

**UFRRJ**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM**  
**MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL**

**DISSERTAÇÃO**

**UMA PROPOSTA DE ALGORÍTIMO PARA A**  
**QUADRATURA AUTOADAPTATIVA E SUAS**  
**APLICAÇÕES EM EQUAÇÕES INTEGRAIS COM**  
**SINGULARIDADE**

**Victor Hugo Soares Wichan**

**2023**



**UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM  
MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL**

**UMA PROPOSTA DE ALGORÍTIMO PARA A QUADRATURA  
AUTOADAPTATIVA E SUAS APLICAÇÕES EM EQUAÇÕES  
INTEGRAIS COM SINGULARIDADE**

**VICTOR HUGO SOARES WICHAN**

*Sob orientação de*  
**Carlos Andrés Reyna Vera Tudela**

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de **Mestre** no Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional, Área de Concentração em Modelagem Matemática e Computacional.

Seropédica, RJ, Brasil  
Março de 2023

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro  
Biblioteca Central / Seção de Processamento Técnico

Ficha catalográfica elaborada  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

W633p      Wichan, Victor Hugo Soares , 1988-  
                  UMA PROPOSTA DE ALGORÍTIMO PARA A QUADRATURA  
                  AUTOADAPTATIVA E SUAS APLICAÇÕES EM EQUAÇÕES INTEGRAIS  
                  COM SINGULARIDADE / Victor Hugo Soares Wichan. - Rio  
                  de Janeiro, 2023.  
                  86 f.

                  Orientador: Carlos Reyna. Dissertação(Mestrado).  
                  -- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro,  
                  PPGMMC - Programa de Pós-Graduação, 2023.

                  1. Quadratura Autoadaptativa. 2. Quadratura de  
                  Kutt. 3. Quadratura de Gauss-Legendre. 4. Matlab. I.  
                  Reyna, Carlos , W-, orient. II Universidade Federal  
                  Rural do Rio de Janeiro. PPGMMC - Programa de Pós  
                  Graduação III. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM MATEMÁTICA E COMPUTACIONAL

ATA Nº 314/2023 - ICE (12.28.01.23)

Nº do Protocolo: 23083.022938/2023-16

Seropédica-RJ, 16 de abril de 2023.

VICTOR HUGO SOARES WICHAN

Dissertação submetida como requisito parcial para a obtenção de grau de **Mestre**, no Programa de Pós-Graduação em Modelagem Matemática e Computacional - PPGMMC, área de Concentração em Modelagem Matemática e Computacional.

DISSERTAÇÃO APROVADA EM 15/03/2023

**Conforme deliberação número 001/2020 da PROPPG, de 30/06/2020**, tendo em vista a implementação de trabalho remoto e durante a vigência do período de suspensão das atividades acadêmicas presenciais, em virtude das medidas adotadas para reduzir a propagação da pandemia de Covid-19, nas versões finais das teses e dissertações as assinaturas originais dos membros da banca examinadora poderão ser substituídas por documento(s) com assinaturas eletrônicas. Estas devem ser feitas na própria folha de assinaturas, através do SIPAC, ou do Sistema Eletrônico de Informações (SEI) e neste caso a folha com a assinatura deve constar como anexo ao final da tese / dissertação.

Carlos Andres Reyna Vera Tudela Drº UFRRJ (Orientador, Presidente da Banca)

Claudia Mazza Dias Drª UFRRJ (membro interno)

Sergio Drumond Ventura Drº UFRRJ (membro interno)

Edgar Barbosa Lima Drº IFRJ (Externo à Instituição)

*(Assinado digitalmente em 17/04/2023 12:29)*  
CARLOS ANDRES REYNA VERA TUDELA  
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR  
DeptM (12.28.01.00.00.63)  
Matrícula: ###336#3

*(Assinado digitalmente em 16/04/2023 11:15)*  
CLAUDIA MAZZA DIAS  
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR  
DeptTL/IM (12.28.01.00.00.90)  
Matrícula: ###126#2

*(Assinado digitalmente em 17/04/2023 10:15)*  
SERGIO DRUMOND VENTURA  
PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR  
DeptM (12.28.01.00.00.63)  
Matrícula: ###228#9

*(Assinado digitalmente em 16/04/2023 23:57)*  
EDGAR BARBOSA LIMA  
ASSINANTE EXTERNO  
CPF: ###.###.597-##

## Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Aos professores do Mestrado em Modelagem Matemática Computacional, em especial ao meu orientador o professor Carlos Reyna.

À minha família, a base para que eu chegasse até aqui.

Aos meus colegas de turma, em especial Renato Queiroz e Bryan Siqueira.

*"Se cheguei até aqui foi porque me  
apoei no ombro dos gigantes."– Isaac ”  
Newton*

SOARES WICHAN, Victor Hugo. **Uma proposta de algoritmo para quadratura autodap-  
tativa e suas aplicações em equações integrais com singularidade.** 2023. 84f. Disserta-  
ção (Mestrado em Modelagem Matemática e Computacional). Instituto de Ciências Exatas,  
Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2023.

Nesse trabalho desenvolve-se um estudo teórico sobre os conceitos e aplicações das inte-  
grais singulares, além de um algoritmo junto com a programação através do programa Matlab®  
com o objetivo de resolver numericamente integrais com algum grau de singularidade . Com  
isso, são revistas algumas formas de resolução para integrais sem singularidade, com singu-  
laridade forte e hipersingulares. São apresentadas a contextualização das equações integrais  
em método de elementos de contorno. Primeiramente é apresentada a quadratura gaussiana que  
funciona muito bem para integrais sem singularidade, ou integrais regulares, para alguns casos  
de integrais com singularidade fraca a mesma possui limitações. Sendo assim, é apresentada  
a quadratura de Kutt para resolução de integrais com singularidade forte, suprimindo uma defici-  
ência do método anterior. Por último é apresentada a quadratura autoadaptativa. Esse método  
por sua vez, tem como objetivo atender os casos de integrais hipersingulares. Tendo conheci-  
mento dessas três quadraturas, foi possível propor um algoritmo que atendesse diferentes casos  
de integração a partir de suas características específicas de cada método.

**Palavras-chave:** Modelagem Matemática, Integrais Singulares, Valor Principal de Cauchy,  
Parte Finita.

## ABSTRACT

SOARES WICHAN, Victor Hugo. **Numerical study and implementation of self-adaptive techniques for solving singular integrals** . 2023. 84p. Dissertation (Master in Mathematical and Computational Modeling). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, Seropédica, RJ, 2023.

In this work, a theoretical study on the concepts and applications of singular integrals is developed, as well as an algorithm along with programming through the Matlab® program with the objective of numerically solving integrals with some degree of singularity. With this, some forms of resolution for non-singularity, strong singularity and hypersingular integrals are reviewed. are approved the contextualization of integral anxieties in the method of boundary elements. The first is to present a Gaussian quadrature that works very well for integrals without singularity, or regular integrals, for some cases of integrals with weak singularity it has a limitation. Thus, Kutt's quadrature is presented for solving integrals with strong singularity, supplying a deficiency of the previous method. Finally, the self-adaptive quadrature is presented. This method, in turn, aims to handle the cases of hypersingular integrals. Having knowledge of these three quadratures, it was possible to propose an algorithm that would meet different integration cases based on the specific characteristics of each method.

**Keywords:** Mathematical Modeling, Singular Integrals, Cauchy Principal Value, Finite Part.

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1	Apresentação do trabalho .....	1
1.2	Breve Histórico .....	2
<b>2</b>	<b>TEORIA DA ELASTICIDADE.....</b>	<b>4</b>
2.1	Caracterização do Estado Plano .....	6
2.2	Estado Plano de Tensão (EPT) .....	6
2.3	Estado Plano de Deformação (EPD) .....	7
2.4	Ações de Domínio .....	9
<b>3</b>	<b>INTRODUÇÃO A ELASTODINÂMICA .....</b>	<b>10</b>
3.1	Vibração Longitudinal em Barras.....	11
3.2	Vibração Transversal em Vigas .....	14
<b>4</b>	<b>O MÉTODO DE ELEMENTO DE CONTORNO E SUA IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA EM PROBLEMAS DE ELASTICIDADE .....</b>	<b>18</b>
4.1	Formulação do MEC na Elasticidade .....	18
4.2	Soluções Fundamentais.....	22
4.3	Tensões nos Pontos Internos .....	22
4.4	Implementação Numérica .....	23
4.5	A Geometria do Elemento .....	24
4.6	Funções de Interpolação .....	27
4.7	Integração Numérica .....	28
<b>5</b>	<b>INTEGRAIS SINGULARES NO MEC .....</b>	<b>31</b>
5.1	Classificação quanto a Singularidade da Integral.....	31
5.2	Integrais Impróprias .....	32
5.3	Valor Principal de Cauchy .....	33
5.4	Parte Finita de Hadamard .....	34
5.5	Delta de Kronecker .....	34
5.6	Delta de Dirac .....	35

5.7	Jacobiano .....	35
5.8	Presença de Equações Singulares em Elementos de Contorno.....	36
<b>6</b>	<b>QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE EM INTEGRAIS SINGULARES .....</b>	<b>38</b>
6.1	Quadratura de Gauss-Legendre.....	38
6.2	Polinômio de Legendre .....	39
6.3	Exemplos numéricos da quadratura de Gauss-Legendre .....	39
6.4	Limitações da Quadratura de Gauss-Legendre para integrais singulares em intervalos simétricos.....	40
6.5	Limitações da Quadratura de Gauss-Legendre para integrais singulares fracas.....	41
6.6	Limitações da Quadratura de Gauss-Legendre para intervalos assimétricos ..	41
<b>7</b>	<b>QUADRATURA DE KUTT .....</b>	<b>43</b>
7.1	Fórmula da Quadratura de Kutt .....	43
7.2	Exemplos da utilização da quadratura de Kutt .....	44
<b>8</b>	<b>QUADRATURA AUTOADAPTATIVA .....</b>	<b>46</b>
8.1	Quadratura Autoadaptativa.....	46
8.2	Exemplos da aplicação da Quadratura Autoadaptativa .....	49
8.3	Quadratura autoadaptativa com quase singularidade dentro do intervalo de integração.....	51
8.4	Limitações da Quadratura Autoadaptativa .....	52
<b>9</b>	<b>ALGORITMO PROPOSTO .....</b>	<b>53</b>
9.1	Tipos de Representação de Algoritmo.....	53
9.1.1	Descrição narrativa .....	54
9.1.2	Fluxograma convencional .....	54
9.1.3	Pseudocódigo .....	55
9.2	Tipos de Dados .....	55
9.2.1	Dados Lógicos .....	55
9.2.2	Definição de Variáveis em Algoritmos .....	55
9.2.3	Árvore de decisão .....	56
9.2.4	Algoritmo proposto .....	57
<b>10</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>62</b>
<b>11</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>64</b>
	<b>APÊNDICEA.....</b>	<b>68</b>
	<b>APÊNDICEB.....</b>	<b>75</b>
	<b>APÊNDICEC.....</b>	<b>80</b>

## Lista de Figuras

Figura 2.1 – Estado Plano de Tensão. Fonte: [TUDELA, 2003].	6
Figura 2.2 – Estado Plano de Deformação. Fonte: [TUDELA, 2003].	8
Figura 3.1 – Onda longitudinal em Barra. Fonte: [TUDELA, 2003].	15
Figura 3.2 – Onda Transversal em Viga. Fonte: [TUDELA, 2003].	17
Figura 4.1 – Geometria retilínea. Fonte: [TUDELA, 2003].	24
Figura 4.2 – Geometria retilínea - elemento diferencial. Fonte: [TUDELA, 2003].	25
Figura 4.3 – Geometria não-retilínea. Fonte: [TUDELA, 2003].	25
Figura 4.4 – Vetor posição e vetores unitários. Fonte: [TUDELA, 2003].	26
Figura 4.5 – Elemento diferencial da curva. Fonte: [TUDELA, 2003].	26
Figura 4.6 – Sistema de coordenadas adimensional. Fonte: [TUDELA, 2003].	28
Figura 4.7 – Tipos de elemento de contorno. a) elemento constante, b) elemento linear, c) elemento quadrático. Fonte: [TUDELA, 2003].	29
Figura 5.1 – Representação do nó fonte e nó campo na malha do MEC. Fonte: Própria	32
Figura 5.2 – Representação gráfica da assíntota. Fonte: Própria	33
Figura 5.3 – Representação gráfica da assíntota. Fonte: Própria	33
Figura 5.4 – Representação gráfica da solução por Valor Principal de Cauchy. Fonte: Própria	34
Figura 5.5 – Aproximação de área através de transformação de variáveis. Fonte: [STEWART, 2013].	35
Figura 5.6 – Vetores para aproximação de área. Fonte: [STEWART, 2013].	36
Figura 8.1 – Vetores para aproximação de área. Fonte: [??]	46
Figura 9.1 – Fluxograma para cálculo de média com condicional para aprovação. Fonte: [OLIVEIRA, 2004] <a href="https://www.dca.ufrn.br/affonso/DCA800/pdf/algoritmosparte1.pdf">https://www.dca.ufrn.br/affonso/DCA800/pdf/algoritmosparte1.pdf</a>	54
Figura 9.2 – Representação dos diversos tipos de dados. Fonte: <a href="https://www.dca.ufrn.br/affonso/DCA800/pdf/algoritmosparte1.pdf">https://www.dca.ufrn.br/affonso/DCA800/pdf/algoritmosparte1.pdf</a>	56
Figura 9.3 – Fluxograma convencional da quadratura de Gauss-Legendre. Fonte: própria	57
Figura 9.4 – Representação programação da quadratura de Kutt. Fonte: própria	58
Figura 9.5 – Representação programação da quadratura autoadaptativa. Fonte: própria	59
Figura 9.6 – Representação detalhada da programação. Fonte: própria	60

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1 – Classificação da singularidade pelo grau $\beta$ . Fonte: [GAO, 2005].....	32
Tabela 6.1 – Tabela de coordenadas e pesos de gauss até $n = 5$ .....	39
Tabela 6.2 – Resultado da integral para diversos valores de $n$ .....	40
Tabela 6.3 – Resultado da integral para diversos valores de $n$ .....	41
Tabela 6.4 – Resultado da integral para diversos valores de $n$ .....	42
Tabela 8.1 – Pontos e pesos de Gauss .....	50
Tabela 8.2 – Resultados da integração numérica para diferentes quantidades de pontos de Gauss - exemplo 01 .....	51
Tabela 8.3 – Resultados da integração numérica para diferentes quantidades de pontos de Gauss - exemplo 02.....	51
Tabela 8.4 – Resultados da integração numérica para diferentes quantidades de pontos de Gauss - exemplo 03.....	51

## Lista de Abreviações e Siglas

MDF	Método de Diferenças Finitas
MEC	Método de Elementos de Contorno
MEF	Método dos Elementos Finitos
EIC	Equações Integrais de Contorno
VPC	Valor Principal de Cauchy
PF	Parte Finita de Haramard

## Lista de Símbolos

$\sigma_{ij}$	Tensor de Tensão
$\varepsilon_{ij}$	Tensor de Deformação
$u_i$	Vetor deslocamento
$\lambda$	Módulo de Compressibilidade ou Primeiro Parâmetro de Lamé
$\mu$	Módulo de Cisalhamento ou Segundo Parâmetro de Lamé
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$E$	Módulo de Young
$G$	Módulo de Elasticidade Transversal
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$p_i$	Vetor força de superfície
$\Gamma$	Contorno do corpo
$\Omega$	Domínio do corpo
$b_j$	Carga de domínio
$\gamma$	Peso específico do material
$g$	Aceleração da gravidade
$\omega$	Velocidade angular
$\rho$	Densidade
$\lambda$	Autovalor
$C$	Matriz constante
$N^e$	Vetor das funções de interpolação
$\phi_i$	Função de interpolação
$\eta$	Coordenada natural
$J^e$	Jacobiano da transformação
$l_j$	Comprimento do elemento j

$n$	Vetor normal ao contorno
$H, G$	Matrizes características do MEC
$\nabla^2$	Operador Laplaciano
$U$	Vetor deslocamento
$\ddot{u}$	Vetor aceleração
$C_s$	Velocidade de propagação da onda de distorção
$A$	Área
$\beta$	Constante
$\beta_r$	Autovalor
$r$	Contador
$x_i$	Direção do eixo cartesiano

Na engenharia moderna, um dos principais focos dos estudos é representar uma situação real através de um modelo que venha descrever com precisão a geometria estudada, forças atuantes, entre outros. Alguns métodos numéricos de modelagem como Método de Diferenças Finitas (MDF)[[BATHE, 2016](#)], Método de Elementos de Contorno (MEC) [[BREBBIA; DOMINGUEZ, 1977](#)] e Método de Elementos Finitos (MEF)[[LEVEQUE, 1955](#)] tem ganhado relevância nas últimas décadas. Embora esses métodos sejam majoritariamente análogos, nesse trabalho será abordado o MEC e sua relação com as integrais singulares.

O MEC transforma as Equações Diferenciais em Equações Integrais de Contorno (EIC), diminuindo assim a quantidade de incógnitas dos problemas quando comparado ao MEF e MDF. Isso torna mais atrativo para determinados problemas de estudos de potencial, deformação ou fratura. Por exemplo, quando se realiza uma modelagem de um problema de fratura, e já existe a suspeita que a fratura ocorrerá no contorno da geometria, torna-se mais atrativo optar pelo MEC do que com os outros métodos.

O objetivo desse trabalho é propor uma implementação da quadratura autoadaptativa para a solução de integrais singulares, que é uma ferramenta que pode ser utilizada em EIC. Com a intenção de alcançar o objetivo que foi determinado, a metodologia adotada nesse trabalho parte em primeiro lugar de um estudo teórico-matemático dos tópicos afins, em segundo lugar, descrevem-se as abordagens numéricas e em terceiro lugar, implementações computacionais (características, organização e funcionamento) e, finalmente, faz-se a validação dos códigos desenvolvidos através da análise de problemas que possuem solução analítica conhecida. A implementação computacional foi realizada através do Software *MATLAB*<sup>®</sup>.

## 1.1 Apresentação do trabalho

No Capítulo 1, é realizada uma revisão bibliográfica, apresentando fontes de informação relevantes para o entendimento do trabalho. São revisados estudos anteriores, trabalhos relacionados e teorias fundamentais que sustentam o desenvolvimento desta dissertação.

O Capítulo 2 apresenta a teoria da elasticidade, abordando os conceitos fundamentais e as equações que governam o comportamento elástico de materiais. São revisados os princípios básicos da mecânica dos sólidos necessários para o entendimento do método de elementos de contorno.

Já o Capítulo 3 introduz o tema da elastodinâmica, apresentando conceitos e fundamentos relacionados ao comportamento dinâmico de estruturas elásticas. São discutidos os fenômenos de propagação de ondas e ressonâncias em estruturas submetidas a carregamentos

dinâmicos.

No Capítulo 4, é explicado o método de elementos de contorno, abordando suas implementações numéricas. São apresentados os princípios e conceitos básicos deste método, bem como as técnicas de discretização, formulações matemáticas e algoritmos utilizados na sua implementação computacional.

O Capítulo 5 contextualiza as integrais singulares no método de elementos de contorno, apresentando sua importância e desafios na resolução numérica. São discutidos os tipos de integrais singulares encontradas em problemas de contorno, suas características e métodos de resolução.

No Capítulo 6, é apresentada a quadratura de Gauss-Legendre aplicada em integrais singulares, juntamente com suas limitações. São discutidos os princípios e fundamentos desta técnica numérica de integração, bem como suas aplicações e restrições na resolução de integrais singulares em problemas de contorno.

O Capítulo 7 traz a quadratura de Kutt e suas aplicações em integrais singulares fortes. São apresentados os conceitos e fundamentos desta técnica de integração, juntamente com exemplos de sua aplicação em problemas de contorno que envolvem integrais singulares fortes.

No Capítulo 8, é apresentada a quadratura autoadaptativa e suas aplicações em integrais com hipersingularidade. São discutidos os princípios e conceitos desta técnica avançada de integração, juntamente com exemplos de sua aplicação em problemas de contorno que envolvem integrais singulares.

O Capítulo 9 apresenta o algoritmo desenvolvido nesta dissertação, que tem como objetivo atender os casos de integração de maneira semiautomática, utilizando a quadratura de Gauss-Legendre, a quadratura de Kutt e a quadratura autoadaptativa. São detalhados os passos e procedimentos do algoritmo proposto, juntamente com sua validação e resultados obtidos.

Por fim, o Capítulo 10 relata as conclusões e aplicações da programação elaborada na dissertação, apresentando uma síntese dos principais resultados obtidos, suas contribuições para o campo de estudo e possíveis direções para futuras pesquisas.

## 1.2 Breve Histórico

O termo Método do Elementos de Contorno foi usado pela primeira vez em 1977 em um artigo de Brebbia e Dominguez [BREBBIA; DOMINGUEZ, 1977]. Brebbia apresentou o Método dos Elementos de Contorno usando a formulação de resíduos ponderados [BREBBIA, 1978]. O desenvolvimento de soluções de problemas de valor limite usando funções definidas em domínios locais com baixo grau de continuidade foi fortemente influenciado pelos princípios variacionais e resíduos ponderados na década de 60. Também é relevante dar crédito a [REISSNER, 1950] e [WASHIZU, 1968], que foram os pioneiros no uso de declarações variacionais mistas que permitiam a flexibilidade em escolher funções localizadas. Para lidar com os problemas não conservativos e problemas dependentes do tempo, a estratégia mudou da abordagem variacional para o método de resíduos ponderados combinado com o conceito de formas fracas. [BREBBIA, 1978] mostrou que era possível gerar um espectro de métodos variando de elementos finitos a elementos de contorno.

Apesar do MEC ser relativamente novo quando comparado ao MDF e MEF, a base para sua consolidação está nas equações integrais que têm sido estudadas desde o início do século XIX. [FREDHOLM, 1903] foi o primeiro a propor a teoria clássica das equações integrais sendo o primeiro a chegar na solução de problemas de valores de contorno em elastostática a partir de integração linear. No entanto, a solução era de difícil compreensão pelos métodos serem ditos como indiretos.

[JASWON, 1963] e [SYMM, 1963] desenvolveram as equações integrais de Fredholm e suas aplicações a problemas de potencial bidimensionais. Os trabalhos desses autores e suas aplicações em problemas de teoria da elasticidade, considerando a semelhança entre as equações básicas que governam os problemas de potencial e de elasticidade.

[RIZZO, 1967] apud [BECKER, 1992] apresentaram a análise numérica para as equações integrais de contorno o qual continha aplicações para problemas bidimensionais de elasticidade. Nesse trabalho implementações computacionais e uma aproximação numérica para a resolução do problema foram apresentadas. Sendo assim, foi identificado que os núcleos singulares que aparecem nas EIC demonstram maiores complexidades para problemas de elasticidade que para problemas de potencial e que as integrais podem ser determinadas no âmbito do Valor Principal de Cauchy (VPC) devem ter uma atenção especial. [CRUSE, 1969] apud [BREBBIA; DOMINGUEZ, 1977], estendeu a formulação para elasticidade tridimensional.

No âmbito do Método de Elementos de Contorno, integrais com o integrando com alguma parcela de singularidade são bem comuns de aparecerem. Para [HUANG; CRUSE, 1994], a manipulação de integrais singulares é consideravelmente crítica. Os dois autores propuseram a seguinte classificação para os núcleos das integrais como: quase-singulares, fracamente singulares, fortemente singulares e hipersingulares.

Após [RIZZO, 1967], uma grande parte dos trabalhos realizados voltaram o foco para resoluções eficazes e confiáveis para integrais singulares. Conforme [SOUZA, 2007], para os casos bidimensionais, a singularidade do integrando da integral apresenta os termos  $\ln(r)$  e  $\frac{1}{r}$ .

No MEC a imensa maioria dos problemas dentro dessa área apresentavam equações integrais sem soluções analíticas, por isso o estudo dos métodos numéricos de integração foi de grande contribuição. Em muitos casos as integrais no MEC não são triviais e envolvem integrando com parcela singular ou quase-singular. A técnica de manipular as integrais singulares na análise dos elementos de contorno é crítica. [KUTT, 1975b] apresentou o trabalho "Quadrature formulae for finite part integrals" que possibilitou uma abordagem numérica para problemas do tipo valor principal de Cauchy. Esse tipo de problema está muito presente dentro do MEC, em especial nos problemas de potencial.

Após publicar seu primeiro livro sobre MEC, [BREBBIA, 1978] além de várias conferências e trabalhos publicados que puderam tornar o Método dos Elementos de Contorno mais popular em virtude das diversas áreas de aplicações como: não-linearidade física e geométrica; plasticidade; viscoelasticidade; viscoplasticidade; mecânica da fratura; mecânica dos solos e das rochas; contato; percolação e outros.

[TELLES, 1987] propôs o trabalho "A self-adaptive co-ordinate transformation for efficient numerical evaluation of general boundary element integrals", onde nesse trazia uma outra proposta de transformação para distribuição de pontos internos que auto se adaptavam as condições da singularidade do problema estudado.

[NADA, a] apresentou uma nova proposta de transformações não-lineares de melhoria considerável em relação à aplicação das transformações utilizadas na quadratura autoadaptativa para problemas em MEC. A transformação novamente agrupa os pontos em direção ao ponto quase singular, mas não tem um jacobiano zero. A implementação das transformações é direta e pode ser facilmente incluída nos programas do método de elemento de contorno existentes.

## Teoria da Elasticidade

Neste capítulo, será estudada a teoria da elasticidade e sua relação com a equação de Navier. A teoria da elasticidade é uma área da física que estuda como os materiais se deformam e se recuperam sob a ação de forças externas. Ela é essencial para entender o comportamento de materiais como metais, plásticos, borrachas e outros materiais que são usados em engenharia e ciência. A equação de Navier é uma equação que descreve o movimento de fluidos viscosos. Ela leva em conta a viscosidade do fluido e é usada para prever o movimento de fluidos em uma ampla variedade de situações. A relação entre a teoria da elasticidade e a equação de Navier vem da aplicação da mecânica dos sólidos às equações de movimento dos fluidos, permitindo a análise de como os materiais deformáveis afetam o movimento dos fluidos que os rodeiam.

Ao estudar a teoria da elasticidade e sua relação com a equação de Navier, é possível entender melhor como os materiais se comportam em situações em que estão sujeitos a forças externas e como esses materiais afetam o movimento dos fluidos que os rodeiam. Este capítulo está de acordo com os estudos apresentados em [TIMOSHENKO; GOODIER, 1970]. O equilíbrio estático de forças no corpo requer que se cumpram as equações de Equilíbrio:

$$\sigma_{ij,i} = 0, \text{ em } \Omega \quad (2.1)$$

$$\sigma_{ij} = p_j, \text{ em } \Gamma \quad (2.2)$$

O equilíbrio de momentos impõe:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.3)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o Tensor das Tensões.

Como pode-se observar, a equação (2.1) corresponde ao equilíbrio no domínio ou interior do corpo, e a equação (2.2) corresponde ao equilíbrio na superfície externa ou contorno. Um corpo sob a ação de forças é deslocado da sua configuração original. Se se considerar o deslocamento  $u_i$  suficientemente pequeno tal que o quadrado e o produto das suas derivadas parciais sejam desprezíveis, pode-se representar a deformação do corpo com ajuda da equação conhecida como Equação linear da Cinemática, para pequenas deformações:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.4)$$

onde  $\varepsilon_{ij}$  é a expressão indicial do tensor de Green.

A equação (2.4) representa, na realidade, um conjunto de seis equações com três incógnitas. Isso indica que as seis componentes de deformação não podem ser independentes, e

devem satisfazer condições adicionais, conhecidas como equações de compatibilidade de deformações e que, de um conjunto de 81 equações originais, definidas pela equação:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (2.5)$$

ficam reduzidas a 3 equações independentes, pelas considerações anteriormente introduzidas. As relações lineares entre tensões e deformações, conhecidas como Lei de Hooke, são definidas pelas equações constitutivas:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.6)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são conhecidas como as constantes de Lamé. Com as simplificações introduzidas pode-se representar estas constantes físicas  $E$  e  $\mu$  ou  $G$  e  $\nu$  segundo as seguintes relações:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.7)$$

$$\lambda = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.8)$$

Substituindo as equações (2.7) e (2.8) em (2.6) tem-se:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (2.9)$$

Ou de forma inversa por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left( \sigma_{ij} - \frac{\nu}{(1+\nu)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.10)$$

As equações (2.1), (2.4) e (2.9) representam um conjunto de 8 equações para 8 incógnitas (em 2D). O procedimento a seguir é substituir a equação (2.4) na equação (2.9) para obter a tensão em função do gradiente dos deslocamentos, e depois, substituir este resultado na equação (2.1) para obter a equação diferencial parcial de segunda ordem para os deslocamentos. O resultado destas operações é conhecido como Equação de Navier e pode ser escrita na forma seguinte:

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)} u_{k,kj} = 0, \text{ em } \Omega \quad (2.11)$$

onde  $u_j$  é o vetor deslocamento. Procedendo da mesma forma, porém, substituindo a equação (2.4) na equação (2.9) como anteriormente e agora substituindo este resultado na equação (2.2), obtém-se uma equação diferencial de primeira ordem, que é válida para o contorno do corpo:

$$\frac{2G\nu}{(1-2\nu)} u_{k,k} n_i + G(u_{i,j} + u_{j,i}) n_j = p_i, \text{ em } \Gamma \quad (2.12)$$

Observar que a solução da Equação de Navier não necessita das equações de compatibilidade de deformações, pois é uma formulação de deslocamentos. O procedimento para a obtenção das tensões consiste em se conseguir, primeiramente, a solução da equação (2.11). Conhecido o campo de deslocamentos, utiliza-se a equação (2.4) para o cálculo das deformações, e finalmente, a equação (2.9) para o cálculo das tensões. A equação (2.12) é utilizada para que sejam satisfeitas as condições de contorno no que diz respeito a forças na superfície.

## 2.1 Caracterização do Estado Plano

Toda a análise feita até o momento é considerando o espaço tridimensional, assim, antes de comentar maiores considerações sobre o estado geral de tensões e deformações bidimensional, pode-se obter uma considerável compreensão e simplificação levando em conta um estado menos complicado. Para isso, existem algumas classes de problemas da engenharia que, satisfazendo determinadas condições de geometria e carregamento, podem ser estudadas no espaço bidimensional. Até este instante sempre foi considerado o estado tridimensional, mas pela redução da dimensão do problema, em todas as equações para estado plano, os índices livres e mudos da notação indicial variam de 1 a 2, para designar componentes ou derivações em relação às direções  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente. Estudam-se duas classes, conhecidas como Estado Plano de Tensão e Estado Plano de Deformação.

## 2.2 Estado Plano de Tensão (EPT)

Pode-se afirmar que para um Estado Plano de Tensão duas faces paralelas de um elemento diferencial são consideradas como livres de tensão. Para fins de análise, considera-se estas faces serem perpendiculares ao eixo  $x_3$ .

Na figura (2.1) tem-se uma chapa fina carregada por forças no contorno, e estas estão contidas no plano da chapa e distribuídas uniformemente ao longo da espessura.

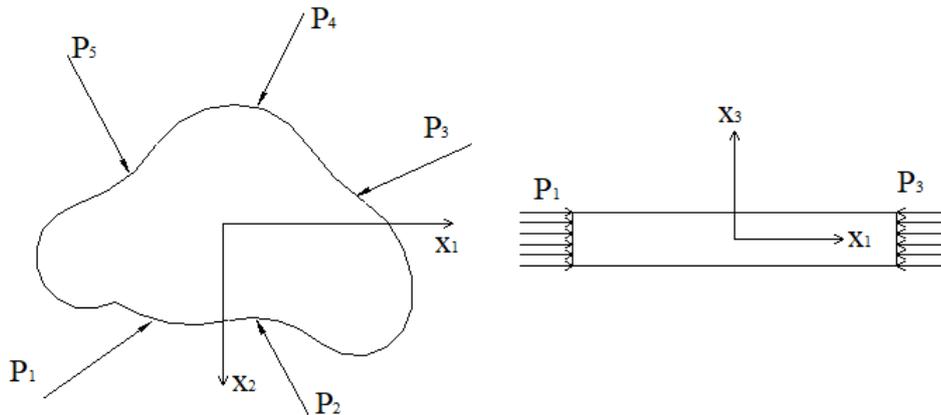


Figura 2.1 – Estado Plano de Tensão. Fonte: [TUDELA, 2003].

Não existem restrições de deslocamentos na direção normal ao plano médio da chapa, de modo que a tensão nesta direção é nula em toda a chapa. Também são nulas as tensões cisalhantes nas superfícies laterais, bem como no interior da chapa, exceto, nesse caso, o par contido no plano da chapa.

As componentes de tensão presentes para a análise das tensões no plano serão  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  e  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ .

O Estado Plano de Tensão pode ser definido, de modo matemático, pelas equações :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x_1, x_2) \quad (2.13)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0 \quad (2.14)$$

Esta última expressão, equação (2.14), implica em que duas componentes de deformação são nulas, ou seja:

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad (2.15)$$

Com esta informação inicial e fazendo uso da equação (2.4) tem-se que:

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} \quad (2.16)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) \quad (2.17)$$

$$\varepsilon_{22} = u_{2,2} \quad (2.18)$$

Conhecidas as componentes de deformação, pode-se obter, diretamente, as expressões para as tensões, com o uso da equação (2.9).

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) \quad (2.19)$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{12} \quad (2.20)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)}(\nu\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (2.21)$$

E finalmente da equação (2.10) tem-se:

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (2.22)$$

Desta forma pode-se calcular os deslocamentos, as deformações e as componentes de tensão no corpo estudado.

### 2.3 Estado Plano de Deformação (EPD)

Enquanto no Estado Plano de Tensão a tensão  $\sigma_{33}$  é nula, no caso do Estado Plano de Deformação a condição a cumprir é a de que  $\varepsilon_{33}$  tem que ser nula.

O estado fica caracterizado em uma peça, como um cilindro longo onde a dimensão na direção normal à seção reta é muito maior que nas outras. O carregamento é normal e constante em relação ao eixo longitudinal, de modo que todas as seções transversais estão igualmente solicitadas. Na figura (2.2) pode-se observar a forma do EPD.

Os extremos do elemento são fixados de tal forma que o deslocamento axial é impedido, e desta forma concluí-se que todas as seções transversais não possuem deslocamento axial.

Pelo princípio de Saint-Venant o efeito das restrições só é importante nos extremos e a medida que deles se afastam as seções estão sob o mesmo estado de tensão. Sendo assim, é necessário estudar uma seção de espessura unitária, reduzindo a dimensão do problema.

O Estado Plano de Deformação pode ser definido, de modo matemático, pelas equações abaixo:

$$u_j = U_j(x_1, x_2) \quad (2.23)$$

$$u_3 = 0 \quad (2.24)$$

Assim, temos que três componentes de deformação são nulas:

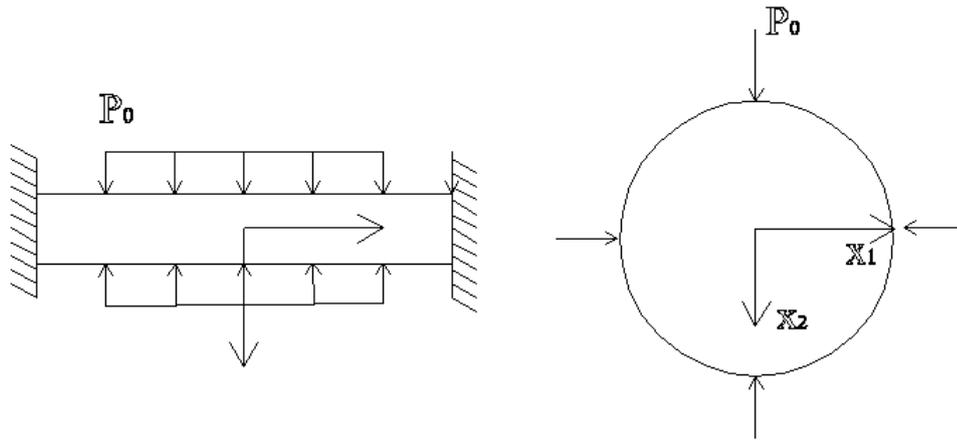


Figura 2.2 – Estado Plano de Deformação. Fonte: [TUDELA, 2003].

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \quad (2.25)$$

naturalmente, através das equações (2.9),

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (2.26)$$

Da equação (2.4) calculamos as mesmas equações (2.16), (2.17) e (2.18). Sendo assim, calcula-se;

$$\sigma_{11} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} \right] \quad (2.27)$$

$$\sigma_{12} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{12} \quad (2.28)$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \nu\varepsilon_{11} + (1-\nu)\varepsilon_{22} \right] \quad (2.29)$$

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (2.30)$$

Observe-se que as equações do Estado Plano de Tensão e Deformação são semelhantes, e é possível passar de um conjunto de equações para o outro. As equações do EPT são obtidas a partir do EPD, com as substituições abaixo:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{(1+\nu)} \quad (2.31)$$

$$\bar{E} = E(1-\bar{\nu}^2) \quad (2.32)$$

Os valores de  $\bar{\nu}$  e  $\bar{E}$  não tem um significado real, é somente um recurso matemático para o aproveitamento das formulas do EPD para ambos os casos. A vantagem principal aparece na implementação computacional, por permitir trabalhar apenas com um conjunto de equações para os dois tipos de estado plano.

## 2.4 Ações de Domínio

Nas formulações vistas neste capítulo não se consideraram as ações de domínio. Neste item faz-se uma breve descrição de casos onde a carga de domínio é considerada.

Tem-se três casos específicos de carga de domínio: a primeira corresponde a problemas estacionários, a segunda está relacionada a processos de transformação e transporte de energia, e a terceira caracteriza um problema de autovalor. A expressão de um problema de ações de domínio mais comum é aquela que considera a ação da força da gravidade, seja como peso próprio ou como força centrífuga. A equação (2.33) mostra a representação da equação de equilíbrio estático de forças para peso próprio:

$$\sigma_{i,j,j} + b_j = 0, \text{ em } \Omega \quad (2.33)$$

e

$$b_j = -\gamma g \quad (2.34)$$

onde  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\gamma$  é o peso específico do material. No caso de corpos homogêneos o peso próprio vai ser constante em todo o domínio.

Para a força centrífuga tem-se a mesma equação (2.33) onde:

$$b_j = \gamma \omega^2 x_j \quad (2.35)$$

e sabendo que  $x_j$  é a direção coordenada,  $\omega$  é a velocidade angular do corpo.

Outro exemplo importante neste trabalho está relacionado à consideração da inércia do sistema. Os problemas de dinâmica e propagação de ondas são típicos. Nestes casos:

$$b_j = \rho \ddot{u}_j \quad (2.36)$$

Os problemas de autovalor são casos particulares da equação (2.36), onde considera-se uma proporcionalidade dada entre os deslocamentos e as acelerações no sistema.

Ou seja:

$$\ddot{u}_j = -\lambda u_j \quad (2.37)$$

Assim,

$$b_j = -\rho \lambda u_j \quad (2.38)$$

## Introdução a Elastodinâmica

Esse capítulo é baseado nos estudos de [TIMOSHENKO; GOODIER, 1970]. A obra é uma referência clássica na área de mecânica dos materiais e apresenta uma abordagem teórica e prática sobre o comportamento de sólidos submetidos a diversas cargas, incluindo tração, compressão e flexão. O estudo do caso dinâmico é praticamente uma extensão do caso estático, já estudado no Capítulo 2. Por este motivo só precisam-se acrescentar as forças de inércia do corpo.

Inicialmente tome-se a equação (2.33) como referência:

$$\sigma_{ij,i} + b_j = 0 \quad , \text{ em } \Omega \quad (3.1)$$

que representa o equilíbrio estático de forças no corpo.

Considerando-se o corpo submetido a um campo de acelerações lineares, a equação (2.1) pode ser estendida para a análise dinâmica, tomando-se forças de inércia com base no Princípio de d'Alambert. Pode-se, então, rescrever a equação (3.1) na forma:

$$\sigma_{ij,i} + b_j = \rho \ddot{u}_j \quad (3.2)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do corpo e  $b_j$  passa a representar quaisquer outras ações de campo.

Este corpo sob o efeito de um campo de forças sofre deformações devido a deslocamentos  $u_i$  suficientemente pequenos de tal forma que o quadrado e o produto de suas derivadas parciais sejam desprezíveis. Assim da Equação Cinemática:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.3)$$

São válidas as equações constitutivas definidas na equação (2.6) e repetidas aqui por conveniência, a Lei de Hooke:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.4)$$

Finalmente a Equação de Navier pode ser escrita da forma seguinte:

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{(1-2\nu)} u_{k,kj} + b_j = \rho \ddot{u}_j \quad (3.5)$$

O corpo se relaciona mecanicamente com o meio no qual está, de tal forma que o campo de deslocamentos precisa estar em conformidade com as restrições ou imposições existentes nas

suas fronteiras. Este tipo de condição, denominada condição de contorno geométrica, é dada por:

$$u_i(x_i, t) = \bar{u}_i(x_i, t) \text{ , em } \Gamma_u \quad (3.6)$$

onde  $x_i$  são coordenadas de um ponto  $x$  do contorno ;  $t$  é o tempo ,  $\Gamma_u$  representa o contorno do corpo onde são impostas as condições de deslocamentos prescritos e  $\Gamma_p$  representa o contorno onde são impostas as condições de tensões;  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$  e  $\Gamma_u \cap \Gamma_p = \emptyset$ .

Da mesma forma existe um campo de tensões prescritas no contorno. Esta condição, denominada condição de contorno mecânica, é dada em termos da prescrição do vetor tensão  $p$  nos pontos de contorno, assim:

$$\sigma_{ji}(x_i, t)n_j(x_j) = p_i(x_i, t) \text{ , em } \Gamma_p \quad (3.7)$$

onde  $n_j$  é o cosseno diretor entre a normal ao contorno e a direção  $j$  no ponto  $x_i$  e  $\Gamma_p$  representa o contorno do corpo onde são prescritas as tensões.

É conveniente fazer algumas considerações na equação de Navier, equação (3.2), de tal forma a simplificá-la com condições mais favoráveis para o desenvolvimento dos conceitos.

Considere-se em primeiro lugar outras forças de campo nulas, de tal forma que:

$$Gu_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,kj} = \rho\ddot{u}_j \quad (3.8)$$

Pode-se admitir também que as solitações aplicadas sejam tais que o estado de deformação consiste exclusivamente de distorção e rotação, assim:

$$u_{i,i} = 0 \quad (3.9)$$

Desta forma a equação de Navier fica como segue:

$$Gu_{j,kk} = \rho\ddot{u}_j \quad (3.10)$$

ou melhor:

$$u_{j,kk} = \frac{\rho}{G}\ddot{u}_j \quad (3.11)$$

Nestas condições pode-se afirmar que as ondas produzidas são ondas de distorção, e sua velocidade de propagação é dada por:

$$C_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (3.12)$$

É conveniente mostrar a seguir as formulações para alguns casos práticos como o de ondas longitudinais em barras e ondas transversais em vigas.

### 3.1 Vibração Longitudinal em Barras

Para estudar a vibração longitudinal em barras toma-se a equação (3.8).

Considere-se um movimento longitudinal na barra, de tal forma que a hipótese do problema considera o rotacional nulo com  $\nu = 0$ .

Desta forma a equação (3.8) fica da forma seguinte:

$$Gu_{j,kk} + Gu_{k,kj} = \rho \ddot{u}_j \quad (3.13)$$

Expandindo a equação (3.13) para os eixos coordenados x, y, z, tem-se:

$$G \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) + G \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_1} \right) = \rho \ddot{u}_1 \quad (3.14)$$

$$G \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) + G \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3 \partial x_2} \right) = \rho \ddot{u}_2 \quad (3.15)$$

$$G \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) + G \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) = \rho \ddot{u}_3 \quad (3.16)$$

Se o rotacional é nulo, indicando ausência de cisalhamento, sabe-se que as seguintes propriedades são válidas:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 ; \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0 ; \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} = 0 \quad (3.17)$$

Derivando a primeira parcela da equação (3.17) em relação a  $x_2$ :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (3.18)$$

Da mesma forma para a terceira parcela da equação (3.17) em relação a  $x_3$ :

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} \quad (3.19)$$

Assim, substituindo as equações (3.18) e (3.19) na equação (3.14) tem-se:

$$2G \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) = \rho \ddot{u}_1 \quad (3.20)$$

Da mesma forma, trabalha-se para as equações (3.15) e (3.16), e tem-se:

$$2G \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right) = \rho \ddot{u}_2 \quad (3.21)$$

$$2G \left( \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right) = \rho \ddot{u}_3 \quad (3.22)$$

Assim, em notação indicial fica:

$$2Gu_{j,kk} = \rho \ddot{u}_j \quad (3.23)$$

Da equação (2.7) para  $v = 0$ , tem-se:

$$2G = E \quad (3.24)$$

e substituindo na equação (3.23) para obter:

$$Eu_{j,kk} = \rho \ddot{u}_j \quad (3.25)$$

Também, lembrando que:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{Ae} = \frac{m}{A}, e = 1 \quad (3.26)$$

Considerando  $u_1 = U$ , a direção primária de deslocamento e como considera-se o coeficiente de Poisson nulo, tem-se:  $u_2 = u_3 = 0$ . Desta forma, a equação diferencial para o movimento longitudinal numa barra está mostrada na equação (3.27), onde  $U(x, t)$  é o deslocamento axial, assim:

$$EA \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} \quad 0 < x < L \quad (3.27)$$

Se a barra esta fixada em  $x = 0$ :

$$U(0, t) = 0 \quad (3.28)$$

e em  $x = L$  não existe restrição ao movimento, assim:

$$EA \left. \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.29)$$

A equação (3.27) representa a equação diferencial de uma oscilação harmônica.

Define-se  $\omega$  como a frequência natural circular do sistema e é medido em radianos por segundo.

A solução de um problema harmônico é dado por:

$$U(x, t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (3.30)$$

onde A e B são constantes que dependem das condições iniciais. Assim, derivando a equação (3.30) no tempo, tem-se:

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = -A \omega \sin \omega t + B \omega \cos \omega t \quad (3.31)$$

E derivando uma vez mais no tempo:

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = -A \omega^2 \cos \omega t - B \omega^2 \sin \omega t \quad (3.32)$$

e colocando em evidencia  $-\omega^2$  na equação (3.32):

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = \omega^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad (3.33)$$

A parcela entre parêntesis do lado direito corresponde à equação (3.30) desta forma substitui-se na equação (3.33):

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 U(x, t) \quad (3.34)$$

Assim, substituindo a equação (3.34) na equação (3.27), fica:

$$EA \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = \omega^2 m U(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (3.35)$$

com as condições de contorno:

$$U(0) = 0 \quad (3.36)$$

$$EA \frac{dU(x)}{dx} \Big|_{x=l} = 0 \quad (3.37)$$

Da mesma forma que comentou-se anteriormente, considera-se uma barra homogênea e o interesse é calcular os modos e frequências naturais do sistema. Assim o problema do autovalor pode-se reduzir à solução da seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} + \beta^2 U(x) = 0 \quad (3.38)$$

onde:

$$\beta^2 = \omega^2 \frac{m}{EA} \quad (3.39)$$

com as mesmas condições de contorno dadas pela equações (3.36) e (3.37).

A solução da equação (3.38) é da forma:

$$U(x) = C_1 \text{sen}(\beta x) = C_2 \text{cos}(\beta x) \quad (3.40)$$

Aplicando a condição de contorno dada pela equação (3.36) temos que  $C_2 = 0$ , e da equação (3.37) é válida a seguinte expressão:

$$\text{cos}(\beta L) = 0 \quad (3.41)$$

de onde pode-se obter os autovalores:

$$\beta_r = (2r - 1) \frac{\pi}{2L} \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (3.42)$$

E a frequência natural do sistema é:

$$\omega_r = \beta_r \sqrt{\frac{EA}{m}} = (2r - 1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \quad r = 1, 2, 3, \dots \quad (3.43)$$

Na figura (3.1) apresenta-se um resumo dos conceitos vistos neste item, e pode-se observar a forma dos três primeiros modos de vibração.

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \pi \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \quad \omega_2 = \frac{3}{2} \pi \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \quad \omega_3 = \frac{5}{2} \pi \sqrt{\frac{EA}{mL^2}} \quad (3.44)$$

### 3.2 Vibração Transversal em Vigas

A equação diferencial mais comum no caso de vibração transversal de vigas não pode ser gerada a partir da Equação de Navier, pois uma série de hipóteses simplificadoras são consideradas usualmente. Com base na equação (3.25), considerando as premissas de Bernoulli para as seções transversais de uma viga:

$$u_1 = -x_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (3.45)$$

$$\text{Dai: } \varepsilon_{11} = \frac{du_1}{dx_1} = -x_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}$$

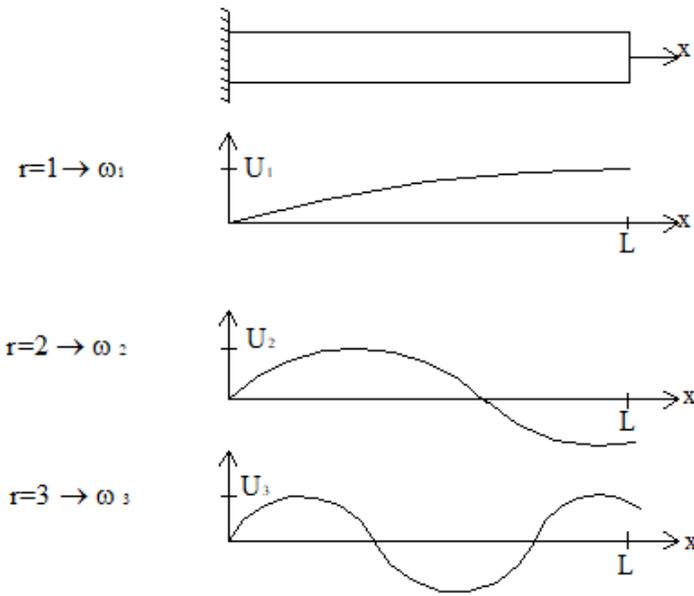


Figura 3.1 – Onda longitudinal em Barra. Fonte: [TUDELA, 2003].

Da teoria tradicional de vigas:

$$\sigma = \frac{Mx_2}{I} \rightarrow \frac{d^2 u_2}{dx_1^2} = -\frac{M}{EI} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x_1} = Q \quad (3.47)$$

onde  $Q = A\bar{y}$ ,  $I$  é o Momento de Inércia,  $E$  é o Módulo de Young. Da análise dinâmica, pode-se provar que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = p - q \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad (3.48)$$

logo, substituindo as equações (3.46) e (3.47) na equação (3.48), chega-se:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( EI \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right) + \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = p \quad (3.49)$$

e fazendo:

$$u_2 = Y \text{sen}(\omega t) \quad (3.50)$$

Assim:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] = \omega^2 m Y(x) + p \quad 0 < x < L \quad (3.51)$$

com as seguintes condições de contorno para uma viga engastada numa das extremidades ( $x = 0$ ):

$$Y(0) = 0 \quad (3.52)$$

$$\left. \frac{dY(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.53)$$

$$EI \left. \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right|_{x=L} = 0 \quad (3.54)$$

$$\left. \frac{d}{dx} \left[ EI \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \right] \right|_{x=L} = 0 \quad (3.55)$$

Lembrando que as equações (3.52) e (3.53) são as condições de contorno essenciais e as equações (3.54) e (3.55) são as condições de contorno naturais.

Considere o caso em que a viga está fixa em  $x = 0$  e livre em  $x = L$ , e novamente tome um elemento com propriedades homogêneas em toda a sua extensão.

Desta forma a equação (3.51) pode ser escrita da forma seguinte:

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - \beta^4 Y(x) = 0 \quad (3.56)$$

onde:

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 m}{EI} \quad (3.57)$$

com as condições de contorno essenciais dadas pelas equações (3.52 a 3.55), a solução final da equação (3.56) fica:

$$Y(x) = C_1 \text{sen}(\beta x) + C_2 \text{cos}(\beta x) + C_3 \text{senh}(\beta x) + C_4 \text{cosh}(\beta x) \quad (3.58)$$

Fazendo uso das condições de contorno dadas pelas equações (3.52) a (3.55) obtém-se uma expressão que define as frequências naturais do sistema:

$$\text{cos}(\beta L) \text{cosh}(\beta L) = -1 \quad (3.59)$$

Esta equação (3.59) pode ser resolvida numericamente e existem infinitas soluções para  $\beta_r$ . Com os autovalores  $\beta_r$  calculados, pode-se conhecer os correspondentes modos de vibração pela expressão:

$$Y(x) = A[\text{sen}(\beta_r L) - \text{senh}(\beta_r L)](\text{sen}(\beta_r x) - \text{senh}(\beta_r x) + \text{cos}(\beta_r L) + \text{cosh}(\beta_r L))(\text{cos}(\beta_r x) - \text{cosh}(\beta_r x)) \quad (3.60)$$

é bom notar que estes valores não estão normalizados. Na figura (3.2) pode-se observar os primeiros três modos de vibração, e as correspondentes expressões para o calculo das frequências naturais.

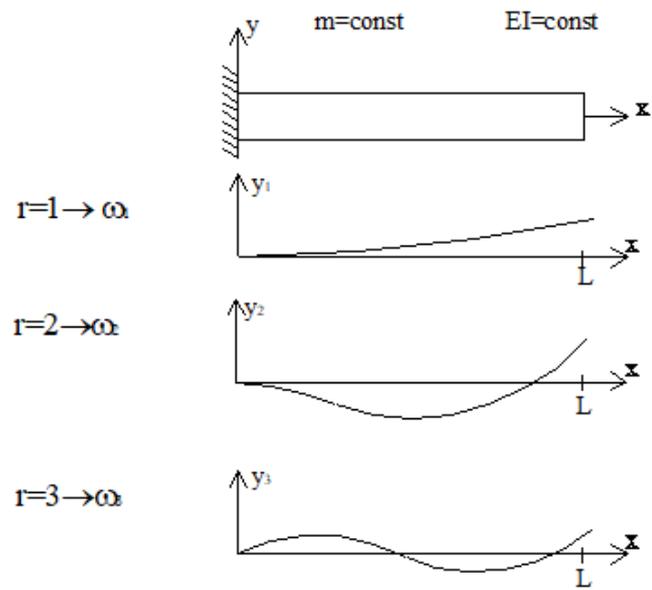


Figura 3.2 – Onda Transversal em Viga. Fonte: [TUDELA, 2003].

$$\omega_1 = 1,875^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}, \quad \omega_2 = 4,694^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}, \quad \omega_3 = 7,855^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}}$$

## O Método de Elemento de Contorno e sua Implementação Numérica em Problemas de Elasticidade

### 4.1 Formulação do MEC na Elasticidade

Os problemas pertinentes à mecânica dos sólidos são, na sua maior parte, problemas de campo vetorial, pois a cada ponto estão associadas grandezas cuja definição requer a identificação de módulo, direção e sentido, como no caso dos deslocamentos.

Estes problemas são estudados por teorias simplificadas, como o caso da elasticidade linear, onde são consideradas algumas simplificações ou idealizações, como é o caso de considerar o problema estático, material elástico, linear e homogêneo, entre outras.

Inicia-se o estudo rescrevendo-se a Equação de Navier, vista na equação (2.11) e reescrita aqui sem a carga de domínio,

$$G u_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,kj} = 0 \quad , \text{ em } \Omega \quad (4.1)$$

Mas existe outra forma de poder escrever esta equação, correspondendo àquela que utiliza as constantes de Lamé, que se relacionam com as constantes físicas usuais como:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.2)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2\nu G}{(1-2\nu)} \quad (4.3)$$

Assim, a Equação de Navier é escrita da forma seguinte:

$$\mu u_{j,ii} + (\lambda + \mu) u_{i,ij} = 0 \quad (4.4)$$

A formulação tradicional do MEC consiste em ponderar a equação (4.4) por uma função  $u_j^*$ , com características especiais e depois integrá-la no domínio. Por meio de um tratamento matemático adequado, transforma-se esta equação integral de domínio em uma equação integral de contorno.

É interessante notar que a função  $u_j^*$ , chamada de solução fundamental, é a solução de um problema especial correlato (de elasticidade) cujo domínio é infinito ou semi-infinito, onde as forças de corpo são ações concentradas no domínio, atuando nas direções coordenadas, assim:

$$\mu u_{j,ii}^* + (\lambda + \mu) u_{i,ij}^* = 0 \quad (4.5)$$

onde:

$$b_j = \Delta(\xi, x) P_j, \quad P_j = 1 \quad (4.6)$$

e  $\Delta(\xi, x)$  é a função Delta de Dirac,  $\xi$  representa o ponto fonte de aplicação da carga,  $x$  é ponto campo.

A função Delta de Dirac possui as seguintes propriedades:

$$a) \Delta(\xi, x) = 0, \text{ se } \xi \neq x \quad (4.7)$$

$$b) \Delta(\xi, x) = \infty, \text{ se } \xi = x \quad (4.8)$$

$$c) \int_{\Omega} f(x) \Delta(\xi, x) d\Omega = f(\xi), \text{ se } \xi \in \Omega \quad (4.9)$$

Então, tomando a equação (4.4), ponderando-a e integrando-a no domínio, tem-se a expressão seguinte,

$$\mu \int_{\Omega} u_{j,ii} u_j^* d\Omega + (\lambda + \mu) \int_{\Omega} u_{i,ij} u_j^* d\Omega = 0 \quad (4.10)$$

O procedimento a seguir utiliza preferencialmente a propriedade da integração por partes:

$$\int_{\Omega} u v_{,i} d\Omega = \int_{\Omega} (u v)_{,i} d\Omega - \int_{\Gamma} u v_{,i} n_i d\Gamma \quad (4.11)$$

e do teorema da divergência:

$$\int_{\Omega} (u_{,i} u^*)_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} u_{,i} u^* n_i d\Gamma \quad (4.12)$$

Desenvolvendo a primeira parcela da equação (4.10):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{j,ii} u_j^* d\Omega &= \int_{\Omega} [(u_{j,i} u_j^*)_{,i} - (u_{j,i} u_{j,i}^*)] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} [(u_{j,i} u_j^*)_{,i} - (u_j u_{j,i}^*)_{,i} + (u_j u_{j,ii}^*)] d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} (u_{j,i} u_j^*) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_j u_{j,i}^*) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} (u_j u_{j,ii}^*) d\Omega \end{aligned} \quad (4.13)$$

Da mesma forma, desenvolve-se a segunda parcela da equação (4.10):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{i,ij} u_j^* d\Omega &= \int_{\Omega} [(u_{i,i} u_j^*)_{,j} - (u_{i,i} u_{j,j}^*)] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} [(u_{i,i} u_j^*)_{,j} - (u_i u_{j,j}^*)_{,i} + (u_i u_{j,ji}^*)] d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} (u_{i,i} u_j^*) n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_i u_{j,j}^*) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} (u_i u_{j,ji}^*) d\Omega \end{aligned} \quad (4.14)$$

Trocando os índices da última parcela da equação (4.14):

$$\int_{\Omega} u_{i,ij} u_j^* d\Omega = \int_{\Gamma} (u_{i,i} u_j^*) n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} (u_i u_{j,j}^*) n_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_j u_{i,ij}^* d\Omega \quad (4.15)$$

Substituindo as equações (4.13) e (4.15) em (4.10) e reorganizando:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\mu(u_j u_{j,ii}^*) + (\lambda + \mu)(u_j u_{i,ij}^*)] d\Omega + \int_{\Gamma} [\mu(u_{j,i} u_j^* n_i - u_j u_{j,i}^* n_i)] d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma} [(\lambda + \mu)(u_{i,i} u_j^* n_j - u_i u_{j,j}^* n_i)] d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

A equação (4.5) apresenta  $u_j^*$  como solução fundamental, a qual deve obedecer à equação de Navier. Desta forma a primeira parcela da equação (4.16) fica:

$$\int_{\Omega} [\mu(u_j u_{j,ii}^*) + (\lambda + \mu)(u_j u_{i,ij}^*)] d\Omega = \int_{\Omega} -\Delta(\xi; x) P_j u_j d\Omega = -P_j u_j(\xi; x) \quad (4.17)$$

Assim, substituindo (4.17) em (4.16) tem-se:

$$P_j u_j(\xi) = \int_{\Gamma} [\mu((u_{j,i} u_j^* n_i - u_j u_{j,i}^* n_i))] d\Gamma + \int_{\Gamma} [(\lambda + \mu)(u_{i,i} u_j^* n_j - u_i u_{j,j}^* n_i)] d\Gamma \quad (4.18)$$

Introduzindo na equação (4.18) uma expressão auxiliar da forma seguinte:

$$\int_{\Gamma} \mu(u_{i,j} u_j^* n_i - u_{i,j} u_j^* n_i) d\Gamma = 0 \quad (4.19)$$

E reagrupando, obtém-se:

$$\begin{aligned} P_j u_j(\xi) &= \int_{\Gamma} [\mu(u_{i,j} + u_{j,i}) n_i + \lambda(u_{i,i}) n_j] u_j^* d\Gamma - \\ &- \int_{\Gamma} [\mu u_j u_{j,i}^* n_i + \lambda u_i u_{j,j}^* n_i - \mu u_{i,i} u_j^* n_j + \mu u_i u_{j,j}^* n_i + \mu u_{i,j} u_j^* n_i] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.20)$$

Neste ponto é bom fazer uma pausa para definir a Equação de Navier no contorno

$$\mu(u_{i,i} + u_{j,i}) n_j + \lambda u_{k,k} n_i = p_i \quad (4.21)$$

E observa-se que a equação (4.21) tem a mesma estrutura da primeira integral da equação (4.20), de tal forma que pode-se substituir tal parcela pelo equivalente  $p_i$ . Assim, substituindo e reagrupando os termos, obtém-se,

$$\begin{aligned} P_j u_j(\xi) &= \int_{\Gamma} p_i u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} [\mu(u_{j,i}^* u_j n_i) + \lambda(u_{j,j}^* u_i n_i)] d\Gamma + \\ &- \int_{\Gamma} \mu(u_i u_{j,j}^* n_i - u_{i,i} u_j^* n_j + u_{i,j} u_j^* n_i) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.22)$$

Troca-se a ordem dos índices da primeira parcela da segunda integral do lado direito e introduzindo uma nova identidade auxiliar do mesmo tipo da equação (4.19)

$$\begin{aligned} P_j u_j(\xi) &= \int_{\Gamma} p_i u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} [\mu(u_{i,j}^*) n_j + \lambda(u_{j,j}^*) n_i] u_i d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma} \mu(u_i u_{j,j}^* n_i - u_{i,i} u_j^* n_j + u_{i,j} u_j^* n_i) d\Gamma - \int_{\Gamma} \mu(u_{j,i}^* u_i n_j - u_{j,i}^* u_i n_j) d\Gamma \end{aligned} \quad (4.23)$$

Reagrupando a equação (4.23) da mesma forma que na equação (4.20),

$$P_j u_j(\xi) = \int_{\Gamma} p_i u_j^* d\Gamma - \int_{\Gamma} [\mu(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) n_j + \lambda(u_{j,j}^*) n_i] u_i d\Gamma + \\ - \int_{\Gamma} \mu(u_i u_{j,j}^* n_i - u_{i,i} u_j^* n_j + u_{i,j} u_j^* n_i - u_{j,i}^* u_i n_j) d\Gamma \quad (4.24)$$

A segunda integral da equação (4.24) tem a mesma estrutura da equação (4.21), de forma tal que será substituída por  $p_i^*$ . Assim,

$$\int_{\Gamma} [\mu(u_{i,j}^* + u_{j,i}^*) n_j + \lambda(u_{j,j}^*) n_i] u_i d\Gamma = \int_{\Gamma} p_i^* u_i d\Gamma \quad (4.25)$$

Da equação (4.24), trabalha-se a última integral:

$$\int_{\Gamma} \mu(u_i u_{j,j}^* + u_{i,j} u_j^*) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \mu(u_{i,i} u_j^* + u_{j,i} u_j^*) n_j d\Gamma = \\ = \int_{\Gamma} \mu(u_i u_{j,j}^*) n_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \mu(u_i u_{j,i}^*) n_j d\Gamma \\ = \int_{\Omega} \mu(u_i u_{j,j}^*)_{,ji} d\Omega - \int_{\Omega} \mu(u_i u_{j,i}^*)_{,ij} d\Omega \\ = \int_{\Omega} \mu[(u_i u_{j,j}^*)_{,ji} - (u_i u_{j,i}^*)_{,ij}] d\Omega = 0 \quad (4.26)$$

Finalmente, substituindo as equações (4.26) e (4.25) na equação (4.24) tem-se:

$$P_j u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_j^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma \quad (4.27)$$

Da equação (4.6) sabe-se que  $P_j = 1$ , então:

$$u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_j^* u_j d\Gamma = \int_{\Gamma} p_j u_j^* d\Gamma \quad (4.28)$$

É conveniente estruturar-se a solução fundamental de modo que cada carga concentrada  $p_j$  atue independentemente uma da outra. Desse modo os deslocamentos e forças de superfície fundamentais ficam escritos na forma:

$$u_j^* = u_{ij}^*(\xi, x) P_i = u_{1j}^* P_1 + u_{2j}^* P_2 \\ p_j^* = p_{ij}^*(\xi, x) P_i = p_{1j}^* P_1 + p_{2j}^* P_2 \quad (4.29)$$

onde  $P_i = \delta_{1i}$ ,  $\delta_{2i}$  e  $\delta_{3i}$  ( $\delta_{ij} \rightarrow$  delta de Kronecker), considerados separadamente. Dessa forma  $u_{ij}^*$  e  $p_{ij}^*$  passam a representar deslocamentos e forças de superfície na direção “ $j$ ” no ponto  $x$ , resultado de uma carga unitária agindo na direção “ $i$ ” e aplicada no ponto  $\xi$ .

Pode-se demonstrar que a equação anterior é um caso particular de uma expressão geral dada por ([BREBBIA C. A.; TELLES; WROBEL, 1984]):

$$C_{ij}(\xi) u_j(\xi) + \int_{\Gamma} u_j(x) p_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) = \int_{\Gamma} p_j(x) u_{ij}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (4.30)$$

que é válida para o contorno do problema.

A equação (4.30) é a equação integral do Método dos Elementos de Contorno para a elasticidade.

## 4.2 Soluções Fundamentais

A solução fundamental é a solução de um problema especial correlato de elasticidade cuja equação de governo é válida a partir da equação de Navier,

$$Gu_{j,ii}^* + \frac{G}{(1-2\nu)} u_{i,ij}^* = 0 \quad (4.31)$$

Desta forma, o problema fundamental governado pela equação (4.5) também obedece aos princípios do equilíbrio, ou seja:

$$\sigma_{ij,i}^* = 0 \quad , \quad \text{em } \Omega^* \quad (4.32)$$

Existem várias soluções da equação (4.31) que podem ser empregadas. Estas variam com relação ao domínio considerado e com as condições de contorno escolhidas. Será apresentada a solução de Kelvin, que considera o domínio  $\Omega^*$  infinito, com propriedades e comportamento elástico, onde uma carga unitária concentrada atua nas 3 direções coordenadas.

Em casos bidimensionais de estado plano de deformação, os deslocamentos  $u_{ij}^*$  e as forças de superfície  $p_{ij}^*$  são dados pelas equações abaixo:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \{ (3-4\nu) \ln(r) \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \} \quad (4.33)$$

$$p_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i} n_{,j} - r_{,j} n_{,i}) \right\} \quad (4.34)$$

onde a variável  $r = r(\xi, x)$  representa a distância entre o ponto fonte  $\xi$ , de aplicação da carga, e o ponto campo  $x$ . As derivadas são tomadas com relação às coordenadas  $x_i$ .

E alguns dos componentes das equações (4.33) e (4.34) podem ser definidos através da notação indicial na forma seguinte:

$$a) \quad r = (r_i r_i)^{1/2} = (r_1 r_1 + r_2 r_2)^{1/2} \quad (4.35)$$

$$b) \quad r_i = x_i(x) - x_i(\xi) \quad (4.36)$$

$$c) \quad r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(x)} = \frac{r_i}{r} = -\frac{\partial r}{\partial x_i(\xi)} \quad (4.37)$$

e  $n_i$  são os cossenos diretores.

Para obter as expressões relativas ao estado plano de tensão, basta substituir  $\nu$  por  $\bar{\nu}$ , e  $G$  por  $\bar{G}$ , dados por:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$$

$$\bar{G} = \frac{\bar{E}}{2(1+\bar{\nu})} \quad (4.38)$$

$$\bar{E} = \frac{E(1+2\bar{\nu})}{(1+\bar{\nu})^2}$$

## 4.3 Tensões nos Pontos Internos

Para o cálculo das tensões nos pontos internos, parte-se da equação (4.30) com  $C_{ij} = 1$ , e derivando-a em relação às coordenadas do ponto  $\xi$ :

$$\frac{du_i(\xi)}{dx_k(\xi)} = \int_{\Gamma} p_j u_{ij,k}^*(\xi, x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u_j p_{ij,k}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (4.39)$$

Esta expressão fornece as deformações específicas que, através da Lei de Hooke, permitem encontrar as tensões nos pontos internos.

Então, pode-se escrever diretamente que a expressão para os pontos internos é:

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} p_k u_{ijk}^*(\xi, x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} u_k p_{ijk}^*(\xi, x) d\Gamma(x) \quad (4.40)$$

Onde tem-se as seguintes expressões para as soluções fundamentais:

$$u_{ijk}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{(1-2\nu)(r_j \delta_{ik} + r_i \delta_{jk} r_{,k} \delta_{ij}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k}\} \quad (4.41)$$

$$p_{ijk}^* = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ij} r_{,k} + \nu(\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k}] \right. \\ \left. + 2\nu(n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu)(2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)n_k \delta_{ij} \right\} \quad (4.42)$$

que são válidas para o caso da análise bidimensional.

#### 4.4 Implementação Numérica

Quando o objetivo é resolver computacionalmente uma equação diferencial ou integral, antes de expressá-la numa linguagem de programação é preciso ter a ajuda de técnicas numéricas. Os conceitos difundidos no cálculo numérico são a principal ferramenta de ajuda na resolução de equações e a escolha do método para a resolução de um problema específico é muito importante.

A equação integral obtida em (4.30), envolve uma distribuição dos deslocamentos e forças de superfície em todo o contorno. O ponto fonte  $\xi$  é o ponto nodal onde a força unitária produz o campo de deslocamentos  $u$ , enquanto  $x$  representa os pontos de integração sobre o contorno (ponto campo).

$$C(\xi)u(\xi) + \int u(x)p^*(\xi, x)d\Gamma(x) = \int p(x)u^*(\xi, x)d\Gamma(x) \quad (4.43)$$

No caso do Método dos Elementos de Contorno o tratamento numérico desenvolvido considera uma discretização do contorno em um número finito de elementos.

Esta discretização leva a um sistema de equações algébricas envolvendo valores nodais de deslocamentos e forças de superfície.

Em princípio, os métodos numéricos permitem resolver sistemas de difícil resolução analítica, mas de uma forma aproximada. Considerando este aspecto, o método dos Elementos de Contorno envolve um procedimento que procura minimizar o erro cometido com a solução aproximada, através de uma ponderação avaliada em todo o domínio.

Uma vez obtida a equação integral geral de contorno sem termo de domínio, equação (4.43) é preciso discretizá-la para então resolvê-la aproximadamente.

Inicialmente divide-se o contorno numa série de elementos sobre os quais se interpolam as grandezas  $u_i$  e  $p_i$  em termos dos valores nodais.

$$u_i = N^e u_i^e \quad (4.44)$$

$$p_i = N^e p_i^e \quad (4.45)$$

onde  $N^e$  é o vetor das funções de interpolação,  $u_i^e$  e  $p_i^e$  são os vetores deslocamento e força do ponto nodal  $x$ .

A seguir apresentam-se algumas definições importantes no desenvolvimento desta teoria para ajudar na sua compreensão.

#### 4.5 A Geometria do Elemento

Na figura (4.1) observa-se o exemplo de um elemento de geometria retilínea. Nele observa-se a coordenada natural  $\Gamma(\eta)$ , que é definida como:

$$\Gamma_x^e(\eta) = x_1^e \phi_1 + x_2^e \phi_2 = x_1^e \frac{1}{2}(1 - \eta) + x_2^e \frac{1}{2}(1 + \eta) \quad (4.46)$$

$$\Gamma_y^e(\eta) = y_1^e \phi_1 + y_2^e \phi_2 = y_1^e \frac{1}{2}(1 - \eta) + y_2^e \frac{1}{2}(1 + \eta) \quad (4.47)$$

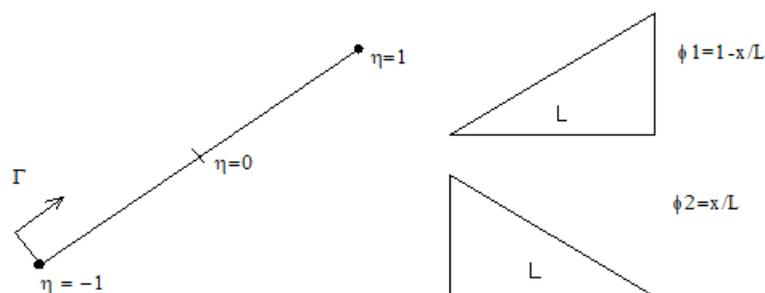


Figura 4.1 – Geometria retilínea. Fonte: [TUDELA, 2003].

Com base nos princípios da geometria diferencial e observando, também, a figura (4.2) pode-se escrever:

$$d\Gamma^2 = d\Gamma_x^2 + d\Gamma_y^2$$

$$\left(\frac{d\Gamma^e}{d\eta}\right)^2 = \left(\frac{d\Gamma_x^e}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{d\Gamma_y^e}{d\eta}\right)^2$$

$$\frac{d\Gamma^e}{d\eta} = \sqrt{\left(\frac{d\Gamma_x^e}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{d\Gamma_y^e}{d\eta}\right)^2}$$

Finalmente:

$$d\Gamma^e = |J^e| d\eta \quad (4.48)$$

onde  $|J^e|$  é o Jacobiano da transformação que para a geometria linear e em duas dimensões tem o valor de:

$$|J^e| = \frac{l_j}{2} \quad (4.49)$$

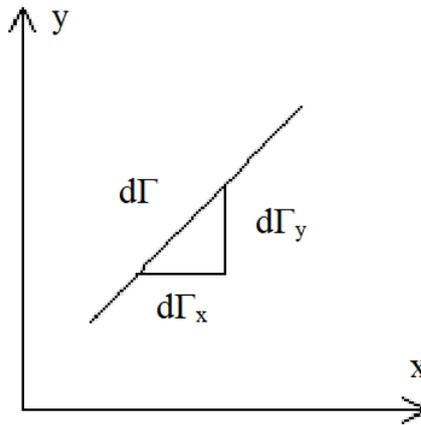


Figura 4.2 – Geometria retilínea - elemento diferencial. Fonte: [TUDELA, 2003].

Para uma geometria não retilínea, como o mostrado na figura (4.3):

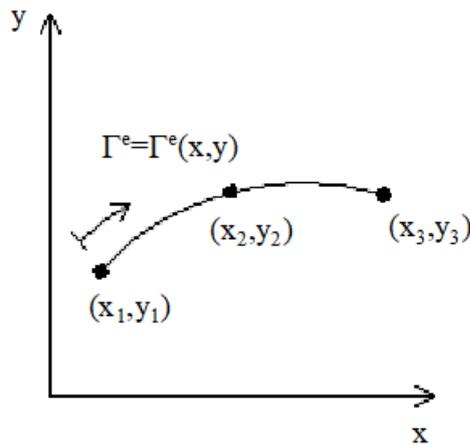


Figura 4.3 – Geometria não-retilínea. Fonte: [TUDELA, 2003].

Nesse caso tem-se:

$$\Gamma_x^e(x) = x_1^e \phi_1 + x_2^e \phi_2 + x_3^e \phi_3 = x_1^e \left( \frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta}{2} \right) + x_2^e (1 - \eta^2) + x_3^e \left( \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta}{2} \right) \quad (4.50)$$

$$\Gamma_y^e(x) = y_1^e \phi_1 + y_2^e \phi_2 + y_3^e \phi_3 = y_1^e \left( \frac{\eta^2}{2} - \frac{\eta}{2} \right) + y_2^e (1 - \eta^2) + y_3^e \left( \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta}{2} \right) \quad (4.51)$$

Assim, da mesma forma que no caso linear:

$$\frac{d\Gamma_x^e}{d\eta} = \eta(x_1 - 2x_2 + x_3) + \frac{1}{2}(x_3 - x_1) \quad (4.52)$$

$$\frac{d\Gamma_y^e}{d\eta} = \eta(y_1 - 2y_2 + y_3) + \frac{1}{2}(y_3 - y_1) \quad (4.53)$$

Igualmente o Jacobiano é definido como na equação (4.48). Assim:

$$|J^e| = \sqrt{\left(\frac{d\Gamma_x^e}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{d\Gamma_y^e}{d\eta}\right)^2} \quad (4.54)$$

Para se efetuar as integrais indicadas na equação (4.43), deve-se conhecer as expressões dos integrandos em função da coordenada natural  $\eta$ . O Jacobiano é dado pela equação (4.54). As coordenadas do ponto campo  $x(\eta)$  e  $y(\eta)$  podem ser determinadas a partir das equações (4.50) e (4.51). Sendo assim, a distância entre os pontos fonte e campo e o vetor  $r$  (figura 4.4) estão determinadas, restando apenas obter a expressão para o vetor unitário normal  $n(\eta)$ .

Seja  $t$  um vetor tangente á curva  $\Gamma$ .

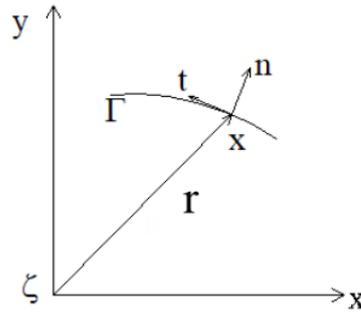


Figura 4.4 – Vetor posição e vetores unitários. Fonte: [TUDELA, 2003].

Há uma relação entre  $r$  e a curva  $\Gamma$  (figura 4.5):

$$\frac{\Delta r}{\Delta \Gamma} = \frac{PQ}{d\Gamma} \Rightarrow \frac{dr}{d\Gamma} \lim_{\Delta \Gamma \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta \Gamma} = t \quad (4.55)$$

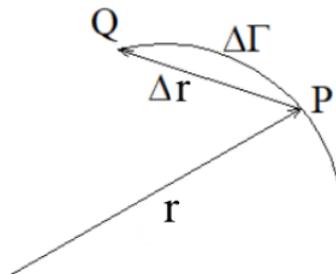


Figura 4.5 – Elemento diferencial da curva. Fonte: [TUDELA, 2003].

A análise geométrica mostra que  $\Delta \Gamma \rightarrow 0$  e  $Q \rightarrow P$  a direção da corda  $PQ$  tende para a direção da tangente à curva em  $P$ .

$$\frac{dr}{d\Gamma} = \frac{dx}{d\Gamma}i + \frac{dy}{d\Gamma}j = t \quad (4.56)$$

Por outro lado:

$$t = \frac{dr}{d\Gamma} = \frac{dr}{d\eta} \frac{d\eta}{d\Gamma} = \frac{dr}{d\eta} \frac{1}{|J|} \quad (4.57)$$

Da expressão anterior falta calcular o termo  $\frac{dr}{d\eta}$ . Assim:

$$r = [x(x_i) - x(\xi)]i + [y(x_i) - y(\xi)]j \quad (4.58)$$

E derivando em  $x_i$

$$dr = [dx(x_i)]i + [dy(x_i)]j \quad (4.59)$$

onde  $dx$  e  $dy$  são coordenadas globais; então, escrevendo-as em termos de  $\eta$ :

$$x = \Gamma_x^e(\eta) = x_1^e\phi_1 + x_2^e\phi_2 + x_3^e\phi_3 = x_1^eN_1 + x_2^eN_2 + x_3^eN_3 \quad (4.60)$$

$$y = \Gamma_y^e(\eta) = y_1^e\phi_1 + y_2^e\phi_2 + y_3^e\phi_3 = y_1^eN_1 + y_2^eN_2 + y_3^eN_3 \quad (4.61)$$

E derivando:

$$dx = x_1^e d\phi_1 + x_2^e d\phi_2 + x_3^e d\phi_3 \quad (4.62)$$

$$dy = y_1^e d\phi_1 + y_2^e d\phi_2 + y_3^e d\phi_3 \quad (4.63)$$

As funções  $\phi_i$  são dadas em função de  $\eta$ ; logo,

$$\frac{dr}{d\eta} = \frac{dx(\eta)}{d\eta}i + \frac{dy(\eta)}{d\eta}j \quad (4.64)$$

Com as condições:

$$\begin{aligned} t \cdot n &= 0 \\ n \times s &= k \end{aligned} \quad (4.65)$$

Obtém-se o vetor normal:

$$n = \frac{1}{|J|} \left[ \frac{dx}{d\eta}i + \frac{dy}{d\eta}j \right] \quad (4.66)$$

Feita a discretização, as integrais são resolvidas de forma numérica empregando a Fórmula de Gauss.

## 4.6 Funções de Interpolação

Para definir as funções de interpolação espacial, parte-se da adoção de um sistema de coordenadas adimensional, conhecido também como sistema de coordenadas natural.

A coordenada adimensional  $\eta$ , aqui é usada com vantagem por permitir o uso de funções  $\phi_k$  padronizadas e por se ajustar com mais facilidade aos esquemas de integração aproximada (Gauss, por exemplo), doravante empregados.

Na figura (4.6) mostra-se um elemento adimensional, para o qual os valores de  $u$  e  $p$  em qualquer ponto podem ser definidos em termos do seu valor nodal e as funções de interpolação  $\phi_k$  são dadas em termos da coordenada adimensional.

Para as funções de interpolação linear, tem-se:

$$u(\eta) = u_1\phi_1(\eta) + u_2\phi_2(\eta) = [\phi_1 \ \phi_2][u_1 \ u_2]^T \quad (4.67)$$

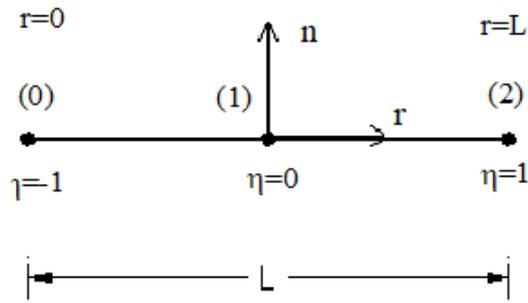


Figura 4.6 – Sistema de coordenadas adimensional. Fonte: [TUDELA, 2003].

$$p(\eta) = p_1\phi_1(\eta) + p_2\phi_2(\eta) = [\phi_1 \ \phi_2][p_1 \ p_2]^T \quad (4.68)$$

Da figura (4.6), pode-se ver que a coordenada adimensional  $\eta$  varia de  $-1$  a  $+1$  e as duas funções de interpolação são:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \eta) \quad (4.69)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \eta) \quad (4.70)$$

Da mesma forma, para as funções de interpolação quadráticas tem-se:

$$u(\eta) = u_1\phi_1(\eta) + u_2\phi_2(\eta) + u_3\phi_3(\eta) = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3][u_1 \ u_2 \ u_3]^T \quad (4.71)$$

$$p(\eta) = p_1\phi_1(\eta) + p_2\phi_2(\eta) + p_3\phi_3(\eta) = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3][p_1 \ p_2 \ p_3]^T \quad (4.72)$$

E, neste caso, as funções de interpolação são:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\eta(\eta - 1) \quad (4.73)$$

$$\phi_2 = 1 - \eta^2 \quad (4.74)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2}\eta(\eta + 1) \quad (4.75)$$

## 4.7 Integração Numérica

Na figura (4.7) pode-se observar a discretização com elemento constante, linear e quadrático.

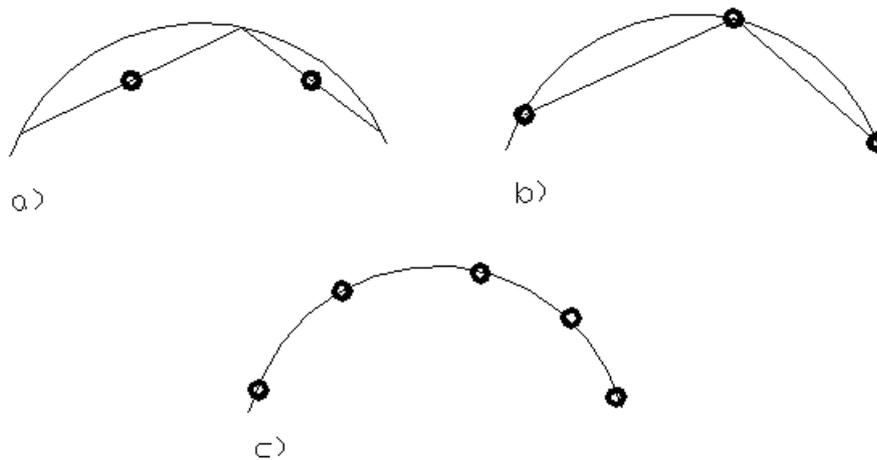


Figura 4.7 – Tipos de elemento de contorno. a) elemento constante , b) elemento linear, c) elemento quadrático. Fonte: [TUDELA, 2003].

Assim, substituindo as equações (4.44) e (4.45) na equação (4.43) tem-se a seguinte expressão:

$$C(\xi_i)u(\xi_i) + \sum_{j=1}^{Ne} \left( \int_{\Gamma_j} p^* N d\Gamma \right) u^{(e)} = \sum_{j=1}^{Ne} \left( \int_{\Gamma_j} u^* N d\Gamma \right) p^{(e)} \quad (4.76)$$

onde  $N_e$  é o número de elementos da discretização.

A geometria de cada elemento é definida em termos de uma função interpolante de forma, que se baseia nas coordenadas cartesianas dos pontos nodais que são naturalmente conhecidas. As coordenadas cartesianas  $x_i$  dos pontos de contorno estão situadas ao longo do elemento, como mostra-se a seguir:

$$x_i = M^e x_i^e \quad (4.77)$$

onde  $M^e$  é a matriz contendo as funções de interpolação e  $x_i^e$  o vetor de coordenadas nodais do elemento.

Durante a montagem do sistema de equações indicado pela equação (4.76), cada uma das integrais será calculada numericamente. Este cálculo se dará através da integração numérica unidimensional de Gauss, que estabelece:

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^{NPI} f(\eta_i) w_i \quad (4.78)$$

onde  $\eta_i$  é a coordenada adimensional do  $i$ -ésimo ponto de integração,  $w_i$  é o fator de peso associado ao ponto  $i$ , e  $NPI$  é o número total de pontos de integração utilizado.

Desta forma trabalha-se com as parcelas da equação (4.76) como segue:

$$\int_{\Gamma_j} p^* N d\Gamma = \int_{\Gamma_j} p^* N |J| d\eta \cong \sum_{k=1}^{NPI} |J|_k w_k N_k p_k^* \quad (4.79)$$

$$\int_{\Gamma_j} u^* N d\Gamma = \int_{\Gamma_j} u^* N |J| d\eta \cong \sum_{k=1}^{NPI} |J|_k w_k N_k u_k^* \quad (4.80)$$

onde  $NPI$  são o número de pontos de integração de Gauss.

A equação integral discretizada é aplicada repetidamente considerando o ponto  $\xi$  situado coincidentemente com todos os pontos nodais existentes. Um sistema de  $2t$  equações algébricas é gerado e envolve os  $2t$  valores nodais de deslocamento e força de superfície.

Ainda é bom levar este sistema para uma forma matricial e para isso coloca-se da forma mostrada a seguir. Da segunda parcela da equação (4.76) tem-se:

$$\sum_{j=1}^{N_e} \left( \int_{\Gamma_j} p^* N d\Gamma_e \right) u^e = \sum_{j=1}^{N_e} h^e u^e \quad (4.81)$$

Similarmente,

$$\sum_{j=1}^{N_e} \left( \int_{\Gamma_j} u^* N d\Gamma_e \right) p^e = \sum_{j=1}^{N_e} g^e p^e \quad (4.82)$$

O sistema fica reduzido na forma mostrada a seguir:

$$C(\xi_i) u(\xi_i) + \sum_{j=1}^{N_e} h^e u^e = \sum_{j=1}^{N_e} g^e p^e \quad (4.83)$$

Resulta, então, um sistema de equações matricial na forma,

$$(C + \hat{H})u = Gp \quad (4.84)$$

onde os vetores  $u$  e  $p$  contêm os valores de deslocamento e forças de superfície em todos os pontos nodais. A matriz  $C$  é quase diagonal, e pode ser incorporada a  $\hat{H}$  para formar:

$$Hu = Gp \quad (4.85)$$

Assim, é necessário estudar como determinar as submatrizes da diagonal  $H$ . E a forma de calculo é através da imposição de translações de corpo rígido correspondentes a forças de superfície nulas. Desta forma, adotando-se para o caso bidimensional, 2 translações independentes,  $u_{i2} = \delta_{i1}$  e  $u_{i1} = \delta_{i2}$ , chega-se a:

$$\sum_{q=1}^t H_{pq} u_q = 0 \quad (p = 1, 2, \dots, t) \quad (4.86)$$

onde  $H_{pq}$  representa matrizes  $2 \times 2$  de  $H$  e:

$$u_q = I \quad (4.87)$$

onde  $I$  é matriz identidade.

Deste modo, pode-se calcular indiretamente as submatrizes da diagonal de  $H$  na forma:

$$H_{\alpha\alpha} = \sum_{q=1, q \neq \alpha}^t H_{\alpha q} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, t) \quad (4.88)$$

## Integrais Singulares no MEC

No MEC, é comum em suas formulações aparecerem equações integrais com algum nível de singularidade. Nas Ciências e Engenharias, os problemas estudados, comumente são representados por equações diferenciais ordinárias ou equações diferenciais parciais e também por equações integrais. Como é sabido, são poucas as equações que possuem solução analítica de forma que as soluções aproximadas tornam-se importantes na solução de muitos problemas. O MEC se enquadra nesta categoria. Embora este trabalho não estude a fundo a teoria e técnicas relacionadas ao Método dos Elementos de Contorno, o objetivo é focar num problema muito relevante que é a resolução das integrais singulares. [FAKHYE, 1998] apresentou a correlação do MEC com as integrais singulares e a necessidade de implementações numéricas. Nesse capítulo serão apresentados de forma simplificada alguns conceitos relacionados às integrais singulares e sua importância dentro do âmbito do MEC.

### 5.1 Classificação quanto a Singularidade da Integral

A presença de integrando com algum grau de singularidade é relativamente recorrente dentro de problemas do MEC.

Esse trabalho utiliza como referência o trabalho de [GAO, 2005], que correlaciona o tipo de integral existente em elementos de contorno a um grau  $\beta$  no denominador do integrando como mostra a equação (5.1), que considera o termo de  $r$  como o responsável pela singularidade quando o ponto fonte vai se aproximando do ponto campo. Uma classificação dessa singularidade para casos bidimensionais é apresentado na tabela 5.1.

$$I(x^p) = \int_{\Omega} \frac{f(x^p, \xi)}{r^{\beta}(x^p, \xi)} d\Omega(\xi) \quad (5.1)$$

onde  $f(x^p, \xi)$  é limitado no intervalo considerado e  $r(x^p, \xi)$  é a distância entre o nó fonte  $x^p$  e o nó campo  $\xi$  representado figura 5.1.

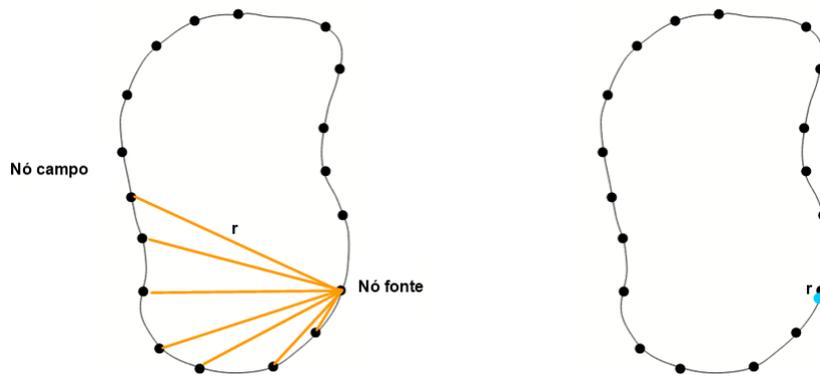


Figura 5.1 – Representação do nó fonte e nó campo na malha do MEC. Fonte: Própria

Tabela 5.1 – Classificação da singularidade pelo grau  $\beta$ . Fonte: [GAO, 2005]

Nível de Singularidade	Potência $\beta$
Regular	$\beta = 0$
Singularidade fraca	$0 < \beta < 1$
Singularidade forte	$\beta = 1$
Hipersingular	$\beta = 1+1$
Supersingular	$\beta = 1+2$

As integrais de domínio regular com singularidade fraca sempre existem, ou seja, é possível calcular suas partes finitas. No entanto, para integrais de domínio forte, hiper e supersingular, as integrais só existem sob algumas condições, dependendo fortemente das características da função  $f(x^p, x)$ . Para problemas que resultem em singularidades fraca e forte, o valor principal de Cauchy consegue calcular sua parte finita. No entanto, quando o problema apresenta  $\beta = 2$ , é necessário utilizar a teoria da Parte Finita de Hadamard [CHAN, 2007].

## 5.2 Integrais Impróprias

A existência de integral definida  $\int_a^b f(x)dx$ , onde  $f(x)$  é contínua no intervalo fechado  $[a, b]$  é garantida pelo teorema fundamental do Cálculo. Entretanto, determinadas aplicações do Cálculo nos levam a formulações de integrais em que, o intervalo de integração não é limitado ou o integrando tem uma descontinuidade infinita em algum ponto do intervalo  $[a, b]$ . Para esse trabalho somente o segundo caso será abordado.

Suponha que exista uma função  $f(x)$  que é contínua, exceto em um ponto  $c$ , sendo assim, tornam-se infinitas em um ponto do intervalo de integração e são chamadas de integrais impróprias. Esse tipo de integral dada pela equação (5.2) apresentam uma assíntota vertical na região da descontinuidade infinita em  $c$  como mostra a figura 5.2.

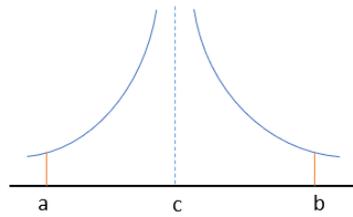


Figura 5.2 – Representação gráfica da assíntota. Fonte: Própria

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (5.2)$$

A integral dividida em duas partes como mostra a figura 5.3 e pode ser calculada da seguinte forma:

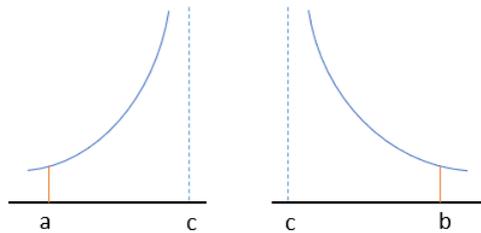


Figura 5.3 – Representação gráfica da assíntota. Fonte: Própria

$$I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \quad (5.3)$$

### 5.3 Valor Principal de Cauchy

No caso dos dois limites existirem da equação(5.3), a integral converge ou é convergente. Caso pelo menos uma integral não exista, diz-se que a integral diverge ou é divergente. No entanto, a integral imprópria pode existir no âmbito de Valor Principal de Cauchy, tendo um valor finito, definido por:

$$VPC \int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right] \quad (5.4)$$

A grande diferença entre a técnica da integração imprópria e o Valor Principal de Cauchy é que na primeira, os limites são calculados separadamente e na segunda, primeiro se calcula as integrais onde é subtraído um intervalo  $[-\epsilon, +\epsilon]$ , como pode ser visto na Figura 5.4, e posteriormente é calculado o limite.

No geral as equações que envolvem resoluções de Valor Principal de Cauchy tem a configuração como

$$VPC \int_a^b \frac{f(x)}{t-x} dx \quad (5.5)$$

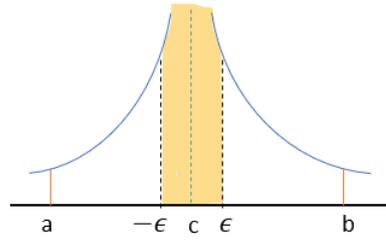


Figura 5.4 – Representação gráfica da solução por Valor Principal de Cauchy. Fonte: Própria

Pois, quando os valores de  $t$  e  $x$  se aproximam, a integral cai em um caso de indeterminação.

Para que se possa assegurar que as funções ou classes de funções com as quais se está trabalhando atendam certos requisitos de continuidade, em particular, a continuidade de Hölder com certas propriedades ou características que são explicitadas em [WIBOWO; KURNIAWAN, 2020].

#### 5.4 Parte Finita de Hadamard

As integrais de domínio regular com singularidade fraca sempre existem, ou seja, é possível calcular suas partes finitas. No entanto, para integrais de domínio forte, hiper e supersingular, as integrais só existem sob algumas condições, dependendo fortemente das características da função  $f(x^p, x)$ . Para problemas que resultem em singularidades fraca e forte, o valor principal de Cauchy consegue calcular sua parte finita. No entanto, quando o problema apresenta  $\beta = 2$ , é necessário utilizar outro artifício.

$$PF \int_a^b \frac{f(t)}{(t-x)^2} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{x-\epsilon} \frac{f(t)}{(t-x)^2} dt + \int_{x+\epsilon}^b \frac{f(t)}{(t-x)^2} dt - \frac{2f(x)}{\epsilon} \right] \quad (5.6)$$

a equação (5.6) é chamada de parte finita de Hadamard e conforme [CHAN, 2007], é possível separar a equação (5.6) em duas partes finitas.

$$PF \int_a^x \frac{f(t)}{(t-x)^2} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{x-\epsilon} \frac{f(t)}{(t-x)^2} dt - \frac{f(x)}{\epsilon} \right] \quad (5.7)$$

$$PF \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^2} dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{x+\epsilon}^b \frac{f(t)}{(t-x)^2} dt - \frac{f(x)}{\epsilon} \right] \quad (5.8)$$

#### 5.5 Delta de Kronecker

Na Álgebra Linear utiliza-se o Delta de Kronecker para identificar um conjunto ortonormal, que é um conjunto de vetores ortogonais dois a dois e possuem norma igual a um, ou seja, são unitários. Nesse caso, tomando dois vetores distintos do conjunto temos que seu produto interno será zero, sendo assim, são ortonormais formando um ângulo reto entre si. Mas se for selecionado um mesmo vetor duas vezes, o ângulo será nulo e tanto o seu cosseno quanto o produto interno serão, também, iguais a 1. A definição do Delta de Kronecker é dada por:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} \quad \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (5.9)$$

e pode ser representado matricialmente como:

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1m} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nm} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

Logo, pode-se resumir algumas propriedades da notação indicial como segue:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} A_j &= A_i \\ \delta_{ij} M_{jk} &= M_{ik} = M_{ij} \delta_{jk} \\ \delta_{ik} \delta_{kj} &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (5.11)$$

## 5.6 Delta de Dirac

Em matemática, a função Delta de Dirac, também conhecida como o símbolo do impulso unitário, é uma função generalizada ou distribuição sobre os números reais, cujo valor é zero em todos os lugares, exceto em zero, e cuja integral sobre todo o intervalo é igual a um. Em resumo, as propriedades de Delta de Dirac são:

$$\delta(\xi, x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq \xi \\ \infty, & \text{se } x = \xi \end{cases} \quad (5.12)$$

e

$$\int_{\Omega} p(\xi) \delta(\xi, x) d\Omega = \begin{cases} p(\xi), & \xi \in \Omega \\ 0, & \xi \notin \Omega \end{cases} \quad (5.13)$$

onde

$$\int \delta(x - \xi) dx = 1 \quad (5.14)$$

## 5.7 Jacobiano

Considere um retângulo  $S$  como descrito na figura 5.5, e objetivo será estimar a área  $\Delta A$  de  $R$ .

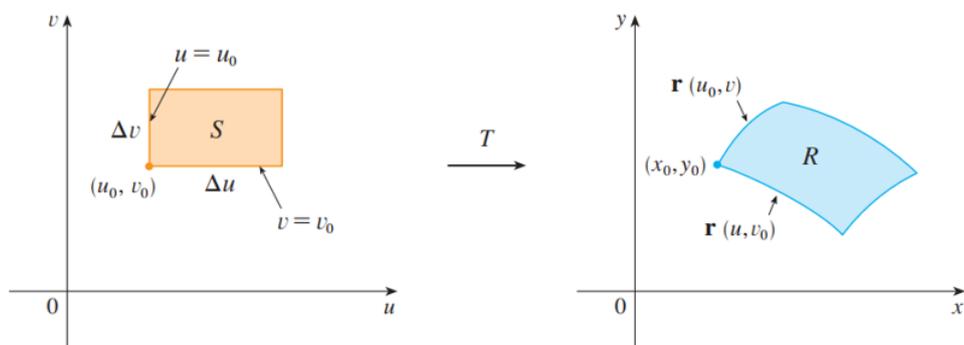


Figura 5.5 – Aproximação de área através de transformação de variáveis. Fonte: [STEWART, 2013].

$$T(u, v) = X(u, v) i + Y(u, v) j \quad (5.15)$$

O vetor tangente a curva  $T(u, v)$  em  $T(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$  é

$$T_u(u_0, v_0) = \frac{\partial X}{\partial u} i + \frac{\partial Y}{\partial u} j \quad (5.16)$$

e o vetor tangente a curva  $T(u, v)$  em  $T(u_0, v_0) = (x_0, y_0)$  é

$$T_v(u_0, v_0) = \frac{\partial X}{\partial v} i + \frac{\partial Y}{\partial v} j \quad (5.17)$$

Agora, é possível aproximar a área de  $R$  pelo paralelogramo delimitado pelos vetores  $\Delta u T_u(u_0, v_0)$  e  $\Delta v T_v(u_0, v_0)$  como pode ser observado na figura 5.6.

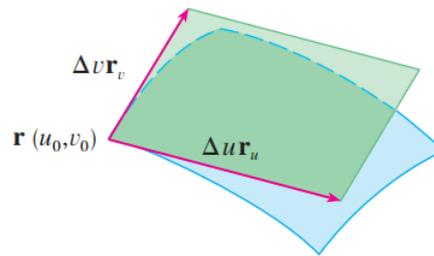


Figura 5.6 – Vetores para aproximação de área. Fonte: [STEWART, 2013].

Lembrando que área do paralelogramo é dada pela norma do produto vetorial, obtemos

$$|\Delta u T_u(u_0, v_0) \times \Delta v T_v(u_0, v_0)| = |T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)| \Delta u \Delta v \quad (5.18)$$

como estimativa da área  $\Delta A$  de  $R$ . Agora, o produto vetorial  $T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)$  é dado pelo determinante:

$$T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0) = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{bmatrix} k \quad (5.19)$$

Sendo assim, a definição do jacobiano  $J$  é dada por:

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} \quad (5.20)$$

Com essa notação, a área  $\Delta A$  de  $R$  é aproximada por:

$$\Delta A \approx |J(u_0, v_0)| \Delta u \Delta v \quad (5.21)$$

## 5.8 Presença de Equações Singulares em Elementos de Contorno

Em MEC, em muitos casos é imprescindível conhecer o estado tensional em qualquer ponto do sólido. No trabalho de [SOUZA, 2007], para os casos bidimensionais a singularidade da integral está relacionada diretamente com a solução fundamental, que se depara com termos explícitos como  $\frac{1}{r}$  em azul e  $\ln(r)$  em vermelho como pode ser visto nas equações (5.22) e (5.23),

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu)ln(r)\delta_{ij} - r_{,i}r_{,j}] \quad (5.22)$$

$$p_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r} \left[ [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right] \quad (5.23)$$

onde  $u^*$  e  $p^*$  são respectivamente as soluções fundamentais para deslocamento e força de superfície nos problemas de elasticidade em elementos de contorno. A presença de integrandos com algum grau de singularidade é relativamente recorrente dentro de problemas de elementos de contorno.

As equações (5.24) e (5.25) mostra a solução fundamental para o cálculo de deformações e tensões em pontos internos e onde se observa que apresenta uma Hipersingularidade, muito presente em problemas de elasticidade. Esse tipo de singularidade, representado pelos termos  $\frac{1}{r}$  e  $\frac{1}{r^2}$  são fonte de estudo deste trabalho. O termo em azul representa o termo com singularidade e o termo em vermelho o termo com hipersingularidade.

$$U_{ijk}^*(\xi, X) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r} \left\{ [(1-2\nu)(m_j r_i - m_i r_j)] - \frac{\partial r}{\partial m} [2r_i r_j + (1-2\nu)\delta_{ij}] \right\} \quad (5.24)$$

$$P_{ijk}^*(\xi, X) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)} \frac{1}{r^2} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i) \quad (5.25)$$

onde  $U^*(\xi, X)$  é a componente de deslocamento e  $P^*(\xi, X)$  a tensão de superfície aplicada no contorno.

## Quadratura de Gauss-Legendre em Integrais Singulares

Em análise, a integração numérica compreende uma ampla família de algoritmos para calcular o valor numérico de uma integral definida e, por extensão, o termo também é usado às vezes para descrever a solução numérica de equações diferenciais. Este capítulo se concentra no cálculo de integrais definidas. O termo quadratura numérica, muitas vezes abreviado para quadratura, é um sinônimo da integração numérica, especialmente quando aplicado a integrais unidimensionais.

### 6.1 Quadratura de Gauss-Legendre

O problema básico em integração numérica é calcular uma solução aproximada para uma integral definida como:

$$\int_a^b f(x) dx \quad (6.1)$$

O método da Quadratura de Gauss-Legendre escolhe pontos de forma a otimizar a aproximação da integral ao invés de simplesmente escolher alguns pontos igualmente espaçados. Inicialmente é preciso mudar, mediante uma transformação de coordenadas, o intervalo de integração definido de  $[a, b]$ , no intervalo  $[-1, 1]$ . Assim, substituindo a variável  $t$  por  $x$ , onde

$$t = \frac{(b-a)x}{2} + \frac{(a+b)}{2} \quad (6.2)$$

e

$$dt = \frac{(b-a)}{2} dx \quad (6.3)$$

Obtém-se a equação (6.4)

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \quad (6.4)$$

As formulas de quadratura resolvem a equação (6.4) da forma seguinte

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-1}^1 f(t) dt \approx \sum_1^n \omega_i f(x_i) \quad (6.5)$$

Sendo assim, a quadratura de Gauss-Legendre pode ser dada por:

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{(b-a)}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{(b-a)x}{2} + \frac{(a+b)}{2}\right) dx \approx \frac{(b-a)}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i f\left(\frac{(b-a)x_i}{2} + \frac{(a+b)}{2}\right) \quad (6.6)$$

onde  $\omega_i$  é o peso dado por:

$$\omega_i = \frac{2}{(1-x_i^2)[P'_{n+1}(x_i)]^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.7)$$

sendo  $P$  é o polinômio de Legendre.

## 6.2 Polinômio de Legendre

A quadratura de Gauss-Legendre recebe esse nome pois, as abscissas  $x_i$  na função de quadratura de Gauss para o intervalo  $[-1, 1]$  são definidas como as raízes do polinômio de Legendre  $P_n$  para  $n$  termos:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (6.8)$$

A tabela (6.1) mostra os pontos de gauss  $x_i$  e os pesos  $w_i$

Tabela 6.1 – Tabela de coordenadas e pesos de gauss até  $n = 5$ .

Quantidade de Pontos	Pontos $x_i$	Peso $w_i$
1	0	2
2	1.0000000000000000 1.0000000000000000	0.5773502692 0.5773502692
3	0 -0.774596669241483 0.774596669241483	0.8888888888888889 0.5555555555555556 0.5555555555555556
4	-0.339981043584856 -0.861136311594053 0.339981043584856 0.861136311594053	0.652145154862546 0.347854845137454 0.652145154862546 0.347854845137454
5	0 -0.538469310105683 -0.906179845938664 0.538469310105683 0.906179845938664	0.5688888888888889 0.478628670499366 0.236926885056189 0.478628670499366 0.236926885056189

## 6.3 Exemplos numéricos da quadratura de Gauss-Legendre

Considere a função:

$$f(x) = x^6 - x^2 \text{sen}(2x) \quad (6.9)$$

e deseja-se calcular a integral de  $f(x)$  como indicado,

$$\int_1^3 \left[ x^6 - x^2 \operatorname{sen}(2x) \right] dx \quad (6.10)$$

Fazendo a integração por partes pode-se chegar ao resultado analítico da integral igual a 317,34. Quando se realiza a integração utilizando a quadratura de Gauss-Legendre para dois pontos de Gauss, tem-se:

$$\int_1^3 \left[ x^6 - x^2 \operatorname{sen}(2x) \right] dx \approx f(-0,5773502692+2) + f(0,5773502692+2) = 306,8199344 \quad (6.11)$$

Considerando dessa vez  $n = 3$ , resulta em

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left[ x^6 - x^2 \operatorname{sen}(2x) \right] dx \approx & 0,5556f(-0,774597+2) + \\ & +0,8889f(0+2) + 0,5556f(-0,774597+2) = 317,2641516 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Nota-se que o resultado fica muito próximo do analítico. A tabela (6.2) mostra o resultado do exemplo para diferentes valores de  $n$ . A programação utilizada pode ser encontrada no Anexo 01.

Tabela 6.2 – Resultado da integral para diversos valores de  $n$

n	Resultado
5	317,3442267219695
12	317,3442466738263
20	317,3442466738264
30	317,3442466738264
64	317,3442466738264

#### 6.4 Limitações da Quadratura de Gauss-Legendre para integrais singulares em intervalos simétricos

A primeira limitação da quadratura de Gauss-Legendre aparece quando o ponto de gauss coincide com o ponto de singularidade de  $f(x)$  para integrações de intervalos simétricos.

Considere a função

$$f(x) = \frac{3}{x} \quad (6.13)$$

quando se integra no intervalo simétrico  $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 \frac{3}{x} dx \quad (6.14)$$

Como  $f(x)$  não está definida em  $x = 0$ , e 0 também é um ponto de Gauss quando  $n$  é ímpar, o cálculo através da quadratura de Gauss-Legendre somente é possível quando  $n$  é par.

Analicamente tem-se,

$$\int_{-1}^1 \frac{3}{x} dx = 0 \quad (6.15)$$

Utilizando a programação do anexo 02 a quadratura de Gauss-Legendre para  $n = 8$

$$\int_{-1}^1 \frac{3}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{3}{t} dt = -8.326672684688674 \cdot 10^{-17} \quad (6.16)$$

## 6.5 Limitações da Quadratura de Gauss-Legendre para integrais singulares fracas

Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \quad (6.17)$$

e realizando a integral definida pelo método das integrações impróprias para o intervalo  $[0,2]$ .

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{\pi}{2} \approx 1,5078 \quad (6.18)$$

Aplicando a quadratura de Gauss-Legendre

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{3-x}} = 1,17157 \quad (6.19)$$

para  $n = 5$  ou superior, não se aproximando mais do valor da solução exata mesmo aumentando o número de  $n$ .

Tabela 6.3 – Resultado da integral para diversos valores de  $n$

n	Resultado
1	1,1547
2	1,1711
5	1,1715
20	1,1715

## 6.6 Limitações da Quadratura de Gauss-Legendre para intervalos assimétricos

Além disso, outra limitação também aparece quando se aplica a quadratura para intervalos assimétricos da seguinte forma.

Considere a função

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (6.20)$$

e deseja-se integrar

$$\int_{-3}^5 \frac{1}{x} dx \quad (6.21)$$

Pode-se chegar na solução analítica através do Valor Principal de Cauchy

$$VPC \int_{-3}^5 \frac{1}{x} dx = \log\left(\frac{5}{3}\right) = 0,5108 \quad (6.22)$$

Aplicando a quadratura de Gauss-Legendre

$$\int_{-3}^5 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{16t+4} dt \approx \sum_1^n w_i \frac{1}{16t_i+4} \quad (6.23)$$

e os resultados divergem dependendo do valor de n como mostra a tabela 6.4. Todos os resultados foram obtidos utilizando a programação do anexo 1.

Tabela 6.4 – Resultado da integral para diversos valores de  $n$

n	$\sum_1^n w_i f(x_i)$
2	-0,115384615384615
5	0,066702599113666
8	0,331128448742809
13	0,735980447968965
16	-0,294734840132769
20	0,419303210468090
25	1,237688976444934

Sendo assim, para casos com algum grau de singularidade é preciso utilizar outro método numérico.

## Quadratura de Kutt

### 7.1 Fórmula da Quadratura de Kutt

Com objetivo de suprir a necessidade de um método que atendesse as integrais singulares, [KUTT, 1975b] apresentou um método de calcular a parte finita de integrais do tipo:

$$\int_s^r \frac{f(x)}{(x-s)^\lambda} dx, \quad \lambda \text{ real } e \geq 1, \quad (7.1)$$

sendo que  $f(x)$  é uma função real da variável real  $x$ . A equação 7.1 aproxima-se através de um produto escalar de pesos e valores da função em certas estações pré-determinadas. As estações são igualmente espaçadas no intervalo  $[s, r]$ , de forma que a primeira coincide com  $s$ , mas nenhuma com  $r$ . Dadas  $N$  estações, o grau de precisão da fórmula desenvolvida por Kutt é  $N - 1$ , isto é, a fórmula é exata para todos os polinômios de grau  $\geq N - 1$ .

Para que seja possível efetuar o cálculo, deve-se, primeiramente, efetuar uma mudança de referência do intervalo (normalização) de  $[s, r]$  para  $[0, 1]$ . Ou seja, procura-se transformar a equação 7.1 na equação 7.2

$$\int_s^r \frac{f(x)}{(x-s)^\lambda} dx = \int_0^1 \frac{g(x)}{(x)^\lambda} dx \approx \sum_{i=1}^N \omega_i g(x_i), \quad \lambda \geq 1, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7.2)$$

onde os  $\omega_i$  são os pesos correspondentes às estações  $x_i$ .

As posições das estações estão igualmente espaçadas em  $[0, 1]$ ,  $x_i = (i - 1)/N$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$ . Neste caso, as estações são fixas e apenas os pesos têm que ser computados. A normalização fornece

$$\int_s^r \frac{f(x)}{(x-s)^\lambda} dx = (r-s)^\lambda \int_0^1 \frac{f[(r-s)t+s]}{t^\lambda} dt + f^{(\lambda-1)}(s) \frac{|\ln(r-s)|}{(\lambda-1)!} \quad (7.3)$$

onde

$$f^{(\lambda-1)}(s) = (r-s)^{1-\lambda} F^{\lambda-1}(0) \approx (r-s)^{1-\lambda} \sum_{i=1}^N c_i f[(r-s)x_i + s] \quad (7.4)$$

Caso  $\lambda$  for racional, a equação é invariante a mudanças de escala, de forma que

$$\int_s^r \frac{f(x)}{(x-s)^\lambda} dx = (r-s)^{1-\lambda} \int_0^1 \frac{f[(r-s)t+s]}{t^\lambda} dt \quad (7.5)$$

Assim, obtém-se a fórmula de quadratura quando  $\lambda$  é racional:

$$\int_s^r \frac{f(x)}{(x-s)^\lambda} dx = (r-s)^{1-\lambda} \sum_{i=1}^N \omega_i f[(r-s)t + s] \quad (7.6)$$

Para casos que  $\lambda$  é inteiro, a expressão da quadratura é dada por

$$\int_s^r \frac{f(x)}{(x-s)^\lambda} dx = (r-s)^{1-\lambda} \sum_{i=1}^N \left[ \omega_i + c_i \frac{\ln[r-s]}{(\lambda-1)!} \right] f[(r-s)x_i + s] \quad (7.7)$$

Com isso, métodos numéricos que atendessem integrais com singularidade como na equação 7.8 e 7.9 foram cada vez mais necessários.

$$I_1 = VPC \int_a^s \frac{f(x)}{x-s} dx \quad (7.8)$$

$$I_2 = VPC \int_s^b \frac{f(x)}{x-s} dx \quad (7.9)$$

$$I = I_1 + I_2 \quad (7.10)$$

Fórmulas de integração numérica para o cálculo de integrais de partes finitas foram apresentados por [KUTT, 1975a].

$$I_1 = VPC \int_a^s \frac{f(x)}{x-s} dx \cong - \sum_1^n f[(a-s)x_i + s] w_i - f(s) \ln|a-s| \quad (7.11)$$

$$I_2 = VPC \int_s^b \frac{f(x)}{x-s} dx \cong \sum_1^n f[(b-s)x_i + s] w_i - f(s) \ln|b-s| \quad (7.12)$$

As equações 7.11 e 7.12 devem ser usada de tal forma que  $x_i$  e  $w_i$  são as coordenadas e pesos da integração tipo gaussiana que já são pré-determinadas. As considerações de 7.11 e 7.12 podem ser aplicadas para o cálculo do Valor Principal de Cauchy em elementos de contorno bidimensionais.

Nesse trabalho só irá ser utilizado o grau do denominador  $\lambda = 1$ . Sendo assim, considerando a integral do capítulo anterior será apresentado o exemplo a seguir.

## 7.2 Exemplos da utilização da quadratura de Kutt

Considerando a integral do capítulo anterior com intervalos assimétricos

$$\int_{-3}^5 \frac{1}{x} dx = 0.510825623765990 \quad (7.13)$$

Aproveitando a propriedade da quadratura gaussiana que transforma os limites de integração para um intervalo simétrico entre  $-1$  e  $1$ , tem-se:

$$\int_{-3}^5 \frac{1}{x} dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{16t+4} dt \approx I_1 + I_2 \quad (7.14)$$

Substituindo nas equações 7.11 e 7.12 e considerando  $n = 10$ .

$$I_1 = VPC \int_{-1}^0 \frac{f(x)}{x-0} dx \cong - \sum_1^n f[(-1-0)x_i + s] w_i - f(0) \ln|-1-0| = 0.287682073931781 \quad (7.15)$$

$$I_2 = VPC \int_0^1 \frac{f(x)}{1-x} dx \cong \sum_1^n f[(1-x_i)w_i] - f(0) \ln|1-0| = 0.223143549834210 \quad (7.16)$$

$$I = I_1 + I_2 = 0.510825623765991 \quad (7.17)$$

Um segundo exemplo é resolvido na integral singular seguinte, onde a solução analítica é dada também,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(x-0.5)} dx = 1.098612288668109 \quad (7.18)$$

Aplicando as etapas da quadratura de Kutt utilizando a programação no anexo 2, chega-se no resultado.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(x-0.5)} dx = -1.098612288668110 \quad (7.19)$$

Obtendo um erro na ordem de  $10^{-13}$ ;

## Quadratura Autoadaptativa

### 8.1 Quadratura Autoadaptativa

Em MEC, depois que se discrimina o contorno, muitas das vezes é interessante ser estudado pontos internos do domínio. Por muito tempo, o melhor procedimento para distribuição dos pontos internos era o método de subdivisão do elemento, e conseqüentemente as equações integrais, com algum grau de singularidade são divididas em um determinado número de subelementos e realizando a quadratura padrão do tipo gaussiano sobre cada subelemento e no final somando os resultados de cada integral. Uma alternativa consideravelmente mais eficiente do que a subdivisão de elementos para aplicações gerais de elementos de contorno foi apresentada por [TELLES, 1987] onde a ideia é baseada em uma transformação coordenada não-linear que agrupa automaticamente os pontos de integração e os aponta para a posição da distância mínima da fonte sem a desvantagem de subdividir a elemento. Pensando inicialmente na integração numa superfície bidimensional, a diferença entre a distribuição do método de divisão de subelementos e a quadratura autoadaptativa pode ser demonstrada na figura 8.1. Note que a distribuição autoadaptativa se aglomera próximo ao ponto de singularidade.

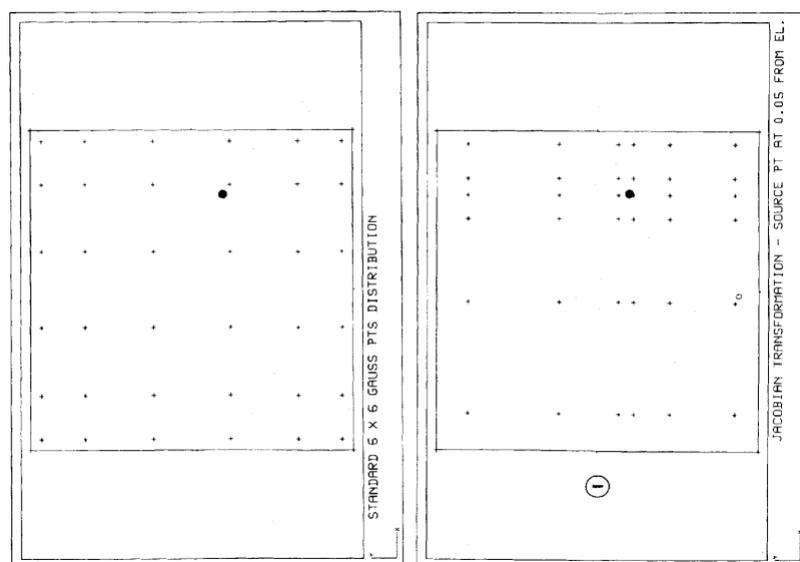


Figura 8.1 – Vetores para aproximação de área. Fonte: [??]

Esse método baseia-se em uma transformação cujo jacobiano suaviza a singularidade.

$$h = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u^* \phi^T G d\eta_1 d\eta_2 \quad (8.1)$$

$$g = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p^* \phi^T G d\eta_1 d\eta_2 \quad (8.2)$$

onde  $u$  é o potencial,  $p$  é a derivada de  $u$  em relação ao contorno, onde  $\phi$  representa as funções de interpolação, que normalmente são escritas em termos de sistema de coordenadas homogêneo  $\eta_1, \eta_2$ , ( $|\eta_1|, |\eta_2| \geq 1$ ) e em que  $G(\eta_1, \eta_2)$  é o Jacobiano, possivelmente não linear, da transformação.

Considerando agora, um elemento unidimensional linear, a integral

$$\int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad (8.3)$$

em que  $f(\eta)$  é singular em  $\eta$  e se é escolhido uma relação com um polinômio de segundo grau.

$$\eta(\gamma) = a\gamma^2 + b\gamma + c \quad (8.4)$$

Considerando as seguintes condições

$$\left. \frac{d\eta}{d\gamma} \right|_{\eta} = 0$$

$$\eta(1) = 1 \quad (8.5)$$

$$\eta(-1) = -1$$

Sendo assim, obtém-se então a seguinte solução para os coeficientes do polinômio da equação 8.4

$$a = -c$$

$$b = 1 \quad (8.6)$$

$$c = \frac{\bar{\eta} + \sqrt{\bar{\eta} - 1}}{2}$$

em que a condição  $|\eta| \geq 1$  é necessária para evitar raízes complexas. Portanto, desde que  $|\eta| = 1$ , a equação 8.3 pode ser escrita como

$$\int_{-1}^1 f \left[ (1 - \gamma^2) \frac{\bar{\eta}}{2} + \gamma \right] (1 - \gamma\eta) d\gamma \quad (8.7)$$

A transformação da equação 8.7 pode ser usada para calcular integrais com uma singularidade logarítmica em uma das extremidades. Sua principal vantagem é que, como o jacobiano cancela a singularidade, a integração gaussiana padrão pode ser empregada sem a necessidade de separar a parte regular do termo singular nas matrizes de núcleo.

Outro tipo de transformação em 8.8 acaba produzindo um efeito de aglomeração nas posições dos pontos de Gauss, movendo-os em direção ao ponto fonte, o que apresenta também uma importante característica autoadaptativa que a torna inativo quando não é útil. Em outras palavras, acaba tendo uma melhor distribuição dos pontos de Gauss, como pode ser visto na Figura 8.1.

$$I = \int_{-1}^1 f \{[(\gamma - \bar{\gamma})^3 + \bar{\gamma}(\bar{\gamma}^2 + 3)]\} 3(\gamma - \bar{\gamma}) / (1 + 3\bar{\gamma}^2) d\gamma \quad (8.8)$$

$$\gamma - \bar{\gamma} = \sqrt[3]{(\bar{\gamma}\gamma^* + |\eta^*|)} + \sqrt[3]{(\bar{\gamma}\gamma^* - |\eta^*|)} + \bar{\eta} \quad (8.9)$$

$$\eta = a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d \quad (8.10)$$

$$\eta^* = \bar{\eta}^2 - 1 \quad (8.11)$$

onde  $\bar{\gamma}$  é simplesmente o valor de que satisfaz  $\eta(\bar{\gamma}) = \gamma$  e  $\eta$  é a função polinomial para ser aplicada na transformação polinomial.

Considere a integral com o integrando  $f(\eta)$  é singular no ponto  $\bar{\eta}$

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \quad (8.12)$$

a aproximação numérica parte de correlacionar a integral com um polinômio do terceiro grau da forma:

$$\eta(\gamma) = a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d \quad (8.13)$$

e para definir os valores de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  é necessário atender as especificações

$$\eta(1) = 1$$

$$\eta(-1) = -1$$

$$\left. \frac{d\eta}{d\gamma} \right|_{\eta} = 0 \quad (8.14)$$

$$\left. \frac{d^2\eta}{d\gamma^2} \right|_{\eta} = 0$$

substituindo no polinômio é possível chegar em um sistema de equações não linear

$$\begin{aligned} a + b + c &= 0 \\ -a + b - c &= 0 \\ 3a\gamma^2 + 2b\gamma + c &= 0 \\ 6a\gamma + 2b &= 0 \end{aligned} \quad (8.15)$$

Uma solução do sistema é dada pelas seguintes expressões,

$$\begin{aligned} a &= 1/Q \\ b &= -d = -3\bar{\gamma}/Q \\ c &= 3\bar{\gamma}^2/Q \\ Q &= 1 + 3\bar{\gamma}^2 \end{aligned} \quad (8.16)$$

onde  $\bar{\gamma}$  é a solução para  $\eta(\bar{\gamma}) = \bar{\eta}$  podendo ser obtida através de

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{\bar{\eta}\eta^* + |\eta^*|} + \sqrt[3]{\bar{\eta}\eta^* + |\eta^*|} + \bar{\eta} \quad (8.17)$$

sendo  $\eta^* = \bar{\eta}^2 - 1$

Reescrevendo a equação 8.3 como

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta(\gamma))J(\gamma)d\gamma \approx \sum_i^n f(x_i)w_i \quad (8.18)$$

onde o jacobiano  $J(\gamma)$  pode ser descrito como

$$J(\gamma) = \frac{3(\gamma + \bar{\gamma})^2}{1 + 3\bar{\gamma}^2} \quad (8.19)$$

sendo  $x_i$  e  $w_i$  são respectivamente os pontos e pesos de Gauss.

## 8.2 Exemplos da aplicação da Quadratura Autoadaptativa

Considere a integral onde ocorre a quase singularidade  $\bar{\eta}$  e sua solução analítica,

$$\int_{-1}^1 \frac{d\eta}{(1.004 - \eta)^2} = 249.500998 \quad (8.20)$$

Esse é um caso de quase singularidade de parte finita de Hadamard onde o grau do denominador é 2. Esse é um dos casos que a integração pela Quadratura de Kutt não satisfaz, sendo assim deve-se utilizar outro método de integração, nesse caso, a quadratura autoadaptativa.

Aplicando as etapas descritas nesse capítulo, tem-se:

O ponto de quase singularidade

$$\bar{\eta} = 1.004 \quad (8.21)$$

o fator  $\eta^*$

$$\eta^* = \bar{\eta}^2 - 1 = 0.0080160 \quad (8.22)$$

os coeficiente dos polinômios se dão por

$$\begin{aligned} a &= 1/Q = 0.16729 \\ b &= -3\bar{\gamma}/Q = -0.64646 \\ c &= 3\bar{\gamma}^2/Q = 0.83270 \\ d &= -b = 0.64646 \\ Q &= 1 + 3\bar{\gamma}^2 = 5.97752 \end{aligned} \quad (8.23)$$

reescrevendo o polinômio

$$\eta(\gamma) = 0.16729\gamma^3 - 0.64647\gamma^2 + 0.83271\gamma + 0.64647 \quad (8.24)$$

calculando o  $\bar{\gamma}$

$$\bar{\gamma} = \sqrt[3]{0.00801 \cdot 1.004 + |1.004|} + \sqrt[3]{0.00801 \cdot 1.004 + |1.004|} + 0.00801 \quad (8.25)$$

Substituindo  $\bar{\gamma}$  para obter o Jacobiano

$$J(\gamma) = \frac{3(\gamma + \bar{\gamma})^2}{1 + 3\bar{\gamma}^2} = 0.501880(\gamma - 1.288089)^2 \quad (8.26)$$

Multiplicando a transformada cúbica pelo Jacobiano

$$I = \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{0.16729\gamma^3 - 0.64647\gamma^2 + 0.83271\gamma + 0.64647} \right) (0.501880(\gamma - 1.288089)^2) d\gamma \quad (8.27)$$

Sendo assim pode se realizar a aproximação da integral através dos somatório utilizando a Quadratura Gaussiana.

$$I \approx \sum_{i=1}^k \left( \frac{0.501880(x_i - 1.288089)^2}{0.16729x_i^3 - 0.64647x_i^2 + 0.83271x_i + 0.64647} \right) w_i \quad (8.28)$$

onde  $x_i$  e  $w_i$  são os pontos e pesos da quadratura Gaussiana. Para esse exemplo, utilizou-se 10 pontos e pesos de Gauss descrito na tabela 8.1 com o resultado obtido

Tabela 8.1 – Pontos e pesos de Gauss

Pontos $x_i$	Pesos $w_i$
-0.148874338981631	0.295524224714753
-0.433395394129247	0.269266719309996
-0.679409568299024	0.219086362515982
-0.865063366688985	0.149451349150581
-0.973906528517172	0.066671344308688
0.148874338981631	0.295524224714753
0.433395394129247	0.269266719309996
0.679409568299024	0.219086362515982
0.865063366688985	0.149451349150581
0.973906528517172	0.066671344308688

Aplicando a integração numérica

$$I \approx \sum_{i=1}^{k=10} = 249.434894 \quad (8.29)$$

Com isso, para uma integração de usando um  $k = 10$ , ainda existe um erro da ordem  $10^{-4}$ . No entanto, quando aumentamos para um  $k = 20$  a precisão obtém-se um resultado de  $I = 249.5009978$ , alcançando uma precisão de 5 casas decimais e para  $k = 25$  a uma precisão de 6 casas decimais  $I = 249.5009980$ . Os resultados podem ser observados na tabela 8.2

Com o objetivo de validar a eficácia da programação em anexo, serão apresentados mais exemplos de utilizando a integração numérica apresentada neste capítulo. Sendo assim, considere a integral

$$\int_{-1}^1 \frac{d\eta}{(1.1 - \eta)^2} = 9.52380952 \quad (8.30)$$

Tabela 8.2 – Resultados da integração numérica para diferentes quantidades de pontos de Gauss - exemplo 01

$k$	Parte Finita	Solução Numérica	Erro
10	249.500998	249.434894	2.65E-4
20	249.500998	249.500998	8.016E-10
25	249.500998	249.500998	0

Tabela 8.3 – Resultados da integração numérica para diferentes quantidades de pontos de Gauss - exemplo 02

$k$	Parte Finita	Solução Numérica	Erro
10	9.52380952	9.52380950	2.1E-09
20	9.52380952	9.52380953	1.05E-09
25	9.52380952	9.52380952	0

aplicando as etapas do exemplo anterior até chegar na expressão 8.29 pode-se chegar nos resultados da tabela 8.3

Conforme demonstrado na tabela a programação apresentou uma convergência no resultado. Em virtude do exposto, torna-se interessante testar a programação quando o integrando possui uma singularidade em uma função logarítmica.

Sendo assim, considere a integral

$$\int_{-1}^1 \ln|0.3 + \eta| d\eta = -1.908598917 \quad (8.31)$$

Considerando o ponto de singularidade  $\eta = -0.3$  e aplicando as etapas do exemplo anterior até chegar na expressão 8.29 pode-se chegar nos resultados da tabela 8.4

Tabela 8.4 – Resultados da integração numérica para diferentes quantidades de pontos de Gauss - exemplo 03

$k$	Parte Finita	Solução Numérica	Erro
10	-1.908598917	-1.903280847	2.79E-03
20	-1.908598917	-1.908001667	3.13E-04
25	-1.908598917	-1.908266237	1.74E-04
50	-1.908598917	-1.908548970	2.62E-05

Para esse caso em específico, foi necessário de 50 pontos de gauss para que se chegasse em um erro de ordem de  $10^{-5}$ .

### 8.3 Quadratura autoadaptativa com quase singularidade dentro do intervalo de integração

Considere a integral  $\bar{\eta}$  é igual  $-0.3$ .

$$\int_{-1}^1 \ln|0.3 + \eta| d\eta = -1.908598917 \quad (8.32)$$

Aplicando as etapas de integração utilizando o programa demonstrado no anexo 4, chega-se aos resultados.

$k$	Solução Analítica	Solução Numérica	Erro
10	- 1.908598917	-1.903280847	-2,79E-03
20	- 1.908598917	-1.908001667	-3,13E-04
25	- 1.908598917	-1.908266237	-1,74E-04
50	- 1.908598917	-1.908548970	-2,62E-05
100	- 1.908598917	-1.908596878	-1,07E-06

Sendo assim, pode-se notar que para esse caso específico, foi necessário 100 pontos de gauss para chegar a um erro de  $10^{-6}$

#### 8.4 Limitações da Quadratura Autoadaptativa

A expressão 8.18 pode ser aplicada para calcular a integral usando quadratura gaussiana em dois casos diferentes:

Quando  $\bar{\eta} < 1$ , a transformação do terceiro grau foi desenvolvida para lidar com integrandos singulares que não levam a integrais divergentes (por exemplo, singularidade logarítmica). Portanto, se aplicado a partes finitas ou valor principal de Cauchy correspondem a integrais divergentes tendendo ao infinito, será obtido; isso é inteiramente consistente com a integração de Riemann [BARTLE R. G. SHERBERT, 2011]. para esse caso específico do  $\bar{\eta}$ , o método de modificar a integração na expressão 8.3 consiste em utilizar uma transformação polinomial na integração padrão na expressão foi discutido por [CERROLAZA, 1989].

Quando  $\bar{\eta} > 1$  neste caso, a singularidade está fora do intervalo de integração e recebe o nome de quase singular e integrandos que não apresentam problemas de integração a princípio. Esta é a aplicação mais útil e geral de a transformação, melhorando muito a precisão da quadratura Gaussiana ou qualquer outra integração no cálculo quase-singular de limite entre  $-1$  e  $1$  como por exemplo o método da subdivisão de elementos [TELLES, 1987]. Uma série de testes serão apresentados.

## Algoritmo proposto

Segundo [MANOVICH, 2001], qualquer processo ou tarefa pode ser reduzido a um algoritmo, o que define como uma sequência de operações simples que um computador pode executar para alcançar uma tarefa dada. A automação é o processo em que uma tarefa deixa de ser desempenhada pelo homem e passa a ser realizada por máquinas, sejam estes dispositivos mecânicos, eletrônicos (como os computadores) ou de natureza mista. Para que a automação de uma tarefa seja bem-sucedida é necessário que a máquina que passará a realizá-la seja capaz de desempenhar cada uma das etapas constituintes do processo a ser automatizado com eficiência, de modo a garantir a repetibilidade do mesmo.

Assim, é necessário que seja especificado com clareza e exatidão o que deve ser realizado em cada uma das fases do processo a ser automatizado, bem como a sequência em que estas fases devem ser realizadas. À especificação da sequência ordenada de passos que deve ser seguida para a realização de uma tarefa, garantindo a sua repetibilidade, dá-se o nome de algoritmo.

Para chegar às funcionalidades que atendem-se os casos de integração numérica sem singularidade, quase singularidade, valor principal de Cauchy e parte finita de Hadamard, foram utilizados o software Matlab, MathCad e o Wolfram Alpha.

### 9.1 Tipos de Representação de Algoritmo

Existem diversas formas de representação de algoritmos, mas não há um consenso com relação à melhor delas. O critério usado para classificar hierarquicamente estas formas está diretamente ligado ao nível de detalhe ou, inversamente, ao grau de abstração oferecido.

Algumas formas de representação de algoritmos tratam os problemas apenas em nível lógico, abstraindo-se de detalhes de implementação muitas vezes relacionados com alguma linguagem de programação específica. Por outro lado existem formas de representação de algoritmos que possuem uma maior riqueza de detalhes e muitas vezes acabam por obscurecer as ideias principais do algoritmo, dificultando seu entendimento.

Dentre as formas de representação de algoritmos mais conhecidas são descrição narrativa, fluxograma convencional e pseudocódigo, também conhecido como linguagem estruturada.

### 9.1.1 Descrição narrativa

A descrição narrativa é uma forma de representação em que os algoritmos são expressos diretamente em linguagem natural utilizando verbos no imperativo. Como exemplo:

Descrição narrativa para troca de um pneu furado:

Afrouxar ligeiramente as porcas, suspender o carro, retirar as porcas e o pneu, colocar o pneu reserva, apertar as porcas abaixar o carro, dar o aperto final nas porcas.

Esta representação é pouco usada na prática porque o uso da linguagem natural muitas vezes dá oportunidade a más interpretações, ambiguidades e imprecisões.

### 9.1.2 Fluxograma convencional

É uma representação gráfica de algoritmos onde formas geométricas diferentes implicam ações distintas. Essa propriedade facilita o entendimento das etapas contidas nos algoritmos e justifica sua popularidade.

Percebe-se que os fluxogramas convencionais preocupam-se com detalhes de nível físico da implementação do algoritmo. Por exemplo, figuras geométricas diferentes são adotadas para representar operações de saída de dados realizadas em dispositivos distintos.

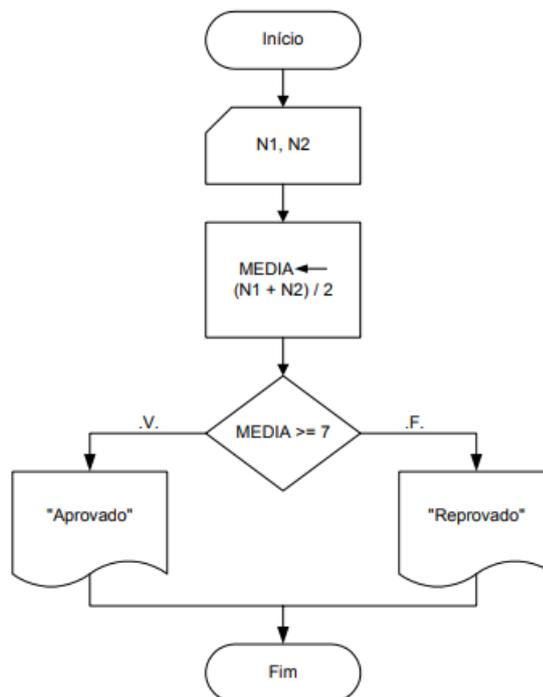


Figura 9.1 – Fluxograma para cálculo de média com condicional para aprovação. Fonte: [OLIVEIRA, 2004] <https://www.dca.ufrn.br/~affonso/DCA800/pdf/algoritmosparte1.pdf>

De modo geral, um fluxograma se resume a um único símbolo inicial por onde a execução do algoritmo começa, e um ou mais símbolos finais, que são pontos onde a execução do algoritmo se encerra. Partindo do símbolo inicial, há sempre um único caminho orientado a ser seguido, representando a existência de uma única sequência de execução das instruções. Isto pode ser melhor visualizado pelo fato de que, apesar de vários caminhos poderem convergir para uma mesma figura do diagrama, há sempre um único caminho saindo desta. Exceções a esta regra são os símbolos finais, dos quais não há nenhum fluxo saindo, e os símbolos de decisão,

de onde pode haver mais de um caminho de saída, geralmente dois caminhos, representando uma bifurcação no fluxo.

### 9.1.3 Pseudocódigo

Esta forma de representação de algoritmos é rica em detalhes, como a definição dos tipos das variáveis usadas no algoritmo. Por assemelhar-se bastante à forma em que os programas são escritos, encontra muita aceitação.

Na verdade, esta representação é suficientemente geral para permitir a tradução de um algoritmo nela representado para uma linguagem de programação específica seja praticamente direta.

A forma geral da representação de um algoritmo na forma de pseudocódigo é a seguinte:

## 9.2 Tipos de Dados

Todo o trabalho realizado por um computador é baseado na manipulação das informações contidas em sua memória. Grosso modo, estas informações podem ser classificadas em dois tipos:

As instruções, que comandam o funcionamento da máquina e determinam a maneira como devem ser tratados os dados. As instruções são específicas para cada modelo de computador, pois são funções do tipo particular de processador utilizado em sua implementação. Os dados propriamente ditos, que correspondem à porção das informações a serem processadas pelo computador.

A classificação apresentada não se aplica a nenhuma linguagem de programação específica, pelo contrário, ela sintetiza os padrões utilizados na maioria das linguagens.

As principais tipologias dos dados são: numéricos, dados literais e lógicos. Os dados numéricos basicamente corresponde aos conjuntos de números, naturais, inteiros, reais, fracionários e os reais. O tipo de dados literal é constituído por uma sequência de caracteres contendo letras, dígitos e/ou símbolos especiais. Este tipo de dados é também muitas vezes chamado de alfanumérico, cadeia (ou cordão) de caracteres, ainda, do inglês, string.

### 9.2.1 Dados Lógicos

A existência deste tipo de dado é, de certo modo, um reflexo da maneira como os computadores funcionam. Outra terminologia para descrever estes tipos de dados é de booleano. O tipo de dados lógico é usado para representar dois únicos valores lógicos possíveis, verdadeiro e falso. É comum encontrar-se em outras referências outros tipos de pares de valores lógicos como sim,não, um, zero, true ou false.

A Figura 9.2 resume a classificação dos dados com relação aos tipos de dados apresentados.

### 9.2.2 Definição de Variáveis em Algoritmos

Em programação, uma variável é um objeto (uma posição, frequentemente localizada na memória) capaz de reter e representar um valor , expressão ou até mesmo outra variável. Enquanto as variáveis só "existem"em tempo de execução, elas são associadas a "nomes", cha-

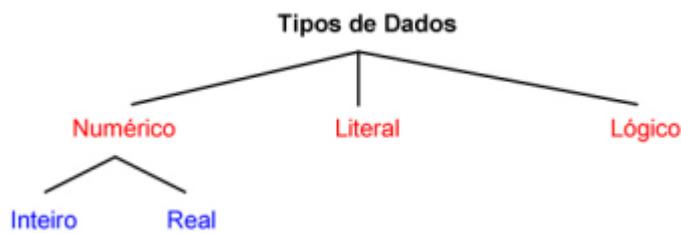


Figura 9.2 – Representação dos diversos tipos de dados. Fonte: <https://www.dca.ufrn.br/afonso/DCA800/pdf/algorithmosparte1.pdf>

mados identificadores, durante o tempo de desenvolvimento.

Todas as variáveis utilizadas em algoritmos devem ser definidas antes de serem utilizadas. Isto se faz necessário para permitir que o compilador reserve um espaço na memória para as mesmas.

Cada tipo de dado requer um número diferente de bytes para armazenar a informação representada por ele na memória. Esta quantidade também pode variar em função do tipo de computador considerado.

Uma variável é uma entidade dotada de um nome para diferenciá-la das demais e um tipo de dado que define o tipo de informação que ela é capaz de guardar. Uma vez definidos, o nome e o tipo de uma variável não podem ser alterados no decorrer de um programa. Por outro lado, a informação útil da variável é objeto de constante modificação durante o decorrer do programa, de acordo com o fluxo de execução do mesmo.

### 9.2.3 Árvore de decisão

As árvores de decisão e os algoritmos são duas técnicas amplamente utilizadas em aprendizado de máquina, mas possuem diferenças significativas. As árvores de decisão são modelos gráficos que representam uma sequência de decisões a serem tomadas para resolver um problema. Essas decisões são tomadas a partir de testes em variáveis de entrada, seguindo caminhos diferentes dependendo do resultado de cada teste, até se chegar a uma conclusão. Já os algoritmos são procedimentos computacionais que executam uma tarefa específica, como classificar dados ou encontrar padrões em conjuntos de dados. Eles podem ser usados em conjunto com árvores de decisão ou separadamente para resolver problemas de aprendizado de máquina.

Uma das principais diferenças entre as árvores de decisão e os algoritmos é a sua complexidade. As árvores de decisão podem ser facilmente interpretadas por humanos, pois apresentam uma estrutura gráfica intuitiva. Além disso, permitem a visualização do processo de tomada de decisão, facilitando a compreensão dos resultados. Já os algoritmos, geralmente, são mais complexos e difíceis de serem interpretados, exigindo um conhecimento mais avançado em programação e matemática.

Outra diferença importante entre as duas técnicas é a sua aplicação em diferentes tipos de problemas. As árvores de decisão são mais adequadas para problemas em que é necessário tomar uma série de decisões baseadas em testes em variáveis, como diagnóstico médico ou análise de crédito. Já os algoritmos podem ser usados em uma ampla variedade de problemas, como reconhecimento de imagens, processamento de linguagem natural e previsão de séries temporais.

Por fim, as árvores de decisão e os algoritmos apresentam diferenças em relação à sua

precisão e capacidade de lidar com conjuntos de dados grandes e complexos. As árvores de decisão são eficazes em problemas com conjuntos de dados menores, mas podem apresentar limitações em relação à sua precisão em problemas com muitas variáveis. Já os algoritmos, geralmente, apresentam uma precisão maior em conjuntos de dados maiores e mais complexos, mas podem exigir mais tempo de processamento e recursos

#### 9.2.4 Algoritmo proposto

Em um primeiro momento, foi idealizado a programação da quadratura de gaussiana, visto que, muitas etapas são aproveitadas nas programações das outras integrações, como por exemplo, os pontos e pesos de Gauss, a transformação do intervalo qualquer para um intervalo entre -1 e 1. Uma grande vantagem da programação do algoritmo proposto quarto apêndice foi poder trabalhar com intervalos assimétricos, além de organizar três tipos de métodos de integração em uma só programação.

A idealização da programação inicia-se pela programação do polinômio de Legendre com um grau qualquer como mostra no anexo 1. Essa programação em questão é de determinante para o algoritmo da figura 9.3, visto que, a quantidade de pontos e pesos de Gauss está ligada com o polinômio de Legendre.

A partir desse ponto, pode-se idealizar a programação da quadratura de Gauss-Legendre, conforme é demonstrado na figura. A figura 9.3 apresenta o fluxograma utilizado na elaboração do algoritmo proposto deste trabalho. Sendo assim, foi programado cada método de integração separadamente

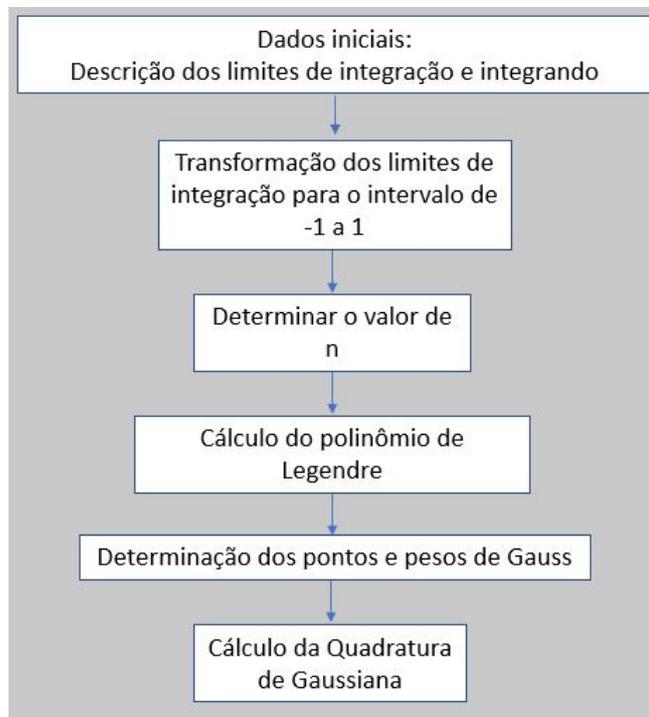


Figura 9.3 – Fluxograma convencional da quadratura de Gauss-Legendre. Fonte: própria

Como foi mostrado no capítulos 5, a presença de integrais singulares em MEC são presentes nas equações de soluções fundamentais. Sendo assim, torna-se convidativo criar um algoritmo que pudesse resolver integrais de forma numérica sem singularidade, valor principal de cauchy e com singularidade.

Em etapas bem parecidas com a quadratura de Gauss-Legendre, foi possível sequenciar as etapas de integração da quadratura de Kutt como mostra a figura 9.4.

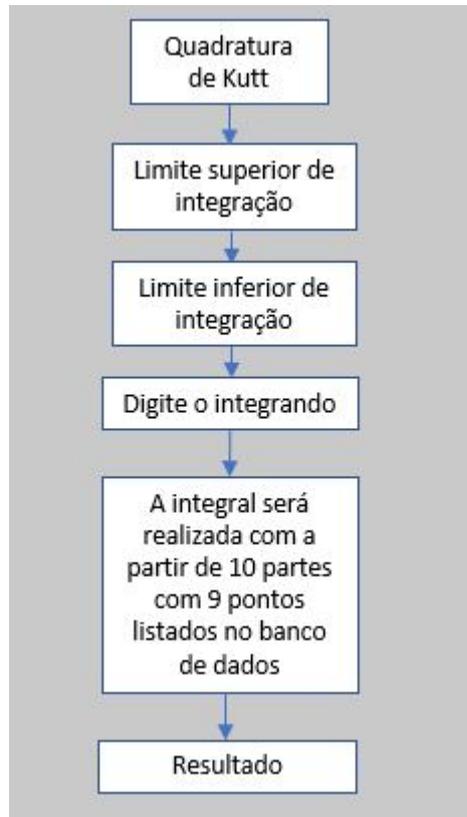


Figura 9.4 – Representação programação da quadratura de Kutt. Fonte: própria

A estrutura de integração da quadratura autoadaptativa apresentada 9.5 também se simi- lariza a quadutura de Kutt no que se diz das etapas de fluxograma. No entanto a mesma aborda a resolução de integrais hipersingulares.



Figura 9.5 – Representação programação da quadratura autoadaptativa. Fonte: própria

Com isso, pode-se unir as três programações em um único programa. A figura 9.6 apresenta o fluxograma utilizado na elaboração do algoritmo proposto deste trabalho.

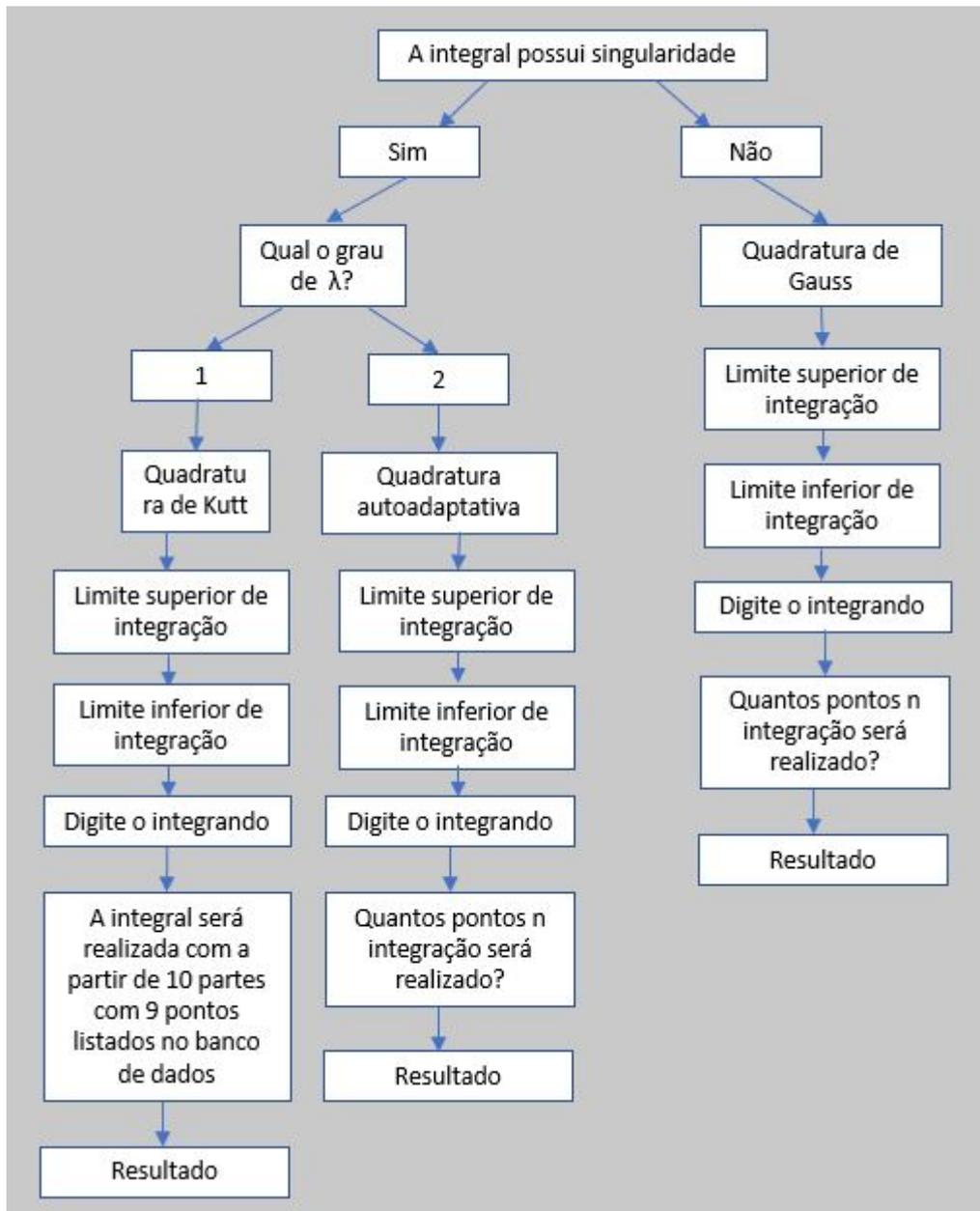


Figura 9.6 – Representação detalhada da programação. Fonte: própria

Concluindo este capítulo, podemos afirmar que a resolução de equações integrais é uma área complexa e desafiadora da matemática, que exige um conhecimento sólido e habilidades avançadas de programação. Embora existam muitos recursos disponíveis para resolver equações integrais, como o Wolfram Alpha, há ainda muitas equações que não podem ser resolvidas por essas ferramentas.

No entanto, foi apresentado um código de programação que tem o potencial de resolver equações integrais que ainda não foram implementadas no Wolfram Alpha.

Com o código, os usuários agora têm uma nova opção para resolver equações integrais que ainda não foram implementadas em outras ferramentas. Além disso, nosso código pode ser facilmente adaptado e modificado para lidar com novos tipos de equações, tornando-o uma ferramenta valiosa para a comunidade matemática.

Em resumo, o desenvolvimento de um código de programação para resolver equações integrais é um avanço importante na matemática e na ciência da computação. Esperamos que o código apresentado neste capítulo possa inspirar novas pesquisas e inovações na resolução de equações integrais e em áreas relacionadas.

A partir dos estudos teóricos e da pesquisa bibliográfica, foi possível encontrar a solução analítico e/ou numérica de integrais com algum grau de singularidade dentro das integrais que são encontradas nas soluções fundamentais no método dos elemento de contorno. O principal objetivo deste trabalho, além de realizar um estudo aprofundado dos diferentes tipos de integrais singulares, foi desenvolver um programa a partir de um algoritmo escrito em fluxograma convencional que resolvesse os casos de integrais singulares dos tipos fraca, forte e hipersingulares. Os métodos utilizados para o desenvolvimento do software se inicia com quadratura gaussiana ou quadratura de Gauss-Legendre, passa pela quadratura de Kutt e termina com quadratura autoadaptativa de Telles, respeitando as respectivas limitações de cada técnica.

Foram realizados diversos testes baseados em artigos envolvendo integrais singulares do tipo fraca, forte e hipersingulares. Os resultados dos teste com a programação desenvolvida se demonstrou coerente com os resultados com um nível de precisão satisfatório.

No entanto, a limitação do programa desenvolvido é concernente à quadratura de Kutt, que até o momento, apresenta um número limitado de pontos da integração ocasionada pelo banco de dados fixo na programação. Diferentemente da quadratura gaussiana e quadratura autoadaptativa que utilizam o polinômio de Legendre para poder gerar uma quantidade qualquer de pontos de integração. Essas mesmas limitações são contornadas justamente com a sequência de perguntas que a programação faz ao usuário para direcionar a tratamento dos dados iniciais apresentados.

O código apresentado pode ser uma ferramenta valiosa para o ensino superior, especialmente para demonstrar as limitações da quadratura de Gauss-Legendre na resolução de equações integrais complexas. Ao permitir que os estudantes experimentem com diferentes equações e valores de integração, o código pode ajudá-los a entender as vantagens e desvantagens da quadratura de Gauss-Legendre em comparação com outras técnicas de integração. Além disso, o código pode ajudar a reforçar conceitos importantes, como a importância da precisão numérica e a necessidade de escolher uma técnica adequada para a equação em questão. Em resumo, o código apresentado pode ser uma ferramenta valiosa para o ensino superior, ajudando a aprimorar a compreensão dos alunos sobre a resolução de equações integrais e suas limitações. Outra propriedade do código é que o mesmo o potencial de resolver equações integrais que ainda não foram implementadas no Wolfram Alpha.

Em trabalhos futuros, seria de grande valia idealizar um programa com interface para usuário do tipo "stand alone", que não necessite que o usuário instale o matlab para poder utilizar o programa. Outra possibilidade mais imediata seria, implementar uma função própria dentro do matlab que pudesse ser requisitada quando necessária. A desvantagem é que o usuário precisaria ter o matlab previamente instalado. Em uma outra perspectiva seria, criar

uma programação que reconhecesse os caracteres digitados no integrando e direcionasse sem a necessidade de perguntar ao usuário qual é o grau da singularidade apresentada no integrando.

## Referências bibliográficas

MANOVICH, Lev.

BARTLE R. G. SHERBERT, D. R. Introduction to real analysis. *Hoboken, New Jersey: Wiley*, v. 1, 2011.

BATHE, K. J. Finite element procedures. *Prentice Hall, USA.*, 2016.

BECKER, A. The boundary element method in engineering – a complete course. *Pennsylvania State University: Mcgraw-Hill*, 1992.

BREBBIA, C. The boundary element method for engineers. *Appl Math Modell*, n. 1, p. 372, 1978.

BREBBIA, C.; DOMINGUEZ, J. Boundary element methods for potential problems. *Appl Math Modell*, n. 1, p. 372, 1977.

BREBBIA C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. Boundary element techniques - theory and applications in engineering. *Heidelberg: Spreinger-Berlag*, p. 465, 1984.

CERROLAZA, M. Accurate integration of singular kernels in boundary methods,. *Advances in Boundary Elements - – Proc. 11th Internation Conference*, v. 1, n. 11, 1989.

CHAN, Y. S. e. a. Finite part integrals and hypersingular kernels . a supplement, advandes in dynamical systems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 14, p. 264–269, 2007.

CRUSE, T. A. Numerical solutions in three dimensional elastostactis. *International Journal of Solids and Structures*, v. 5, p. 1259–1274, 1969.

FAKHYE, R. J. M. Análise comparativa de técnicas de cálculo numérico de integrais singulares no método de elementos de contorno. *Departamento de Engenharia Civil da Faculdade de Tecnologia da Universidade de Brasília*, 1998.

FREDHOLM, I. Sur une classe d'equations fonctionnelles. *Acta Math*, n. 27, p. 365–390, 1903.

GAO, X.-W. Evaluation for regular and singular domain integrals with bondary-only discretization: theory an fortran code. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 175, p. 265–290, 2005.

- HUANG, Q.; CRUSE, T. P. On the nonsingular traction-bie in elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.37, p. 2041–2072, 1994.
- JASWON, M. A. Integral equation methods in potential theory i. *Proceedings of the Royal Society A*, p. 23–32, 1963.
- KUTT, H. R. The numerical evaluation of principal value integrals by finite partintegration. *Numer. Math*, n. 24, p. 205–210, 1975.
- KUTT, H. R. Quadrature formulae for finite part integrals. *Report WISK 178, The National Research Institute for Mathematical Sciences, Pretoria*, 1975.
- LEVEQUE, R. J. Finite diference methods for ordinary and partial diferential equations. *1a. ed. Philadelphia, Siam*, 1955.
- MANOVICH, L. The database in the language of new media. *Massachusetts: MIT Press*, v. 1, 2001.
- OLIVEIRA, L. A. H. G. de. *Algoritmo e Lógica de Programação*). DCA 800, 2004. Acessado em 15/01/2023. Disponível em: <<https://www.dca.ufrn.br/affonso/DCA800/pdf/algoritmosparte1.pdf>>.
- REISSNER, E. On a variational theorem in elasticity. *J Math Phys*, n. 5, p. 29:90, 1950.
- RIZZO, F. J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quart. Appl. Math.*, p. 25–83, 1967.
- SOUZA, C. P. G. Análise de alta precisão em modelos tridimensionais de elementos de contorno utilizando técnicas avançadas de integração numérica . 2007. 158 f. dissertação. (*Mestrado em Engenharia*), n. Escola Politécnica, Universidade São Paulo, São Paulo,, 2007.
- STEWART, J. Cálculo. *LTD*, v. 1, 2013.
- SYMM, G. T. Integral equation methods in potential theory, ii. *Proceedings of the Royal Society A*, p. 33–46, 1963.
- TELLES, J. C. F. A self-adaptive co-ordinate transformation for efftcient numerical evaluation of general boundary element integrals. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 24, p. 959–973, 1987.
- TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. Theory of elasticity,. *McGrawHill*, v. 3rd Edition, 1970.
- TUDELA, C. R. Formulações alternativas do mec para problemas elastodinâmicos de mecânica da fratura com o uso da função de green numérica. *UFRJ*, v. 62, 2003.
- WASHIZU, K. Variational methods in elasticity and plasticity. *Pergamon Press*, 1968.
- WIBOWO, S.; KURNIAWAN, V. The relation between hölder continuous function of order  $\alpha \in (0, 1)$  and function of boundedvariation. *JJ. Phys. Conf. Ser.*, 2020.

```

%Cálculo do Polinômio de Legendre

clc
clear

syms x
N = 64;
c = (x ^ 2-1) ^ N;
f = factorial(N);
d = diff(c,N);
%disp(d)
%disp(f)

% Polinômio de Legendre

Pleg= (1/((2 ^ N)*f))*d;

disp('Polinômio de Legendre')

disp(Pleg)

% Raízes do polinômio

disp('Raízes do polinômio ou nós x_i da quadratura de Gauss')
V = double(solve(Pleg,x));

disp(V)

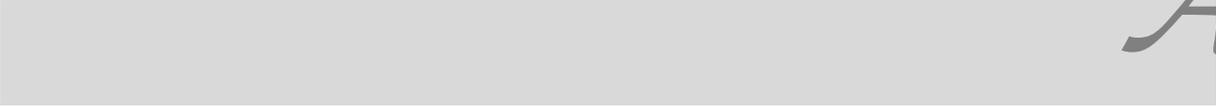
% Programação Inicial
% %Cálculo dos Pesos da Quadratura Gaussiana
% pdif = diff(Pleg);
% z(1:1) = subs(pdif,x,V(1:1));
%
% w(1:1) = 2/((1-V(1:1)^2)*(z^2));
% disp(w)

```

```
for i=1:N
    pdif = diff(Pleg);
    z(i) = subs(pdif,x,V(i));
    w(i) = double(2/((1-V(i)^ 2)*(z(i)^2)));
end

disp('Pontos Xi e Pesos')
B = [V w'];

disp(B)
```



*A*

```

%Quadratura de Gauss-Legendre
clc
clear

syms x t x2

lim_sup = 3;
lim_inf = 1;
singularidade = 0;

% Função a ser integrada
disp('Função primária f(x)')
f = x^6-(x^2)*sin(2*x);
pretty(f)
% Transformação para f(t)
t = (1/2)*((singularidade - lim_inf)*x+...

(singularidade + lim_inf))*((singularidade - lim_inf)*(1/2));

disp('Valor de t')

disp(t)

disp('Função modificada f(t)')
f_t = subs(f,x,t);
% disp(f_t)
pretty(f_t)

% N
N = 4;
Npart = floor(N/2);
disp('Pontos de Gauss')
disp(Npart)
c = (x^2-1)^Npart;
fat = factorial(Npart);
d = diff(c,Npart);
%disp(d)
%disp(f)

```

```

% Polinômio de Legendre

Pleg= (1/((2^Npart)*fat))*d;

disp('Polinômio de Legendre')

disp(Pleg)

% Raízes do polinômio

disp('Raízes do polinômio ou nós x_i da quadratura de Gauss')
V = double(solve(Pleg,x));

disp(V)

\end{tcolorbox}

\begin{tcolorbox}[title=Quadratura de Gauss-Legendre]

% Programação Inicial
% %Cálculo dos Pesos da Quadratura Gaussiana
% pdif = diff(Pleg);
% z(1:1) = subs(pdif,x,V(1:1));
%
% w(1:1) = 2/((1-V(1:1)^2)*(z^2));
% disp(w)
%

for i=1:Npart
    pdif = diff(Pleg);
    z(i) = subs(pdif,x,V(i));
    w(i) = double(2/((1-V(i)^2)*(z(i)^2)));
end

disp('    Pontos Xi          Pesos Wi')
B = [V w'];

S = V;
disp(B)

```

```

disp('Integração Numérica')

f_x = double(subs(f_t,x,V(:)));

disp('    Pesos W_i            Valores de F(x_i)')

Q = [w' f_x];

disp(Q)

disp('          Somatório de W_i*F(x_i)')

c =Q(:,1).*Q(:,2);
disp(c)

disp('          Resultado da Primeira Integral')

% disp(sum(c))
Int1 = sum(c);
disp(Int1)

% Cálculo segunda parte da integral

disp('=====')
disp('Cálculo Segunda parte da integral')
disp('=====')

t2 = 0.25*((lim_sup - singularidade)*x+(lim_sup + ...
singularidade))*((lim_sup - singularidade));

disp('Função primária f(x)')
pretty(f)

disp('Função modificada f2(t)')
f_t2 = subs(f,x,t2);
% disp(f_t2)

\end{tcolorbox}

```

```

pretty(f_t2)

% N
Npart = floor(N/2);
c = (x^2-1)^Npart;
fat = factorial(Npart);
d = diff(c,Npart);
%disp(d)
%disp(f)

% Polinômio de Legendre

Pleg= (1/((2^Npart)*fat))*d;

disp('Polinômio de Legendre')

disp(Pleg)

% Raízes do polinômio

disp('Raízes do polinômio ou nós x_i da quadratura de Gauss')

V2 = V;

disp(V2)

disp('Integração Numérica')

f_x2 = double(subs(f_t2,x,V2(:)));

disp('    Pesos W_i            Valores de F(x_i)')

Q2 = [w' f_x2];

disp(Q2)

disp('                Somatório de W_i*F(x_i)')

c2 =Q2(:,1).*Q2(:,2);
disp(c2)
disp('                Resultado da Segunda Integral')

```

```

% disp(sum(c2))
Int2 = sum(c2);
disp(Int2)

disp('=====' )
disp('          Resumo geral')
disp('=====' )

disp('          Resultado da Primeira Integral')

disp(Int1)

disp('          Resultado da Segunda Integral')

% disp(sum(c2))
Int2 = sum(c2);
disp(Int2)

disp('          Soma das Integrais')

I = Int1+Int2

disp(I)

% Raízes do polinômio

disp('Raízes do polinômio ou nós x_i da quadratura de Gauss')

V = double(solve(Pleg,x));

disp(V)

% Programação Inicial
% %Cálculo dos Pesos da Quadratura Gaussiana
% pdif = diff(Pleg);
% z(1:1) = subs(pdif,x,V(1:1));
%
% w(1:1) = 2/((1-V(1:1)^2)*(z^2));
% disp(w)

```

```

for i=1:N
    pdif = diff(Pleg);
    z(i) = subs(pdif,x,V(i));
    w(i) = double(2/((1-V(i)^2)*(z(i)^2)));

end

disp('    Pontos Xi            Pesos Wi')
B = [V w'];

S = V;
disp(B)

disp('Integração Numérica')
disp('                Valores de F(x_i)')

f_x = double(subs(f_t,x,V(:)));

disp('    Pesos W_i            Valores de F(x_i)')

Q = [w' f_x];\\

disp(Q)

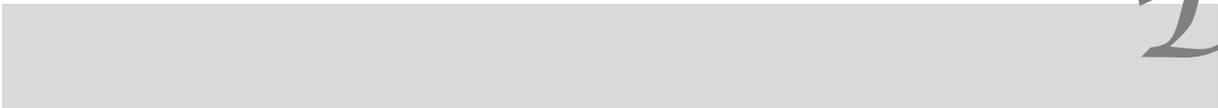
disp('                Somatório de W_i*F(x_i)')

c =Q(:,1).*Q(:,2);
disp(c)\\

disp('                Resultado')

disp(sum(c)\\

```



*B*

```

%Quadratura de Kutt
clc
clear
format long
syms x f(x) s k

disp('-----')
disp('Programação para Quadratura de Kutt')
disp('-----')

disp('Exemplo da Integral com Singularidade de grau 1')
disp('-----')

exemplo = f(x)/(x-s)^k;
pretty(exemplo)

disp('onde :')
disp('f(x) é somente o numerador;')
disp('s é a singularidade;')
disp('x é a variável do integrando;')
disp('k é o grau da singularidade
%(por enquanto digitar somente grau 1);')

disp('-----')

lim_sup = input('digite o limite superior:');
lim_inf = input('digite o limite inferior:');
lambda = input('digite o valor de k:');
% para esse caso o lambda não vai ser utilizado,
%porém nos próximos estudos
% será utilizado para a parte finita de Haramard.
singularidade = input('digite o ponto de singularidade:');
% f_x é o numerador do integrando g_x
f_x = input('digite f(x):');
denominador = input('digite denominador:');
% denominador = (singularidade - x)^lambda;
disp('integrando')

```

```

g_x = f_x/denominador;

pretty(g_x)

% Condicional para a integral simplificada.
% if f_x == 1
%
% disp('-----')
%     disp('Integral Simplificada')
% disp('-----')

%
%     Int_log = log(double(lim_sup-singularidade)/...
(singularidade-lim_inf));
%
%     disp(Int_log)
% else

disp('-----')\\
disp('Integral Completa')\\
disp('-----')\\

Pontos de Kutt
Z = [(0.01)*-0.3242501597; (0.1)*0.5349076607;
0.177827326; 0.3507178785;
0.5458195204; 0.733427080; 0.884983053; 0.9774543783;];

disp('Pontos de Kutt')
disp(Z)

Pesos de Kutt
w = [10*(-0.3930636810); 10*(0.1737406310) ;
0.857634542; 0.5383607734; 0.3597575915;
0.2372676990; 0.1414622854;
(0.1)*0.5874760722];
disp('Pesos de Kutt')

```

```

disp(w)

% f(s)

f_s = subs(f_x,x,singularidade);
disp('f(s)')
disp(f_s)

%Parcela Logarítmica

parc_log1 = f_s*(log(abs(lim_inf - singularidade)));
disp('parcela logarítmica 1')
disp(parc_log1)

%Montagem da Matriz n
for j = 1:length(Z)
    n(j) = ((lim_inf-singularidade)*Z(j)) + singularidade;
    c(j) = subs(f_x,x,n(j));
end

disp('Montagem da Matriz n de para I_1')
disp(n')
disp('Montagem da Matriz c para I_1')
disp(c')
disp('Montagem da Matriz Somatório S para I_1')
S = [c' w];

disp(S)
disp('Montagem da Matriz x_i*w_i para I_1')
x_w = S(:,1).*S(:,2);
disp(x_w)

disp('Valor do Somatório Sigma para I_1')
Sigma = sum(x_w);
disp(Sigma)

I_1 = -Sigma - parc_log1;
disp('I_1')
disp(I_1)

disp('Calculo de I_2')

```

```

parc_log2 = f_s*(log(abs(lim_sup - singularidade)));
disp('parcela logarítmica 2')
disp(parc_log2)

for k = 1:length(Z)
    n2(k) = ((lim_sup-singularidade)*Z(k)) + singularidade;
    c2(k) = subs(f_x,x,n2(k));
end

disp('Montagem da Matriz n de para I_2')
disp(n2')
disp('Montagem da Matriz c para I_2')
disp(c2')

disp('Montagem da Matriz Somatório S para I_2')
S2 = [c2' w];

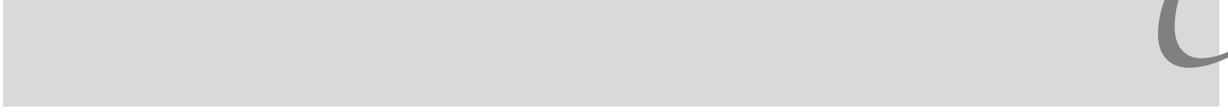
disp(S2)
disp('Montagem da Matriz x_i*w_i para I_2')
x_w2 = S2(:,1).*S2(:,2);
disp(x_w2)

disp('Valor do Somatório Sigma para I_2 ')
Sigma2 = sum(x_w2);
disp(Sigma2)

I_2 = Sigma2 + parc_log2;
disp('I_2')
disp(I_2)
I = I_1 + I_2;

disp('I')
disp(I)

```



*C*

```

%Quadratura Autoadaptativa

clc
clear

syms x eta f(x) s k gama
format long

lim_sup = input('digite o limite superior:');
lim_inf = input('digite o limite inferior:');
singularidade = input('digite o ponto de singularidade:');

% Função a ser integrada
disp('Função primária')
f = input('digite o integrando:');
disp(f)
t = 0.5*((lim_sup - lim_inf)*x+(lim_sup + lim_inf))*

((lim_sup - lim_inf)/2);
disp('Função modificada')
f_x = subs(f,x,t);
disp(f_x)

eta_br = singularidade;
disp('eta barra')
disp(eta_br)
eta_ast=(eta_br^2)-1;

disp('eta_asteristico')

disp(eta_ast)
% g_br1 =nthroot(double((eta_br*eta_ast + abs(eta_ast))),3);
g_br1 =nthroot(double((eta_br*eta_ast + abs(eta_ast))),3);

g_br2 =nthroot(double((eta_br*eta_ast - abs(eta_ast))),3);
g_br = g_br1 + g_br2 + eta_br;
disp('-----')
disp('gama_barra')
disp('-----')
disp(g_br)

```

```

Q = 1+3*(g_br^2);
a = 1/Q;
b = (-3*g_br)/Q;
c = (3*g_br^2)/Q;

d = -b;
disp('-----')
disp('Q')
disp(Q)
disp('-----')
disp('-----')
disp('Coeficientes do polinômio a,b,c,d')
disp('-----')

disp('-----')
disp('a')
disp(a)
disp('-----')
disp('b')
disp(b)
disp('-----')
disp('c')
disp(c)
disp('-----')
disp('d')
disp(d)

disp('-----')
disp('-----')
disp('Jacobiano')
disp('-----')
disp('-----')

J = (3*(gama - g_br)^2)/(1+3*g_br^2);
pretty(J)

disp('-----')
disp('Polinômio')
disp('-----')

Pol = a*gama^3 + b*gama^2 + c*gama^1 + d;

pretty(Pol)

```

```

trans = subs(f_x,x,Pol);

disp('-----')
disp('Transformada de eta para gama')
disp('-----')

pretty(trans)

disp('-----')
disp('Transformada * Jacobiano')
disp('-----')

TJ = trans*J;

pretty(TJ)

f_t = TJ;
% disp(f_t)
pretty(f_t)
% N

N = input('digite a quantidade de pontos de Gauss:');
c = (x^2-1)^N;
fat = factorial(N);
d = diff(c,N);
%disp(d)
%disp(f)

% Polinômio de Legendre

Pleg = (1/((2^N)*fat))*d;

disp('Polinômio de Legendre')

disp(Pleg)

% Raízes do polinômio

disp('Raízes do polinômio ou nós x_i da quadratura de Gauss')
V = double(solve(Pleg,x));

disp(V)

```

```

% Programação Inicial
% %Cálculo dos Pesos da Quadratura Gaussiana
% pdif = diff(Pleg);
% z(1:1) = subs(pdif,x,V(1:1));
%
% w(1:1) = 2/((1-V(1:1)^2)*(z^2));
% disp(w)

for i=1:N
    pdif = diff(Pleg);
    z(i) = subs(pdif,x,V(i));
    w(i) = double(2/((1-V(i)^2)*(z(i)^2)));
end

disp('Pontos Xi Pesos Wi')
B = [V w'];

S = V;
disp(B)

disp('Integração Numérica')

f_z = double(subs(f_t,gama,V(:)));

disp('Pesos W_i Valores de F(x_i)')

Q = [w' f_z];

disp(Q)

disp('W_i*F(x_i)')

c =Q(:,1).*Q(:,2);
disp(c)

disp('Resultado do somatório')

disp(sum(c))

% end

```