de Ensino Médio como pelos universitários e professores de Matemática indicaram que eles, diante de situações semelhantes às apresentadas nos livros didáticos das séries iniciais, provavelmente terão dificuldades para interpretar os desenhos. As autoras também concluíram que universitários e docentes possivelmente desconhecem as convenções para determinação do volume, implícitas nos desenhos. Por outro lado, as respostas revelaram que os educadores apresentaram deficiências relativas a diversos conceitos matemáticos elementares.

Becker (2009) teve como objetivo de estudo elaborar uma sequência didática que auxiliasse o desenvolvimento da visualização e representação de formas geométricas espaciais em diagramas bidimensionais. A sequência didática, testada em alunos do 3º ano do Ensino Médio, foi criada a partir da implementação de atividades piloto com alunos do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior. Os resultados da pesquisa demonstraram o desenvolvimento da visualização e representação dos estudantes e uma melhor compreensão acerca dos conteúdos envolvendo Geometria Espacial.

A investigação de Teixeira (2008) teve como objetivo compreender como se desenvolve o pensamento geométrico de alunos do 1º ano de escolaridade em uma escola localizada em Lisboa – Portugal. Seu estudo se concentrou nos aspectos da visualização e no conhecimento das figuras geométricas e os resultados demonstraram que a visualização dos estudantes estava em diferentes níveis de desenvolvimento, assim como algumas ideias sobre as figuras

geométricas. A autora constatou que os conhecimentos informais destes alunos influenciavam o desenvolvimento do pensamento geométrico, pois a aprendizagem das figuras geométricas permitiu estabelecerem uma relação entre seus conhecimentos informais com os novos conhecimentos.

O objetivo da pesquisa de Seabra (2009) foi o de desenvolver para os alunos ingressantes da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo uma ferramenta didática como recurso para o ensino de Geometria Descritiva baseado em técnicas de Realidade Virtual, em especial a estereoscopia. Ao adotar a projeção estereoscópica passiva e óculos com lentes polarizadoras, os estudantes poderiam visualizar objetos em três dimensões, com percepção da profundidade. O autor observou que o sistema auxiliou no desenvolvimento da visualização e imaginação das situações espaciais apresentadas nas atividades, sendo possível observar as construções por diferentes pontos de visão.

O levantamento bibliográfico permitiu identificar a preocupação por parte dos investigadores em apresentarem propostas de ensino que visavam a integração das tecnologias digitais ao processo de ensino e de aprendizagem, contribuindo para que os sujeitos envolvidos realizassem e testassem suas conjecturas a partir de um ambiente que favorecesse a exploração. O GeoGebra, em particular, foi destacado como um recurso que permitiu a investigação e a visualização das propriedades variantes e invariantes das construções a partir da manipulação dinâmica.

Diante do que foi apresentado neste capítulo, a maioria das investigações a visualização se mostrou como um processo intrínseco nas implementações realizadas, sendo relevante para a compreensão dos conceitos envolvidos nas mesmas. Especialmente nos casos em que esta habilidade era o tema central de estudo, foi possível notar sua importância para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Além disso, a utilização de tecnologias digitais movimento se mostrou como um aspecto importante para a compreensão de conceitos geométricos, permitindo a formulação de conjecturas, a construção e a visualização de um objeto geométrico em diferentes ângulos. O levantamento bibliográfico também evidenciou a falta de pesquisas voltadas para o desenvolvimento da visualização mediante a utilização do aplicativo GeoGebra 3D (versão para *smartphone*), analisando as contribuições deste ambiente quando utilizado em um dispositivo móvel com tecnologia *touchscreen*, que apresenta uma dinâmica diferente quando comparado ao computador.

Nos estudos encontrados, a visualização era uma habilidade requerida para a realização das atividades, mas não se tratava do construto central das investigações, como é o caso desta

pesquisa. A dificuldade de encontrar pesquisas similares, isto é, que traziam a visualização como objeto de estudo, tendo atividades que visavam estimular o seu desenvolvimento mediante a utilização do GeoGebra em sua versão para *smartphone* e processos de justificativas, reforçam a importância da presente investigação.

## CAPÍTULO II: VISUALIZAÇÃO DA TEORIA

O objetivo deste capítulo é expor um panorama sobre a Geometria escolar, dando ênfase às dificuldades referentes ao seu ensino e aprendizagem. Neste contexto, são apresentadas as teorias encontradas na literatura que tratam do conceito e da imagem de figuras geométricas, do desenvolvimento do processo de visualização e das habilidades visuais que podem ser potencializadas, visando minimizar as dificuldades relacionadas a este processo, apresentando uma linha temporal de estudos a respeito da visualização.

Além disso, também são evidenciadas as pesquisas envolvendo o aprendizado geométrico por meio dos Ambientes de Geometria Dinâmica.

### 2.1 A relevância da Geometria para a aprendizagem matemática

O ensino de Matemática não deve se basear na transferência de conhecimentos, mas sim criar situações em que o estudante é estimulado a criar as construções mentais necessárias (DIKOVIĆ, 2009). Para melhorar a qualidade de seu ensino e de sua aprendizagem, a abstração desnecessária deve ser evitada e o foco deve se destinar às representações ou modelos nos quais os estudantes podem observar, construir, manipular, transformar etc. (GUTIÉRREZ, 1998).

O trabalho com Geometria, em particular, pode nos permitir entender as representações geométricas que fazem parte do nosso cotidiano e assim podemos desenvolver habilidades de experimentar, representar, descrever e argumentar, assim como estimular a imaginação e a criatividade.

Bastos (1999) afirma que por meio da Geometria é possível interpretar, entender e intervir no espaço em que vivemos, incluindo a visualização de objetos e a sua representação, a manipulação dessas representações e a criação de novos objetos assim como a resolução de problemas de aplicação da área em situações da vida real ou da própria Matemática.

De acordo com Jones (2002), a Geometria invoca nossos sentidos visuais, estéticos e intuitivos. No entanto, da maneira como os conceitos geométricos vêm sendo apresentados e trabalhados no contexto educacional, a Geometria tem sido vista pelos estudantes como um tópico da Matemática que tem provocado um sentimento forte de aversão (MISKULIN, 1994). Dessa forma, ao apresentar a Geometria de uma forma que estimule a curiosidade e incentive a exploração podemos aprimorar o aprendizado do estudante e suas atitudes em relação à Matemática (JONES, 2002).

Ao tratar do ensino de Geometria, Salazar e Aumouloud (2015) afirmam que precisamos considerar o uso das figuras sendo fundamental, pois por meio delas temos acesso

às representações dos objetos matemáticos, conjecturamos e resolvemos problemas. A próxima seção detalha o papel desempenhado pelas figuras geométricas na Geometria.

## 2.2 As entidades mentais da Geometria

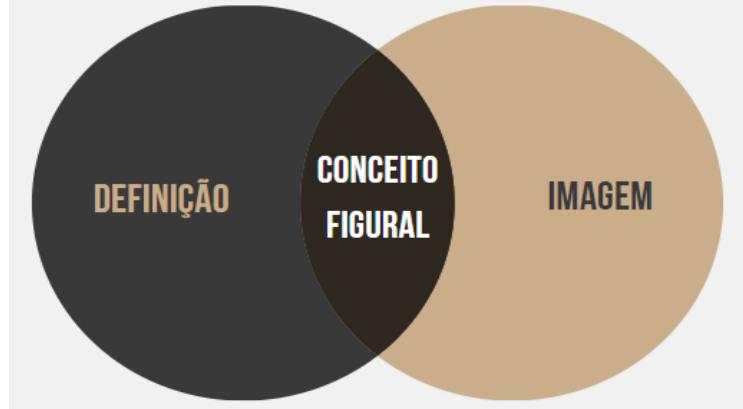
A pesquisa de Fischbein (1993) ressalta que a Geometria lida com entidades mentais, chamadas de figuras geométricas, que possuem ao mesmo tempo característica conceitual e figural. Por exemplo, existe o conceito formalizado de esfera, mas este sólido possui ao mesmo tempo propriedades específicas do sólido e uma determinada forma. De acordo com o autor, uma esfera ideal e perfeita jamais pode ser encontrada no mundo real.

Dessa forma, as figuras geométricas são denominadas de conceitos figurais justamente pela sua natureza dupla (FISCHBEIN, 1993). O autor apresenta suas ideias acerca do que entende por definição, imagem e conceito figural. A característica da definição é apresentar uma ideia, uma representação generalizada de uma classe de objetos, considerando suas características em comum. Por outro lado, a imagem (neste caso, imagens mentais) é uma representação sensorial de um objeto ou fenômeno. O conceito figural é uma realidade mental que envolve raciocínio matemático no domínio da Geometria, sendo desprovido de propriedades sensoriais concretas (como cor, peso, densidade etc.), mas exibe propriedades da figura. Em outras palavras, o conceito figural é uma imagem controlada intrinsecamente por uma definição.

De acordo com Fischbein (1993), a dificuldade em aceitar a existência do conceito figural reside no fato de que estamos cientes apenas da representação mental e da definição correspondente. É preciso, segundo o autor, de um esforço intelectual para entender que operações lógico-matemáticas manipulam somente uma versão “pura” da imagem. Uma figura geométrica tem intrinsecamente propriedades conceituais, mas ela não é um mero conceito. Ela é uma representação mental de uma propriedade do espaço geométrico.

Dessa forma, o conceito figural pode ser entendido como uma “interseção” entre a definição e a imagem do objeto em questão, ou seja, o conceito figural é uma imagem mental que possui propriedades baseadas em uma definição (Figura 1). Neste caso, quando estamos considerando uma figura geométrica como um cubo, por exemplo, seu conceito figural é a imagem de tal sólido de acordo com sua definição formal, sem considerar propriedades sensoriais concretas, tais como cor e textura.

Figura 1 – Conceito figural como a interseção entre a definição e a imagem de um objeto

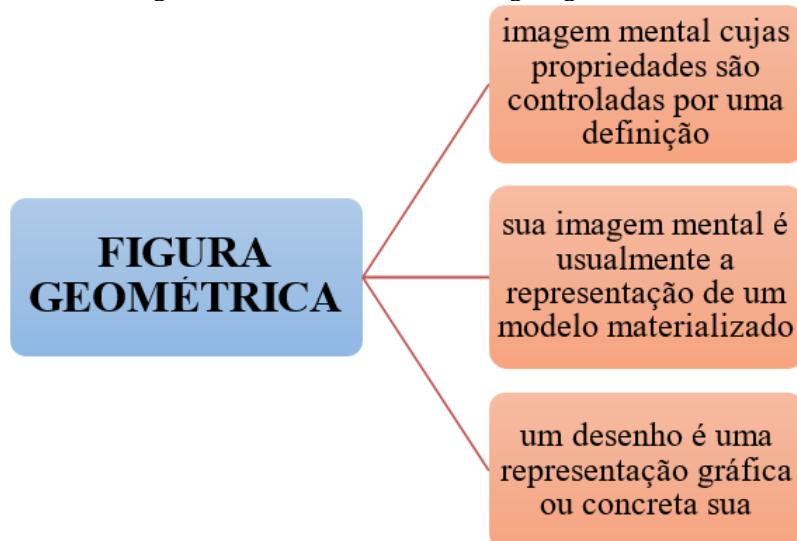


Fonte: Elaboração da autora.

Fischbein (1993) destaca que objetos como pontos, retas e ângulos têm uma natureza conceitual, mas ao mesmo tempo possuem uma natureza figural intrínseca em que é possível considerar operações como separar ou sobrepor. Sólidos feitos de material concreto ou desenhos são apenas modelos materializados das entidades mentais que os matemáticos lidam. Círculos, quadrados, tetraedros etc. são considerados perfeitos apenas do ponto de vista conceitual, ou seja, possuem uma existência ideal e, portanto, não podem ser representadas no mundo real (FISCHBEIN, 1993). Segundo o autor, os objetos presentes no mundo real são necessariamente tridimensionais, mas mesmo sólidos como o cubo ou a esfera também não existem em nossa realidade.

Nesta investigação, a compreensão de figura geométrica está alinhada com os estudos de Fischbein (1993) e a Figura 2 apresenta uma síntese das ideias do referido autor.

Figura 2 – Síntese do conceito de figura geométrica

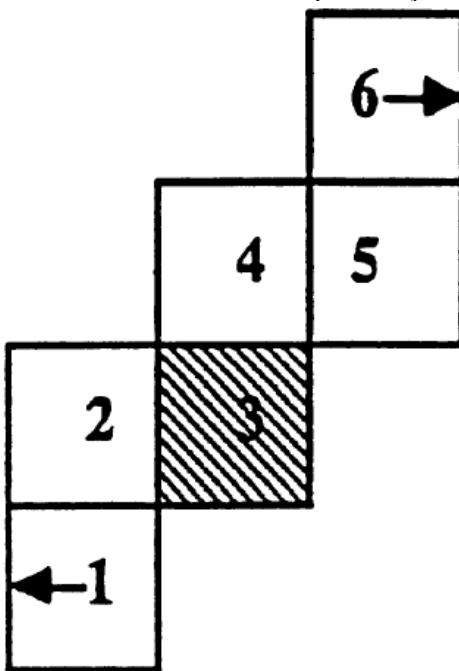


Fonte: Elaboração da autora a partir de Fischbein (1993).

De acordo com Fischbein (1993), as manipulações mentais complexas que fazemos com os objetos se configuram como uma grande oportunidade de desenvolver o raciocínio geométrico ao lidar com os conceitos figurais. O autor também propôs a realização de atividades envolvendo a sinergia entre a figura e o conceito, ou seja, atividades nas quais os estudantes deveriam manipular mentalmente as figuras geométricas ao mesmo tempo em que houvesse um controle conceitual intrínseco.

Em uma atividade envolvendo a planificação de um cubo (Figura 3), o autor identificou a complexidade em imaginar como ficaria o sólido reconstruído, o que demandava manipulações mentais sucessivas para modificar suas posições e imaginar o resultado destas transformações, enfatizando que era preciso mais do que “ver”.

Figura 3 – Atividade envolvendo a planificação do cubo



Fonte: Fischbein, p. 159, 1993.

Dessa forma, sua teoria não faz menção aos aspectos relacionados à visualização, pois “imagens e conceitos são considerados basicamente como categorias distintas de entidades mentais” (FISCHBEIN, 1993, p. 159, tradução nossa)<sup>3</sup>. De acordo com o autor, o conhecimento sobre o conceito está implícito nas manipulações mentais e transformações que fazemos nas figuras.

<sup>3</sup> “[...] images and concepts are considered basically distinct categories of mental activities.” (FISCHBEIN, 1993, p. 159)

Por exemplo, sabemos que é possível obter o quadrado como seção de um cubo pois, implicitamente, temos o conhecimento de que o cubo é um objeto tridimensional que possui suas seis faces sendo quadrados e que, aliado ao conceito de seção, imaginamos um plano que corte paralelamente a uma de suas faces. Portanto, ao fazer manipulações mentais existe um controle tácito estabelecido pelo conceito.

Essas manipulações mentais estão diretamente relacionadas com a visualização. Esta habilidade, importante para o aprendizado geométrico, será apresentada na seção seguinte.

### **2.3 A aprendizagem geométrica e a visualização**

Ao desenvolver um trabalho envolvendo Geometria, podemos notar que o espaço plano ainda é priorizado e que a abordagem é focada nas figuras planas e nos polígonos mais conhecidos, sendo que outros tipos de formas estão presentes em nosso cotidiano (BAIRRAL, 2009). No ensino de Geometria Espacial, em particular,

[...] os alunos têm amplas dificuldades, primeiramente com relação à visualização e representação, pois reconhecem poucos conceitos da Geometria básica e, por conseguinte da Geometria Espacial. Também apresentam problemas de percepção das relações existentes entre os objetos de identificação das propriedades das figuras que formam os sólidos, dentre outros conceitos (ROGENSKI; PEDROSO, 2009, p. 5).

Segundo Gutiérrez (1998), o ensino e a aprendizagem de Geometria Espacial dependem de uma representação plana adequada dos sólidos. Seu ensino envolve um complexo processo de compreensão do conceito subjacente a uma representação plana e isto requer que duas etapas sejam seguidas: 1) interpretar a figura plana a fim de convertê-la em um objeto tridimensional e 2) interpretar esse objeto (que em muitos casos existe apenas na mente dos alunos) para torná-lo o conceito geométrico em estudo (GUTIÉRREZ, 1998).

Desta forma, diante de situações nas quais é preciso manipular objetos espaciais e fazer a representação plana dos mesmos, é requerida a capacidade de visualização dos estudantes e suas habilidades para desenhar estas representações ou para interpretar corretamente as que são feitas por outras pessoas (GUTIÉRREZ, 1998). Interpretar e comunicar informações envolvendo Geometria Espacial são elementos necessários para compreender as demandas da tarefa (GORGORIÓ, 1998).

A visualização, assim como a Geometria, está relacionada com os mais diversos ramos da Matemática. É multifacetada e enraizada na Matemática, possuindo importantes aspectos históricos, filosóficos, psicológicos, pedagógicos e tecnológicos. A visualização não é um fim em si, mas um meio para um fim, que é a compreensão (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991).

O termo visualização pode assumir diferentes significados e, de acordo com Costa (2002), ele está muitas vezes restrito à mente do aluno, em outras está restrito a algum meio e ainda pode ser um processo que transita entre estes dois domínios.

Como não há consenso, existe uma diversidade de termos utilizados pelos autores, tais como imagens visuais, habilidades espaciais, pensamento visual, raciocínio visual e visualização que, aparentemente, possuem o mesmo sentido. A literatura escolhida para nortear a pesquisa também considera os diferentes sinônimos utilizados para defini-la e os quais avaliamos como sendo equivalentes<sup>4</sup>.

Considero a visualização sendo um processo individual que transita em diferentes dimensões (plana e espacial) e envolve a construção de imagens mentais de objetos geométricos, considerando seus conceitos intrínsecos.

Veloso (1998) afirma que a visualização não é simplesmente o ato de ver um objeto com os olhos, sem haver nenhum tipo de raciocínio ou cognição. A visualização em Matemática é baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, seja mental ou físico, realizados para resolver problemas ou provar propriedades (GUTIÉRREZ, 1996).

Marin e Leivas (2013) a consideram como sendo um meio de verificar se as pessoas têm a capacidade de realizar tarefas em que a imaginação e intuição mentais de objetos espaciais são exigidas, a fim de realizar operações geométricas com eles, sendo que tais objetos estão, muitas vezes, fora do alcance visual.

Quadro 1 – Resumo das Sete Operações Mentais

<b>Resumo das Principais Operações Mentais Envoltas na Visualização em Geometria</b>	
<b>1</b>	Identificar uma determinada figura plana, isolando-a dos demais elementos de um desenho.
<b>2</b>	Reconhecer que as formas geométricas de um objeto são independentes de suas características físicas, tais como tamanho, cor e textura.
<b>3</b>	Identificar um objeto, ou um desenho, quando apresentado em diferentes posições.
<b>4</b>	Producir imagens mentais de um objeto e visualizar suas transformações e movimentos, mesmo na ausência visual.
<b>5</b>	Relacionar um objeto a uma representação gráfica ou a uma imagem desse objeto.

<sup>4</sup> Mariotti *apud* Costa (2002) induz a distinção entre visualização, que considera trazer à mente imagem de coisas visíveis e pensamento visual como o pensar sobre coisas abstratas que originalmente podem não ser espaciais, mas que podem ser representadas na mente de alguma forma espacial. Este é um exemplo que não se aproxima dos interesses da minha pesquisa, pois não faço distinção entre estes termos.

<b>6</b>	Relacionar vários objetos, representações gráficas ou imagens mentais entre si.
<b>7</b>	Comparar vários objetos, suas representações gráficas e suas imagens para identificar diferenças e regularidades entre eles.

Fonte: Baseado em Kaleff (2016).

No entanto, visualizar não consiste em um processo simples e se trata de uma habilidade individual, pois envolve muitos aspectos, tais como, interpretar e fazer desenhos, formar imagens mentais e visualizar movimentos e mudanças de formas (LEMOS; BAIRRAL, 2010).

Zimmermann e Cunningham (1991) a descrevem como o processo de formação de imagens (mentalmente, com lápis e papel, ou com a ajuda da tecnologia), usando essas imagens de forma eficaz para descoberta e compreensão matemática. As imagens mentais consistem no elemento central de todas as concepções envolvendo a visualização, pois são as representações mentais que as pessoas podem fazer de objetos físicos, relações, conceitos etc. (GUTIÉRREZ, 1991).

Presmeg (1986) tem uma concepção mais ampla e associa visualização à imagem conceitual. A autora conceitua imagem visual como um esquema mental que ilustra informação visual ou espacial, mas não evidencia a necessidade da presença de um objeto ou de outra representação externa. O Quadro 2 ilustra os cinco tipos de imagens visuais no raciocínio matemático identificados pela autora.

Quadro 2 – Os cinco tipos de imagens visuais

<b>Imagens concretas e pictóricas</b>	“Figuras na mente”, mas não a mesma para todos.
<b>Imagens de padrões</b>	Representam esquemas visuais de relações matemáticas abstratas.
<b>Imagens de fórmulas</b>	Alguns alunos podem “ver” mentalmente uma fórmula, tal como foi escrita no quadro ou no livro didático.
<b>Imagens cinestésicas</b>	São criadas, transformadas ou transmitidas com a ajuda de movimentos físicos (gestos ou outras expressões corporais).
<b>Imagens dinâmicas</b>	Envolve a capacidade de mover ou transformar uma imagem mental.

Fonte: Elaboração da autora a partir de Presmeg (1986).

De acordo com Dreyfus (1991), muitas vezes o raciocínio visual é apresentado pelos professores em aula com um tratamento introdutório, acessório ou auxiliar. Essa abordagem, segundo o autor, pode ser devida ao fato de os especialistas, matemáticos, desenvolvedores

curriculares ou professores, não atribuírem relevância e *status* matemático ao raciocínio visual. Esta atitude de descaso pode fazer com que os alunos concluam que não precisam saber e nem utilizar os argumentos visuais.

Esta é uma situação preocupante, visto que a visualização não envolve uma intuição superficial e vaga de uma ideia matemática, mas sim dá profundidade e significado à compreensão dos objetos e propriedades matemáticas, serve como um guia confiável para resolução de problemas e inspira descobertas criativas (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991).

Gouveia e Miskulin (2012, p. 104) defendem que “o visualizar é próprio e distinto de cada aluno, e o contato com o modo de visualizar dos outros, como também as demais experiências presenciadas por ele configuram e ressignificam constantemente os seus processos de visualização”.

Por acreditar e defender o desenvolvimento do pensamento visual, a utilização de recursos variados se torna importante para o processo de ensino e aprendizagem em Geometria. Em estudo anterior, foi observado que mesmo sabendo da ideia matemática envolvida na atividade, alunos de licenciatura em Matemática apresentaram dificuldades em representar o que visualizavam (BAIRRAL, SETTIMY; HONORATO, 2013).

Arcavi (2003) propõe três categorias de dificuldades em torno da visualização: cultural, sociológica e cognitiva. A dificuldade cultural se refere às crenças e valores que se têm sobre o que a Matemática e o fazer Matemática, o que é legítimo ou aceitável e o que não é, como o caso das demonstrações visuais.

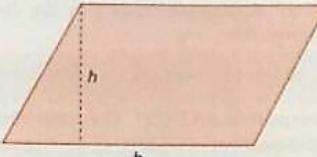
A Figura 4 ilustra um exemplo que considero uma demonstração visual, pois para mostrar que a área do paralelogramo é igual à área do retângulo foram utilizados recursos visuais para comprovar que essa afirmação é realmente verdade.

As demonstrações visuais geralmente são rejeitadas pela comunidade matemática e seus principais representantes. Crenças como estas provavelmente permeiam a sala de aula por meio de materiais curriculares, formação de professores etc. e, como consequência, não haverá espaço suficiente para incorporação e valorização da visualização nas aulas de Matemática.

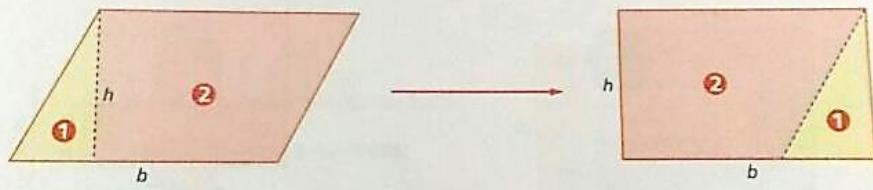
Figura 4 – Exemplo de demonstração visual

**6 Área do paralelogramo**

Considere o paralelogramo de base de medida  $b$  e altura de medida  $h$  da figura:



Observe que:



Notamos que a área do paralelogramo é igual à área do retângulo.  
Logo:

$$A_{\square} = b \cdot h$$

Fonte: Silveira; Marques, p. 320, 2007.

As dificuldades sociológicas ocorrem quando o conhecimento é adaptado do seu caráter científico-acadêmico ao conhecimento curricular e este processo lineariza, compartmentaliza e, possivelmente, também algoritmiza o conhecimento, provocando a perda de ricas interconexões (ARCAVI, 2003).

Outro tipo de dificuldade de caráter sociológico (ARCAVI, 2003) é a tendência de professores, em geral, ensinarem matemática a estudantes de diferentes origens culturais. Alguns são oriundos de culturas visualmente ricas (grafiteiros, indígenas, serigrafieiros etc.) que apresentam maior familiaridade com a visualização. Infelizmente, a prática escolar em Geometria desperdiça essa oportunidade.

As dificuldades culturais e sociológicas, embora tenham importância no contexto do ensino de Geometria, não foram observadas por Arcavi (2003). Assim, o foco foi destinado às dificuldades cognitivas. Quando as imagens são conceitualmente ricas, a demanda cognitiva é certamente alta, gerando desconforto e insegurança nos alunos em relação aos procedimentos adotados para fazer a representação. Um exemplo de dificuldade cognitiva é quando o sujeito visualiza um cubo e seus componentes (vértices, faces, arestas, diagonais etc.), mas apresenta erros para representar suas seções planas (cortes) (SETTIMY, 2014).

A fim de minimizar as dificuldades cognitivas, seria interessante identificar as habilidades relacionadas à visualização e traçar estratégias de modo a desenvolvê-las. Bishop<sup>5</sup> *apud* Costa (2002) define duas habilidades: a capacidade de interpretar informação figural (IFI) e a capacidade de processamento visual de figuras (VP). IFI envolve o conhecimento do “vocabulário geométrico” e capacidade de ler e interpretar imagens visuais, a fim de obter informações relevantes que possam ajudar a resolver uma atividade. VP é a capacidade de manipular e transformar imagens mentais e abrange a visualização e a tradução de relações abstratas e de informação não figural em termos visuais.

Considerando o IFI e o VP como componentes da visualização, Gutiérrez (1991) defendeu a existência de um terceiro, que são as habilidades utilizadas pelo indivíduo para a criação e o processamento de imagens visuais. Essas sete habilidades foram discutidas por Del Grande (1990) e estão descritas detalhadamente no quadro a seguir:

Quadro 3 – As sete habilidades espaciais

<b>Coordenação motora dos olhos</b>	Seguir com os olhos o movimento de objetos de forma ágil e eficaz.
<b>Identificação visual</b>	Reconhecer uma figura isolando-a de seu contexto.
<b>Conservação da percepção</b>	Reconhecer que um objeto mantém sua forma e propriedades mesmo que não o veja de forma parcial ou total (girando ou o ocultando).
<b>Reconhecimento de posições no espaço</b>	Relacionar a posição de um objeto consigo mesmo (o observador) ou com o objeto, que atua como ponto de referência.
<b>Reconhecimento das relações espaciais</b>	Identificar corretamente as características de relações entre diversos objetos situados no espaço (se estão girados, se são perpendiculares, simétricos)
<b>Discriminação visual</b>	Permite comparar vários objetos identificando suas semelhanças ou diferenças visuais, independentemente da posição.
<b>Memória visual</b>	Habilidade de se recordar das características visuais e de posição que tinham um conjunto de objetos em um certo momento e relacioná-las com outros objetos que estão em vista ou não.

Fonte: Elaboração da autora a partir de Del Grande (1990).

<sup>5</sup> BISHOP, A. Review of research on visualization in mathematics education. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, 11(1), 7-15, 1989.

De acordo com Gutiérrez (1991), algumas imagens, processos e habilidades visuais têm uma relação mais estreita com o contexto de aprendizagem da Geometria Espacial: as imagens pictóricas, cinestésicas e dinâmicas, os processos VP e IFI (quando intervém na obtenção ou análise dos três tipos de imagens anteriores) e as habilidades de identificação visual, de reconhecimento de posições ou de relações no espaço e de discriminação visual (também quando se utilizam com os três tipos de imagens citados anteriormente). Eles são utilizados diretamente pelos estudantes na resolução de problemas e, por outro lado, a capacidade dos discentes para utilizá-los pode ser melhorada mediante instrução específica centrada na resolução de atividades geométricas (GUTIÉRREZ, 1991).

Arcavi (2003) levantou dificuldades e Pittalis e Christou (2010), também preocupados com a visualização, propuseram um modelo que abrange cinco tipos de raciocínio no intuito de descrever as habilidades dos estudantes em Geometria 3D, sendo eles: manipular diferentes modos de representação de objetos 3D, reconhecer e construir redes, estruturar matrizes 3D de cubos, reconhecer as propriedades das formas 3D e comparar as formas 3D e calcular o volume e a área de sólidos.

O Quadro 4 apresenta a descrição detalhada de cada tipo de raciocínio, que, na visão dos autores, refere-se a um conjunto de processos e habilidades que atuam como uma ferramenta viável na resolução de problemas e permitem ir além das informações fornecidas nos objetos.

Quadro 4 – Cinco tipos de raciocínios em Geometria 3D

<b>Manipular diferentes modos de representação de objetos 3D</b>	As representações planas são as mais utilizadas para representar objetos 2D na Matemática escolar, no entanto os estudantes apresentam grandes dificuldades em desenhar objetos 3D, principalmente porque não se trata de algo trivial e que não é ensinado na escola. Como consequência, os alunos podem interpretar mal um desenho e não entender se ele representa um objeto 2D ou 3D.
<b>Reconhecer e construir planificações</b>	A construção de uma rede pressupõe a coordenação entre a representação mental do objeto como um todo e a decomposição de suas partes componentes. Exige a capacidade dos alunos para fazer traduções de objetos 3D para redes 2D, focalizando as partes componentes dos objetos em ambos os modos de representação.
<b>Estruturar matrizes 3D de cubos</b>	Significa identificar quantos cubos de menor aresta cabem no cubo maior. O desenvolvimento desta habilidade não é simples, pois exige que os alunos estabeleçam um modelo mental que forneça diferentes visões da estrutura.
<b>Reconhecer as propriedades das formas 3D e</b>	Mesmo que qualquer tipo de poliedro seja composto pelas mesmas partes, seu tamanho, número e forma definem as particularidades de cada poliedro. É entender como os elementos do sólido estão inter-relacionados e que esta compreensão pode se referir ao mesmo objeto ou entre objetos diferentes.

<b>comparar as formas 3D</b>	Os alunos devem entender que cada objeto 3D tem uma série de propriedades geométricas invariantes e variantes com base nas propriedades das partes componentes isoladas e suas próprias propriedades como uma estrutura unificada.
<b>Calcular o volume e a área de sólidos</b>	O pensamento de Geometria tridimensional está intimamente ligado à capacidade dos estudantes de calcular o volume e a área de superfície de um sólido. Os alunos tendem a se concentrar principalmente nas fórmulas e nas operações numéricas necessárias para calcular o volume ou a superfície de um sólido e ignorar completamente a estrutura das medidas da unidade.

Fonte: Elaboração da autora a partir de Pittalis e Christou (2010).

A partir do referencial teórico foi possível elaborar uma linha temporal (Figura 5), destacando a preocupação dos estudos a respeito da visualização.

Figura 5 – Visualização em uma linha do tempo



Fonte: Elaboração da autora.

Por meio desta organização foi possível inferir que o foco inicial era elaborar uma definição de visualização na qual não se especificava a utilização de outros recursos para potencializá-la. À medida que os estudos foram avançando, a visualização passou a ser vinculada a processos cognitivos e, em seguida, compreendida como um meio para a resolução de problemas aliada a materiais, como papel, lápis e outros recursos tecnológicos. Posteriormente, a atenção se destinou às dificuldades provenientes do visualizar, pois envolviam muitos aspectos como formar imagens mentais e interpretar desenhos, e dependiam do recurso didático que estava em mediação. Estudos mais recentes convergem para o resgate de habilidades relacionadas ao raciocínio geométrico e estratégias que podem contribuir para o seu desenvolvimento, valorizando, inclusive, possibilidades variadas.

## **2. 4 Descobertas e dificuldades em torno da visualização**

Settimy (2018) analisou o aprendizado de estudantes em atividades de Geometria Espacial, utilizando diversos recursos como papel e lápis, planificações articuladas, sólidos em acrílico e um vídeo gerado a partir da tela do *software* GeoGebra. Esses aspectos foram organizados em categorias e subcategorias, emergentes ao longo da análise dos dados. As categorias foram chamadas de Descobertas e de Dificuldades, sendo a primeira relacionada às experiências vivenciadas pelos alunos durante a resolução de uma atividade (SETTIMY; BAIRRAL, 2019) e a segunda se referia às dúvidas encontradas pelos estudantes ao realizarem a atividade (SETTIMY; BAIRRAL, 2020)

A categoria Descobertas possuía as seguintes subcategorias: Significados Emergentes; Maneiras de Representar; Maneiras de Conceituar, Exemplificar e Associar Formas e Expressões de Envolvimento e Motivação.

O Quadro 5 apresenta uma síntese a respeito de cada uma.

Quadro 5 – Subcategorias da categoria Descobertas

<b>Significados Emergentes</b>	Palavras que receberam diferentes significados, o que conduziu a diversas interpretações do que constava no enunciado e que consequentemente interferiram nas respostas.
<b>Maneiras de Representar</b>	Representações feitas em atividades que necessitavam a representação figural.
<b>Maneiras de Conceituar, Exemplificar e Associar Formas</b>	Os diferentes modos para conceituar, dar exemplos e fazer associações de formas.
<b>Expressões de Envolvimento e Motivação</b>	Evidenciar algo positivo em relação à atividade que realizou, destacando o quanto ela foi divertida e/ou fácil para ele ou destacavam algo que considerou importante para seu aprendizado

Fonte: Elaboração da autora a partir de Settimy (2018).

Por outro lado, a categoria Dificuldades possuía as seguintes subcategorias relacionadas à visualização: reconhecer e representar figuras geométricas planas e espaciais; identificar e comparar o tamanho das faces; escrever ideias e/ou conceitos matemáticos e representar vistas.

Quadro 6 – Subcategorias da categoria Dificuldades

<b>Reconhecer e Representar Figuras Planas e Espaciais</b>	Dificuldade para identificar e representar figuras bidimensionais e tridimensionais
<b>Identificar e Comparar o Tamanho das Faces</b>	Dificuldade no que diz respeito à identificação e comparação do tamanho e forma das faces de objetos tridimensionais
<b>Escrever Ideias e/ou Conceitos Matemáticos</b>	Dificuldade para expressar suas ideias em relação a determinados conceitos por meio da escrita.
<b>Representar Vistas</b>	Dificuldade de representar as vistas de objetos tridimensionais, seja por meio da movimentação desses objetos mentalmente ou pela dificuldade em visualizar as partes das figuras que não estavam visíveis em uma ilustração.

Fonte: Elaboração da autora a partir de Settimy (2018).

Settimy (2018) evidenciou a necessidade de desenvolver mais atividades com foco na visualização e na representação de objetos tridimensionais. De acordo com Settimy e Bairral (2020), as dificuldades para representar podem ser minimizadas quando são criados estímulos visando aprimorar a habilidade de visualizar, sendo também necessário realizar mais atividades em que o aluno se fixar um referencial de modo a fazer a associação correta da representação ou de uma vista.

Nesse sentido, a variedade de recursos utilizados para o estudo de Geometria Espacial é um elemento relevante para o aprendizado geométrico dos sujeitos, pois permitem explorar,

movimentar e visualizar os objetos sob vários ângulos. Além disso, é muito importante que os sujeitos sejam instigados a escrever sobre o seu processo de resolução de uma atividade, uma vez que o diálogo sobre as ideias dos discentes favorece a evolução do aprendizado dos conceitos explorados (SETTIMY; BAIRRAL, 2019).

## 2.5 O aprendizado geométrico por meio dos Ambientes de Geometria Dinâmica

A tecnologia tem influenciado os estudantes em sua forma de aprender desde o início de sua escolaridade (WASSIE; ZERGAW, 2019). Nesse sentido, os Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD) podem contribuir para o ensino e aprendizagem em Geometria no que diz respeito à implementação de atividades voltadas para o desenvolvimento da visualização.

De acordo com Alves e Soares (2003, p.4), “[...] o termo Geometria Dinâmica foi inicialmente usado por Nick Jakiw e Steve Rasmussen da *Key Curriculum Press, Inc.* com o objetivo de diferenciar este tipo de software dos demais *softwares geométricos*”.

Alguns autores também utilizam o termo *Softwares de Geometria Dinâmica* (SGD) ou apenas Geometria Dinâmica. No entanto, este último termo não se refere exclusivamente a ambientes informatizados, pois o uso de materiais manipuláveis, comumente utilizados para o aprendizado geométrico, se configura como uma Geometria que não é estática, ou seja, dinâmica (HENRIQUE, 2017).

O AGD dá oportunidade para o estudante aprender Geometria Espacial por meio de explorações (GUVEN; KOSA, 2008). Além disso, permite que a construção seja feita uma única vez e as alterações dos elementos geométricos da construção implicam em uma variedade de exemplos que mantêm as relações geométricas, isto é, não há deformação da construção (MACHADO; BORTOLOSSI; JUNIOR, 2018).

O que diferencia um AGD dos demais *softwares* é a função do arrastar, que permite os estudantes investigarem rapidamente a legitimidade de conjecturas (BAKI; KOSA; GUVEN, 2011). Bairral e Barreira (2017) explicam que os AGD modificam a forma de aprender Matemática, pois priorizam o movimento na construção e representação de uma figura. Os autores destacam que esses ambientes, juntamente com o planejamento adequado do professor, implicam em uma nova forma de ensinar e aprender Geometria. Dessa forma, é possível visualizar e explorar conceitos matemáticos que eram difíceis de serem ilustrados em uma época em que não existia este tipo de tecnologia (DIKOVIĆ, 2009).

Nestes ambientes, a construção dos conceitos geométricos ocorre com um equilíbrio conceitual e figural (GRAVINA, 1996). O conceito figural (FISCHBEIN, 1993) e as

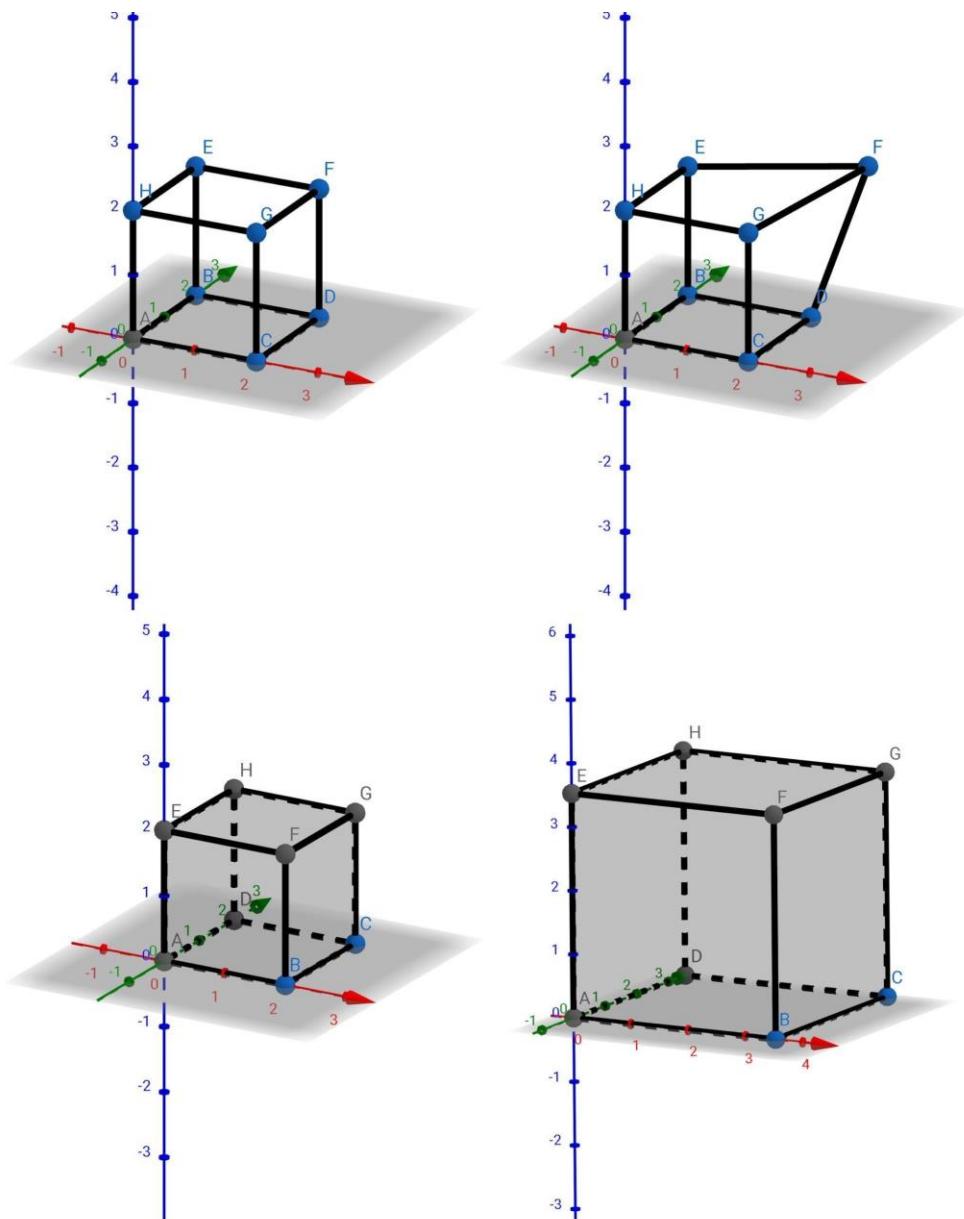
construções realizadas em um AGD estão imbricados. Não é possível construir nenhum objeto sem que ele esteja permeado de propriedades inerentes a ele.

Os recursos disponíveis nos AGD possibilitam um trabalho diferenciado no ensino e na aprendizagem de Geometria, em que seu uso estimula o aluno a formular e validar suas próprias conjecturas (ZULATTO; PENTEADO, 2006). De acordo com Henrique (2017), o usuário pode manipular uma figura com mais liberdade, contribuindo para que a construção, a manipulação e a visualização se tornem mais ágeis, auxiliando na formulação de conjecturas em problemas propostos.

Santos (2006) enfatiza que os AGD assumem um papel importante na visualização devido às potencialidades de seus recursos. A possibilidade de ver um objeto de diferentes maneiras na tela contribui para o desenvolvimento da visualização (BAKİ; KOSA; GUVEN, 2011). Além disso, eles permitem os estudantes aprenderem Geometria e desenvolverem sua visualização por meio da investigação, arrastando e medindo os componentes dos sólidos (BAKİ; KOSA; GUVEN, 2011).

Em relação à função de arrastar, Olivero (2003) sublinhou que esta possui três funções principais: como *feedback*, como mediadora entre desenho e figura e como modo de análise ou de busca. A primeira função permite que o estudante tenha controle da construção, permitindo verificar com precisão as suas propriedades. A segunda diz respeito a distinguir o desenho de uma figura, reconhecendo que ao arrastar uma figura as suas propriedades se mantêm enquanto no desenho isto não ocorre (Figura 6). Na terceira função, o estudante testa suas conjecturas e verifica as propriedades invariantes da figura. O arrastamento possibilita explorar a figura de forma dinâmica e realizar simultaneamente a mudança de sua posição e de seu tamanho (SALAZAR; ALMOULLOUD, 2015).

Figura 6 – Comparativo entre o desenho e a construção de um cubo no aplicativo GeoGebra 3D



Fonte: Elaboração da autora.

Henrique (2017) destaca que o aprendizado matemático pode ser potencializado por meio de computadores, calculadoras, *tablets* e *smartphones* e que o aprendizado geométrico, em particular, pode se beneficiar com as possibilidades de inovação no ensino trazidas pelos AGD, que permitem variadas formas de visualização e construção não estáticas de um objeto geométrico, contribuindo para a formação de uma imagem mental desse objeto. Segundo o autor, a construção geométrica pode ocorrer por meio do clique (via *mouse*) ou toque na tela (em ambientes *touchscreen*).

Além disso, a utilização do computador, *smartphone* e outras tecnologias digitais estão trazendo uma nova possibilidade de estudo ao aluno, que é estimulado a pensar em qual ferramenta melhor se adequa aos objetivos do conteúdo matemático proposto (LIMA; SANTOS, 2020).

Nessa perspectiva, *smartphones*<sup>6</sup> têm se destacado como potenciais ferramentas voltadas para o ensino, pois estão cada vez mais presentes no cotidiano e nas salas de aula devido aos próprios estudantes que os utilizam (HENRIQUE, 2017). O pesquisador afirma que os AGD se aproximam de uma nova possibilidade para o ensino de Geometria, que consiste na construção e manipulação de objetos geométricos via dispositivos *touchscreen*.

Utilizar dispositivos móveis em sala de aula mediante a utilização de um AGD por meio de um ambiente *touchscreen* pode facilitar o trabalho docente (BAIRRAL, 2013). Todavia, por se tratar de uma ferramenta da qual os estudantes fazem uso diário, é preciso que o docente elabore uma proposta com os objetivos bem delimitados para que não haja o risco de que a atividade perca o foco (HENRIQUE, 2017).

Nesse sentido, o *smartphone* se torna um recurso em potencial para ser utilizado em sala de aula uma vez que estimula a criatividade, a criticidade e a autonomia do estudante por meio de atividades investigativas, contribuindo para sua aprendizagem (BAIRRAL et al., 2015).

As características apresentadas anteriormente impulsionaram a escolha por utilizar *smartphones* nesta pesquisa. O AGD selecionado para ser usado com o referido dispositivo móvel foi o GeoGebra, que se destaca como um importante recurso para o aprendizado geométrico e, portanto, foi utilizado para a produção de dados desta investigação. Para a realização das atividades propostas, não era necessário conexão com a internet.

O GeoGebra é um ambiente de aprendizagem que pode ser utilizado em todos os níveis de escolaridade (YORGANCI, 2018). De acordo com o Instituto São Paulo GeoGebra:

o GeoGebra é um software de Matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação [...]. Algumas características importantes [são]:

- Gráficos, álgebra e tabelas estão interligados e possuem características dinâmicas;
- Interface amigável, com vários recursos sofisticados;
- Ferramenta de produção de aplicativos interativos em páginas WEB;
- Disponível em vários idiomas para milhões de usuários em torno do mundo;
- Software gratuito e de código aberto.

Por ser livre, o software GeoGebra vem ao encontro de novas estratégias de ensino e aprendizagem de conteúdos de geometria, álgebra, cálculo e estatística, permitindo a

---

<sup>6</sup> Este tema será aprofundado posteriormente, trazendo mais informações a respeito das contribuições do *smartphone* para o ensino de Geometria e para o desenvolvimento da visualização.

professores e alunos a possibilidade de explorar, conjecturar, investigar tais conteúdos na construção do conhecimento matemático. (grifos do original)<sup>7</sup>

O GeoGebra possui diversas vantagens, tais como: a interface de fácil manipulação, incentiva os alunos em seus estudos de Matemática por meio de uma aprendizagem guiada e exploratória, investigação de relações matemática por meio da exploração de construções dinâmicas e estimula o docente a utilizar e avaliar a tecnologia para a visualização e a investigação matemática (DIKOVIĆ, 2009).

Ele se trata de um *software* que propicia aos alunos e professores uma maneira de utilizar a tecnologia com ferramentas visuais, as quais possibilitam a interação entre estudantes e os conceitos matemáticos, seja de forma individual ou em grupos, na sala de aula, em casa ou de acordo com o local mais conveniente (SAHA; AYUB; TARMIZI, 2010).

Hangul e Cezikturk (2020) identificaram que a contribuição do uso do GeoGebra para a construção matemática de sentido e para a possibilidade de transitar entre diferentes representações. Desse modo, as autoras concluíram que os alunos podem usufruir dos seguintes benefícios: o despertar da curiosidade, estabelecer conexões entre a teoria e a prática, os conceitos abstratos podem ser concretizados e vivenciar processos de descoberta e de aprendizagem.

Um *software* como o GeoGebra se torna um ambiente que proporciona a elaboração de conjecturas e deduções de propriedades dos objetos matemáticos representados. Ao utilizá-lo de maneira estratégica, ele pode ser muito útil para justificar matematicamente (SALAZAR; ALMOULOUD, 2015). Portanto, o GeoGebra pode atuar como um importante recurso para o aprendizado geométrico.

---

<sup>7</sup> Disponível em: <<http://www.pucsp.br/geogebraasp/geogebra.html>>. Acesso em: 30 mar. 2016.

## CAPÍTULO III: VISÃO DA TRAJETÓRIA

Este capítulo descreve o cenário, os sujeitos e os procedimentos adotados para a produção de dados da pesquisa. O delineamento metodológico foi escolhido visando o desenvolvimento do processo de visualização a partir de atividades que exploram conceitos de Geometria Espacial.

### 3.1 Organização do estudo

Esta pesquisa foi motivada pelo desejo de contribuir para o desenvolvimento da visualização de futuros professores de Matemática e discutir a respeito da relevância desta habilidade para o ensino de Geometria. As atividades foram desenvolvidas mediante a utilização de recursos mais convencionais (papel e lápis) e do GeoGebra em sua versão para *smartphone*.

O propósito desta investigação foi sublinhar a importância da visualização no desenvolvimento do pensamento geométrico na Licenciatura em Matemática. Os objetivos específicos consistiram em: identificar dificuldades relacionadas ao processo de visualização em atividades de Geometria Espacial utilizando papel, lápis e o GeoGebra em sua versão para *smartphone*; e verificar contribuições das atividades em uma dinâmica que potencializa justificativas no desenvolvimento da visualização em futuros professores de Matemática.

A análise foi feita com o intuito de identificar aspectos relacionados ao desenvolvimento da visualização, observar o papel desempenhado por ela na resolução de atividades de Geometria Espacial e verificar o processo de justificativa de licenciandos de Matemática em atividades de Geometria Espacial.

A organização do trabalho se baseou nas seguintes etapas: elaboração, seleção e organização de atividades, implementação em sala de aula e análise dos dados. As atividades foram elaboradas pela pesquisadora, outras foram readaptadas de Settimy (2018), Alonso e Salar (1992) e Bairral e Gimenez (2012).

Foram selecionadas para implementação as atividades alinhadas à proposta da pesquisa e do conteúdo a ser trabalhado em sala de aula. As dificuldades apresentadas pelos discentes eram observadas e, com base nesse *feedback* da turma, as intervenções seguintes sofreram adaptações e um novo ciclo era iniciado.

### 3.2 A metodologia Pesquisa de Desenvolvimento

Segundo Costa e Poloni (2011), a metodologia *Design-Based Research*<sup>8</sup> (PD) busca analisar os processos de aprendizagem de domínios específicos, o que não significa realizar simplesmente uma sequência de atividades com o intuito de viabilizar a aprendizagem de um determinado domínio. A adoção desta metodologia implica em um aumento da relevância da pesquisa para a prática, tendo os sujeitos de pesquisa envolvidos na investigação e exercendo diferentes papéis durante todo o processo (COSTA; POLONI, 2011).

Barab e Squire (2004) afirmam que a Pesquisa de Desenvolvimento (PD) se preocupa em atender às necessidades e provocar mudanças no nível local, mas também tem a intenção de contribuir para o desenvolvimento do campo teórico. De acordo com os autores, o valor da teoria é justificado por meio de um *design* que cria impacto na aprendizagem no contexto local, isto é, uma pesquisa baseada em *design* deve avançar na teoria ao mesmo tempo em que impacta diretamente na prática.

Neste sentido, a presente pesquisa visou apresentar contribuições para o campo teórico que trata do aprendizado geométrico e que valoriza o processo de visualização bem como se preocupou em impactar diretamente o aprendizado geométrico e, em particular, o raciocínio visual dos estudantes.

Cobb *et al.* (2003) ressaltam que a PD advém da compreensão de uma “ecologia de aprendizagem”, que consiste em um sistema interativo complexo que envolve uma multiplicidade de elementos dos mais variados tipos e níveis. Para os autores, esse entendimento ocorre a partir da identificação de seus elementos e da antecipação de como eles funcionam juntos como suporte à aprendizagem.

Os elementos que compõem uma PD incluem a tarefa ou problema a ser resolvido pelos estudantes, os tipos de discurso que são incentivados, os tipos de participação estabelecidos, as ferramentas e os materiais que são fornecidos e as práticas adotadas pelos professores que podem harmonizar as relações entre esses elementos (COBB *et al.*, 2003).

Nesta investigação, as atividades elaboradas tinham como proposta incentivar os licenciandos a escreverem justificativas de seus raciocínios e, sobretudo, valorizar uma prática que promove o diálogo e a interação entre os sujeitos e entre tecnologia<sup>9</sup>-sujeito.

---

<sup>8</sup> Matta, Silva e Boaventura (2014) sugerem que, para esta metodologia, pesquisa de desenvolvimento seja o termo mais adequado ao nosso idioma. É possível encontrar na literatura a utilização de outros termos como *design research*, *design-based research* e *development research*. Utilizaremos pesquisa de desenvolvimento que, em nossa investigação, ocorreu mediante experimentos de ensino (COBB *et al.* 2003).

<sup>9</sup> Tecnologia se refere a qualquer um dos recursos utilizados nas implementações, tais como papel, lápis, material concreto, *software* etc.

De acordo com Cobb *et al.* (2003), a PD possui cinco características:

- Há o desenvolvimento de teorias a respeito do processo de aprendizagem como também dos materiais utilizados como suporte à aprendizagem.
- Possui natureza intervencionista, tendo como objetivo investigar novas formas de aprendizagem com o intuito de provocar mudanças no âmbito educacional.
- Dispõe de revisão contínua do *design* da investigação, que é flexível e resulta de um conjunto de tentativas iniciais e da avaliação do sucesso delas na prática, o que significa que essa metodologia possui dois aspectos: o prospectivo e o reflexivo. Dessa forma, a PD conta com um *design* iterativo que passa por momentos de refinamento e aperfeiçoamento contínuos. Em outras palavras, o *design* possui um movimento cíclico, isto é, momentos de *redesign*.
- Pesquisador, professores e alunos não desempenham papéis fixos no processo e há o envolvimento e engajamento de todos.
- As teorias são o fundamento para a elaboração do *design*.

Ao adotar esta metodologia, é preciso que o pesquisador reconheça a complexidade e as limitações do contexto do *design* proposto (AMIEL; REEVES, 2008). Na presente pesquisa, o *design* inicial foi feito a partir de atividades elaboradas pela pesquisadora e adaptadas de Settimy (2018), Alonso e Salar (1992) e Bairral e Gimenez (2012).

Barab e Squire (2004) salientam que as alegações teóricas do investigador precisam transcender o contexto local, pois apenas demonstrar a utilidade e consequência do *design* exclusivamente para o contexto local não é suficiente. Um dos desafios da PD consiste em

“[...] caracterizar a complexidade, fragilidade, confusão e eventual solidão do design e fazê-lo de uma maneira que será valiosa para outras pessoas. Esse último critério implica que a pesquisa baseada em design requer mais do que entender os acontecimentos de um contexto específico, mas também exige mostrar a relevância dos achados derivados do contexto de intervenção para outros contextos.” (BARAB; SQUIRE, 2004, p. 3-4, tradução nossa)<sup>10</sup>

---

<sup>10</sup> “[...] to characterize the complexity, fragility, messiness, and eventual solidity of the design and doing so in a way that will be valuable to others. This later criterion implies that design-based research requires more than understanding the happenings of one particular context, but also requires showing the relevance of the findings derived from the context of intervention to other contexts.” (BARAB; SQUIRE, 2004, p. 3-4)

Costa e Poloni (2011) destacam que na PD a preparação do *design* da próxima intervenção é condicionada aos resultados de intervenções anteriores e que cada novo experimento dá a oportunidade de fazer análises, reflexões e modificações, ou seja, um *redesign* das intervenções seguintes.

No caso da presente pesquisa, ao fim de cada encontro, o aprendizado dos alunos era analisado e a definição do *design* das próximas atividades era feito com o intuito de desenvolver aspectos da visualização que os estudantes ainda apresentavam alguma dificuldade.

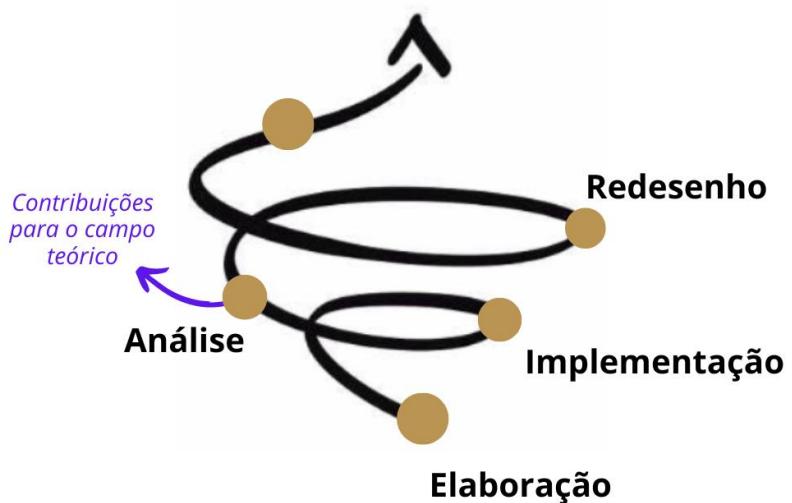
Dessa forma, a análise dos dados e a reflexão feita a partir da análise permitem a criação e implementação de novos *designs*, criando um movimento cíclico de *design-reflexão-design*, que possibilita investigar variáveis e limitações, contribuindo para o delineamento de possíveis soluções (AMIEL; REEVES, 2008).

Para Costa e Poloni (2011, p. 4)

no ciclo existem momentos de preparação do experimento seguidos de momentos de atuação. A atuação é, então, analisada por um processo reflexivo que pode gerar modificações no experimento para nova atuação e o ciclo continua.

Esse movimento cíclico pode ser observado no esquema (Figura 7) a seguir:

Figura 7 – Movimento cíclico da PD



Fonte: Elaboração da autora.

O Quadro 7 descreve as fases da PD no contexto da presente investigação.

Quadro 7 – Descrição das fases da PD

Fases da PD	Elementos da pesquisa
Elaboração <sup>11</sup>	Identificação do problema de estudo a partir de observações feitas pela pesquisadora, tendo como objetivo o desenvolvimento da visualização, contribuindo para o aprendizado geométrico dos sujeitos.
Implementação	Implementação das atividades utilizando papel, lápis e o aplicativo GeoGebra 3D para <i>smartphone</i> .
Análise	Análise dos dados de pesquisa a partir de reflexões da pesquisadora acerca do aprendizado dos discentes, implicando em um redesenho das próximas intervenções.
Redesenho	A partir da fase de análise e do <i>feedback</i> dos estudantes, as atividades das próximas intervenções sofriam alterações de modo a trabalhar aspectos da visualização que os estudantes ainda apresentavam alguma dificuldade.

Fonte: Elaboração da autora.

A Figura 8 ilustra um exemplo de como o ciclo da PD ocorreu no transcorrer das implementações. A partir do *feedback* dos estudantes e da análise das dificuldades relacionadas à visualização dos sujeitos, houve o redesenho das atividades seguintes.

---

<sup>11</sup> Além da elaboração, os processos de seleção e reelaboração das atividades também fazem parte do design.

Figura 8 – Ciclo da PD aplicada na pesquisa

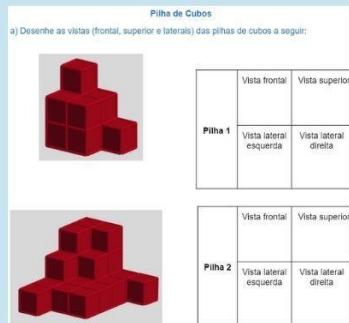


## Exemplo prático do ciclo da PD na pesquisa

### Discutindo Sobre o Cubo

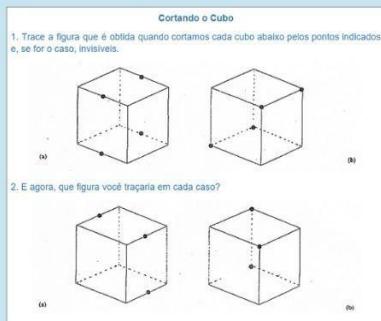
O que é um cubo?  
Desenhe um cubo.  
Quais conteúdos do Ensino Médio podem ser explorados com o cubo?

Após **avaliar** a dificuldade e insegurança da turma para conceituar o cubo, na aula seguinte implementamos a atividade *Cortando o Cubo*, que explorava seções planas. Os estudantes apresentaram dificuldades para visualizar e representar as seções. A partir de uma **nova análise**, decidi **redesenhar** a atividade que seria aplicada na aula seguinte.



A implementação seguinte consistiu em uma **reelaboração** da atividade *Cortando o Cubo* e seu objetivo era explorar as seções planas do cubo e trabalhar o processo de justificativa dos discentes utilizando os recursos do GeoGebra 3D. Um **feedback** importante dos alunos foi que fazer o exercício é muito diferente de explicar/justificar). Por mais que você saiba o que fez, verbalizar o conceito usado foi considerado bem difícil.

Iniciamos a **implementação** com uma atividade para investigar de que forma os estudantes conceituavam o sólido geométrico cubo. Após a aplicação, **analesei** a dificuldade e insegurança da turma na realização da atividade.



Embora o cubo fosse um sólido familiar para a turma, os alunos tiveram dificuldades em visualizar e representar as seções planas. A partir desse **feedback**, decidi dar continuidade à implementação de atividades envolvendo este sólido para enriquecer a visualização e trabalhar a representação por meio de uma atividade envolvendo a representação das vistas de um empilhamento de cubos.

### Seções de um cubo no GeoGebra 3D

Construa um cubo no GeoGebra 3D. Em seguida, responda:

- Determine algumas possíveis seções de corte, movimente a construção livremente e escreva pelo menos duas observações em relação às seções.
- Qual o número máximo de lados da figura gerada pela seção de corte? Descreva a(s) estratégia(s) para encontrar sua resposta.
- É possível obtermos seções sendo polígonos regulares? Justifique.

Fonte: Elaboração da autora.

Cabe ressaltar que a fase de elaboração da presente investigação advém da pesquisa de mestrado (SETTIMY, 2018), que fez surgir o desejo de investigar aspectos relacionados ao desenvolvimento da visualização de estudantes de licenciatura em Matemática visando promover a reflexão de futuros professores a respeito deste processo no ensino de Geometria.

Dessa forma, as atividades foram elaboradas com a proposta de identificar os modos de visualizar e as estratégias de resolução adotadas pelos licenciandos, tendo o *design* inicial pautado na concepção de que a visualização é mais do que ver um objeto (VELOSO, 1998), sendo considerada a formação de imagens mentais ou por meio da tecnologia para a resolução de problemas (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991) e que, por se tratar de uma habilidade individual importante, precisa ser desenvolvida (KALEFF, 1998).

### **3.3 A postura do pesquisador**

A pesquisa baseada em *design* exige que o pesquisador não se restrinja a um exemplo particular de *design* e produza afirmações baseadas em evidências sobre o aprendizado, tratando de questões teóricas contemporâneas e aprofundando o conhecimento teórico do campo (BARAB; SQUIRE, 2004).

Para que o pesquisador esteja em sintonia com a PD, é preciso que este crie situações que propiciem mudanças nos esquemas matemáticos dos sujeitos e avalie as transformações que esse pensamento pode ter ao longo do processo (COSTA; POLONI, 2011). De acordo com Sztajn et al. (2013), a PD oferece uma melhor compreensão para o estudo da aprendizagem, o que pode trazer contribuições para melhorar o desenvolvimento profissional do professor. Neste sentido, esta pesquisa visou investigar o processo de visualização a partir das intervenções realizadas, analisando os impactos no aprendizado geométrico dos licenciandos.

### **3.4 Os sujeitos**

As implementações ocorreram ao longo do segundo semestre de 2019, no âmbito da disciplina Ensino de Matemática II, na qual a pesquisadora realizou Estágio de Docência sob a supervisão do Prof. Dr. Marcelo Almeida Bairral. Os sujeitos de pesquisa foram quatorze alunos de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro. Esses alunos estavam no oitavo período ou há mais tempo que isso no curso.

A sala em que as aulas ocorreram tinha uma mesa retangular com cerca de quinze lugares, ou seja, possuía uma configuração que favorecia a comunicação entre todos os alunos da turma. A média de frequência por aula era de cerca de 12 discentes.

É importante destacar que essa disciplina é referente ao oitavo período do curso de Licenciatura do curso de Matemática e, portanto, representava um marco feliz para os estudantes. Como eles estavam em fase de conclusão do curso, a disciplina possuía uma atmosfera agradável e que favorecia a discussão e reflexão de cada um a respeito de sua (futura) prática em sala de aula.

De acordo com a grade curricular da Licenciatura em Matemática da UFRRJ, as disciplinas voltadas para o estudo de Geometria são Geometria Euclidiana Plana, Tópicos de Geometria Espacial e Construções Geométricas, sendo as duas primeiras referentes ao segundo período e a última ao terceiro período do curso. Isto significa que os licenciandos têm contato com disciplinas específicas de Geometria apenas no início do seu percurso formativo.

Além disso, a forma como os conteúdos são divididos em “caixinhas” acaba sendo prejudicial ao estudante, uma vez que a visualização não é restrita à Geometria e pode ser utilizada em questões algébricas e aritméticas. A simetria de um gráfico e a interpretação geométrica das soluções de Sistemas Lineares são situações que podem ser melhor compreendidas ao trabalhar ambos os conceitos geometricamente. A Geometria, portanto, oferece por meio de suas práticas outras possibilidades para que o estudante encontre outras formas de resolução de um problema matemático.

Matta, Silva e Boaventura (2014) destacam que a PD tem como proposta compreender o contexto e, em virtude de sua natureza altamente situada, os sujeitos da pesquisa são fundamentais. Os autores justificam que na maioria das vezes os participantes estão inseridos no contexto do estudo e, portanto, a avaliação e validação de cada ciclo de aplicação dependem do *feedback* dos sujeitos envolvidos.

Nesta investigação, os rumos das intervenções eram determinados pelos estudantes. Suas dúvidas, dificuldades e inquietações funcionavam como uma espécie de “bússola”, indicando o caminho a ser tomado nas próximas intervenções.

### **3.5 Produção de dados de pesquisa**

De acordo com Costa e Poloni (2011, p. 3)

Para a *Design-Based Research*, os registros não necessitam ser feitos de uma única forma, ao contrário, podem ser registros escritos, gravados, fotografados, filmados e, no caso de uma pesquisa em ambiente computacional, também se aceitam os arquivos salvos dos episódios de ensino.

Além dos registros de cada momento serem utilizados para a elaboração dos próximos, eles também são utilizados na análise dos momentos de ensino já ocorridos (COSTA; POLONI,

2011). Foram utilizadas na análise desta pesquisa os registros escritos dos estudantes provenientes das folhas de atividades e da produção do Quadro Comparativo<sup>12</sup>, gravações de áudio, capturas e gravações da tela<sup>13</sup> de seus *smartphones* utilizando o aplicativo GeoGebra.

Não foi adotado um critério prévio para a seleção dos dados de pesquisa a serem analisados. A análise foi feita a partir de elementos julgados como importantes no transcorrer das intervenções, como a discussão dos estudantes sobre uma atividade em questão, registros escritos e representações feitas mediante a utilização do aplicativo do GeoGebra, por exemplo.

Com isso, cada atividade trazia elementos particulares que evidenciavam as contribuições da utilização de recursos mais convencionais (papel e lápis) e do aplicativo GeoGebra 3D em *smartphones*. Nesse sentido, a análise focou no processo de visualização, nas estratégias e nas dificuldades apresentadas pelos estudantes durante a realização das atividades.

Amiel e Reeves (2008) enfatizam que a pesquisa baseada em *design* tem como objetivo dar abertura à problematização do *design* concluído e da implementação realizada, fornecendo descrições ricas sobre o contexto, teoria norteadora e emergente, recursos utilizados e o impacto destes recursos na participação e no aprendizado. Com isso, outras pessoas interessadas em estudar contextos e preocupações semelhantes podem adotar princípios de *design* baseados nessas informações (BARAB; SQUIRE, 2004).

Matta, Silva e Boaventura (2014) consideram que em PD a replicação está sempre condicionada à possibilidade de migrar uma intervenção para outras, ou seja, utilizar informações do *design* advindas de outra intervenção para a sua, mesmo que isso signifique fazer novos ciclos de aplicação, análise e validação para este novo contexto.

### 3.6 Atividades desenvolvidas

A disciplina contava com uma carga horária de 60 horas, sendo 15 horas de observação e regência realizadas pelos estudantes. As aulas eram centradas na resolução de atividades envolvendo visualização e representação, além de focar na discussão de artigos ou capítulos de livros que tratavam sobre o ensino de Geometria e o conceito de visualização. Estes textos eram previamente enviados aos alunos via Sistema Integrado de Gestão de Atividades Acadêmicas<sup>14</sup>

---

<sup>12</sup> O detalhamento deste registro foi feito na subseção seguinte.

<sup>13</sup> Para gravação da tela, foi utilizado o aplicativo AZ Screen Recorder. Disponível em: <<http://az-screen-recorder.br.uptodown.com/android>>. Acesso em 15 jun. 2020.

<sup>14</sup> Sistema Integrado de Gestão de Atividades Acadêmicas utilizado pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

(SIGAA) e/ou grupo do *WhatsApp* da disciplina. O Quadro 8 contém o nome e o objetivo das atividades<sup>15</sup> implementadas.

---

<sup>15</sup> Com o intuito dar destaque às atividades ao longo do texto, foram utilizadas letras maiúsculas no início de cada palavra.

Quadro 8 – Descrição dos objetivos das atividades implementadas

ATIVIDADE	OBJETIVO(S)
<b>Discutindo Sobre o Cubo</b>	Definir e desenhar um cubo e descrever os conteúdos do Ensino Médio que podem ser explorados a partir deste sólido.
<b>Cortando o Cubo</b>	Traçar a seção de corte do cubo a partir dos pontos indicados.
<b>Analizando As Justificativas</b>	Analizar as respostas em uma atividade envolvendo seção em um cubo.
<b>Pilha De Cubos</b>	Representar as vistas frontal, lateral e superior de uma pilha de cubos por meio de figuras e com o aplicativo GeoGebra 3D.
<b>Analizando As Representações Das Vistas</b>	Analizar as representações das vistas em uma atividade envolvendo uma pilha de cubos.
<b>Olhando Diferentemente</b>	Associar as vistas superiores aos respectivos objetos.
<b>Tirando Fotos Interessantes</b>	Relacionar cada posição a sua respectiva fotografia.
<b>As Vistas De Uma Casa</b>	Determinar as representações das vistas a partir das posições indicadas.
<b>Comparando As Três Tarefas</b>	Estabelecer um comparativo entre as atividades Olhando Diferentemente, Tirando Fotos Interessantes e As Vistas De Uma Casa.
<b>Seções De Um Tetraedro Regular no GeoGebra 3D</b>	Explorar seções de corte em um tetraedro regular por meio do aplicativo GeoGebra 3D.
<b>Seções De Um Cubo no GeoGebra 3D</b>	Explorar seções de corte em um tetraedro regular por meio do aplicativo GeoGebra 3D.
<b>Analizando Os Conceitos De Cubo</b>	Analizar respostas sobre o conceito de cubo.
<b>As Sete Operações Mentais</b>	Identificar e justificar as operações mentais requeridas em uma atividade.
<b>Contando As Faces</b>	Determinar o número de faces de um poliedro formado a partir dos pontos médios das arestas de um prisma triangular.

Fonte: Elaboração da autora.

Além disso, eram propostas atividades voltadas para o desenvolvimento da visualização dos estudantes, os quais eram estimulados a representar e justificar suas respostas. As atividades eram feitas com papel, lápis e/ou aplicativo do GeoGebra 3D. Os instrumentos de

avaliação<sup>16</sup> da disciplina consistiram no Quadro Comparativo sobre Geometria e visualização, diário continuado da aula, mostra de materiais didáticos e uma prova<sup>17</sup> escrita.

A produção de dados foi realizada mediante diário de campo da pesquisadora, folha de atividades, diário continuado da aula produzido pelos discentes, capturas e gravação de tela de construções feitas no aplicativo do GeoGebra 3D, gravações em áudio e registros no Quadro Comparativo produzido pelos alunos.

A proposta adotada em todas as implementações era a de que os alunos fizessem as atividades de forma individual, mas eles eram livres para discutir com um outro colega (geralmente o que estava sentado ao seu lado). Depois de concluírem a atividade proposta abríamos para que toda a turma pudesse discutir as respostas apresentadas por cada um. As subseções a seguir apresentam<sup>18</sup> e descrevem detalhadamente as atividades implementadas.

### 3.6.1 Discutindo Sobre o Cubo

O objetivo desta atividade era definir e desenhar um cubo, além de descrever os conteúdos do Ensino Médio que poderiam ser explorados a partir deste sólido.

#### Discutindo Sobre o Cubo

O que é um cubo?

Desenhe um cubo.

Quais conteúdos do Ensino Médio podem ser explorados com o cubo?

### 3.6.2 Cortando o Cubo

Adaptada de Alonso e Salar (1992), esta atividade tinha como objetivo traçar as seções dos cubos a partir dos pontos indicados. Dividida em quatro etapas, cada uma composta por ilustrações de cubos e um determinado número de pontos indicados.

Cada cubo na primeira etapa tinha quatro pontos indicados. Na segunda e terceira etapas o número de pontos em cada cubo passou a ser três e dois, respectivamente. Ou seja, à medida que o sujeito avançava na atividade, o número de pontos indicados diminuía.

<sup>16</sup> Os estudantes também realizaram atividades em uma escola escolhida por eles. Embora também fizesse parte da avaliação da disciplina, não será considerado como dado de pesquisa.

<sup>17</sup> A prova escrita era composta pelas atividades Analisando Os Conceitos De Cubo, As Sete Operações Mentais e Contando As Faces. Essas três questões também foram consideradas como atividades implementadas e dados de pesquisa para a análise.

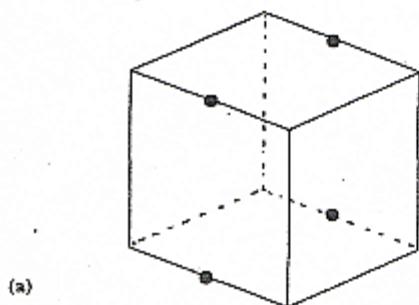
<sup>18</sup> Em virtude do tamanho das atividades, não foi possível gerar uma única imagem que comportasse todas as informações que constavam nas mesmas. Os enunciados ficariam em tamanho muito reduzido e isto comprometeria a leitura. Desse modo, optamos por apresentá-las em uma fonte textual diferente da utilizada para escrever este trabalho.

No final da terceira etapa, o discente deveria analisar os casos em que teve mais dificuldade em realizar o traçado da seção de corte e, posteriormente, justificar o porquê de em alguns casos haver apenas uma única possibilidade de seção de corte e qual o número mínimo de pontos necessários para que isto ocorra.

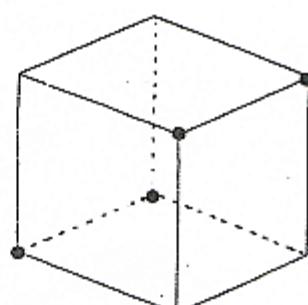
Na quarta etapa havia um trio de cubos com três pontos indicados em cada um deles, mas o grau de dificuldade para encontrar as seções era maior devido à posição dos pontos.

### Cortando o Cubo

1. Trace a figura que é obtida quando cortamos cada cubo abaixo pelos pontos indicados e, se for o caso, invisíveis.

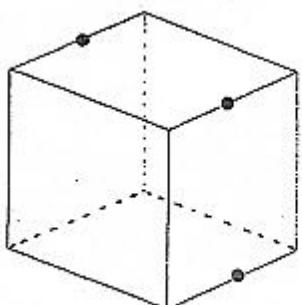


(a)

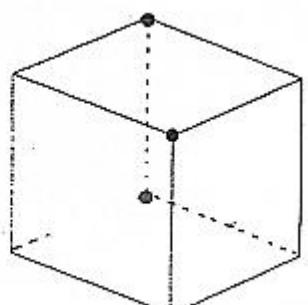


(b)

2. E agora, que figura você traçaria em cada caso?

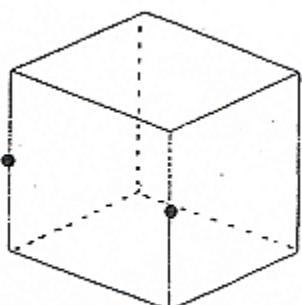


(a)

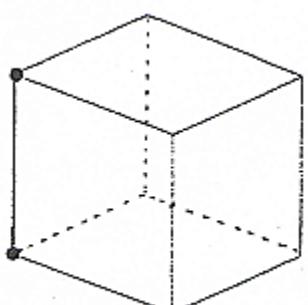


(b)

3. Qual seria a figura em cada cubo abaixo?



(a)

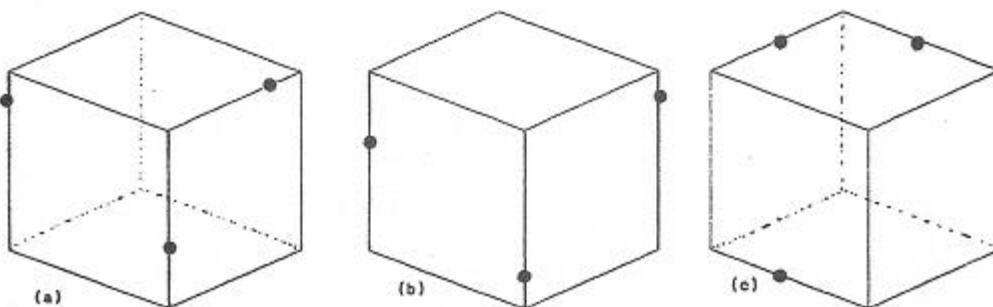


(b)

A partir do que você realizou nas atividades anteriores o que você observa? Por exemplo, em qual(is) situação(ões) você ficou com mais dificuldade para identificar a figura que seria a traçada? Por quê?

Você deve ter percebido que em alguns casos só houve uma possibilidade. Qual seria a razão para este fato? Qual o número mínimo de pontos necessários para que você tenha segurança de que a seção de corte será apenas uma?

Agora, como ficaria o corte em cada figura abaixo?



### 3.6.3 Analisando As Justificativas

Esta atividade (Figura 8), adaptada de Bairral e Gimenez (2012), tinha como proposta analisar as respostas de dois licenciandos, Simone e Leo, em uma atividade envolvendo seções em um cubo. As justificativas eram em torno de ser possível ou não obter um quadrado como seção de um cubo. Neste sentido, os alunos deveriam analisar as duas respostas e escrever um texto para motivar e estimular Simone e Leo a aprimorarem suas justificativas.

Figura 9 – Atividade Analisando As Justificativas

É possível obter um quadrado como seção em um cubo? Justifique.

Eis a resposta de dois Licenciandos:

**Aluna Simone:** "Não é possível obter um quadrado, pois precisaríamos calcular duas diagonais opostas no cubo e assim perceberíamos que os valores das diagonais (que estivessem fazendo função de aresta) não dariam iguais aos valores das arestas que estivessem com estas, formando o quadrado. O plano deve ser colocado em qualquer parte do cubo, desde que o lado do retângulo surja a partir de dois pontos feitos em arestas adjacentes (vizinhas) e esses pontos sirvam como vértices do retângulo, a partir daí parte de cada vértice duas arestas, uma horizontal e a outra vertical, sendo ligada ao ponto oposto formando o retângulo. Perímetro máximo =  $2a\sqrt{2} + 2a = 2a(\sqrt{2}+1)$ ".

**Aluno Leo:** "Sim, podemos obter um quadrado através do corte de tamanho igual a aresta do cubo. Qualquer plano perpendicular a base do cubo e paralelo ao primeiro e diferente do tamanho da aresta, formará um retângulo. A seção que contém a diagonal do cubo será a de maior perímetro, pois a base do retângulo é formada pela diagonal da face do cubo".

Que resposta você daria à Simone e ao Leo de modo a motivá-los a continuar aprimorando suas ideias e justificativa?

Fonte: Adaptação de Bairral e Gimenez (2012).

### **3.6.4 Pilha De Cubos**

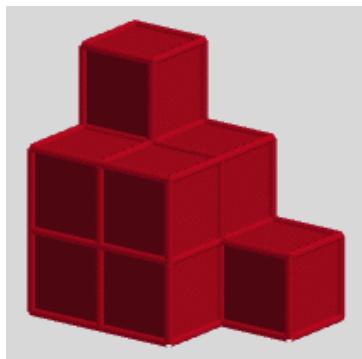
Composta por três itens, o intuito desta atividade era representar as vistas frontal, laterais e superior de uma pilha de cubos. No primeiro item havia duas figuras, intituladas de Pilha 1 e Pilha 2, e a partir delas se deveria desenhar suas respectivas vistas.

No segundo item, as respostas do item anterior deveriam ser verificadas a partir das construções da Pilha 1 e da Pilha 2 no GeoGebra 3D, destacando também as contribuições deste aplicativo para a atividade.

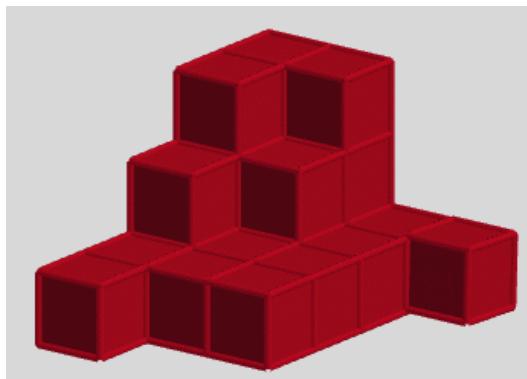
No terceiro e último item, os estudantes deveriam dar ideias de outras atividades que explorassem pilha de cubos e estimulassem a visualização.

### Pilha de Cubos

a) Desenhe as vistas (frontal, superior e laterais) das pilhas de cubos a seguir:



Pilha 1	Vista frontal	Vista superior
	Vista lateral esquerda	Vista lateral direita



Pilha 2	Vista frontal	Vista superior
	Vista lateral esquerda	Vista lateral direita

b) Utilizando o GeoGebra, faça a construção das pilhas de cubos anteriores e verifique suas respostas. Qual(is) a(s) contribuição(ões) do aplicativo para este tipo de atividade?

c) Vimos que as pilhas de cubos podem ser utilizadas para trabalhar o conceito de vistas e suas representações. Considerando que a visualização precisa ser estimulada, que outro tipo de atividade pode ser desenvolvida com pilhas de cubos?

### 3.6.5 Analisando As Representações Das Vistas

Nesta atividade, deveria ser feita uma análise das respostas de dois estudantes para uma atividade envolvendo as representações das vistas de uma pilha de cubos. De maneira similar à atividade Analisando As Justificativas, deveria ser escrito um texto para motivar e estimular os dois alunos a aprimorarem suas respostas.

#### Analizando As Representações Das Vistas

Observe a seguir uma atividade retirada de um livro<sup>19</sup> do 6º ano do Ensino Fundamental.

**21.** Veja uma pilha composta de 26 cubos.

Resposta no final do livro.

vista superior

vista lateral esquerda

vista frontal

vista lateral direita

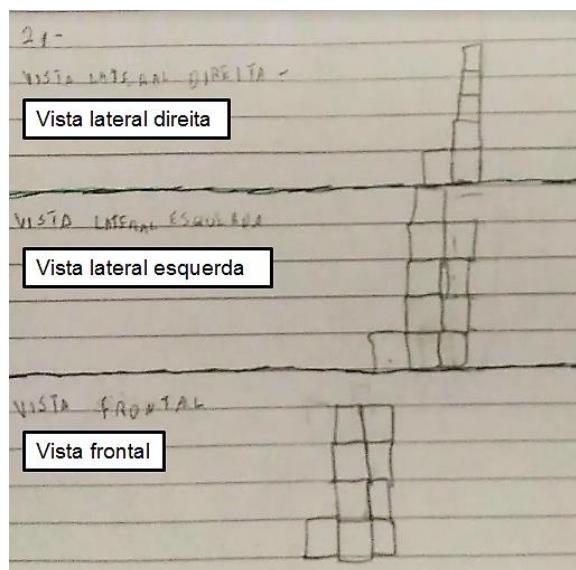
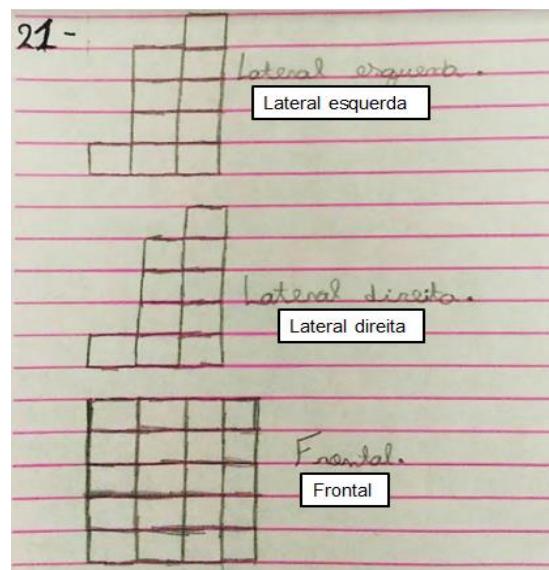
Observe a vista superior dessa pilha e deseñe cada uma das outras vistas indicadas.

Ilustrações: Acervo da editora

vista superior

A seguir, estão ilustrados dois exemplos de respostas de alunos para esta mesma atividade. Faça uma análise das respostas de cada estudante. O que você diria a cada um deles como forma de aprimorar suas ideias?

<sup>19</sup> SOUZA, J. R.; PATARO, P. R. M. **Vontade de saber matemática.** 6º ano. 3ª ed. São Paulo: FTD, 2015.

**Aluno 1****Aluno 2**

### 3.6.6 Olhando Diferentemente

Adaptada de Bairral e Gimenez (2012), o objetivo desta atividade era associar as vistas superiores aos respectivos objetos. Com um total de dez ilustrações de vistas superiores, o estudante deveria responder se foi fácil ou difícil realizar a atividade, além de justificar que tipos de estratégias foram utilizadas por ele para fazer estas associações.

#### Olhando Diferentemente

Você sabe que podemos olhar um objeto de frente (vista frontal), de lado (vista lateral), de cima (vista superior), etc. Associe cada vista superior com o respectivo objeto.

Vistas Superiores	Objetos
1	( ) 2
3	( ) 4
5	( ) 6
7	( ) 8
9	( ) 10

Para você, foi fácil ou difícil realizar esta tarefa? Por quê? Como você fez para associar cada figura à sua vista superior?

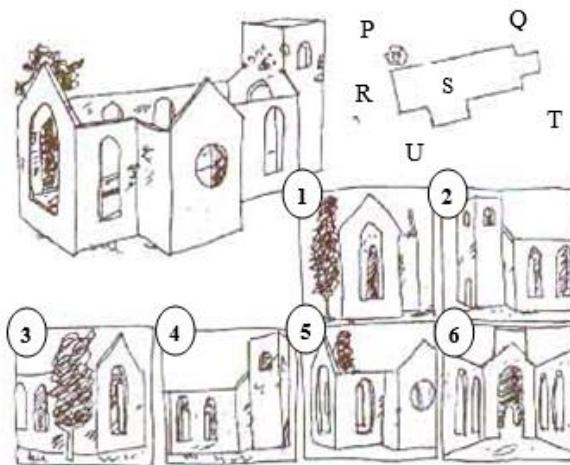
### **3.6.7 Tirando Fotos Interessantes**

Esta atividade, adaptada de Bairral e Gimenez (2012), envolvia relacionar cada uma das seis posições de uma igreja a sua respectiva fotografia, fazendo isso por meio do preenchimento de uma tabela.

Assim como na atividade Olhando Diferentemente, o estudante deveria responder se foi fácil ou difícil a realização da atividade, além de justificar as estratégias utilizadas por ele para completar a tabela.

### Tirando Fotos Interessantes

Um explorador arqueológico realizou os seguintes desenhos de uma igreja em ruínas nas diferentes posições (P, Q, R, S, T e U) conforme o croqui apresentado à direita na figura a seguir.



Complete a tabela, identificando a posição na qual cada foto foi tirada pelo arqueólogo.

Posição	P	Q	R	S	T	U
Desenho						

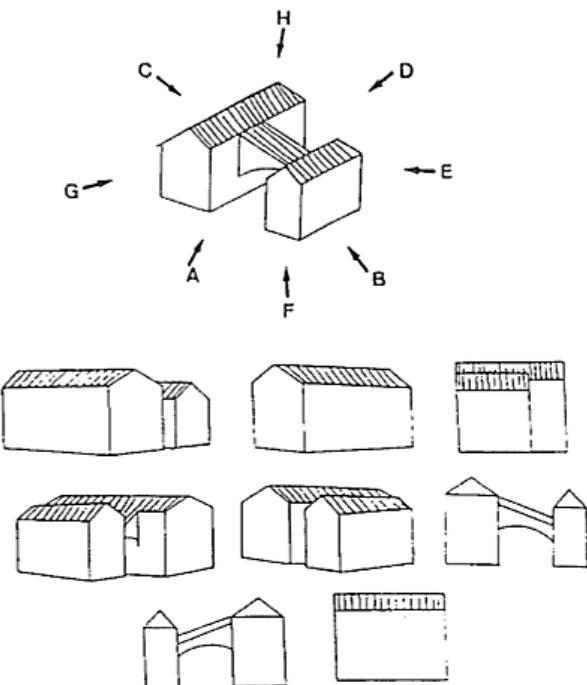
Para você, foi fácil ou difícil realizar esta atividade? Por quê? Escreva como você fez para completar a tabela.

### 3.6.8 As Vistas De Uma Casa

Adaptada de Gorgorió *et al.* (2000), o propósito da atividade era determinar as representações das vistas de uma casa a partir das posições indicadas. Após fazer as associações, o estudante também deveria avaliar se considerou a atividade fácil ou difícil, além de justificar o raciocínio utilizado por ele para sua realização.

### As vistas de uma casa

Nesta situação, determine os pontos de vista que correspondem a cada posição.



Para você, foi fácil ou difícil realizar esta atividade? Por quê? Escreva o que você fez para determinar cada vista.

### 3.6.9 Comparando As Três Tarefas

Adaptada de Bairral e Gimenez (2012), o objetivo da atividade era estabelecer um comparativo entre as atividades Olhando Diferentemente, Tirando Fotos Interessantes e As Vistas De Uma Casa. O discente deveria responder qual das três ele considerou a mais fácil de realizar, além de analisar se utilizar este tipo de atividade nas aulas de Matemática era importante e por quê.

### Comparando as três tarefas

Das três tarefas, qual foi a mais fácil? Por quê? Dê um exemplo de algo que você aprendeu em cada uma das tarefas. Você acha realmente importante utilizar este tipo de atividade nas aulas de Matemática? Por quê?

### 3.6.10 Seções De Um Tetraedro Regular no GeoGebra 3D

O intuito desta atividade era explorar seções de corte em um tetraedro regular por meio do aplicativo GeoGebra 3D. Primeiramente, era necessário realizar a construção do sólido no aplicativo, movimentá-la livremente de modo a determinar possíveis seções de corte e escrever pelo menos duas observações em relação às seções. Em seguida, o estudante deveria determinar o número máximo de lados que a figura gerada pela seção teria e descrever suas estratégias para chegar a tal conclusão. Para finalizar, o aluno deveria analisar e justificar se era possível ou não a existência de seções sendo polígonos regulares.

#### **Seções de um tetraedro regular no GeoGebra 3D**

Utilizando o GeoGebra 3D, construa um tetraedro regular. Em seguida, responda:

- a) Determine algumas possíveis seções de corte, movimente a construção livremente e escreva pelo menos duas observações em relação às seções.
  
- b) Qual o número máximo de lados da figura gerada pela seção de corte? Descreva a(s) estratégia(s) para encontrar sua resposta.
  
- c) É possível obtermos seções sendo polígonos regulares? Justifique.

### 3.6.11 Seções De Um Cubo no GeoGebra 3D

O intuito desta atividade era explorar seções de corte em um cubo no aplicativo GeoGebra 3D. Essa atividade tinha os mesmos itens da atividade Seções De Um Tetraedro Regular no GeoGebra 3D para serem respondidos.

#### **Seções de um cubo no GeoGebra 3D**

Construa um cubo no GeoGebra 3D. Em seguida, responda:

- a) Determine algumas possíveis seções de corte, movimente a construção livremente e escreva pelo menos duas observações em relação às seções.

b) Qual o número máximo de lados da figura gerada pela seção de corte? Descreva a(s) estratégia(s) para encontrar sua resposta.

c) É possível obtermos seções sendo polígonos regulares? Justifique.

### 3.6.12 Analisando Os Conceitos De Cubo

A atividade consistia em analisar respostas de três pessoas sobre o conceito de cubo. No entanto, apenas uma resposta deveria ser escolhida para tecer comentários sobre a definição apresentada, elaborando uma pergunta a ser feita para tal pessoa e, em seguida, responder à pergunta que foi elaborada.

#### Analizando Os Conceitos De Cubo

A seguir você vai analisar a resposta de três alunos sobre o conceito de cubo:

Graduando	Resposta
Anderson	Objeto com 6 faces em 3D.
Rodrigo	É um sólido geométrico formado por 6 faces, 8 vértices, 12 arestas cujos lados e ângulos são iguais (é regular).
Thiago	É um hexaedro.

- Escolha um aluno e comente sobre o conceito apresentado.
- Elabore(m) uma pergunta (ou comentário) que você devolverá ao aluno sobre o raciocínio dele.
- Responda a sua pergunta.

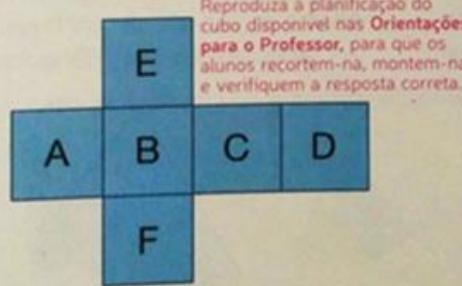
### 3.6.13 As Sete Operações Mentais

Kaleff (2016) afirmou a existência de sete operações mentais envolvendo a visualização em Geometria. Neste sentido, a ideia central desta atividade era identificar e justificar as operações mentais requeridas em uma atividade sobre planificação de um cubo.

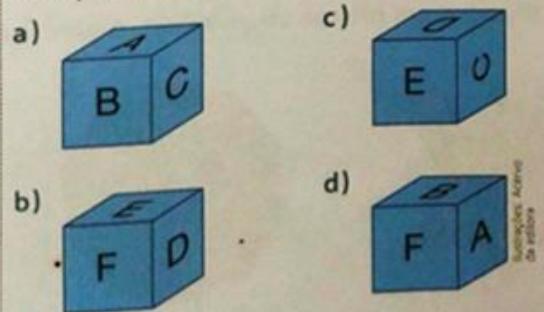
## As Sete Operações Mentais

Observe a atividade ilustrada a seguir:

A figura a seguir é uma planificação utilizada para construir um cubo.



Dentre os cubos a seguir, qual foi construído a partir da planificação apresentada?



De acordo com Kaleff (2016), existem sete operações mentais envolvidas na visualização em Geometria. Baseando-se na autora, que operações mentais são requeridas nesta atividade? Apresente justificativa(s) para a(s) habilidade(s) escolhida(s).

### 3.6.14 Contando As Faces

Determinar o número de faces de um poliedro formado a partir dos pontos médios das arestas de um prisma triangular. No primeiro item os discentes deveriam realizar a construção com papel e lápis, utilizando a malha isométrica disponibilizada e justificar sua resposta. No segundo item, a construção deveria ser feita e justificada com o aplicativo do GeoGebra 3D. No terceiro e último item o aluno deveria escolher um entre os três textos sugeridos para escrever, com base nas ideias do autor escolhido, sobre as contribuições deste tipo de atividade.

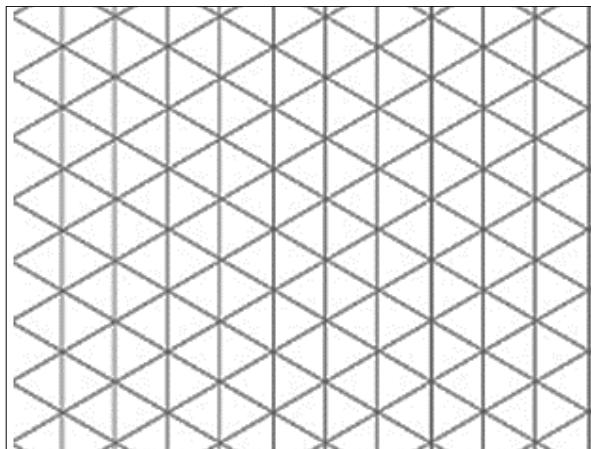
### Contando As Faces

Quantas faces tem um poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um prisma triangular?

- Responda e justifique, sem o uso do GeoGebra.
- Agora, construa, responda e justifique com o GeoGebra.

*Obs. Depois lembre-se de enviar para a Thaís o arquivo da construção feita.*

- Escreva uma ideia de um dos textos para a qual este tipo de atividade contribui.



### 3.7 Instrumentos de avaliação utilizados

Os instrumentos de avaliação utilizados no decorrer da disciplina foram: Quadro Comparativo, diário continuado de uma aula, mostra de materiais didáticos, prova escrita e as construções no aplicativo GeoGebra 3D. Dentre estes instrumentos, o diário continuado e a mostra de materiais didáticos não foram incluídos na análise de dados.

#### 3.7.1 Quadro Comparativo

O Quadro Comparativo (Quadro 8) era um quadro no qual os estudantes deveriam preencher ao longo do semestre, tendo como proposta fazer com que os sujeitos fizessem a avaliação e a reflexão sobre a evolução de seu aprendizado e percepções acerca do que é visualização e o que é ensinar e aprender Geometria. Seus registros deveriam ser feitos em quatro versões, sendo que uma nova versão deveria ser gerada em um intervalo de cerca de um mês, podendo ser entregue por e-mail ou pelo grupo do *WhatsApp*.

Quadro 8 – Quadro Comparativo

	Versão 1	Versão 2	Suas observações entre a versão 1 e 2	Versão 3	Versão 4
<b>Conceito de Geometria</b>					
<b>É importante ensinar/aprender Geometria? Por quê?</b>					

<b>Como foi sua experiência com Geometria e ensino de Geometria?</b>					
<b>O que é visualização?</b>					
<b>Qual a importância da visualização?</b>					

Fonte: Elaboração da autora.

Na primeira versão os discentes deveriam apresentar uma ideia inicial acerca do conceito de Geometria, se o seu ensino e aprendizagem era relevante e por quê. Eles também deveriam fazer um relato sobre suas experiências escolares anteriores com esta área, além de definir visualização e destacar sua relevância para o aprendizado geométrico.

Depois de finalizar a segunda versão, o aluno deveria registrar observações a fim de fazer um comparativo entre a Versão 1 e a Versão 2, destacando algum elemento que julgasse relevante. A ideia era estimular o discente a avaliar sua evolução de uma versão para a outra, considerando seu progresso em relação ao desenvolvimento dos conceitos explorados.

Diferentemente das versões anteriores, a terceira versão deveria conter alguma inspiração de leitura discutida em aula. Ele era para ser feito na quarta versão, com maior aprofundamento de leituras, sendo também solicitada uma apresentação da mesma em formato livre. Por fim, foi realizada uma aula para que os alunos fizessem apresentações, com formato livre, sobre as observações para cada versão e seu desenvolvimento nesses conceitos, podendo incluir algum momento e/ou vivência da disciplina que considerou esclarecedor.

### 3.7.2 Diário continuado

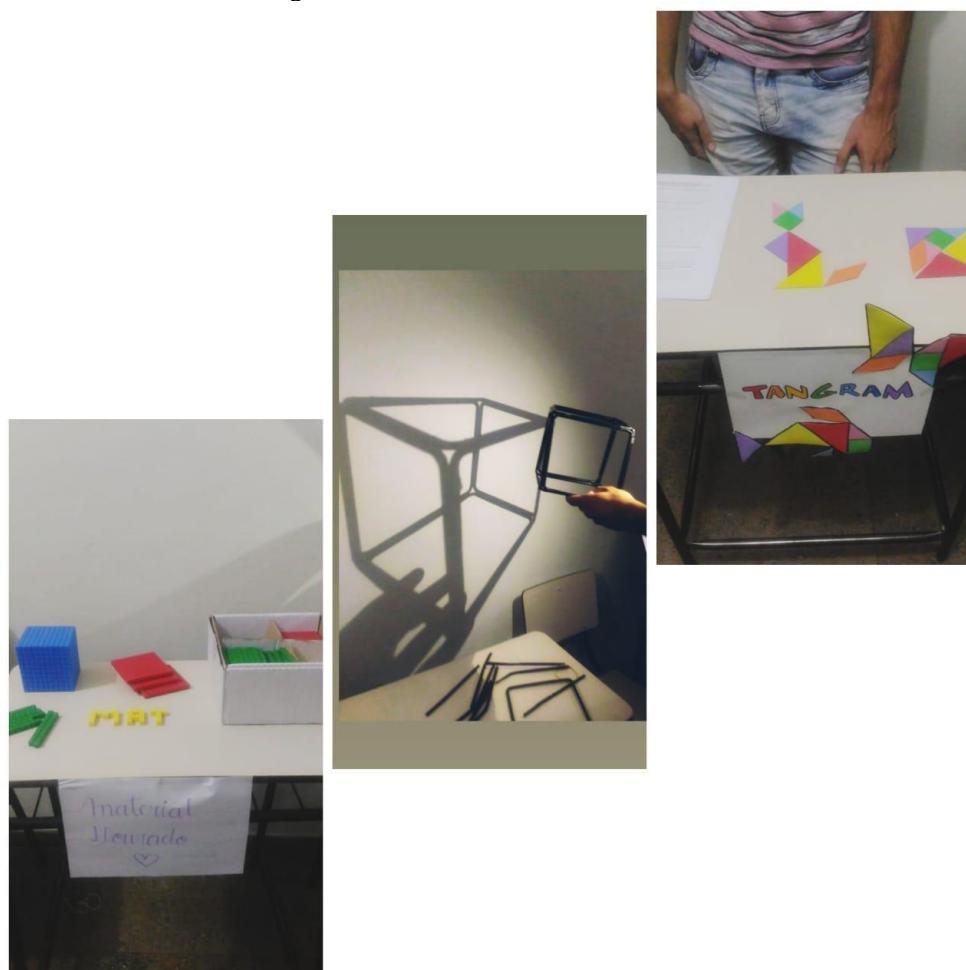
O segundo instrumento de avaliação utilizado foi o diário continuado de uma aula. Elaborado por um aluno a cada encontro, o diário era um relato que descrevia suas observações em relação ao que foi desenvolvido naquela aula, destacando suas percepções, dificuldades, aspectos julgados como interessantes etc.

No início de toda aula havia uma leitura coletiva do diário, analisando elementos que poderiam evidenciar alguma característica própria do discente, se a turma julgava que o texto elucidava bem os acontecimentos ocorridos sobre a aula descrita ou se algum aspecto foi esquecido e precisava ser acrescentado.

### 3.7.3 Mostra de materiais didáticos

A mostra de materiais didáticos (Figura 10) ocorreu no corredor do Instituto de Educação da UFRRJ. Os discentes da turma foram os responsáveis pela seleção e organização dos materiais, que eram voltados ao ensino de Geometria Espacial, com foco na visualização.

Figura 10 – Mostra de materiais didáticos



Fonte: Dados de pesquisa.

### 3.7.4 Prova escrita

O último instrumento de avaliação utilizado foi a prova escrita. Feita de forma individual, ela continha uma questão em que uma construção deveria ser feita e justificada por meio do uso de papel, lápis e malha isométrica assim como também deveria ser construída e justificada no aplicativo do GeoGebra 3D. Outras questões também incluíam a análise de respostas de alunos a uma atividade, além de leituras discutidas ao longo do semestre letivo.

### **3.7.5 Construções no aplicativo GeoGebra 3D**

Em algumas atividades implementadas, era necessário que os alunos realizassem construções no aplicativo GeoGebra 3D. A ideia era validar conjecturas feitas anteriormente ou que o aplicativo os auxiliasse na resolução das atividades propostas. Foi solicitado aos discentes a captura e/ou a gravação da tela para analisar posteriormente as construções, identificando o caminho percorrido por cada discente para realizá-las, bem como as dificuldades encontradas por eles.

## CAPÍTULO IV: ANÁLISE DO QUE FOI VISUALIZADO

O quarto capítulo apresenta uma análise da trajetória de duas licenciandas ao longo das implementações ocorridas. Escolhemos os trabalhos das alunas Jane e Karina<sup>20</sup> pois ambas estavam presentes na maioria das implementações. Analisamos o processo de visualização, as estratégias e as dificuldades durante a realização das atividades.

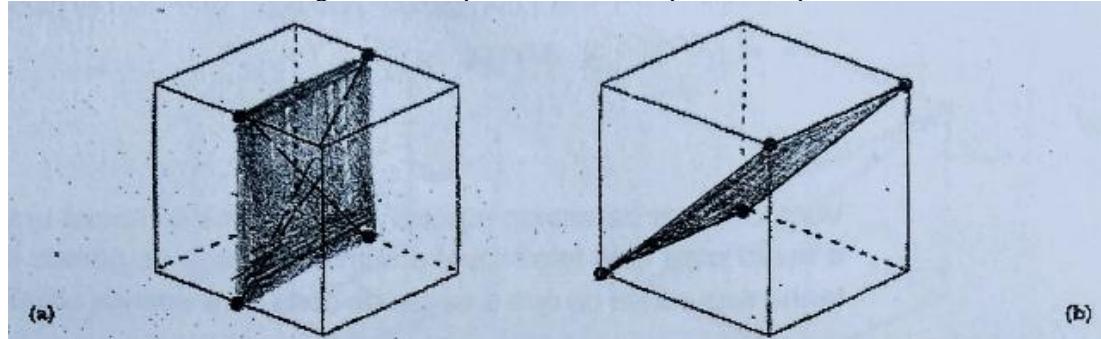
### 4.1 Cortando o Cubo

Atividade composta por quatro etapas, cada uma contendo ilustrações de cubos e um determinado número de pontos indicados. Esta foi a única atividade na qual a aluna Jane não participou e, portanto, serão analisadas apenas as respostas de Karina.

A partir de análise feita na monografia da pesquisadora (SETTIMY, 2014) foi observado que algumas respostas são recorrentes nesta atividade: os participantes apenas ligaram os pontos indicados, sem se atentar aos “pontos escondidos” existentes. Confira a seguir as respostas de Karina em cada uma das quatro etapas de Cortando o Cubo.

Na primeira etapa, cada cubo tinha quatro pontos indicados. No primeiro caso, a aluna Karina encontrou as figuras que correspondiam às seções (Figura 11). Também foi possível observar que a discente traçou no primeiro cubo dois segmentos de reta que representavam as diagonais da seção.

Figura 11 – Resposta de Karina na primeira etapa

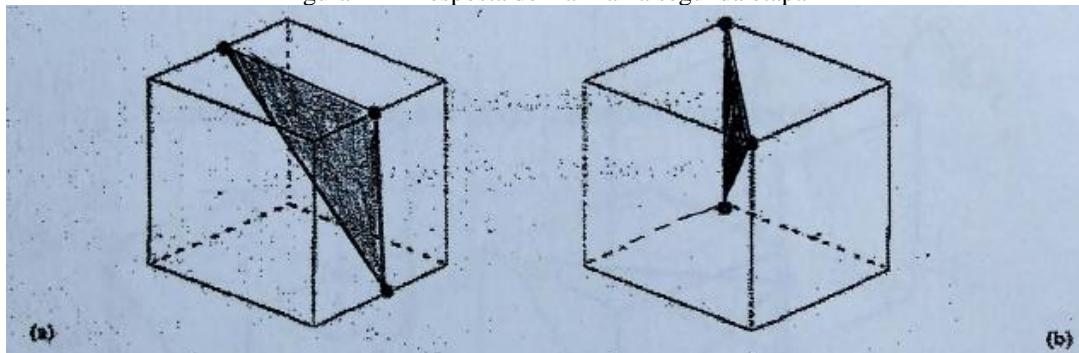


Fonte: Dados de pesquisa.

Na segunda e terceira etapas o número de pontos indicados em cada cubo passou a ser três e dois, respectivamente. Ou seja, à medida que o sujeito avançava na atividade, o número de pontos indicados diminuía, aumentando o nível de dificuldade para traçar as seções. Na etapa em que havia três pontos indicados em cada cubo, Karina apenas ligou os pontos (Figura 12).

<sup>20</sup> Para preservar a identidade das estudantes foram atribuídos nomes fictícios.

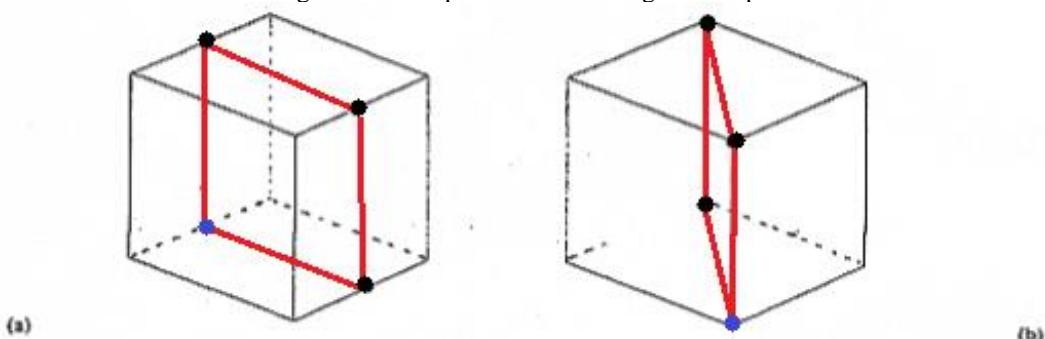
Figura 12 – Resposta de Karina na segunda etapa



Fonte: Dados de pesquisa.

Esse tipo de resposta no qual o estudante liga os pontos indicados e não percebe que há um “ponto escondido” já foi observado anteriormente em Settimy (2014), mostrando que os sujeitos tiveram dificuldades em representar as seções planas a partir dos pontos ilustrados no cubo. De acordo com a Figura 13, estas são as respostas corretas da segunda etapa da atividade:

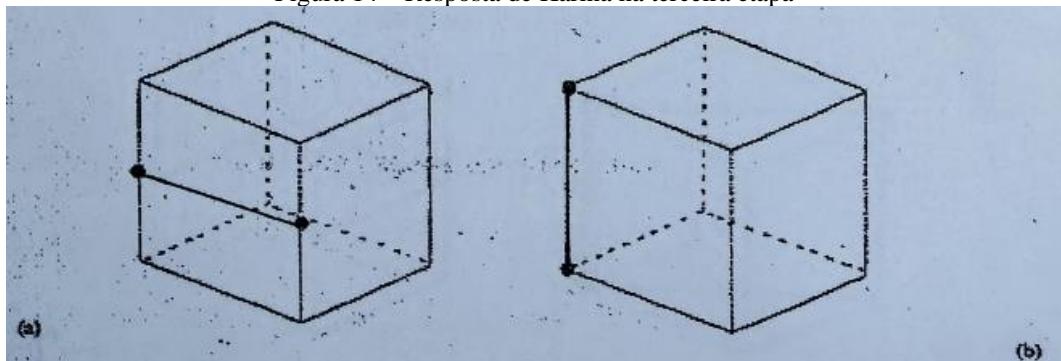
Figura 13 – Resposta correta da segunda etapa



Fonte: Elaboração da autora.

Na terceira etapa da atividade a ideia de somente ligar os pontos continuou. Como havia dois pontos indicados em cada cubo, Karina traçou dois segmentos de reta (Figura 14). Em Settimy (2014) este caso foi considerado como sendo um dos mais difíceis de representar a seção de corte justamente porque o número de pontos foi reduzido. Nesta etapa da atividade é requerida uma habilidade de visualização mais aprimorada.

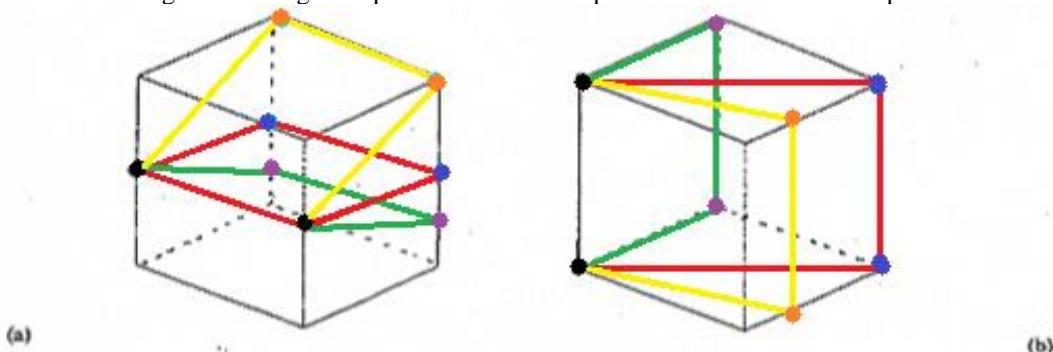
Figura 14 – Resposta de Karina na terceira etapa



Fonte: Dados de pesquisa.

Nesta terceira etapa da atividade existiam infinitas possibilidades de seções, sendo que alguns exemplos de resposta estão ilustrados a seguir. Acreditamos que como o nível de complexidade aumentou, muitos estudantes provavelmente não identificaram a infinidade de seções de corte que poderiam ser representadas antes sequer de representar, caracterizando uma dificuldade em Reconhecer e Representar Figuras Planas e Espaciais (SETTIMY; BAIRRAL, 2020).

Figura 15 – Algumas possibilidades de resposta correta da terceira etapa



Fonte: Elaboração da autora.

No final da terceira etapa, os estudantes deveriam analisar os casos em que apresentaram mais dificuldade em realizar o traçado da seção de corte e, posteriormente, justificar por que em alguns casos havia apenas uma única possibilidade de seção de corte e qual era o número mínimo de pontos necessários para que isto ocorresse.

A aluna Karina descreveu a situação na qual teve mais dificuldade em traçar a seção sem mencionar suas observações sobre as demais etapas da atividade. Também não apresentou nenhuma justificativa para o fato de terem casos com apenas uma única seção possível. Conforme relatado pela discente, sua dificuldade foi em traçar as seções dos cubos que tinham dois pontos indicados e utilizou como justificativa o fato de que só havia dois pontos indicados e, portanto, as seções seriam segmentos de reta.

Desse modo, Karina relatou o caso em que teve mais dificuldade, mas não apresentou o porquê, ou seja, sua justificativa se tratou de uma conclusão de que o segmento que passava por dois pontos era uma reta, sem explicar os motivos pelos quais considerou este caso como mais difícil (Figura 16).

Settimy e Bairral (2020) identificaram a dificuldade que os estudantes possuem em expressar por meio da escrita suas ideias sobre conceitos matemáticos. Por isso é tão importante promover atividades que incentivem a justificativa do estudante, abrindo caminho para o

registro da opinião e reflexão a respeito da resposta. Sem essa preocupação, não seria possível identificar em qual momento da atividade a estudante teve mais dificuldade.

Figura 16 – Justificativas de Karina na atividade Cortando o Cubo

A partir do que você realizou nas atividades anteriores o que você observa? Por exemplo, em qual(is) situação(ões) você ficou com mais dificuldade para identificar a figura que seria a traçada? Por quê?

*Quando tem apenas dois pontos, para o segmento que passa por 2 pontos é uma reta.*

Você deve ter percebido que em alguns casos só houve uma possibilidade. Qual seria a razão para este fato? Qual o número mínimo de pontos necessários para que você tenha segurança de que a seção de corte será apenas uma?

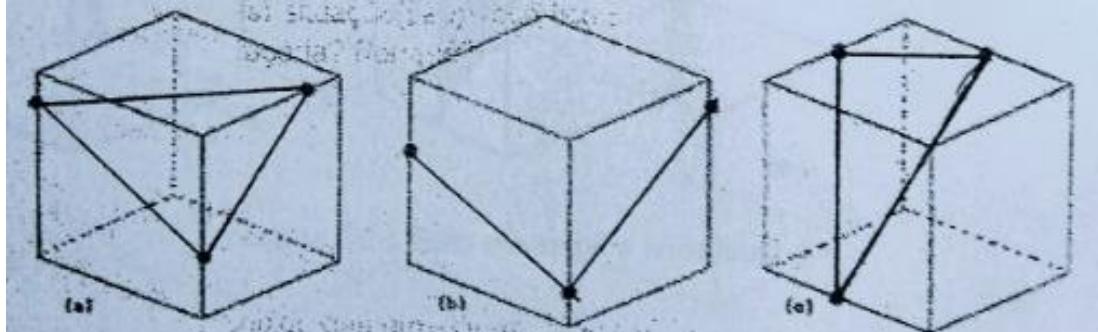
Fonte: Dados de pesquisa.

Na quarta etapa, apesar dos cubos terem três pontos indicados, o grau de dificuldade para encontrar as seções era maior devido à posição dos pontos na ilustração. A realização desta etapa ocorreu após questionar os alunos da turma sobre o que era preciso para formar as seções dos cubos, isto é, o número mínimo de pontos necessários para ter apenas uma única possibilidade de seção.

A maioria dos discentes alegou que deveriam existir, no mínimo, três pontos. Eles mencionaram que três pontos determinam um plano. Cabe ressaltar que esta ideia surgiu somente após os questionamentos levantados pela pesquisadora durante a aula. Ao desenvolver uma prática que promova o diálogo e interação entre os sujeitos, foi possível identificar que estes estudantes tinham conhecimento da propriedade, mas não necessariamente sabiam aplicá-la em uma atividade.

Após questioná-los e constatar que a grande maioria dos alunos sabia qual era o número mínimo de pontos para determinar um plano, muitos apresentaram respostas equivocadas. Entre esses casos estava Karina, que ligou os pontos indicados em cada cubo (Figura 17) sem refletir sobre o que era preciso para formar uma seção plana e, inclusive, que poderia haver “pontos escondidos”.

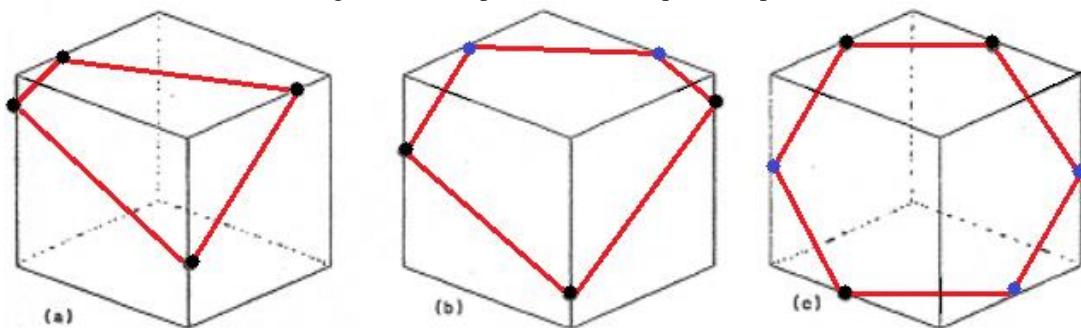
Figura 17 – Resposta de Karina na quarta etapa



Fonte: Dados de pesquisa.

As respostas corretas para esta etapa estão ilustradas na Figura 18.

Figura 18 – Resposta correta da quarta etapa



Fonte: Elaboração da autora.

Apesar da atividade aumentar gradativamente o nível de dificuldade no traçado das seções, partindo de situações mais simples (com os quatro pontos visíveis) às mais complexas (com apenas dois), os pontos foram ligados deliberadamente pelos participantes (BAIRRAL; SETTIMY; HONORATO, 2013). Quando os cubos tinham dois pontos visíveis, muitos traçaram apenas um segmento. Também não perceberam que, dependendo da posição dos pontos, existia a possibilidade de mais de um plano de corte.

A partir desta atividade, concluímos que compreender uma propriedade geométrica não significa necessariamente compreender a sua representação, pois podem surgir dificuldades inerentes à visualização (BAIRRAL; SETTIMY; HONORATO, 2013). Por isso, destacamos a importância da tarefa (ou da dinâmica de aula) promover a interação entre os aspectos conceitual e figural (MARIOTTI; FISCHBEIN, 1997).

A visualização é uma habilidade individual que considera a construção e a manipulação de imagens mentais de objetos geométricos, evidenciando seus conceitos intrínsecos. Além disso, também foi observado que o diálogo com os discentes sobre suas ideias em relação aos conceitos e propriedades em estudo foi importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

O que o estudante entende sobre cubo e suas propriedades assim como a sua compreensão acerca de seções planas deste objeto, por exemplo, vão influenciar no seu processo de visualização. Isso significa que se aluno não tem o conhecimento das propriedades geométricas nem sabe aplicá-las de forma correta, isso vai prejudicar os processos de visualização e, consequentemente, de representação dos objetos geométricos bidimensionais e tridimensionais.

#### 4.2 Seções De Um Cubo no GeoGebra 3D

Atividade com objetivo de explorar as seções de corte em um cubo por meio do aplicativo GeoGebra 3D. Em seu primeiro item, o aluno deveria construir o sólido no aplicativo, movimentá-lo livremente e determinar as possíveis seções de corte, escrevendo pelo menos duas observações em relação às seções. No caso do cubo, as possibilidades de seção que poderiam ser formadas eram polígonos de três, quatro, cinco ou seis lados.

Uma possibilidade de construção para esta atividade seria utilizar a ferramenta “Cubo” e selecionar dois pontos quaisquer. A criação das seções deveria ser feita inicialmente por meio da ferramenta “Ponto”, determinando a quantidade de pontos a serem criados e definir suas respectivas posições no cubo previamente construído.

Feito isso, o próximo passo seria selecionar a ferramenta “Plano por três pontos”, clicar em três pontos da construção para gerar o plano e, consequentemente, gerar a seção. Um passo opcional seria utilizar a ferramenta “Segmento” a fim de construir os segmentos da figura gerada pela seção. As possibilidades de seção para o cubo foram ilustradas na atividade Cortando o Cubo apresentada anteriormente.

Jane conseguiu identificar todas as possibilidades de seções para o cubo (Figura 19) e destacou que os quadrados são obtidos por meio de cortes paralelos a uma das faces, mas não escreveu observações a respeito das demais seções possíveis. É importante destacar que o GeoGebra por si só não vai resolver as atividades que são propostas ao estudante, mas ele deve ser sim um aliado no desenvolvimento da visualização e do aprendizado geométrico.

Figura 19 – Resposta de Jane no primeiro item da atividade Seções De Um Cubo no GeoGebra 3D

a) Determine algumas possíveis seções de corte, movimente a construção livremente e escreva pelo menos duas observações em relação às seções.

Quadrados, Retângulos, Pentagona, Hexagona, Trapézio  
- quadrados quando as seções não paralelas a uma das faces

Fonte: Dados de pesquisa.

A aluna Karina escreveu que as seções do cubo eram as mesmas do tetraedro e que elas eram obtidas por meio de cortes paralelos às bases ou não, sendo que estes cortes iriam resultar em “figuras quadriláteras” (Figura 20). Com isso, foi possível concluir que a estudante conseguiu identificar apenas uma possibilidade de seção.

Figura 20 – Resposta de Karina no primeiro item da atividade Seções De Um Cubo no GeoGebra 3D

- a) Determine algumas possíveis seções de corte, movimente a construção livremente e escreva pelo menos duas observações em relação às seções.

*Mesma coisa do tetraedro, paralelos as bases, diagonais e cortes de uma base para a base adjacente que qual mente forma figuras quadriláteras.*

Fonte: Dados de pesquisa.

No segundo item desta atividade deveria ser respondido o número máximo de lados da figura gerada pela seção de corte, descrevendo as estratégias adotadas para chegar a tal conclusão. A partir das possibilidades existentes de seções em um cubo, temos que esse número máximo seria igual a seis.

Jane identificou corretamente o número máximo de lados da seção e escreveu que sua estratégia consistiu em traçar um plano a partir de três pontos, sendo que o primeiro ponto estava localizado em uma aresta qualquer, nomeada por ela de “aresta x”, o segundo ponto em uma aresta adjacente a aresta x e o terceiro ponto no vértice oposto e reverso ao vértice formado pelas arestas adjacentes (Figura 21). Observamos que Jane utilizou o termo “reverso” possivelmente no sentido de ressaltar que o terceiro vértice não pertencia ao mesmo plano que os outros dois vértices.

Figura 21 – Resposta de Jane no segundo item da atividade Seções De Um Cubo no GeoGebra 3D

- b) Qual o número máximo de lados da figura gerada pela seção de corte? Descreva a(s) estratégia(s) para encontrar sua resposta.

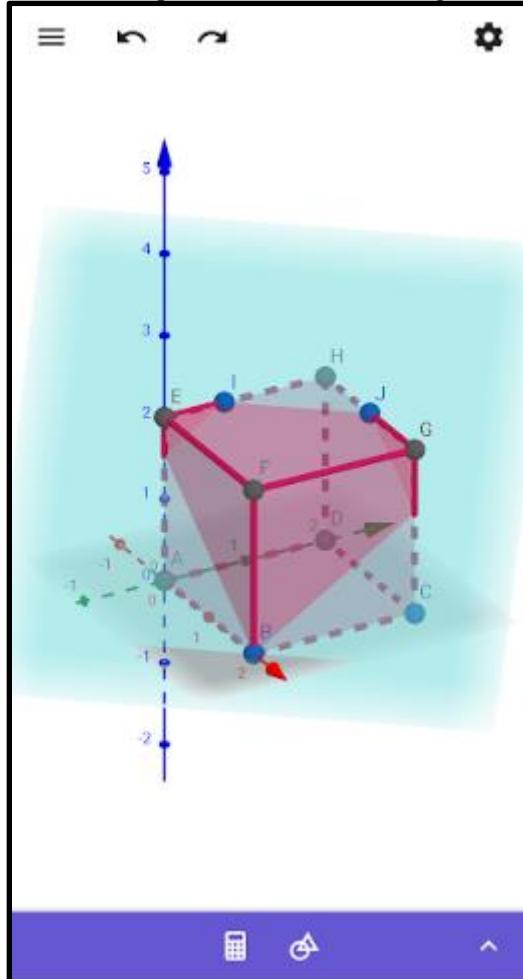
*6 lados.*

*Trazar um plano que pase por três pontos, sendo num uma aresta x, outro na aresta adjacente e o 3º no vértice oposto e reverso ao vértice formado pelas arestas adjacentes.*

Fonte: Dados de pesquisa.

Mesmo que Jane tivesse conhecimento do número máximo de lados da seção, a estratégia relatada pela discente é discutível. A Figura 22 ilustra uma construção realizada no aplicativo do GeoGebra 3D baseada nas etapas descritas pela estudante, sendo possível constatar que a seção gerada não será um hexágono, mas sim um pentágono.

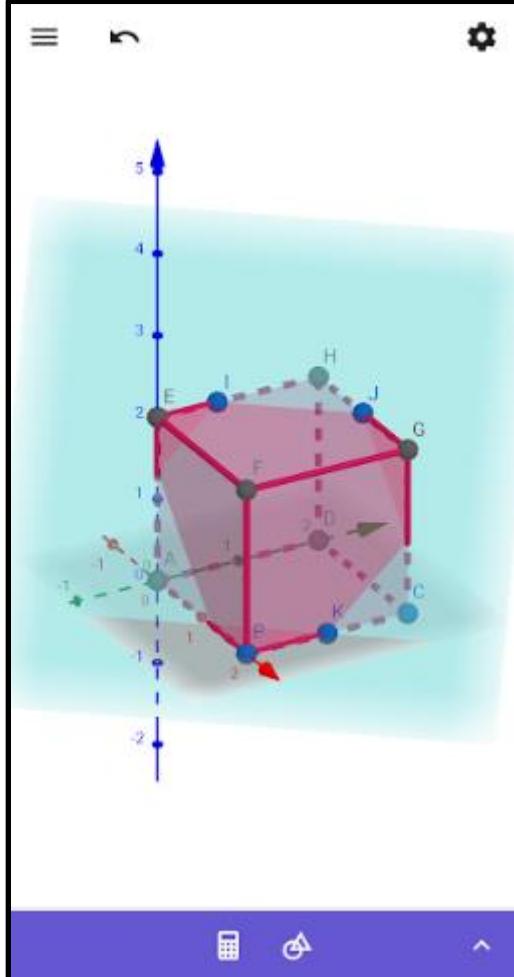
Figura 22 – Construção realizada no aplicativo GeoGebra 3D seguindo a descrição feita por Jane



Fonte: Elaboração da autora.

Para que o hexágono fosse formado, seria necessário que o terceiro ponto estivesse localizado em AB ou em BC, conforme a Figura 23 a seguir.

Figura 23 – Construção realizada no aplicativo GeoGebra 3D para obter um hexágono como seção



Fonte: Elaboração da autora.

A partir deste caso, podemos observar que a utilização de um AGD não garante que uma atividade será resolvida de forma correta. No caso de Jane, podemos destacar que a sua justificativa conduzia para a obtenção de pentágono ao invés de um hexágono, ou seja, a estudante identificou qual seria o tipo de seção correta, mas sua justificativa não estava alinhada ao que foi visualizado por ela.

Nesse sentido, reforçamos ser tão importante que o estudante seja convidado a escrever sobre sua estratégia de resolução de um problema, pois nem sempre encontrar a resposta correta e justificá-la caminham juntos no aprendizado. No caso de Jane, percebemos que por mais que a estudante tivesse conhecimento sobre o número máximo de lados da seção, a justificativa apresentada por ela não conduzia à obtenção de um hexágono como seção, mas sim de um pentágono.

No caso de Karina a estudante respondeu que o número máximo seria igual a cinco. Ela relatou não ter conseguido reproduzir a construção no GeoGebra 3D a partir da manipulação que realizou previamente com o “cubo de água” (Figura 24). O material concreto possibilita

ver de forma efetiva o objeto e não somente ver a sua imagem mental por meio da imaginação (KALEFF, 2016).

Este material atuou como suporte ao aprendizado de Karina, que apesar de ter tido dificuldades em fazer a construção no GeoGebra utilizou outro recurso para auxiliar na visualização do objeto em estudo. Observar um objeto tridimensional sob vários ângulos é relevante para compreendê-lo melhor (MACHADO; BORTOLOSSI; JUNIOR, 2018).

Isso significa que não devemos limitar nosso aluno a um único recurso, mas sim oferecer a ele uma variedade de opções para enriquecer sua visualização. O caso de Karina ilustrou um grande exemplo de que nenhum tipo de tecnologia é capaz de satisfazer todas as necessidades do usuário (WASSIE; ZERGAW, 2019).

Figura 24 – Resposta de Karina no segundo item da atividade Seções De Um Cubo no GeoGebra 3D

b) Qual o número máximo de lados da figura gerada pela seção de corte? Descreva a(s) estratégia(s) para encontrar sua resposta.

*5, no geogebra indicado pela Thais eu não consegui reproduzir o que foi feito com o cubo de ágata em sala. Manipulando vi que conseguimos cortar o cubo de maneira que forme um pentágono, ou seja, uma figura de 5 lados*

Fonte: Dados de pesquisa.

O “cubo de água” mencionado por Karina consistia em um sólido feito de acrílico (Figura 25). Este material podia ser preenchido com água, que funcionaria como um plano de corte. Por meio da manipulação do material, a água ia se movendo e novas seções poderiam ser exploradas. A quantidade de água dentro do sólido também influenciava nos tipos de seções geradas.

Figura 25 – Cubo feito de acrílico



Fonte: Dados de pesquisa.

No terceiro e último item desta atividade, o aluno deveria analisar e justificar se era possível ou não a existência de seções sendo polígonos regulares.

A aluna Jane respondeu que era possível e justificou que o quadrado era obtido a partir de uma seção paralela a um dos “lados do cubo” (Figura 26), que nesse caso ela estava se referindo à face do cubo. Também explicou que seria possível obter um hexágono regular a partir de um plano formado por três pontos: dois deles estariam em arestas adjacentes, sendo um ponto em cada aresta e o terceiro ponto estaria localizado em um segmento reverso, ressaltando que os três pontos necessariamente seriam pontos médios de cada uma destas arestas. No entanto, outro polígono que pode ser formado e que não foi citado pela estudante é o triângulo equilátero, encontrado a partir de um plano que intercepta os pontos médios de três arestas concorrentes.

Figura 26 – Resposta de Jane no terceiro item da atividade Seções De Um Cubo no GeoGebra 3D

b) É possível obtermos seções sendo polígonos regulares? Justifique.

Sim. O quadrado, com uma seção paralela a um dos lados do cubo. O hexágono, traçando um plano formado por 3 pontos, dois pontos em arestas adjacentes (um em cada uma) e outro ponto em um segmento reverso. Todos这三个 pontos médios.

Fonte: Dados de pesquisa.

Karina também respondeu que seria possível encontrar seções sendo polígonos regulares, justificando que o pentágono era um desses casos (Figura 27). Porém, em um cubo não é possível obter um pentágono que seja regular, pois o pentágono que se forma possui quatro lados paralelos dois a dois e no caso do pentágono regular não existem lados que sejam paralelos.

Figura 27 – Resposta de Karina no terceiro item da atividade Seções De Um Cubo no GeoGebra 3D

b) É possível obtermos seções sendo polígonos regulares? Justifique.  
Sim, o pentágono é um polígono regular

Fonte: Dados de pesquisa.

Esta atividade e a Seções De Um Tetraedro Regular no GeoGebra 3D, por utilizarem o aplicativo GeoGebra 3D como recurso, têm como intuito aprimorar no aluno sua capacidade de explorar, reconstruir (ou reinventar) e explicar conceitos matemáticos (DOCKENDORFF; SOLAR, 2017).

Em ambas as atividades envolvendo a exploração de seções, a visualização foi estimulada por meio da investigação de sólidos geométricos e suas propriedades e não apenas movimentando e abrindo as figuras na tela (BAKI; KOSA; GUVEN, 2011). Um AGD como o GeoGebra é muito útil para que os estudantes justifiquem resultados matemáticos e, em particular, geométricos.

Ao apresentar atividades que estimulam a criatividade e incentivam o estudante a explorar, a discutir problemas em Geometria, organizar suas ideias e estruturar argumentos para apoiar suas intuições, pode aprimorar suas habilidades de comunicação (JONES, 2002). De acordo com as respostas apresentadas por Jane e Karina, precisamos investir em situações nas quais o estudante possa utilizar uma diversidade de recursos que irão possibilitar o desenvolvimento de sua visualização e o aperfeiçoamento de suas justificativas.

#### **4.3 Relatos dos futuros professores sobre visualização e ensino de Geometria**

Ao observar os registros dos estudantes no Quadro Comparativo, foi possível realizar um levantamento do que pensam estes estudantes em relação ao que é visualização e o que é ensinar e aprender Geometria.

Na primeira versão, os estudantes conceituaram a Geometria pela origem da palavra, que corresponde à união dos termos “geo” (terra) e “metron” (medir), ou seja, a “medida de terra”. A partir da quarta versão, descreveram a Geometria como sendo a área em que refletimos a respeito das formas presentes no mundo ao nosso redor, observamos as formas

geométricas (planas e espaciais) e suas propriedades bem como as representamos. Na terceira e quarta versão destacaram a contribuição da Geometria para o desenvolvimento da cognição, visualização e abstração, enriquecendo com ideias de autores cujos textos foram trabalhados ao longo da disciplina de Ensino de Matemática II.

*Estudo do espaço através de medidas. (Jane)*

*Medir a terra, estudo das formas relativas ao espaço. (Gustavo)*

*Se não me engano, a palavra faz referência a medição da terra. (Ramon)*

Ensinar Geometria foi destacado por eles como sendo importante para compreender o mundo, desenvolver a visualização para analisar e entender os conceitos geométricos e as propriedades de figuras planas e espaciais. A grande maioria relatou que o contato que tiveram com a Geometria foi superficial, mecânico, com aulas no estilo “decoreba” que não davam espaço para investigação e reflexão.

*Tive pouquíssimo contato com a geometria na escola, o que causou muita dificuldade na graduação. Na escola meu maior contato com Geometria foi no 2º ano do ensino médio, e tal contato foi feito de forma mecânica, apenas voltada ao estudo de áreas e volumes. (Yago)*

*Meu ensino de geometria não foi muito bom no Fundamental e ensino médio, pois poucos professores exploravam ou abordavam esse assunto, no entanto sempre tive facilidade para aprender área da matemática. Fui ter um contato mais profundo no ensino superior onde tive aulas de construção geométrica e geometrias, plana e espacial. (Joaquim)*

*As experiências não foram muito boas, a maioria eu não lembro e as que lembro são vagas. Mas não lembro de ter tido geometria com a mesma importância que se dá o ensino de álgebra. (Kátia)*

*Na educação básica o contato com a geometria foi mecânico, através de fórmulas e figuras estáticas desenhadas no caderno/livro. (Jane)*

Apesar da maioria dos estudantes não terem tido boas experiências com Geometria e o seu ensino na Educação Básica, podemos destacar uma mudança nesse cenário durante a graduação. Foram citados o Programa de Educação Tutorial (PET) – Matemática e Meio Ambiente e a própria disciplina de Ensino II, que possibilitou um contato mais focado na Geometria por meio de atividades investigativas.

*Durante a graduação tive um contato mais amplo, onde trabalhei com ambientes de geometria dinâmica e materiais concretos. Além de demonstrações e construção em geometria plana que propiciaram um melhor entendimento de alguns conceitos, como ângulos, bissetriz, e etc. (Jane)*

*Sempre tive poucas experiências com Geometria. meu maior contato tem ocorrido na graduação e inclusive resolvi fazer minha monografia voltada para a área da geometria espacial. A faculdade ampliou minha visão sobre*

*o conceito de geometria e me trouxe uma confiança na disciplina tendo em vista que era a matéria cujo eu mais temia. (Tarcísio)*

*Oficinas aplicadas pelo PET contribuíram para descobrir atividades com materiais concretos (Papéis e canudos) cujo auxiliaram para o ensino de elementos tais como: vértices, faces, arestas, poliedros, etc. (Luan)*

Em relação ao que consideravam como sendo visualização, os estudantes apresentaram em sua primeira versão do Quadro Comparativo a visualização associada aos atos de ver, de enxergar e de perceber.

*A partir das atividades feitas na aula de Ensino II pude ter mais contato com a questão da visualização, creio que nunca tenha sido instigado a pensar dessa forma, e que se talvez fosse teria tido um ganho conceitual bem significativo. (Yago)*

A partir da segunda versão, os alunos passaram a incluir a ideia da construção e manipulação de imagens mentais. O objetivo ao trabalhar com o Quadro Comparativo era fazer com que os discentes reconhecessem a própria evolução a cada nova versão escrita.

Em relação ao conceito de visualização, os discentes destacaram que as atividades propostas nas aulas os auxiliaram a compreender melhor e ter uma nova perspectiva sobre o conceito de visualização. As atividades desenvolvidas foram importantes para abrir espaço para novas reflexões e mostrar as potencialidades da visualização no ensino e na aprendizagem de Geometria.

*As aulas com a Thais têm me ajudado a entender melhor o que de fato é visualizar algo. Antes das aulas estava muito preso a palavra enxergar, não conseguia olhar de outra forma. (Ramon)*

*As atividades que foram propostas pela Thaís me fizeram refletir sobre a visualização e sobre como a mesma tem uma atuação de vital importância na vida dos alunos. Creio que o incentivo a essa abordagem investigativa seja um ponto muito positivo que devemos aplicar em nossas salas de aula. (Yago)*

*Nas aulas que a Thais dirigi, pude perceber o quanto minha mente era limitada a respeito da visualização, após observar, exemplos e atividades que ela fez conosco, inclusive pelo whatsapp, pude compreender melhor a respeito de visualização. (Tarcísio)*

Sobre a importância da visualização, na primeira versão os alunos a destacaram como facilitadora da aprendizagem dos conceitos. Na segunda versão em diante, os estudantes destacaram que a visualização é necessária para o desenvolvimento do pensamento geométrico, sendo possível formar imagens mentais de um objeto mesmo que ele não esteja presente fisicamente.

*Através da visualização podemos fazer manipulações mentais que nos ajudam a estudar Geometria, uma vez que não precisamos ter em mãos, ou*

*enxergando, um objeto. A visualização nos permite ir além do da visão, enxergar sem utilizar os olhos. (Ramon)*

*Oferece ao aluno as ferramentas necessárias para compreender e assimilar conceitos geométricos, podendo criar a imagem de um objeto ausente do campo visual ou que não estão à vista, manipulando e explorando-o, usando apenas os processos mentais para tal investigação. (Joaquim)*

Os estudantes também ressaltaram a importância da visualização para outras áreas do conhecimento e para o nosso cotidiano. Essas percepções mostram um futuro professor que enxerga para além da sua área e observa a utilização da visualização em outros contextos fora da Matemática.

*Na primeira versão vejo que eu estava mais preocupada especificamente com a importância da visualização na matemática, já na segunda vejo que consegui transcender a matemática para um desenvolvimento cognitivo que não necessariamente pode estar ligado a uma aprendizagem matemática. (Jane)*

*Ela é base para compreensão e estudo do pensamento geométrico. Afinal, ela torna o aluno capaz de estudar um objeto sem manipula-lo fisicamente. A partir de contatos anteriores, com essa habilidade, o aluno conseguirá desenvolver e se questionar sobre algumas noções e/ou propriedades do que está sendo estudado. Além de problemas referentes em sua vida prática. Sendo assim, aumenta sua independência cognitiva e estruturação de conjecturas geométricas. Já que possibilita uma grande potência de construção de conhecimento individual, ainda abre porta para o compartilhamento de suas ideias, desenvolvendo ainda sua argumentação e organização de ideias. (Thiago)*

*Visualização não se aplica apenas a matemática, podemos aplicar em outras matérias, porém geralmente vemos a matemática como algo muito abstrato e difícil acabamos pensando em visualização apenas para esse conteúdo. (Gustavo)*

*Com a visualização nós desenvolvemos nossa sensibilidade a enxergar geometria em todos os tipos de ambientes, seja físico, seja virtual ou qualquer plataforma lúdica. E isso nos ajuda chegar ao objetivo de aprender/ensinar geometria em sua completude. (Tainá)*

É fato que a visualização é exigida não somente em atividades envolvendo geometria, mas também em outras áreas da Matemática, seja para esboçar o gráfico de uma parábola a partir da função ou para escrever o próximo termo de uma sequência numérica. Além disso, ela é importante tanto para a vida profissional, em áreas como Física, Geografia, Arte e Design, quanto no dia a dia, como seguir orientações, visualizar caminhos descritos verbalmente, ler mapas e estimar distâncias.

A proposta do Quadro Comparativo foi instigar em cada estudante a reflexão a respeito da evolução de seu aprendizado e de suas percepções acerca do que é visualização e do que é

ensinar e aprender Geometria. A partir do que foi analisado, identificamos como Descobertas (categoria apresentada no Quadro 5) dos futuros professores as Maneiras de Representar um cubo, seja no papel ou utilizando o GeoGebra 3D e as Expressões de Envolvimento e Motivação ao evidenciarem os aspectos positivos que as atividades investigativas com foco na visualização tiveram um papel essencial para ampliar o repertório dos discentes e mostrar a eles que a visualização é utilizada em outras situações que não são exclusivamente matemáticas. A partir da presente pesquisa uma nova Descoberta emergiu: *Visualizar e Justificar com GeoGebra*, caracterizada pelo processo de elaborar justificativas durante a resolução de atividades que demandam a criação e manipulação de imagens mentais em conjunto com a exploração de construções realizadas no GeoGebra.

Por outro lado, a análise permitiu identificar as seguintes Dificuldades (categoria apresentada no Quadro 6) recorrentes: Reconhecer e Representar Figuras Planas e Espaciais, principalmente na questão da representação de seções planas da atividade Cortando o Cubo assim como Escrever Ideias e/ou Conceitos Matemáticos foi outra subcategoria também identificada, pois os estudantes apresentaram alguns impasses para justificar seus processos de resolução das atividades.

Defendemos que apresentar ao futuro professor novas práticas com foco em atividades que estimulam a visualização, a formação de conjecturas e a justificativa de seu raciocínio para chegar a um determinado tipo de resposta trazem ao licenciando uma nova perspectiva a respeito do ensino e da aprendizagem de Geometria, formando um profissional que comprehende que a visualização se estende para além das aplicações matemáticas, estando presente também no cotidiano de seus alunos.

Além disso, destacamos como categorias do pesquisado os seguintes tópicos:

- O *design* de cada atividade foi delineado partindo do pressuposto de que a visualização não é um dom, mas sim uma habilidade que precisa ser desenvolvida nos sujeitos;
- Tanto as atividades elaboradas pela pesquisadora quanto as que sofreram algum tipo de adaptação foram pensadas para instigar e desenvolver a visualização do estudante, seja com formas geométricas ou situações envolvendo vistas de objetos do cotidiano;
- As atividades em sua maioria tinham como objeto de estudo o cubo, um sólido bastante conhecido por estudantes e professores. A ideia foi provocar os alunos

para novas possibilidades de trabalho com o cubo além dos tradicionais exercícios de cálculo de volume. Com isso, foi possível explorar seções planas, vistas (de um único cubo ou de um empilhamento de cubos) e suas respectivas representações utilizando apenas um único sólido;

- Destacamos a importância da tarefa (ou da dinâmica de aula) promover a interação entre os aspectos conceitual e figural. Compreender uma propriedade geométrica não significa necessariamente compreender a sua representação, já que pode surgir dificuldades inerentes à visualização. Por isso,
- Apesar de encontrar alguma dificuldade em fazer a construção no GeoGebra o sujeito pode utilizar outro recurso para auxiliar na visualização do objeto em estudo. Observar um objeto tridimensional sob vários ângulos é relevante para compreendê-lo e representá-lo de forma mais apropriada;
- É importante que o sujeito seja convidado a escrever sobre sua estratégia de resolução de um problema, pois nem sempre encontrar a resposta correta e justificá-la caminham juntos no aprendizado;
- Todas as atividades trabalhadas tinham como proposta explorar a visualização por meio de diferentes tipos de recursos como papel e lápis, material concreto e aplicativo GeoGebra 3D em *smartphones*. A ideia não era apontar um recurso como sendo melhor que o outro, mas sim oferecer diferentes contribuições ao aprendizado geométrico dos estudantes;
- Apesar do registro das resoluções das atividades terem sido feitos de forma individual para ser possível avaliar os tipos de justificativas apresentados por cada discente, constantemente foi incentivado para que a turma discutisse sobre as atividades de forma coletiva.
- Ao invés de seguir o padrão de fileiras tradicionais, a configuração da sala em que ocorreram as aulas da disciplina consistia em uma mesa retangular com cerca de quinze lugares. Esse tipo de layout proporcionou um ambiente colaborativo entre os discentes;
- Visualizar, portanto, é importante para compreender conceitos geométricos. Cada aluno possui uma forma específica de aprender, sendo necessário, portanto, desenvolver um trabalho que não seja feito de forma engessada

utilizando um único recurso. Trabalhar com vários recursos didáticos traz diferentes contribuições ao aprendizado geométrico;

- Atividades direcionadas para o desenvolvimento da visualização são essenciais para aprimorar essa habilidade nos sujeitos, pois ela não é inata e, portanto, é necessário realizar intervenções de modo a estimular o pensamento visual de nossos estudantes;
- Dificuldades apresentadas pelos estudantes nas atividades implementadas: má interpretação do enunciado e erros na comunicação da resposta ou explicação do processo de resolução. Justificar construções e resoluções das atividades não é uma prática frequente durante a vida escolar, por isso os futuros professores tiveram dificuldade em comunicar e descrever como resolveram determinada tarefa;
- Dentro da atividade abrimos caminho para o registro da opinião, reflexão e resposta dos exercícios, pois o aprendizado geométrico vai muito além de exercícios cujo foco é verificar se a resposta final está correta ou não. É preciso sobretudo buscar formas de investigar e avaliar o(s) tipo(s) de estratégia(s) adotada(s) na resolução de uma atividade e entender o raciocínio que está por trás do resultado obtido. Isso só será possível mediante a implementação de práticas que incentivem a justificativa e que deem espaço para novas formas de pensar;
- Ao possibilitar que o estudante comunique sua estratégia de resolução e suas reflexões sobre a atividade, conseguimos conhecer melhor as estratégias adotadas por eles e quais são as suas dificuldades em atividades de Geometria, o que pode contribuir não somente para a ampliação do campo teórico, mas também para a solução de problemas atuais no ensino de Matemática;
- Em uma perspectiva didática, este tipo de conhecimento também é importante para conscientizar o professor de que seus estudantes podem adotar estratégias de resolução diferentes das suas;
- A visualização tem um papel importante na formação acadêmica do sujeito, que começa nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e o acompanha durante toda a sua trajetória escolar até chegar na profissão que escolheu exercer. É por este

motivo que os docentes da Educação Básica são fundamentais para a valorização do Ensino de Geometria que se preocupa com o desenvolvimento da visualização;

- A visualização é mais do que ver. Essa habilidade é fundamental para o aprendizado geométrico, por isso é preciso criar um contexto dentro da sala de aula que seja favorável para que a visualização seja desenvolvida nos estudantes. Logo, em um ambiente de aula tradicional isso se torna bem difícil de ocorrer, já que usar o quadro para representar objetos tridimensionais é complexo e demorado, além de não ser possível movimentar e explorar os objetos em diferentes ângulos.
- Ao desenvolver atividades em que o estudante pode utilizar diversos recursos didáticos conseguimos fornecer a ele uma variedade e riqueza de imagens espaciais e, consequentemente, enriquecer sua habilidade de visualização;
- A visualização pode e deve ser aprendida e estimulada. Visualizar cria possibilidades de entender a Matemática com outros e novos olhares.

Para concluir este capítulo, destaco a importância da visualização para a compreensão geométrica. Papel, lápis e o aplicativo GeoGebra 3D foram utilizados como recursos importantes neste processo e cada um ofereceu diferentes contribuições para o aprendizado geométrico dos estudantes. Por ser uma habilidade individual, a visualização precisa ser estimulada por meio de diferentes recursos, respeitando sempre a forma como cada estudante aprende. Considerar a individualidade é importante, mas a dinâmica dialógica e de múltiplos registros (escritos, pictóricos, de telas etc.) também potencializa.

## CAPÍTULO V: HORA DE FECHAR A TELA VISUALIZANDO OUTROS E NOVOS CAMINHOS

O processo de construção do pensamento visual e seu desenvolvimento aponta a necessidade de um trabalho voltado para a combinação de abordagens didáticas diversas. Nossa caminho, traçado com a utilização de papel, lápis e do aplicativo GeoGebra 3D, teve como objetivo estimular a reflexão dos estudantes sobre o próprio aprendizado por meio da justificativa de seus processos de resolução das atividades implementadas.

A investigação teve a seguinte questão norteadora: “Que contribuições atividades com foco na visualização trazem ao aprendizado de futuros professores de Matemática, particularmente, situações com o uso de papel, lápis e do aplicativo GeoGebra 3D para *smartphone*?”.

Com o intuito de responder a essa pergunta, investigamos a importância da visualização no desenvolvimento do pensamento geométrico, a partir de uma metodologia de ensino que valoriza uma prática que promove o diálogo e a interação entre os sujeitos e entre tecnologia-sujeito. Especificamente: (a) identificamos as dificuldades relacionadas ao processo de visualização de estudantes de licenciatura em Matemática em atividades de Geometria Espacial utilizando papel, lápis e o GeoGebra em sua versão para *smartphone*, (b) verificamos as contribuições da visualização como estratégia para a resolução das referidas atividades e (c) analisamos o processo de justificativa e como futuros professores compreendiam a visualização e o ensino de Geometria.

No decorrer desse caminho houve o redesenho das intervenções, fruto do *feedback* dos estudantes e da análise das dificuldades relacionadas à visualização dos sujeitos. Por exemplo, optamos por trazer mais atividades envolvendo o cubo por conta dos desafios que os estudantes encontraram para visualizar e representar seções planas na atividade Cortando o Cubo.

Nessa investigação ressaltamos o poder da visualização mediante justificativas para as atividades de Geometria Espacial atreladas a outras formas de comunicação e de representação com papel, lápis e construções em dispositivos com toques em tela. As atividades implementadas mostraram o quanto é importante estimular a visualização e instigar os estudantes a descreverem suas estratégias para a resolução de um problema.

Também destacamos o potencial inovador dessa pesquisa em implementar atividades em *smartphone* com foco em estudar a habilidade de visualização e não apenas considerá-la como um processo que ocorre durante a realização de atividades de Geometria Espacial, com interesse em verificar se a resposta estava certa ou não.

Ressaltamos que utilizar um AGD em dispositivos com toques em tela não é garantia de que a aprendizagem ocorra, por isso ele não deve ser considerado como o solucionador de todas as dificuldades envolvendo o aprendizado geométrico. A partir dos resultados da pesquisa foi observado que a turma tinha o conhecimento sobre a propriedade de que três pontos não colineares determinam um plano, mesmo assim apresentaram dificuldades em aplicá-la na atividade para visualizar, representar as seções do cubo e justificar as respostas encontradas, seja com papel e lápis ou por meio de construção no aplicativo do GeoGebra 3D.

O GeoGebra 3D, em sua versão para *smartphone*, trouxe importantes contribuições para o desenvolvimento da visualização dos futuros professores que participaram da presente investigação. A integração do *smartphone* com o GeoGebra trouxe a oportunidade de exploração, o *feedback* instantâneo, o enriquecimento das imagens mentais por meio da construção, da movimentação do objeto sob diferentes ângulos e da justificativa das estratégias de resolução das atividades.

É importante destacar que o uso do aplicativo GeoGebra 3D em *smartphones* precisa ser feito de forma estratégica, sendo útil para justificar matematicamente e estimular o desenvolvimento da visualização. Nossa intuito foi observar e entender que tipo de estratégia foi utilizada pelo estudante para encontrar sua resposta na atividade e não apenas checar se o resultado estava correto ou não.

Outro ponto que queremos ressaltar é que nem sempre o GeoGebra vai ser considerado o recurso preferido do estudante. É por isso que defendemos a utilização de diferentes recursos didáticos em sala de aula para que o estudante vivencie diferentes experiências envolvendo o processo de visualização.

Além de oferecer uma variedade de recursos visando favorecer o desenvolvimento da habilidade de visualização, o estudante precisa saber descrever o seu processo de resolução pois nem sempre visualizar, obter a resposta correta e justificá-la caminham juntos no aprendizado. Como forma de contornar esse tipo de questão, precisamos investir em novas práticas que tenham como proposta estimular a visualização e o incentivo à justificativa da resposta encontrada pelo discente.

A visualização se trata de um processo individual que transita nas dimensões plana e espacial e envolve a construção de imagens mentais de objetos geométricos, considerando seus conceitos intrínsecos. Não é uma atividade isolada ou uma única implementação que seja capaz de fazer o aluno aprender a visualizar. A visualização requer um trabalho contínuo que vai acompanhar o estudante durante toda a sua trajetória escolar até a escolha de sua profissão.

Nesse sentido, ressaltamos o quanto é importante que sejam trabalhadas atividades que explorem a visualização ao longo de todos os anos de escolaridade, levando o sujeito a criar memórias de imagens que serão suporte para situações mais complexas que demandam uma visualização mais desenvolvida.

A visualização era uma habilidade necessária para representar as seções do cubo tanto no papel quanto no aplicativo do GeoGebra. A turma no geral teve muita dificuldade para representar as seções do cubo, mesmo se tratando de um objeto geométrico conhecido por eles. Esta é uma situação que merece atenção, visto que a pesquisa foi desenvolvida com futuros professores. Quando os discentes não possuem familiaridade com o objeto em questão, visualizá-lo e representá-lo não são considerados processos simples, pois demandam um raciocínio visual mais desenvolvido.

As atividades implementadas permitiram que os estudantes vivenciassem um aprendizado geométrico que não se limita ao cálculo de áreas e volumes. Além disso, os licenciandos puderam refletir sobre a importância da visualização no desenvolvimento do pensamento geométrico. Particularmente, com os registros escritos e as justificativas cabe destacar que realizar uma atividade nem sempre implica em saber justificar o processo percorrido para obter o resultado. Por mais que os estudantes conhecessem os procedimentos necessários para a realização de uma tarefa geométrica, explicar o raciocínio e a estratégia de resolução por meio de registro escrito foi considerado por eles um processo difícil.

A partir do relato dos sujeitos que participaram das implementações, constatamos que ao adotar uma metodologia de ensino que valoriza a visualização por meio de atividades investigativas, esses estudantes vivenciaram uma prática de ensino focada no desenvolvimento do pensamento visual que serviu como inspiração para realizar um trabalho diferenciado em sala de aula tendo a visualização como foco central.

É importante que os licenciandos saibam lidar com situações cada vez mais complexas envolvendo a visualização de objetos tridimensionais e as suas representações. O ideal é que o futuro professor tenha sua habilidade de visualizar mais desenvolvida para conseguir saber identificar o tipo de atividade que ele irá explorar em sala de aula, considerando o nível de dificuldade em relação ao conhecimento prévio de seus alunos.

A partir da intervenção vivenciada, defendemos que o processo de desenvolvimento da visualização deve ocorrer sem que haja apenas a utilização do papel ou o uso exclusivo do aplicativo do GeoGebra 3D. Quando pensamos em diversificar os instrumentos e modos das tarefas, queremos abrir possibilidades a diferentes maneiras de pensar. Nem todos na turma aprendem de maneira igual, pois há uma diversidade de contextos, formas de se expressar e de

compreender o mundo. Por isso cabe ao professor pensar como pode proporcionar um ambiente favorável ao aprendizado de todos os estudantes.

Trabalhar apenas com imagens estáticas de objetos geométricos tridimensionais em livros didáticos ou papel dificulta a visualização e real interpretação desses objetos. Contudo, utilizar a atividade impressa em conjunto com o GeoGebra 3D é possível explorar o objeto sob diferentes ângulos, favorecendo a criação de imagens mentais deste objeto e/ou enriquecer as já existentes. Utilizar diferentes materiais favorece a experimentação, a construção e manipulação de imagens mentais assim como auxilia o estudante a superar dificuldades relacionadas à visualização e à representação.

As possibilidades de trabalho com foco na visualização não se encerram nesta investigação. Cabe ao professor, considerando seu contexto e especificidades de sua turma e local de trabalho redesenhar e readaptar a proposta, utilizar outros recursos e aplicativos, incluir novas atividades e pensar em outras estratégias de abordagem para

- trabalhar com outros sólidos geométricos além do cubo. Por exemplo, utilizar um cone de água e o aplicativo GeoGebra 3D para estudar seções cônicas;
- abordar outros conceitos no estudo de sólidos e poliedros, por exemplo, eixos e planos de simetria;
- continuar investindo no uso de justificativas e de formas variadas de representação em atividades de visualização;
- envolver estudantes da Educação Básica, incluindo a modalidade de Educação de Jovens e Adultos para desenvolver atividades com foco no mundo do trabalho;
- trabalhar a visualização aplicada em outras áreas: na Geografia para trabalhar localização, direção, distância, orientação e movimento, em Artes fazendo relação com pintores e escultores com obras que remetem a sólidos geométricos, como Ascanio MMM e Athos Bulcão (as obras de ambos estão ilustradas nos Anexos B e C, respectivamente).

As atividades implementadas possibilitaram aos licenciandos um novo olhar a respeito da visualização, passando a compreendê-la como um processo que pode e deve ser desenvolvido e o quanto esta habilidade é importante para o ensino de Geometria.

Observamos que visualizar é mais do que ver, é um processo de formação de imagens que transitam entre as representações 2D e 3D, podendo ser geradas sem que necessariamente o objeto esteja presente em nosso campo visual. Visualizar é uma habilidade que potencializa a compreensão de conceitos e favorece o aprendizado geométrico. Que a visualização seja o meio para avistar novos caminhos e possibilidades de compreender a Geometria e o mundo. Sendo assim, defende-se a tese de que a utilização de diferentes recursos didáticos favorece a experimentação, a construção e a manipulação de imagens mentais, assim como auxilia o sujeito a superar dificuldades relacionadas à visualização e à representação, que devem ser vistas como processos imbricados.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, G. S.; SOARES, A. B. Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae. In: **Anais do Workshop de Informática na Escola**. 2003. p. 175-186.

AMIEL, T.; REEVES, T. C. Design-based research and educational technology: Rethinking technology and the research agenda. **Journal of educational technology & society**, v. 11, n. 4, p. 29-40, 2008.

ARCAVI, A. The role of visual representations in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, 52, 215-241, 2003.

BAIRRAL, M. A. Do clique ao touchscreen: Novas formas de interação e de aprendizado matemático. In: **Reunião anual da anped**, Goiânia, n 36 de setembro a 2 de outubro de 2013.

BAIRRAL, M. A. **Tecnologias da Informação e Comunicação na Formação e Educação Matemática**. Série InovaComTic, vol. 1. Rio de Janeiro: Edur, 2009.

BAIRRAL, M. A.; ASSIS, A. R.; SILVA, B. C. C. **Mãos em ação em dispositivos touchscreen na educação matemática**. Seropédica: Edur, 2015.

BAIRRAL, M. A.; BARREIRA, J. C. F. Algumas particularidades de ambientes de geometria dinâmica na educação geométrica. **Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo**. ISSN 2237-9657, v. 6, n. 2, p. 46-64, 2017.

BAIRRAL, M. A.; GIMENEZ, J. **Educação geométrica e formação continuada de professores em um ambiente virtual**. Seropédica: Edur, 2012.

BAIRRAL, M., SETTIMY, T.; HONORATO, V. Seccionando um cubo: o que fazer se três pontos não determinarem um plano? **Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM)**, 2(1), 180-202. 2013.

BAKI, A.; KOSA, T.; GUVEN, B. A comparative study of the effects of using dynamic geometry software and physical manipulatives on the spatial visualisation skills of pre-service mathematics teachers. **British Journal of Educational Technology**, v. 42, n. 2, p. 291-310, 2011.

BARAB, S.; SQUIRE, K. Design-based research: Putting a stake in the ground. **The journal of the learning sciences**, v. 13, n. 1, p. 1-14, 2004.

BASTOS, R. **Geometria no currículo e pensamento matemático**. 1999. Disponível em: [http://www.apm.pt/apm/revista/educ52/educ52\\_2.htm](http://www.apm.pt/apm/revista/educ52/educ52_2.htm). Acesso em: 12 abr. 2018.

BECKER, M. **Uma alternativa para o ensino de geometria**: visualização geométrica e representações de sólidos no plano. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2009.

BULLMANN, C. L. **Aprendizagem de conceitos de geometria espacial por estudantes do ensino médio**: entendimentos produzidos a partir da teoria dos registros de representação

semiótica. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências). Ijuí: Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, 2018.

COBB, P.; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. Design experiments in educational research. **Educational researcher**, v. 32, n. 1, p. 9-13, 2003.

COSTA, C. Visualização, veículo para a educação em geometria. In: SARAIVA, M.; COELHO, I.; MATOS, J. (Org(s), Ed(1). **Ensino e Aprendizagem de Geometria**. Lisboa, Portugal Editora, 2002. p. 157-184.

COSTA, N. M. L.; POLONI, M. Y. Design based research: uma metodologia para pesquisa em formação de professores que ensinam matemática (CO). In: **XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**. 2011.

DEL GRANDE, J. Spatial sense. **The Arithmetic Teacher**, v. 37, n. 6, p. 14-20, 1990.

DIKOVIĆ, L. Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. **Computer Science and Information Systems**, v. 6, n. 2, p. 191-203, 2009.

DOCKENDORFF, M.; SOLAR, H. ICT integration in mathematics initial teacher training and its impact on visualization: the case of GeoGebra. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 49, n. 1, p. 66-84, 2018.

DREYFUS, T. On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), **Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, 1, 33-48, 1991.

ETCHEVERRY, N. et al. Fomentando discusiones en un ambiente computacional a través de la experimentación y la visualización. **Zetetiké: Revista de Educação Matemática**, v. 12, n. 21, p. 57-82, 2009.

FERREIRA, E. B.; SOARES, A. B.; LIMA, J. C. As Demonstrações no Ensino da Geometria: discussões sobre a formação de professores através do uso de novas tecnologias. **Boletim de Educação Matemática**, v. 22, n. 34, p. 185-207, 2009.

FISCHBEIN, E. The theory of figural concepts. **Educational studies in mathematics**, v. 24, n. 2, p. 139-162, 1993.

GORGORIÓ, N. Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. **Educational Studies in Mathematics**, v. 35, n. 3, p. 207-231, 1998.

GORGORIÓ, N.; ARTIGUES, F.; BANYULS, F.; MOYANO, D.; PLANAS, N.; ROCA, M.; XIFRÉ, À. Proceso de elaboración de actividades geométricas ricas: un ejemplo, las rotaciones. **Suma**. Badalona, 33, 57-71. Fev 2000. Disponível em <<http://www.abed.org.br/congresso2004/por/pdf/049-TC-B2.pdf>>. Acesso em 26 de mar 2017.>. Acesso em 26 mar. 2017.

GOUVEIA, C. A. A.; MISKULIN, R. G. S. Dimensões dos Processos de visualização e de representação de uma Atividade Exploratório-Investigativa em Cálculo Diferencial e Integral:

Uma Análise Semiótica por meio de Obras Artísticas. **Revista Saber Digital**, v. 5, n. 01, p. 91-107, 2012.

GRAVINA, M. A. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. **Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, v. 1, p. 1-13, 1996.

GUTIÉRREZ, A. Las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. **Revista Ema**, v. 3, n. 3, p. 193-220, 1998.

GUTIERREZ, A. Procesos y habilidades en visualización espacial. In: **Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación Matemática: Geometría**. 1991. p. 44-59.

GUTIÉRREZ, A. Visualization in 3 – dimensional geometry: in search of a framework. In L. Puig e Gutierrez (Eds.), **Proceedings of 20th PME conference** (Vol. 3, pp 19-26), Valencia: Universitat de València, Dept. de Didàctica de la Matemática, 1996.

GÜVEN, B.; KOSA, T. The effect of dynamic geometry software on student mathematics teachers' spatial visualization skills. **Turkish Online Journal of Educational Technology-TOJET**, v. 7, n. 4, p. 100-107, 2008.

HANGÜL, T.; CEZIKTURK, O. A practice for using Geogebra of pre-service mathematics teachers' mathematical thinking process. **New Trends and Issues Proceedings on Humanities and Social Sciences**, v. 7, n. 1, p. 102-116, 2020.

HENRIQUE, M. P. **GeoGebra no clique e na palma das mãos**: contribuições de uma dinâmica de aula para construção de conceitos geométricos com alunos do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Seropédica: Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2017.

JONES, K. Issues in the Teaching and Learning of Geometry. In: Linda Haggarty (Ed), **Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice**. London: RoutledgeFalmer. Chapter 8, pp 121-139. 2002.

KALEFF, A. M.; REI, D. M.; GARCIA, S. S. Como adultos interpretam desenhos e calculam volumes de sólidos construídos por pequenos cubos p. 135-152. **Zetetike**, v. 4, n. 2, 1996.

KALEFF, A. M. M. R. **Tópicos em Ensino de Geometria**: A Sala de Aula Frente ao Laboratório de Ensino e à História da Geometria. Segunda edição. Novas Tecnologias no Ensino da Matemática. CEAD: UFF, 2016.

KALEFF, A. M. M. R. **Vendo e entendendo Poliedros**: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos. Niterói: EdUFF, 1998.

LEIVAS, J. C. P. **ENSINO DE GEOMETRIA**: uma experiência investigativa em uma aula de mestrado profissionalizante. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 16, n. 4, 2014.

LEMOS, W. G.; BAIRRAL, M. A. **Poliedros estrelados no currículo do Ensino Médio**. Série InovaComTic, vol. 2. Rio de Janeiro: Edur, 2010.

LIMA, M. L. S.; LINS, A. F.; PEREIRA, P. S. Provas e demonstrações matemáticas e o aplicativo GeoGebra: incentivo à visualização de alunos do 2º ano do Ensino Médio. **VIDYA**, v. 38, n. 1, p. 199-221, 2018.

LIMA, D. R. S.; SANTOS, J. A. F. L. O desenvolvimento de conceitos geométricos por meio do aplicativo geogebra. **Brazilian Journal of Development**, v. 6, n. 1, p. 3742-3756, 2020.

MACHADO, E. J. C.; BORTOLOSSI, H. J.; JUNIOR, R. V. A. **Explorando geometria 2D e 3D na escola básica com o software gratuito Geogebra para smartphones e tablets**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2019. 80p.

MARIN, G. B; LEIVAS, J. C. P. O uso do Cabri 3D para desenvolver habilidade de visualização. **Boletim GEPEM** (Online), v. 1, p. 105-121, 2013.

MARIOTTI, M. A.; FISCHBEIN, E. Defining in classroom activities. **Educational Studies in Mathematics**, v. 34, n. 3, p. 219-248, 1997.

MATTA, A. E. R.; SILVA, F. P. S.; BOAVENTURA, E. M. Design-Based Research ou Pesquisa de Desenvolvimento: metodologia para pesquisa aplicada de inovação em educação do século XXI. **Revista da FAEEBA**, v. 23, n. 42, 2014.

MÁXIMO, L. S. **Conhecimentos de visualização espacial**: tarefas de representações visuais com uso de recursos físicos e virtuais. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2016.

MISKULIN, R. G. S. **Concepções teórico-metodológicas baseadas em LOGO e em Resolução de Problemas para processo ensino-aprendizagem da geometria**. 1994. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 1994.

MISKULIN, R.G.S. **Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino/aprendizagem da geometria**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 1999.

MOTA, J. F.; LAUDARES, J. B. Um estudo de planos, cilindros e quádricas, na perspectiva da habilidade de visualização, com o software Winplot. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 27, n. 46, p. 497-512, 2013.

OLIVERO, F. **The proving process within a dynamic geometry environment**. 2003.

PITTALIS, M.; CHRISTOU, C. **Types of Reasoning in 3D Geometry Thinking and Their Relations with Spatial Ability**. **Educational Studies in Mathematics**, 75, 191- 212, 2010.

PRESMEG, N. **Visualization in high school mathematics**. **For the Learning of Mathematics**, 6(3), 42-46, 1986.

RITTER, A. M. **A visualização no ensino de Geometria Espacial: possibilidades com o software Calques 3D**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011.

RODRIGUES, T. V. **O uso do Geogebra 3D, versão para smartphone, no processo ensino**

**aprendizagem de geometria espacial.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Maceió: Universidade Federal de Alagoas, 2019.

ROGENSKI, M. L. C.; PEDROSO, S. M. D. **O Ensino da Geometria na Educação Básica: realidade e possibilidades.** 2009. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/44-4.pdf>. Acesso em: 08 jul. 2014.

SAHA, R. A.; AYUB, A. F. M.; TARMIZI, R. A. The effects of GeoGebra on mathematics achievement: enlightening coordinate geometry learning. **Procedia-Social and Behavioral Sciences**, v. 8, p. 686-693, 2010.

SALAZAR, J. V. F.; ALMOLOUD, S. A. Registro figural no ambiente de geometria dinâmica Figural Register in Dynamic Geometry Environments. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 17, n. 5, p. 919-941, 2015.

SAMPAIO, R. S. **Geometria e visualização:** ensinando volume com o software GeoGebra. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro: Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2018.

SANTOS, S.C. **A produção matemática em um ambiente virtual de aprendizagem:** o caso da geometria euclidiana espacial. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SEABRA, R. D. **Uma ferramenta em realidade virtual para o desenvolvimento da habilidade de visualização espacial.** Tese (Doutorado em Engenharia). São Paulo: Universidade de São Paulo, 2009.

SETTIMY, T. F. O; BAIRRAL, M. A. Dificuldades envolvendo a visualização em geometria espacial. **VIDYA**, v. 40, n. 1, p. 177-195, 2020.

SETTIMY, T. F. O. **Elaboração e análise de atividades de visualização em Geometria 3D utilizando recursos convencionais.** 2014. 34 f. Monografia – Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, 2014.

SETTIMY, T. F. O. **Visualização em sala de aula utilizando recursos didáticos variados.** Dissertação (Mestrado em Educação, Contextos Contemporâneos e Demandas Populares). Instituto de Educação / Instituto Multidisciplinar, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ. 2018. 128 p.

SILVA, P. C. A. **Geometria espacial:** uso do aplicativo GeoGebra em smartphones. Dissertação (Mestrado em Matemática). Catalão: Universidade Federal de Goiás, 2018.

SILVEIRA, É.; MARQUES, C. Sistema de Ensino Luz do Saber: Matemática. 9º ano. Recife, Ed. Construir, 2007.

TEIXEIRA, M. S. M. **O pensamento geométrico no 1º ano de escolaridade.** Dissertação (Mestrado em Educação). Lisboa: Portugal, 2008.

VELOSO, E. **Geometria:** Temas Actuais. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

VIANA, O. A. Conceitos e habilidades espaciais requeridos pelas questões de geometria do ENC/Enade para a Licenciatura em Matemática. **Boletim de Educação Matemática**, v. 22, n. 34, p. 153-184, 2009.

WASSIE, Y. A.; ZERGAW, G. A. Some of the potential affordances, challenges and limitations of using geogebra in mathematics education. **Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education**, v. 15, n. 8, p. em1734, 2019.

YORGANCI, S. A study on the views of graduate students on the use of Geogebra in mathematics teaching. **European Journal of Education Studies**, 2018.

ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. Editor's Introduction: What is mathematical visualization? In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Orgs). **Visualization in Teaching and Learning Mathematics** (pp 1-7). Washington: MAA, 1991.

ZULATTO, R. B. A.; PENTEADO, M. G. Professores de Matemática que utilizam tecnologia em sua atividade docente. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro – RJ, v.49, p. 31-44, 2006.

## ANEXOS

### ANEXO A – PARECER DO COMITÊ DE ÉTICA E PESQUISA DA UFRRJ



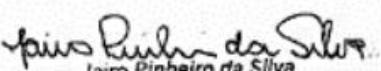
SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO  
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO  
COMISSÃO DE ÉTICA NA PESQUISA DA UFRRJ / COMEP

Protocolo N° 459/2013

### PARECER

O Projeto de Pesquisa intitulado "*Materiais Curriculares Educativos Online para a Matemática na Educação Básica*" sob a responsabilidade do Prof. Marcelo Almeida Bairral, do Departamento de Teoria e Planejamento de Ensino, Instituto de Educação, processo 23083.012077/2013-88, atende os princípios éticos e está de acordo com a Resolução 466/12 que regulamenta os procedimentos de pesquisa envolvendo seres humanos.

UFRRJ, 07/06/2016.

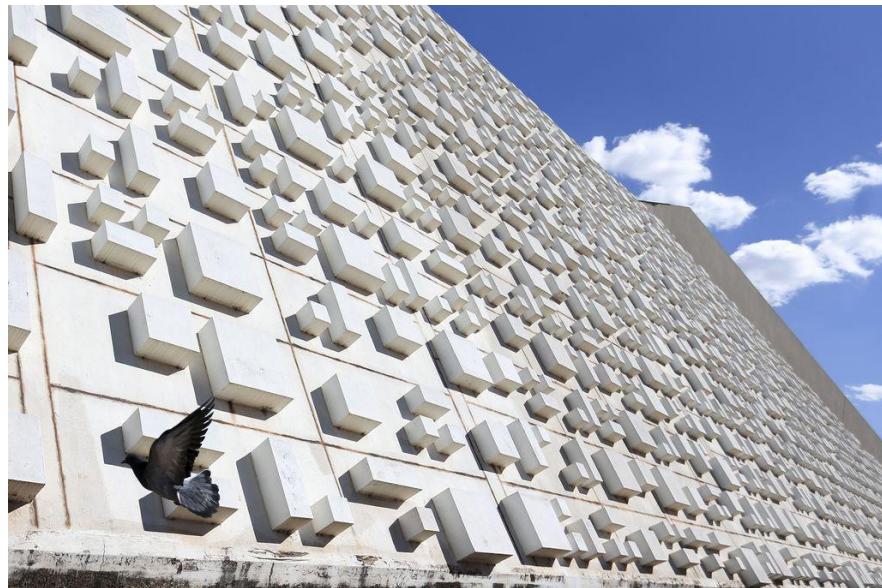
  
Jairo Pinheiro da Silva  
Pro-Reitor Adjunto de  
Pesquisa e Pós-Graduação  
Matr. SIAPE 1109855  
UFRRJ  
Prof. Dr. Jairo Pinheiro da Silva  
Pró-Reitor Adjunto de Pesquisa e Pós-Graduação

**ANEXO B – OBRA DA EXPOSIÇÃO “QUACORS E PRISMAS”, DE ASCÂNIO MMM**



Fonte: <https://umbigomagazine.com/pt/blog/2020/12/24/uma-floresta-de-pontos-e-linhas-quacors-e-prismas-de-ascanio-mmm/>

**ANEXO C – PAINEL CRIADO POR ATHOS BULCÃO PARA A ÁREA EXTERNA  
DO TEATRO NACIONAL CLAUDIO SANTORO**



Fonte: <https://www.aovivodebrasilia.com.br/icone-de-brasilia-teatro-nacional-esta-fechado-ha-4-anos/>