

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
LICENCIATURA EM FÍSICA

Cristian Santos Colombo

Introdução à Teoria de Cordas Bosônicas

SEROPÉDICA

2024

Cristian Santos Colombo

Introdução à Teoria de Cordas Bosônicas

Monografia apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciatura em Física, sob orientação do Prof. Dr. Ricardo José Scherer Santos.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo José Scherer Santos

SEROPÉDICA

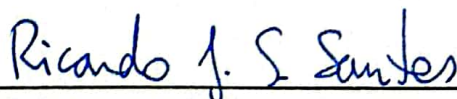
2024

Introdução à Teoria de Cordas Bosônicas

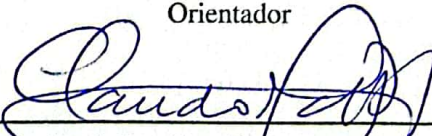
Cristian Santos Colombo

Monografia apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciatura em Física, sob orientação do Prof. Dr. Ricardo José Scherer Santos.

Trabalho Aprovado. Seropédica, 19 de Junho de 2024



Prof. Dr. Ricardo José Scherer Santos
Orientador



Prof. Dr. Claudio Maia Porto



Prof. Dr. Marcos Cardoso Rodriguez

*Este trabalho é dedicado a todos os jovens cientistas que
sonham em compreender os mistérios do nosso mundo.*

AGRADECIMENTOS

Gostaria de dedicar meus agradecimentos a todos que de alguma forma, contribuíram direta e indiretamente para a minha formação acadêmica como futuro físico e pesquisador.

Agradeço ao meu orientador, o Prof. Dr. Ricardo José Scherer Santos, que em uma aula de mecânica quântica propôs que iniciássemos um estudo dirigido que acabou se tornando este trabalho de monografia.

Agradeço aos professores que sempre me encorajaram a continuar seguindo em frente e a não desistir no meio do caminho. Em especial, gostaria de dar destaque ao Prof. Dr. Marcelo Azevedo Neves, ao Prof. Dr. Rodrigo de Sousa Gonçalves e ao Prof. Dr. Claudio Maia Porto.

Gostaria de agradecer à minha mãe, Gláucia Santos Vieira de Mello e ao meu avô, José Carlos Pinto Vieira, que sempre me deram o maior apoio para concluir a graduação, seja com ajuda financeira ou estando presente em momentos que precisei deles.

Agradeço também aos demais familiares que me acompanharam em minha jornada, são eles: Fernando Mello, Thamires Colombo e Bruna Andrade.

Gostaria de agradecer aos meus colegas de curso, em especial aos mais próximos, Pedro, Samuel e Larissa, que dividiram boas risadas comigo desde o início da graduação.

Agradeço a todo o corpo docente da física, por fornecerem um ensino de qualidade e terem me preparado para os próximos desafios que virão após a graduação.

Gostaria de agradecer também à instituição, a Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, por fornecer todos os recursos para a minha formação como profissional.

*“Em algum lugar, alguma coisa incrível
está esperando para ser descoberta.”
Carl Sagan (1934 – 1996).*

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma introdução à teoria de cordas bosônicas, uma área da física teórica capaz de quantizar a gravidade e unificar as quatro interações fundamentais da Natureza. Estruturamos um desenvolvimento matemático, onde, primeiro tratamos as cordas clássicas sem os efeitos relativísticos. Depois trabalhamos em como as cordas se comportam quando são considerados os efeitos relativísticos. Também tratamos no estudo a descrição das cordas na métrica do cone de luz, uma métrica que melhor descreve os resultados físicos do modelo. Este estudo vai abordar a descrição dos estados quânticos das partículas em um modelo de partículas pontuais, para podermos comparar com os estados das partículas no modelo da teoria de cordas. Além disso, vamos quantizar duas classes de cordas, as cordas abertas, que ficam fixas a estruturas físicas conhecidas como D-Branas e as cordas fechadas, que formam um segmento fechado, sem extremidades e são livres para se mover no espaço-tempo. Quantizando as cordas abertas, chegamos aos estados quânticos do fóton, em analogia com o modelo das partículas pontuais. Por fim, quantizando as cordas fechadas, chegamos aos estados quânticos do gráviton, a partícula que intermedeia a gravidade, em comparação com o modelo de partículas pontuais. Deste modo, será abordado nesse estudo como a teoria de cordas descreve os estados de fótons e os estados de grávitons.

Palavras-chaves: Cordas; Fótons; Grávitons; Interação; Partículas; Unificação.

ABSTRACT

In this paper, we present an introduction to bosonic string theory, an area of theoretical physics capable of quantizing gravity and unifying the four fundamental interactions of Nature. We structure a mathematical development, where we first treat classical strings without relativistic effects. Then we work on how strings behave when relativistic effects are taken into account. In the study, we also deal with the description of the strings in the light cone metric, a metric that better describes the physical results of the model. This study will look at the description of the quantum states of particles in a point particle model, so that we can compare them with the states of particles in the string theory model. In addition, we will quantize two classes of strings: open strings, which are fixed to physical structures known as D-Branes, and closed strings, which form a closed segment with no ends and are free to move in space-time. By quantizing the open strings, we arrive at the quantum states of the photon, in analogy with the point particle model. Finally, by quantizing the closed strings, we arrive at the quantum states of the graviton, the particle that mediate gravity, compared to the point particle model. This study will therefore look at how string theory describes photon states and graviton states.

Keywords: Gravitons; Interaction; Particles; Photons; Strings; Unification.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Condição de Contorno de Dirichlet	17
Figura 2 – Condição de Contorno de Neumann	18
Figura 3 – Espaço dos Parâmetros	25
Figura 4 – Folha de Mundo	25
Figura 5 – D0-Brana	34
Figura 6 – D1-Brana	34
Figura 7 – D2-Brana	35
Figura 8 – Representação da Velocidade Transversal \vec{v}_\perp	41
Figura 9 – Representação da Curva Paramétrica de uma Corda Aberta com Extremidades Livres	53
Figura 10 – Representação das Curvas Paramétricas de uma Corda Fechada	57
Figura 11 – Potencial do Campo para $M^2 > 0$	138
Figura 12 – Potencial do Campo para $M^2 < 0$	138
Figura 13 – Potencial do Táquion de Corda Aberta	140

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	CORDAS NÃO RELATIVÍSTICAS	16
2.1	Corda Clássica	16
2.2	Condições de Contorno	17
2.2.1	Condição de Dirichlet	17
2.2.2	Condição de Neumann	17
2.3	Corda não Relativística: Formalismo Lagrangeano	18
2.3.1	Conceitos da Mecânica Lagrangeana	18
2.3.2	Energia Cinética da Corda não Relativística	19
2.3.3	Energia Potencial da Corda não Relativística	19
2.3.4	Lagrangeana, Ação e Variação da Ação da Corda não Relativística	21
2.3.5	Momento da Corda não Relativística	22
3	CORDAS RELATIVÍSTICAS	25
3.1	Funcional de Área da Folha de Mundo	25
3.1.1	Parametrização da Folha de Mundo	25
3.1.2	Invariância de Reparametrização do Funcional de Área	27
3.1.3	Funcional de Área na Superfície do Espaço-Tempo	29
3.2	Ação de Nambu-Goto da Corda	30
3.3	Equação de Movimento da Corda Relativística	32
3.4	D-Branas	34
3.4.1	Dimensões das Branas	34
3.4.2	Condição de Contorno da Corda Aberta nas Branas	35
3.5	Corda Relativística Estática	36
3.5.1	Conceitos de Relatividade Restrita	36
3.5.2	Parametrização e Ação da Corda Relativística Estática	38
3.5.3	Valor da Tensão da Corda T_0	39
3.6	Momento, Energia e Equação de Onda da Corda Relativística	40
3.6.1	Velocidade Transversal da Corda Relativística	40
3.6.2	Ação da Corda Relativística em Função da Velocidade Transversal	42
3.6.3	Dinâmica das Extremidades da Corda Relativística	43
3.6.4	Hamiltoniana da Corda Relativística	45
3.6.5	Equação de Onda e Momentos da Corda Relativística	46
3.7	Movimento Geral da Corda Relativística	51

3.7.1	Movimento Geral da Corda Relativística Aberta	51
3.7.2	Movimento Geral da Corda Relativística Fechada	55
3.8	Parâmetro de Inclinação α'	59
3.8.1	Momento Angular da Corda Relativística	59
3.8.2	Definição do Parâmetro de Inclinação α'	60
4	CORDAS RELATIVÍSTICAS NO CONE DE LUZ	63
4.1	Cordas no Sistema de Coordenadas de Minkowski	63
4.1.1	Calibre Mais Geral	63
4.1.2	Equação de Onda no Espaço de Minkowski	66
4.1.3	Soluções para a Equação de Onda no Espaço de Minkowski	67
4.2	Cordas no Sistema de Coordenadas do Cone de Luz	71
4.2.1	Sistema de Coordenadas do Cone de Luz	71
4.2.2	Energia do Cone de Luz	72
4.2.3	Cordas Relativísticas no Cone de Luz	74
4.2.4	Modo Transversal de Virasoro	76
4.2.5	Quadrado da Massa da Corda Relativística M^2	77
5	TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS E PARTÍCULAS PONTUAIS . . .	80
5.1	Teoria Clássica de Campos	80
5.1.1	Densidades de Energia	80
5.1.2	Equação de Klein-Gordon	82
5.1.3	Soluções para Equação de Klein-Gordon no Cone de Luz	83
5.2	Teoria Quântica de Campos	84
5.2.1	Campo Quântico Representado por Operadores de Criação e Aniquilação . .	85
5.2.2	Estado de Vácuo e Estado de Partículas	90
5.2.3	Operador Momento no Cone de Luz	92
5.3	Estados de Fótons e Estados de Grávitons	93
5.3.1	Campo de Maxwell	93
5.3.2	Campo de Maxwell no Cone de Luz	95
5.3.3	Estado de Fóton	96
5.3.4	Campo Gravitacional	97
5.3.5	Campo Gravitacional no Cone de Luz	99
5.3.6	Estado de Gráviton	101
6	TEORIA DE CORDAS ABERTAS QUÂNTICAS RELATIVÍSTICAS .	103
6.1	Dinâmica das Coordenadas Transversais	103
6.1.1	Hamiltoniano da Corda Aberta no Cone de Luz	103
6.1.2	Operadores e Relações de Comutação Canônicas	105
6.1.3	Condições de Contorno da Corda Aberta na Mecânica Quântica	106

6.1.4	Coordenadas Transversais em Termos dos Operadores de Criação e Aniquilação	109
6.2	Álgebra de Virasoro	119
6.2.1	Operador Transversal de Virasoro e Operador de Massa ao Quadrado	119
6.2.2	Propriedades de Comutação do Operador Transversal de Virasoro	121
6.3	Dimensionalidade da Espaço-Tempo	127
6.4	Estado de Fóton na Teoria de Cordas Abertas	130
6.4.1	Espaço de Estados da Teoria de Cordas Abertas	131
6.4.2	Operador Número N^\perp	131
6.4.3	Estados de Táquions Representados por Cordas Abertas	133
6.4.4	Estados de Fótons Representados por Cordas Abertas	134
6.4.5	Estados de Partículas com Massa Positiva	135
6.5	Equações de Movimento do Táquion e do Fóton	135
6.6	Táquions e Decaimento da D25-Brana	138
7	TEORIA DE CORDAS FECHADAS QUÂNTICAS RELATIVÍSTICAS	142
7.1	Dinâmica das Cordas Fechadas e seus Operadores	142
7.1.1	Movimento Geral da Corda Fechada	142
7.1.2	Operadores de Criação e Aniquilação da Corda Fechada	145
7.1.3	Operadores Transversais de Virasoro da Corda Fechada	147
7.1.4	Operador de Massa ao Quadrado da Corda Fechada	152
7.1.5	Operador Hamiltoniano da Corda Fechada	152
7.2	Estado de Gráviton na Teoria de Cordas Fechadas	153
7.2.1	Espaço de Estados da Teoria de Cordas Fechadas	153
7.2.2	Estados de Táquions Representados por Cordas Fechadas	154
7.2.3	Estados de Grávitons Representados por Cordas Fechadas	154
7.3	Equação de Movimento para os Estados sem Massa	157
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	159
	REFERÊNCIAS	160

1 INTRODUÇÃO

A teoria de cordas é uma das áreas mais importantes da física teórica, porque ela se propõe a unificar as quatro forças fundamentais da Natureza. O problema desta unificação é que não existe um modelo bem consolidado até hoje. O que existem são propostas bem construídas de modelos capazes de fazerem essa unificação. Entretanto, não é tão simples e, como vamos ver neste estudo, embora a teoria de cordas possibilite quantizar a força de interação gravitacional, a teoria também traz consigo alguns problemas que ficaram em aberto e abrem margem para novos estudos, além de resolver estes problemas. Vamos vê-los com mais detalhes ao término deste estudo, mas por agora nosso objetivo é introduzir uma motivação para se iniciar o estudo da teoria de cordas. Sendo assim, vamos começar falando das quatro interações fundamentais da Natureza.

Na Natureza, existem quatro interações fundamentais. A primeira e a mais forte é a *Força Nuclear Forte*, que é a força que atua entre prótons e nêutrons no núcleo atômico e é responsável por manter o núcleo coeso. Como a força nuclear forte é a força mais forte da Natureza, vamos usá-la como referência para compará-la com as outras forças. Deste modo, vamos considerar que a intensidade da força nuclear forte seja 1. A segunda interação fundamental da Natureza é a *Força Eletromagnética*, que é a força de interação entre partículas que possuem carga elétrica. Supondo que a intensidade da força nuclear forte seja 1, em comparação, a intensidade da força eletromagnética seria aproximadamente 10^{-2} . A terceira força de interação fundamental da Natureza é a *Força Nuclear Fraca*, que é a força responsável pelo decaimento radioativo do núcleo atômico. Em comparação com a intensidade da força forte, a intensidade da força fraca seria aproximadamente 10^{-5} . A quarta e última força fundamental da Natureza é a *Força Gravitacional*, que é a força responsável pela interação gravitacional entre corpos com massa. Em comparação com a força forte, a intensidade da força gravitacional é aproximadamente 10^{-39} , sendo esta a força de interação mais fraca da Natureza. Esses dados podem ser encontrados em (CHUNG, 2001).

Existe um grande problema em quantizar a interação gravitacional, que é o fato desta não ser uma teoria renormalizável, ou seja, aparecem infinitos ao quantizarmos as grandezas físicas, com os quais não podemos lidar usando o formalismo da teoria quântica de campos. No modelo padrão, as interações fundamentais são transportadas por partículas conhecidas como *Bósons*. A interação forte é transportada por 8 tipos de glúons, a interação eletromagnética é transportada pelos fótons, a interação fraca é transportada pelos bósons W^+ , W^- e Z^0 , sendo essas partículas as únicas que possuem massa dentre as que transportam força de interação, e a interação gravitacional tem que ser transportada pelos grávitons. Acabamos de citar quais são as partículas responsáveis por transportar as quatro interações fundamentais da Natureza. A

teoria de cordas precisa trazer um modelo capaz de unificar todas estas interações. Neste estudo, vamos mostrar como a teoria de cordas é capaz de descrever o fóton e o gráviton, duas partículas responsáveis por duas das interações fundamentais da Natureza.

A teoria de cordas surgiu no início da década de 1960, visando ser uma teoria proposta para explicar a força nuclear forte. Na época, a teoria até obtinha bons resultados experimentais, tais como o parâmetro de inclinação α' , que vamos ver no capítulo 3 deste estudo, mas adiantando, era uma quantidade mensurável que aparecia no modelo. Entretanto, a teoria trazia consigo uma quantidade irrealista de dimensões extras, ausência de constituintes pontuais e a incapacidade de explicar os hádrons. Nesta mesma época, ao fim da década de 1960, estava surgindo a *Cromodinâmica Quântica*, que acabou sendo a teoria responsável por explicar a força nuclear forte. Evidências experimentais e teóricas convincentes para o modelo padrão estavam se concretizando, o que fez com que a teoria de cordas caísse em desuso por um tempo.

Até o início da década de 1970, a teoria de cordas, também conhecida como *Teoria de Cordas Bosônicas*, que é especificamente a teoria que vamos trabalhar neste estudo, trazia a ocorrência de estados de táquions, o que implica que o estado quântico de menor energia é instável, porém o que era mais incomum foi que a teoria trazia a presença de partículas sem massa, o que não é comum entre os hádrons. Deste modo, a teoria podia ter uma serventia para explicar os bósons, que são as partículas responsáveis por transportar forças de interação. Entretanto, a teoria de cordas voltou realmente a ganhar força em torno de 1974, quando foi possível identificar um estado quântico sem massa de spin 2, estado que podia ser identificado como gráviton. A teoria de cordas era capaz de quantizar o campo associado à força de interação gravitacional e, dentro da mesma teoria, o campo associado aos demais bósons podiam ser encontrados. Em outras palavras, a teoria de cordas na primeira metade da década de 1970 era capaz de unificar as forças de interação da Natureza e trazer uma teoria quântica para a gravitação. Embora nós não vamos ver neste estudo, vale destacar que o passo seguinte foi introduzir a supersimetria na teoria, também conhecida como teoria de supercordas. Na teoria de supercordas, foi possível identificar estados fermiônicos, tais como os estados dos elétrons e os estados dos quarks, e o número de dimensões diminuem de 26 para 10 dimensões, em comparação com a teoria de cordas bosônicas.

Com essa motivação histórica, podemos partir para o desenvolvimento da teoria, mas antes é importante destacar algumas convenções que vamos utilizar durante o estudo. A primeira delas é a notação de produto escalar, que será representada como $A \cdot B$, sendo o produto escalar entre A e B . A segunda convenção é a convenção de soma entre grandezas que carregam índices de Lorentz. Ou seja, sempre que tivermos uma relação do tipo $A_\mu B^\mu$ ou $A^\mu B_\mu$, existe uma soma implícita entre todos os termos com índices que μ pode assumir. Existem outras convenções e relações importantes que vamos sinalizar ao longo do estudo nos próximos capítulos.

Desta forma, a seguir vamos falar sobre como é uma corda clássica não relativística, para depois entrarmos com efeitos relativísticos na teoria. Vamos ver que existe uma métrica

preferencial que nos ajuda a descrever melhor a teoria de cordas, que é a métrica nas coordenadas do cone de luz. Nós vamos dar uma descrição para os estados quânticos de fótons e grávitons, usando um modelo de partículas pontuais e por fim, vamos chegar a estados quânticos bem semelhantes usando o modelo da teoria de cordas. Nosso objetivo, neste estudo, é chegar aos estados de fótons, que são estados quânticos sem massa de spin 1 e aos estados de grávitons, que são estados quânticos sem massa de spin 2. Vamos mostrar que a teoria de cordas é capaz de fazer a descrição destes estados quânticos.

2 CORDAS NÃO RELATIVÍSTICAS

Neste capítulo, vamos trabalhar a dinâmica das cordas não relativísticas. Este é um passo inicial para, posteriormente, entrarmos nas cordas relativísticas e trabalharmos na sua quantização. Portanto, vamos desenvolver as equações de movimento da corda não relativística e usar a mecânica lagrangeana para desenvolver sua dinâmica.

2.1 Corda Clássica

Primeiro de tudo, vamos imaginar uma corda ao longo do eixo x , que possa ser submetida à oscilações. Vamos definir suas grandezas:

- T_0 é a tensão da corda.
- a é o comprimento da corda.
- M é massa total da corda.

Deste modo, já podemos escrever qual é sua densidade linear, sendo uma densidade de massa homogênea:

$$\mu_0 = \frac{M}{a} \quad (2.1)$$

Vamos considerar uma função de onda na corda $y = y(x, t)$. Como a equação de onda na corda já é conhecida, podemos então escrever:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu_0}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

Tendo a equação de onda, nós sabemos que toda equação de onda carrega consigo a informação de sua velocidade de propagação. Portanto, a velocidade de propagação da onda na corda é dada por:

$$v_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}} \quad (2.3)$$

Vamos considerar as funções de onda do tipo abaixo, em termos das quais, podemos escrever a função de onda mais geral possível.

$$y(t, x) = y(x) \sin(\omega t + \phi) \quad (2.4)$$

Tendo a função de onda, nós vamos substituí-la na equação de onda na corda. Assim obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\sin(\omega t + \phi) \frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2} + \frac{\mu_0}{T_0} y(x) \omega^2 \sin(\omega t + \phi) = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 y(x)}{\partial x^2} + \frac{\mu_0}{T_0} \omega^2 y(x) = 0 \quad (2.6)$$

Essa, portanto, é a equação diferencial que descreve o movimento da corda clássica.

2.2 Condições de Contorno

Neste estudo, nós vamos trabalhar com duas condições de contorno, a *Condição de Dirichlet* e a *Condição de Neumann*.

2.2.1 Condição de Dirichlet

Na Condição de Dirichlet, a corda tem as extremidades fixas em um ponto. Neste caso, a corda não conserva momento, pois ela transfere energia para onde está fixa. Portanto, para uma função de onda $y(t, x)$, a condição implica que:

$$y(t, 0) = y(t, a) = 0 \quad (2.7)$$

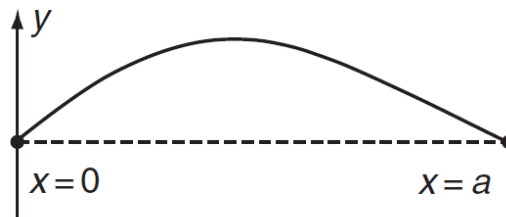


Figura 1 – Condição de Contorno de Dirichlet

2.2.2 Condição de Neumann

Na Condição de Neumann, a corda tem as extremidades livres para se mover. Por conta disso, a corda conserva momento, pois ela não transfere energia para nenhum lugar. Deste modo, para uma função de onda $y(t, x)$, a condição implica que:

$$\left. \frac{\partial y(t, x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial y(t, x)}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \quad (2.8)$$

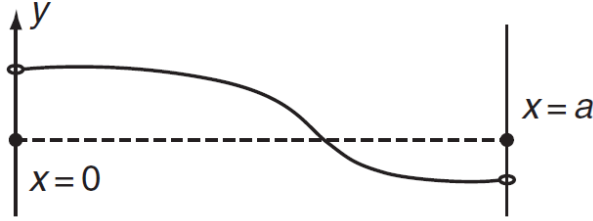


Figura 2 – Condição de Contorno de Neumann

2.3 Corda não Relativística: Formalismo Lagrangeano

Nosso objetivo agora é encontrar a lagrangeana do problema que trabalhamos na secção 2.1 e escrever posteriormente a ação que descreve o sistema. Portanto, vamos revisar alguns conceitos da mecânica lagrangeana, encontrar as energias necessárias para montar a lagrangeana e obter a ação do sistema.

2.3.1 Conceitos da Mecânica Lagrangeana

Considerando a energia cinética T e a energia potencial V , a lagrangeana L do sistema é dada por:

$$L = T - V \quad (2.9)$$

Além disso, lembrando também que a Natureza segue o princípio da mínima ação, a ação S do sistema é dada por:

$$S = \int_{\mathcal{P}} L(t) dt \quad (2.10)$$

Onde \mathcal{P} representa um caminho $x(t)$ que o sistema pode percorrer no tempo. Outro conceito importante da mecânica lagrangeana é que quando a variação da ação do sistema δS for igual a zero, obtemos as **Equações de Euler-Lagrange** que nos fornecem a dinâmica do sistema.

2.3.2 Energia Cinética da Corda não Relativística

Dado o problema que abrimos na secção 2.1, nossa corda tem densidade linear μ_0 e tensão T_0 constante. Suas extremidades estão em $x = 0$ e $x = a$. Para encontrar a lagrangeana do problema, devemos primeiro escrever as energias cinética e potencial da corda.

A energia cinética é fácil de escrever, pois tendo uma massa m e velocidade v , sua estrutura geral é dada por:

$$T_{\text{GERAL}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad (2.11)$$

Então nosso trabalho consiste em encontrar quem é m e quem é v da corda. Se a é o comprimento da corda, então podemos escrever:

$$a = \int_0^a dx \quad (2.12)$$

Agora vamos usar a expressão (2.1) e aplicar a expressão (2.12).

$$M = \mu_0 a \quad (2.13)$$

$$dM = \mu_0 dx \quad (2.14)$$

Temos a massa do elemento de corda, a velocidade é mais fácil ainda de visualizar, pois se y descreve a posição da corda, a velocidade é facilmente escrita como:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} \quad (2.15)$$

Agora vamos juntar tudo na expressão (2.11).

$$T = \int \frac{1}{2} dM \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \int_0^a \frac{1}{2} (\mu_0 dx) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad (2.16)$$

Essa é a energia cinética da corda não relativística.

2.3.3 Energia Potencial da Corda não Relativística

A energia potencial está relacionada ao trabalho necessário para esticar a corda, ou seja, ela depende da tensão. Sendo ainda mais específico, o trabalho é como a tensão atua ao longo da corda. Portanto, se dl é a variação de comprimento da corda quando submetida a essa tensão, o trabalho é dado por:

$$d\mathcal{W} = T_0 dl \quad (2.17)$$

Então agora vamos analisar quem é dl . Primeiro, um pedaço infinitesimal da corda em seu estado fundamental vai de $(x, 0)$ até $(x + dx, 0)$. Isso implica que o comprimento inicial da corda é $l_i = dx$. Segundo, ao haver oscilações, o comprimento da corda vai de (x, y) até $(x + dx, y + dy)$. Isso implica que o comprimento final da corda é $l_f = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Deste modo, a variação de comprimento é $dl = l_f - l_i$.

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} - dx \quad (2.18)$$

$$dl = dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - dx \quad (2.19)$$

$$dl = dx \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - 1 \right) \quad (2.20)$$

Vamos realizar uma expansão na raiz quadrada dentro do parêntesis. A expansão mais geral é dada por:

$$\boxed{\sqrt{1+a} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2n-2)!}{n! (n-1)! 2^{2n-1}} a^n} \quad (2.21)$$

Neste caso, faremos $a = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ e vamos usar uma **aproximação para pequenas oscilações**: $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1$. Perceba que quando $\frac{\partial y}{\partial x}$ é muito pequeno, o a também é muito pequeno. Isso significa que quanto mais aumentarmos a ordem da soma, menor vai ser a contribuição dos termos de ordem superiores, já que a^n será cada vez menor. Portanto, é uma aproximação muito boa considerarmos somente a primeira ordem. Sendo assim, temos:

$$dl \simeq dx \left(1 + \frac{(-1)^2 (2-2)!}{1! (1-1)! 2^{2-1}} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 1 \right) \quad (2.22)$$

$$dl \simeq dx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \quad (2.23)$$

Agora podemos pegar esse dl que obtemos e colocar na expressão do trabalho em (2.17). Com isso, vamos poder escrever a energia potencial V da corda.

$$d\mathcal{W} = T_0 dx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \quad (2.24)$$

$$V = \int_0^a \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2.25)$$

Essa é a energia potencial da corda não relativística. Agora temos as grandezas necessárias para montar a lagrangeana.

2.3.4 Lagrangeana, Ação e Variação da Ação da Corda não Relativística

Vamos aplicar as expressões da energia cinética (2.16) e energia potencial (2.25) na expressão da lagrangeana (2.9).

$$L = \int_0^a \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (2.26)$$

O que está entre colchetes é a densidade lagrangeana \mathcal{L} . Essa expressão já é a lagrangeana do sistema, agora vamos usa-la para obter a ação (2.10).

$$S[y] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.27)$$

O próximo passo para chegarmos nas equações de movimento do sistema é encontrar a variação da ação δS . Vamos então variar a função: $y(t, x) \rightarrow y(t, x) + \delta y(t, x)$.

$$S[y + \delta y] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial(\delta y)}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial(\delta y)}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} S[y + \delta y] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx & \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\left[\frac{\partial y}{\partial t} \right]^2 + \left[\frac{\partial(\delta y)}{\partial t} \right]^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial(\delta y)}{\partial t} \right) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} T_0 \left(\left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial(\delta y)}{\partial x} \right]^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial(\delta y)}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.29)$$

Agora vamos separar as integrais em três partes.

$$\begin{aligned} S[y + \delta y] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx & \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \\ & + \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial(\delta y)}{\partial t} - T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial(\delta y)}{\partial x} \right] \\ & + \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial(\delta y)}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial(\delta y)}{\partial x} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

Assim fica fácil interpretar o que são essas partes. Note que o **primeiro termo** é a própria ação $S[y]$. O **terceiro termo** pode ser desprezado, uma vez que é de ordem $(\delta y)^2$. Nos resta, então, o **segundo termo**. Logo, o termo do meio é a variação da ação do sistema δS . Vamos então trabalhar em cima dessa variação.

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial(\delta y)}{\partial t} - T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial(\delta y)}{\partial x} \right] \quad (2.31)$$

Devemos reescrever os termos entre colchetes da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial(\delta y)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \delta y \right] - \mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y \\ -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial(\delta y)}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \delta y \right] + T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta y \end{cases} \quad (2.32)$$

Substituindo ambas as expressões (2.32) na variação da ação (2.31), podemos simplificar as integrais com algumas derivadas.

$$\delta S = \int_0^a \left[\mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \delta y \right]_{t_f}^{t_i} dx + \int_{t_i}^{t_f} \left[-T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \delta y \right]_a^0 dt - \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \delta y \quad (2.33)$$

Se os dois primeiros termos forem zero, a condição $\Delta S = 0$ vai nos dar a equação de onda que vimos em (2.2). Vamos então analisar os dois primeiros termos.

$$\int_0^a \left[\mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \delta y \right]_{t_f}^{t_i} dx \quad (2.34)$$

O primeiro termo (2.34) é nulo, pois, fisicamente falando, a derivada de y em t e a variação δy não mudam pois os extremos estão fixos. O segundo termo ser zero:

$$\int_{t_i}^{t_f} \left[-T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \delta y \right]_a^0 dt = 0 \quad (2.35)$$

Isso ocorre quando escolhemos ou a condição de contorno de Neumann ou a condição de contorno de Dirichlet vistas anteriormente.

2.3.5 Momento da Corda não Relativística

A partir daqui, vamos trabalhar com algumas definições para facilitar a escrita. A primeira delas será para as derivadas:

$$\begin{cases} \dot{Y} \equiv \frac{\partial y}{\partial t} \\ Y' \equiv \frac{\partial y}{\partial x} \end{cases} \quad (2.36)$$

O momento é fácil de escrever pois para uma massa m e uma velocidade v , sua estrutura geral é dada por:

$$P_{\text{GERAL}} = m v \quad (2.37)$$

Colocando a massa da corda (2.14) e a velocidade (2.15) nessa expressão, obtemos o momento da corda P_y .

$$P_y = \int_0^a \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} dx \quad (2.38)$$

Vamos variar esse momento no tempo.

$$\frac{dP_y}{dt} = \int_0^a \mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx \quad (2.39)$$

Agora vamos usar a equação de onda (2.2) nessa expressão.

$$\frac{dP_y}{dt} = \int_0^a T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = T_0 \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_0^a \quad (2.40)$$

Nessa expressão podemos ver nitidamente que na condição de Neumann (2.8), o momento se conserva $\frac{dP_y}{dt} = 0$. Prosseguindo, vamos definir mais alguns parâmetros.

Seja a densidade lagrangeana \mathcal{L} , podemos definir as densidades de momento:

$$\begin{cases} \mathcal{P}^t \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Y}} \\ \mathcal{P}^x \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y'} \end{cases} \quad (2.41)$$

Vamos usar a densidade lagrangeana obtida da lagrangeana (2.26) e as simplificações definidas em (2.36).

$$\begin{cases} \mathcal{P}^t = \frac{\partial}{\partial \dot{Y}} \left[\frac{1}{2} \mu_0 \dot{Y}^2 - \frac{1}{2} T_0 Y'^2 \right] \\ \mathcal{P}^x = \frac{\partial}{\partial Y'} \left[\frac{1}{2} \mu_0 \dot{Y}^2 - \frac{1}{2} T_0 Y'^2 \right] \end{cases} \quad (2.42)$$

$$\begin{cases} \mathcal{P}^t = \mu_0 \dot{Y} \\ \mathcal{P}^x = -T_0 Y' \end{cases} \quad (2.43)$$

Podemos reescrever a variação da ação (2.35) como:

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} [\mathcal{P}^x \delta y]_a^0 dt \quad (2.44)$$

De imediato vemos que $\mathcal{P}^x = 0$ na condição de Neumann, pois a variação da ação tem que ser nula e δy não zera a expressão. Isso não é por acaso, pois \mathcal{P}^t zera na condição de Dirichlet. Pela forma com que esses parâmetros foram construídos, podemos dizer que a derivada da densidade lagrangeana em relação a \dot{Y} e Y' nos dá as densidades de momento associados a \dot{Y} e Y' .

A condição de Dirichlet vai ser importante no estudo das D-Branas, que são objetos físicos onde as extremidades das cordas abertas estão limitadas. Se as cordas abertas possuem extremidades fixas às branas, o momento não se conserva somente na corda e passa a ser necessário considerar o sistema "corda mais brana" para haver conservação de momento. Portanto, a corda aberta pode transferir energia para a brana.

3 CORDAS RELATIVÍSTICAS

Neste capítulo, vamos descrever a corda relativística clássica, uma corda que vai levar em conta as propriedades propostas pela física da relatividade. Vamos trabalhar em cima da trajetória que a corda realiza no espaço-tempo. Por exemplo, a trajetória de uma partícula pontual relativística, descreve uma linha no espaço-tempo. Essa linha é chamada de *Linha de Mundo*. Por outro lado, a trajetória que uma corda realiza no espaço-tempo descreve uma superfície. Essa superfície é chamada de *Folha de Mundo*.

3.1 Funcional de Área da Folha de Mundo

Daqui para frente, será interessante encontrarmos grandezas invariantes para construímos uma física mais geral e elegante. Duas das invariâncias que é importante darmos atenção são a *Invariância de reparametrização*, que é quando a física de uma grandeza não muda independentemente da parametrização adotada, e a *Invariância de Lorentz*, que é quando a física de uma grandeza não muda independentemente do observador inercial. Portanto, vamos desenvolver um funcional de área para a folha de mundo que apresente ambas invariâncias.

3.1.1 Parametrização da Folha de Mundo

Primeiro vamos considerar que a folha de mundo está parametrizada em um espaço de parâmetros e posteriormente vamos encontrar a área de um pequeno elemento dessa superfície, que é a folha de mundo. Como a folha de mundo é uma superfície bidimensional, temos dois parâmetros ξ^1 e ξ^2 , para descrevê-la.

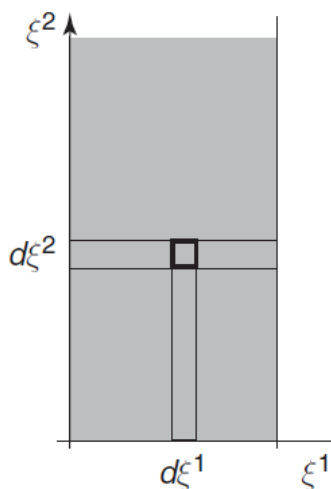


Figura 3 – Espaço dos Parâmetros

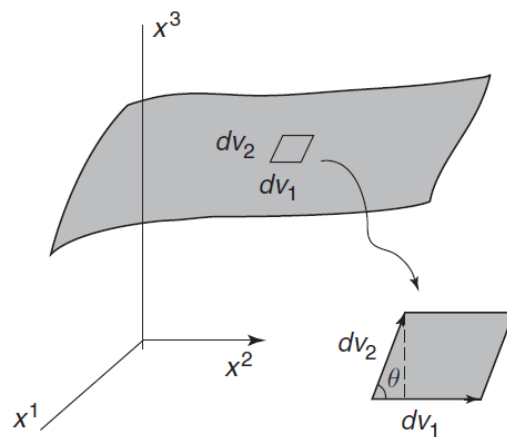


Figura 4 – Folha de Mundo

As coordenadas da corda parametrizadas são dadas por:

$$\vec{X}(\xi^1, \xi^2) = (X^1(\xi^1, \xi^2), X^2(\xi^1, \xi^2), X^3(\xi^1, \xi^2)) \quad (3.1)$$

Pelas figuras 3 e 4, faz sentido definirmos $d\vec{V}_1$ e $d\vec{V}_2$ como:

$$\begin{cases} d\vec{V}_1 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} d\xi^1 \\ d\vec{V}_2 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} d\xi^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

Para ser mais geral, vamos calcular o elemento de área usando a expressão da área do paralelogramo.

$$dA = |d\vec{V}_1| |d\vec{V}_2| |\sin(\theta)| = |d\vec{V}_1| |d\vec{V}_2| \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} \quad (3.3)$$

$$dA = \sqrt{|d\vec{V}_1|^2 |d\vec{V}_2|^2 - |d\vec{V}_1|^2 |d\vec{V}_2|^2 \cos^2(\theta)} \quad (3.4)$$

Pela definição de produto escalar, podemos simplificar o que está dentro da raiz.

$$dA = \sqrt{(d\vec{V}_1 \cdot d\vec{V}_1)(d\vec{V}_2 \cdot d\vec{V}_2) - (d\vec{V}_1 \cdot d\vec{V}_2)^2} \quad (3.5)$$

Agora vamos abrir os vetores $d\vec{V}_1$ e $d\vec{V}_2$ usando as definições (3.2).

$$dA = d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \right) \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \right) - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \right)^2} \quad (3.6)$$

Essa é a expressão geral para um elemento de área de uma superfície parametrizada. Deste modo, para encontrar o funcional de área, basta apenas integrar esse elemento de área.

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \right) \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \right) - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \right)^2} \quad (3.7)$$

Faremos agora algumas definições. Primeiro, o que está dentro da raiz é o determinante de uma métrica induzida g_{ij} . Métricas induzidas são tensores métricos que possuem a seguinte estrutura: $g_{ab} = \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu g_{\mu\nu}(X^\alpha)$. Portanto, $g = \det[g_{ij}]$. Deste modo:

$$g = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \right) \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \right) - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \right)^2 \quad (3.8)$$

Vamos definir a matriz g_{ij} de modo que o seu determinante dê este valor.

$$g_{ij} \equiv \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^j} \quad (3.9)$$

Abrindo a notação temos:

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Portanto, podemos reduzir o funcional de área usando o determinante da métrica induzida.

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g} \quad (3.11)$$

3.1.2 Invariância de Reparametrização do Funcional de Área

Vamos provar agora, a invariância de reparametrização do funcional de área. Primeiro vamos reparametrizar em função de parâmetros $\tilde{\xi}^1(\xi^1, \xi^2)$ e $\tilde{\xi}^2(\xi^1, \xi^2)$, que misturam as coordenadas ξ^1 e ξ^2 . Pelo *Teorema de Mudança de Variáveis* temos que:

$$\begin{cases} d\xi^1 d\xi^2 = \left| \det \left[\frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^j} \right] \right| d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \\ d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 = \left| \det \left[\frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j} \right] \right| d\xi^1 d\xi^2 \end{cases} \quad (3.12)$$

Para encurtar os cálculos, vamos definir duas matrizes que são os argumentos dos determinantes das equações acima.

$$\begin{cases} M_{ij} \equiv \frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^j} \\ \tilde{M}_{ij} \equiv \frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j} \end{cases} \quad (3.13)$$

Note que ao juntar as duas equações em (3.12) e substituir as definições em (3.13) podemos facilmente demonstrar a seguinte relação:

$$|\det[M_{ij}]| |\det[\tilde{M}_{ij}]| = 1 \quad (3.14)$$

Essa relação vai ser importante, vamos guardá-la por enquanto. Nosso próximo passo é considerar uma superfície S na nossa folha de mundo, com vetor $d\vec{X}$ de comprimento ds , tangente à superfície. Deste modo:

$$ds^2 \equiv (ds)^2 = d\vec{X} \cdot d\vec{X} \quad (3.15)$$

Como o vetor $d\vec{X}$ está no espaço dos parâmetros, é válido escrevê-lo da seguinte maneira:

$$d\vec{X} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^2} d\xi^2 = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^i} d\xi^i \quad (3.16)$$

Perceba que estamos usando uma convenção de soma, pois aqui estamos somando todos os termos de diferentes valores que o índice i pode assumir, neste caso, $i = 1, 2$. Por tanto, vamos colocar (3.16) na definição (3.15), lembrando que na multiplicação os índices têm que ser diferentes.

$$ds^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^i} d\xi^i \right) \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^j} d\xi^j \right) = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j \quad (3.17)$$

Agora chegamos a um resultado interessante, note que a métrica induzida (3.9) está na expressão. Significa que podemos escrever:

$$ds^2 = g_{ij} d\xi^i d\xi^j \quad (3.18)$$

Chegamos aonde queríamos, porque a partir de agora vamos mudar o olhar do problema. Da forma que ds foi definido, ele não pode depender dos parâmetros. Neste caso, o mesmo ds tem que poder ser escrito com parâmetros diferentes. Então vamos escrevê-lo!

$$ds^2 = \tilde{g}_{pq} d\tilde{\xi}^p d\tilde{\xi}^q \quad (3.19)$$

Tendo em vista que as equações (3.18) e (3.19) são iguais, nós temos:

$$g_{ij} = \tilde{g}_{pq} \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^j} \quad (3.20)$$

Agora vamos usar a segunda definição em (3.13).

$$g_{ij} = \tilde{g}_{pq} \tilde{M}_{pi} \tilde{M}_{qj} = \tilde{g}_{pq} (\tilde{M}^T)_{ip} \tilde{M}_{qj} \quad (3.21)$$

Tirando o determinante da equação (3.21).

$$g = \tilde{g} (\det[\tilde{M}])^2 \quad (3.22)$$

Agora vamos voltar na expressão do funcional de área (3.11). Nela vamos aplicar a primeira relação do teorema de mudança de variáveis (3.12), já simplificado com a primeira

definição em (3.13) e dentro da raiz vamos aplicar a relação que acabamos de obter (3.22). Lembrando que os índices não são mais importantes, o que importa é a identificação dos parâmetros que estamos usando.

$$A = \int |\det[M]| d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\tilde{g}(\det[\tilde{M}])^2} \quad (3.23)$$

$$A = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\tilde{g}} |\det[M]| |\det[\tilde{M}]| \quad (3.24)$$

Aplicando a relação (3.14), obtemos:

$$A = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\tilde{g}} \quad (3.25)$$

O mesmo funcional de área descrito pela mesma estrutura nos novos parâmetros comprova sua invariância de reparametrização.

3.1.3 Funcional de Área na Superfície do Espaço-Tempo

A partir dessa subseção, vamos mudar a notação. Faremos uma recapitulação do que vimos no início desse capítulo, mas já entrando com a notação usual da teoria de cordas. Deste modo, primeiro vamos substituir os parâmetros ξ^1 e ξ^2 pelos parâmetros τ e σ . Nesses novos parâmetros, τ vai representar o tempo na corda e σ vai representar o espaço na corda. Portanto, neste caso, σ tem um intervalo finito. Da mesma forma que vimos anteriormente, a folha de mundo está contida nesse espaço de parâmetros. Podemos dizer até que τ e σ são coordenadas na folha de mundo, já que mapeiam todo o percurso que a corda faz no espaço-tempo.

Deste modo, vamos definir as coordenadas da corda. Não vamos por um limite de dimensões espaciais, então vamos trabalhar num espaço de d dimensões.

$$X^\mu(\tau, \sigma) = (X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma)) \quad (3.26)$$

Na teoria vão existir dois tipos de cordas. As *Cordas Abertas*, que são cordas com duas extremidades, e as *Cordas Fechadas*, que são cordas com as extremidades unidas uma na outra. Então é importante destacar que, por enquanto, estamos trabalhando com cordas abertas.

Vamos redefinir o funcional de área nos novos parâmetros, então vamos refazer os mesmos passos dos cálculos que foram feitos antes. Igual em (3.2), temos:

$$\begin{cases} dV_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau \\ dV_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma \end{cases} \quad (3.27)$$

Já sabemos que o funcional de área tem que ter a estrutura da expressão (3.7).

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right) - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2}$$

Entretanto existe um problema aqui! Embora isso não seja óbvio, se prosseguirmos com os cálculos do jeito que está, lá na frente o argumento dentro da raiz será negativo. Isso não é um erro, mas é problemático e queremos deixar os cálculos na forma mais simples possível. Portanto, podemos mudar o sinal do argumento da raiz, com base em três motivos. **Motivo 1:** A expressão não vai deixar de ser um funcional de área, afinal as dimensões permanecem as mesmas. **Motivo 2:** A expressão não vai perder sua invariância de reparametrização, pois podemos fazer esse mesmo processo com A descrito por outros parâmetros. **Motivo 3:** A expressão não vai deixar de ser invariante de Lorentz, porque uma constante adimensional não vai mudar entre observadores de Lorentz. Então vamos mudar o sinal do argumento da raiz, já que estamos definindo um funcional de área.

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)} \quad (3.28)$$

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2} \quad (3.29)$$

Esse é o funcional de área que nós vamos trabalhar na teoria de cordas relativística. Ele será essencial para construir a ação da corda relativística, também conhecida como *Ação Nambu-Goto*.

3.2 Ação de Nambu-Goto da Corda

O funcional de área (3.29) é um funcional invariante de reparametrização e invariante de Lorentz. Nós queremos que a ação da corda tenha as mesmas invariâncias. Portanto, é razoável pensarmos na ação como um funcional que tenha o funcional de área da corda embutido nela. Então vamos fazer uma análise dimensional, considerando L , T e M respectivamente as dimensões de comprimento, tempo e massa.

Primeiro de tudo, o funcional de área da corda tem que ter dimensão de comprimento ao quadrado.

$$[A] = L^2 \quad (3.30)$$

A dimensão da ação já é conhecida, ela tem que ter a forma:

$$[S] = \frac{M \cdot L^2}{T} \longrightarrow [S] = \frac{M}{T} [A] \quad (3.31)$$

Agora chegamos a uma relação interessante! Note que a ação pode ser escrita em função do funcional de área, desde que coloquemos algo que tenha dimensão de $\frac{M}{T}$ e seja invariante de reparametrização e invariante de lorentz. Vamos garantir a primeira invariância, pois, se colocarmos uma constante física, isso não vai afetar a invariância de reparametrização, uma vez que a constante independe dos parâmetros. Desta forma, podemos sempre acrescentar constantes. Entretanto, aqui entra outro problema, pois essa constante tem dimensão, significa que ela pode ser suscetível a mudanças nas transformações de Lorentz. Portanto, precisamos pegar constantes que sejam invariantes de Lorentz.

Vamos pegar a dimensão dessa constante e multiplicar por 1 duas vezes. A dimensão não pode mudar!

$$\frac{M}{T} = \frac{M}{T} \cdot \frac{L}{L} \cdot \frac{T^2}{T^2} = \frac{M \cdot \frac{L}{T^2}}{\frac{L}{T}} = \frac{[F]}{[v]} \quad (3.32)$$

Agora ficou melhor! Porque $\frac{M}{T}$ é dimensão de força por velocidade. Precisamos achar uma constante com dimensão de força e uma constante com dimensão de velocidade que sejam invariantes de Lorentz. Essas grandezas já existem! Trata-se da velocidade da luz c e a tensão da corda T_0 . Embora não seja óbvio ainda, aqui vamos fixar a tensão da corda como uma grandeza invariante de lorentz porque lá na frente vamos associá-la à energia de repouso. Portanto:

$$\frac{T_0}{c} = \frac{M}{T} \quad (3.33)$$

Agora podemos escrever a ação completamente. Como um sinal não muda as invariâncias, vamos definir um sinal na frente das constantes. Também vamos por os limites de integração. Neste caso, $\tau \in [t_i, t_f]$ e $\sigma \in [0, \sigma_1]$. Agora vamos escrever a ação completa:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2} \quad (3.34)$$

Para facilitar o cálculo, faremos as mesmas definições que fizemos em (2.36).

$$\begin{cases} \dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \\ X'^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \end{cases} \quad (3.35)$$

Aplicando essas definições, obtemos a *Ação de Nambu-Goto da Corda Relativística*:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad (3.36)$$

Obtendo a ação da corda relativística, podemos deduzir as equações de movimento da corda.

3.3 Equação de Movimento da Corda Relativística

Sabendo que τ é um parâmetro temporal e σ é um parâmetro espacial, pela ação de Nambu-Goto (3.36) podemos extrair a lagrangeana e a densidade lagrangeana da corda relativística. São respectivamente:

$$L = -\frac{T_0}{c} \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad (3.37)$$

$$\mathcal{L}(\dot{X}, X') = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad (3.38)$$

Como vimos em (2.41), podemos definir duas densidades de momento a partir da densidade lagrangeana. São elas:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_\mu^\tau \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \\ \mathcal{P}_\mu^\sigma \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \end{cases} \quad (3.39)$$

Essas derivadas são fáceis de calcular, basta usar a regra da cadeia e chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_\mu^\tau = -\frac{T_0}{c} \frac{(X' \cdot \dot{X}) X'^\mu - (X')^2 \dot{X}^\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \\ \mathcal{P}_\mu^\sigma = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}^\mu - (\dot{X})^2 X'^\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \end{cases} \quad (3.40)$$

Agora esse resultado fica guardado, pois vamos calcular a variação da ação, para chegar às equações de movimento. De imediato, podemos escrever a variação como:

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}} \cdot \delta \dot{X} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'} \cdot \delta X' \right] \quad (3.41)$$

A variação pode entrar na derivada, essa é uma propriedade interessante, que se dá da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \delta \dot{X}^\mu = \delta \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} \\ \delta X'^\mu = \delta \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right) = \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \end{cases} \quad (3.42)$$

Portanto, usando essa propriedade (3.42) e as definições em (3.39), nós podemos continuar os cálculos.

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\mathcal{P}_\mu^\tau \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \mathcal{P}_\mu^\sigma \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right] \quad (3.43)$$

Vamos reescrever os termos que estão entre colchetes desta forma:

$$\begin{cases} \mathcal{P}_\mu^\tau \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\mathcal{P}_\mu^\tau \delta X^\mu \right] - \delta X^\mu \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} \\ \mathcal{P}_\mu^\sigma \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\mathcal{P}_\mu^\sigma \delta X^\mu \right] - \delta X^\mu \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \end{cases} \quad (3.44)$$

Ficamos então com essa expressão:

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\mathcal{P}_\mu^\tau \delta X^\mu \right] - \delta X^\mu \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\mathcal{P}_\mu^\sigma \delta X^\mu \right] - \delta X^\mu \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right] \quad (3.45)$$

Daqui podemos simplificar algumas integrais com as derivadas.

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_0^{\sigma_1} \left[\mathcal{P}_\mu^\tau \delta X^\mu \right]_{t_i}^{t_f} d\sigma + \int_{t_i}^{t_f} \left[\mathcal{P}_\mu^\sigma \delta X^\mu \right]_{\sigma_1}^0 d\tau \\ & - \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

Dessa expressão, o primeiro termo podemos zerar, pois não existe variação δX^μ nos tempos inicial e final: $\delta X^\mu(t_i, \sigma) = \delta X^\mu(t_f, \sigma) = 0$. Se usarmos a condição de contorno de Dirichlet (2.7), não pode haver variação nas extremidades, ou seja, em $\sigma = 0$ e $\sigma = \sigma_1$, o que significa que podemos zerar o segundo termo nessas condições: $\delta X^\mu(\tau, 0) = \delta X^\mu(\tau, \sigma_1) = 0$. Portanto, nossa expressão ficou apenas com o terceiro termo. Como $\delta S = 0$, podemos dizer que o argumento da integral é zero, entretanto $\delta X^\mu \neq 0$, o que significa que todo o termo entre parêntesis é igual a zero.

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0 \quad (3.47)$$

Deste modo, essa já é a equação de movimento da corda relativística. Essa expressão será muito importante nos próximos cálculos.

3.4 D-Branas

Nesta seção, nós vamos falar das *D-Branas*, que são objetos físicos aos quais as extremidades das cordas abertas estão fixadas. Inicialmente, as D-Branas representam o limite espacial para as extremidades das cordas se moverem. Entretanto, veremos lá na frente que as D-Branas são objetos físicos que trocam momento e energia com as cordas abertas. O "D" vem da condição de contorno de Dirichlet, onde as extremidades da corda são fixas. Neste caso, as extremidades são fixas na dimensão da brana. Portanto, branas são caracterizadas por suas dimensões espaciais, que limitam o movimento das extremidades da corda.

3.4.1 Dimensões das Branas

A dimensão da brana vem indicada na nomenclatura. Por exemplo, uma D0-Brana é uma brana adimensional, uma D1-Brana é uma brana de 1 dimensão, uma D2-Brana é uma brana de 2 dimensões e assim por diante, até a Dp-Brana, que é a brana de p dimensões espaciais. Abaixo estão algumas representações visuais de branas até duas dimensões.

A D0-Brana, por ser uma brana adimensional, são pontos fixos que prendem as extremidades da corda sem permitir movimentação em qualquer dimensão.



Figura 5 – D0-Brana

A D1-Brana, por ser uma brana unidimensional, confina as extremidades da corda aberta a se moverem livremente em uma linha unidimensional.



Figura 6 – D1-Brana

A D2-Brana, por ser uma brana bidimensional, confina as extremidades da corda aberta a se moverem livremente em um plano bidimensional.

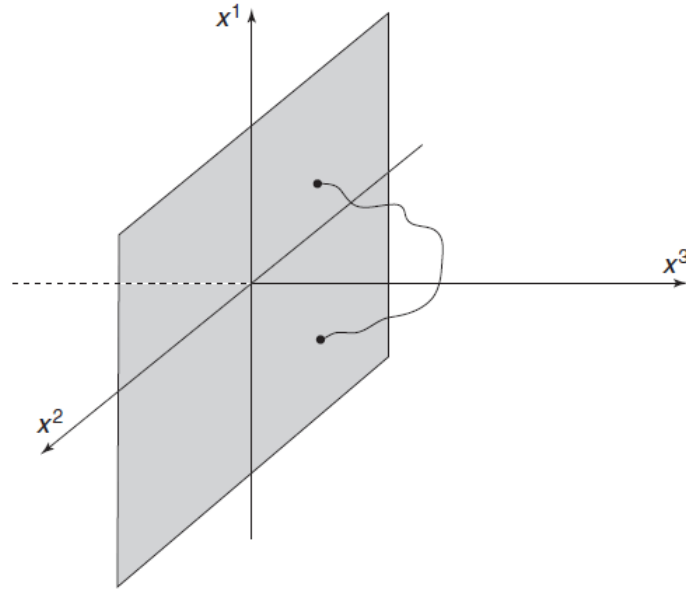


Figura 7 – D2-Brana

Já a Dp-Brana, ou seja, uma brana com p dimensões espaciais, não tem uma representação visual precisa. Contudo, ela confina as extremidades da corda aberta a se moverem livremente em um objeto físico de p dimensões espaciais extras.

3.4.2 Condição de Contorno da Corda Aberta nas Branas

Agora nós vamos ver como as condições de contorno se aplicam nas branas. O raciocínio é bem simples, vamos olhar para a *Figura 7*. A condição de Dirichlet se aplica na coordenada X^3 da corda, pois nessa coordenada a posição das extremidades da corda são fixas. Nas coordenadas X^1 e X^2 , as extremidades ficam com um movimento livre para percorrer toda a brana. Essa condição de movimento livre nós vamos chamar de *condição de ponto final livre*, que é caracterizada por:

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, 0) = \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma_1) = 0 \quad (3.48)$$

Note que é bem razoável definirmos a condição assim. No capítulo 2, nós vimos que a condição de Dirichlet zera o momento associado ao tempo $\mathcal{P}^t = 0$ e a condição de Neumann zera o momento associado ao espaço $\mathcal{P}^x = 0$, entretanto isso foi visto nos parâmetros da corda não relativística. Traduzindo para os parâmetros da corda relativística, nos chegamos à condição de ponto final livre que acaba sendo consequência da condição de contorno de Neumann. Como estamos trabalhando nas extremidades, evidenciamos os valores da coordenada σ referente as extremidades da corda.

Por mais que agora as D-Branas pareçam objetos matemáticos, na verdade elas são objetos físicos com densidade de energia calculáveis e propriedades notáveis. Entretanto, isso é assunto para trabalharmos posteriormente, depois que falarmos de quantização das cordas.

3.5 Corda Relativística Estática

A corda relativística estática se dá quando trabalhamos a corda em um tempo fixo, ou seja, as linhas da folha de mundo que mantêm τ constante denotam *Cordas Estáticas* na folha de mundo. Esse estudo vai ser importante porque por eles, vamos conseguir obter a tensão da corda T_0 , que definimos ser uma invariante de Lorentz.

3.5.1 Conceitos de Relatividade Restrita

Aqui será necessário fazer uma revisão da Relatividade Restrita, pois faz parte do acervo matemático que vamos usar nos cálculos posteriores. Entretanto, não vamos entrar em detalhes, pois não é o nosso foco. Embora essa revisão se limite a um sistema de 4 dimensões, tudo que for descrito nesta subseção, também vale para um sistema de D dimensões, sendo $D = 1 + d$, onde d é o número de dimensões espaciais.

Portanto, o sistema de coordenadas que vamos utilizar é o sistema de coordenadas de Minkowski:

$$X^\mu = (X^0, X^1, X^2, X^3) = (ct, x, y, z) = (ct, \vec{X}) \quad (3.49)$$

A métrica que vamos utilizar é a métrica de Minkowski $(-, +, +, +)$, descrita pela matriz:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

A matriz $\eta^{\mu\nu}$ é a matriz inversa de $\eta_{\mu\nu}$. Essas matrizes podem ser usadas para subir ou abaixar índices de outras componentes, por exemplo: $b_\mu = \eta_{\mu\nu} b^\nu$. Com a métrica de Minkowski também podemos construir as características do nosso espaço-tempo.

$$-ds = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \quad (3.51)$$

A métrica também está presente no produto escalar:

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \quad (3.52)$$

Uma propriedade interessante da métrica também está na sua relação com a *delta de kronecker*:

$$\eta^{\nu\rho} \eta_{\rho\mu} = \delta_\mu^\nu \quad (3.53)$$

Outro conceito da relatividade restrita que também vale o destaque, são as transformações de Lorentz. Essas transformações de coordenadas podem ser escrita como:

$$\tilde{X}^\mu = L^\mu_\nu X^\nu \quad (3.54)$$

Onde L^μ_ν é a matriz de transformação. Nela está embutido o fator de lorentz γ e o fator β .

$$L^\mu_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Além disso, também existe uma relação muito importante na relatividade restrita que agrupa momento p , massa m e energia E em uma única equação.

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (3.56)$$

Por fim, vamos falar dos principais quadrivetores. Primeiro temos o quadrivetor momento, descrito por:

$$P^\mu \equiv (p_0, p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z \right) \quad (3.57)$$

E o quadrivetor velocidade, que é descrito por:

$$u^\mu \equiv (u_0, u_1, u_2, u_3) = (\gamma c, \gamma v_x, \gamma v_y, \gamma v_z) \quad (3.58)$$

O quadrivetor momento pode ser escrito em função do quadrivetor velocidade.

$$P^\mu = m u^\mu \quad (3.59)$$

Por definição nós temos que:

$$u_0 = c \frac{dX^0}{ds} = c^2 \frac{dt}{ds} = \gamma c \longrightarrow \frac{dt}{ds} = \frac{\gamma}{c} \quad (3.60)$$

Vamos guardar esse ultimo resultado com muita atenção, pois essa relação vai ser útil lá na frente. Com isso terminamos nossa revisão de relatividade restrita. Podemos agora voltar ao foco principal.

3.5.2 Parametrização e Ação da Corda Relativística Estática

A invariância de reparametrização nos permite escolher livremente a parametrização da folha de mundo. Neste caso, vamos fixar as linhas de τ , de modo que τ fique relacionado com a coordenada $X^0 = ct$ do espaço de Minkowsky, em algum referencial de Lorentz. Em outras palavras, fazemos as linhas de τ serem cordas estáticas, associando cada τ a um tempo t estático.

Estamos parametrizando da seguinte maneira:

$$X^0(\tau, \sigma) \equiv ct(\tau, \sigma) = c\tau \quad (3.61)$$

Ou seja, estamos fixando $\tau = t$. Isso implica que $X^\mu(\tau, \sigma) = (ct, \vec{X}(\tau, \sigma))$, onde \vec{X} são as coordenadas espaciais da corda. Portanto, vamos tomar as derivadas (3.35).

$$\begin{cases} \dot{X} = \left(c, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right) \\ X' = \left(0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right) \end{cases} \quad (3.62)$$

Prosseguindo com a estruturação do problema, vamos considerar as extremidades da corda fixadas em $X^1 = 0$ e $X^1 = a > 0$, com valores nulos nas outras dimensões espaciais: $X^2 = X^3 = \dots = X^d = 0$. Como o espaço da corda só depende de X^1 , podemos afirmar que X^1 é uma função de σ : $X^1(t, \sigma) = f(\sigma)$, onde $f(0) = 0$ e $f(\sigma_1) = a$. Com isso nós temos:

$$X^\mu = (ct, f(\sigma), \vec{0}) \quad (3.63)$$

E as derivadas:

$$\begin{cases} \dot{X} = (c, 0, \vec{0}) \\ X' = (0, f'(\sigma), \vec{0}) \end{cases} \quad (3.64)$$

Podemos realizar produtos entre essas derivadas acima, lembrando que a métrica que estamos adotando influencia no sinal.

$$\begin{cases} (\dot{X})^2 = -c^2 \\ (X')^2 = (f')^2 \\ \dot{X} \cdot X' = 0 \end{cases} \quad (3.65)$$

Agora vamos colocar esses resultados na ação Nambu-Goto (3.36).

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{c^2 (f')^2} \quad (3.66)$$

$$S = -T_0 \int_{t_i}^{t_f} d\tau \{f(\sigma_1) - f(0)\} \quad (3.67)$$

$$S = \int_{t_i}^{t_f} -(T_0 a) dt \quad (3.68)$$

Essa é a ação da corda relativística estática. A partir daqui será fácil obter uma grandeza muito importante para a teoria de cordas relativística, a tensão da corda T_0 , que definimos ser uma invariante de Lorentz.

3.5.3 Valor da Tensão da Corda T_0

Nesta seção estamos trabalhando com cordas estáticas, ou seja, não pode haver energia cinética. Isso implica que $T = 0$ e $L = -V$. Como a lagrangeana L é o argumento da integral que está na ação, podemos já escrever a energia potencial da corda estática.

$$V = T_0 a \quad (3.69)$$

Essa expressão tem uma interpretação bem interessante! Se a tensão da corda estática for T_0 , independente do seu comprimento, $T_0 a$ é a quantidade de energia associada uma corda de comprimento a .

Vamos lembrar que construímos a teoria de cordas relativísticas em cima da ideia de que T_0 é uma invariante de Lorentz. Queremos que V também seja uma invariante de Lorentz. Então se V é a energia associada uma corda, podemos traduzi-la na energia mais fundamental possível, que é a energia de repouso: $E = m_0 c^2$, onde m_0 é a massa de repouso.

$$V = m_0 c^2 \quad (3.70)$$

Como a é o comprimento da corda, podemos definir a massa de repouso por unidade de comprimento μ_0 :

$$\mu_0 \equiv \frac{m_0}{a} \quad (3.71)$$

Então usando as três ultimas expressões que obtemos: (3.71), (3.70) e (3.69). Nós temos o valor explicito da tensão da corda.

$$T_0 = \mu_0 c^2 \quad (3.72)$$

Uma observação que vale destacar, quando igualamos a energia potencial (3.69) à energia de repouso, nós fazemos com que o comprimento a se torne um comprimento invariante de lorentz. Neste caso, é como se a se tornasse um comprimento fundamental associado à energia de repouso.

3.6 Momento, Energia e Equação de Onda da Corda Relativística

Nesta secção, nós vamos definir uma nova grandeza física, a *Velocidade Transversal* \vec{v}_\perp . Com essa grandeza podemos simplificar a ação de Nambu-Goto e as expressões dos momentos que vimos em (3.40). Além disso, vamos calcular a hamiltoniana da corda relativística a partir da nossa nova ação de Nambu-Goto simplificada. Da ação vamos extrair o momento e a densidade de momento total da corda relativística. Vamos obter a tensão efetiva e densidade de massa efetiva da corda e calcular a equação de onda da corda relativística.

3.6.1 Velocidade Transversal da Corda Relativística

Nesta subsecção, vamos chegar na velocidade transversal da corda relativística. Primeiro devemos definir um parâmetro s que mede o comprimento ao longo da corda. Neste caso, $s(\sigma)$ será o comprimento da corda no intervalo de $\sigma = 0$ até $\sigma = \sigma_1$. Como vimos na secção anterior, aqui vamos trabalhar em um tempo fixo. Então vamos tomar a variação infinitesimal de comprimento da corda:

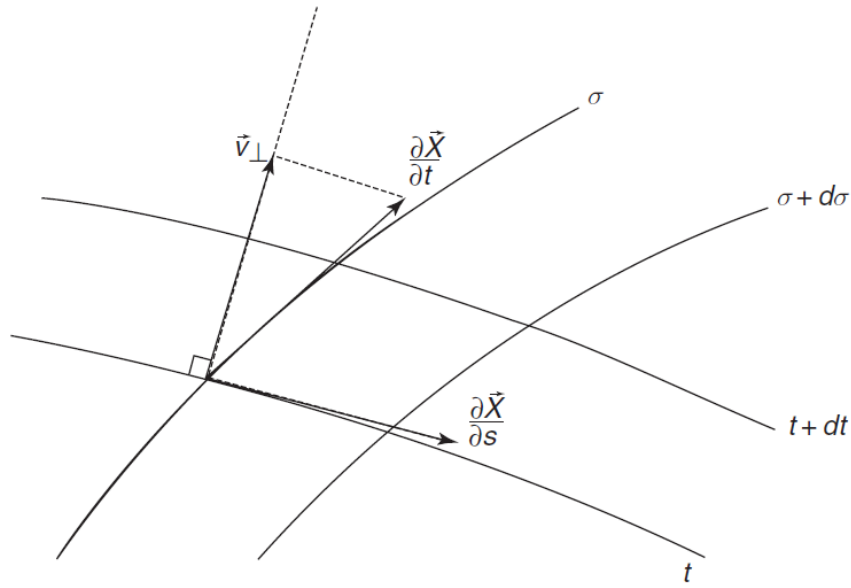
$$ds = |d\vec{X}| \longrightarrow \frac{ds}{d\sigma} = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right| \quad (3.73)$$

Note que o vetor $\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}$ é a taxa de variação de \vec{X} em relação ao comprimento da corda. Vamos provar que esse vetor é um vetor unitário!

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|^2 \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 = \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 \left(\frac{d\sigma}{ds} \right)^2 = 1 \quad (3.74)$$

Assim provamos que esse vetor é unitário, isso vai nos permitir dar um passo importante lá na frente. Além disso, é evidente que $\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}$ é tangente à corda, pois essa derivada é obtida em t fixo, de modo que as linhas em t constante são precisamente as cordas. Portanto, se $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{d\sigma}{ds}$ e $\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}$ é tangente á corda, então $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ também é tangente à corda.

Neste caso, $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ é um vetor unitário e tangente à corda. Assim podemos juntar todas essas informações do problema em uma representação mais visual.

Figura 8 – Representação da Velocidade Transversal \vec{v}_\perp

Já sabemos que cada linha de t constante é uma corda diferente, ou seja, a linha de t constante é uma corda e a linha de $t + dt$ é outra corda. Note que a velocidade transversal \vec{v}_\perp é a componente perpendicular da velocidade $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$ e também perpendicular à corda. A velocidade transversal também é a componente perpendicular ao vetor unitário $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ tangente à corda. Com esses dados podemos determinar quem é a velocidade transversal.

Para isso, vamos usar uma relação matemática que diz que para qualquer vetor \vec{u} , sua componente perpendicular a um vetor unitário \hat{n} é dada por:

$$\boxed{\vec{u}_\perp = \vec{u} - (\vec{u} \cdot \hat{n}) \hat{n}} \quad (3.75)$$

Usaremos essa relação para determinar a velocidade transversal. Podemos usar a esquematização da Figura 8 para termos uma orientação.

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \quad (3.76)$$

Essa já é a velocidade transversal, mas um resultado mais interessante é o quadrado dessa velocidade.

$$(\vec{v}_\perp)^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 - 2 \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} + \left[\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right]^2 \quad (3.77)$$

Como $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ é um vetor unitário, então $\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 = 1$. Neste caso, podemos simplificar nossa expressão.

$$(\vec{v}_\perp)^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 \quad (3.78)$$

$$(\vec{v}_\perp)^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 \quad (3.79)$$

Essa é a expressão para o quadrado da velocidade transversal, vamos guardar esse valor porque ele vai ser importante. Nós vamos reescrever a ação, energia e os momentos da corda relativística em função da velocidade transversal.

3.6.2 Ação da Corda Relativística em Função da Velocidade Transversal

Conforme obtemos a velocidade transversal, nós podemos reescrever a ação em função dessa grandeza. Primeiro vamos identificar X^μ como sendo $X^\mu = (ct, \vec{X})$. Assim podemos determinar suas derivadas como $\dot{X} = \left(c, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)$ e $X' = \left(0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)$. Faremos agora os produtos entre essas derivadas:

$$\begin{cases} (\dot{X})^2 = -c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \\ (X')^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 \\ \dot{X} \cdot X' = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) \end{cases} \quad (3.80)$$

Podemos pegar esses produtos e substituir na expressão da ação de Nambu-Goto (3.36).

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 - \left[-c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2} \quad (3.81)$$

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \left[c^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2} \quad (3.82)$$

Vamos colocar em evidência $\left(\frac{\partial s}{\partial \sigma} \right)^2$ e simplificar a expressão sabendo que $\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 = 1$.

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial s}{\partial \sigma} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 + \left(c^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right) \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 \right]} \quad (3.83)$$

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial s}{\partial \sigma}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right)^2 + c^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 \right]} \quad (3.84)$$

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial s}{\partial \sigma}\right)^2 \left[c^2 - \left\{ \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right)^2 \right\} \right]} \quad (3.85)$$

Por fim, é aqui que vai entrar a velocidade transversal.

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial s}{\partial \sigma}\right)^2 [c^2 - \vec{v}_\perp^2]} \quad (3.86)$$

Terminando as simplificações, nós ficamos definitivamente com a ação de Nambu-Goto escrita em função da velocidade transversal:

$$S = -T_0 \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(\frac{\partial s}{\partial \sigma}\right) \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} \quad (3.87)$$

Essa relação vale tanto para cordas abertas quanto para cordas fechadas.

3.6.3 Dinâmica das Extremidades da Corda Relativística

Já vimos anteriormente que as extremidades da corda tem movimento livre nas D-Branas. Portanto, aqui nós vamos utilizar a condição de ponto final livre (3.48) para abrimos as expressões que já obtemos. Primeiro de tudo, vamos tomar as relações em (3.80) e aplicar no momento \mathcal{P}_μ^σ de (3.40).

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -\frac{T_0}{c} \cdot \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right) \cdot \dot{X} - \left(-c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2\right) \cdot X'}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \quad (3.88)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -\frac{T_0}{c} \cdot \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right) \cdot \dot{X} + \left(c^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2\right) \cdot X'}{c \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \quad (3.89)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -\frac{T_0}{c^2} \cdot \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right) \cdot \dot{X} + \left(c^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2\right) \cdot \frac{\partial X_\mu}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \quad (3.90)$$

Vamos guardar esse resultado por enquanto! Queremos agora analisar o que acontece com \mathcal{P}_0^σ . De imediato podemos afirmar que $\dot{X}^0 = \frac{\partial X^0}{\partial t} = c$ e $X'^0 = \frac{\partial X^0}{\partial \sigma} = 0$. Assim ficamos com:

$$\mathcal{P}_0^\sigma = -\frac{T_0}{c} \cdot \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}\right)}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \quad (3.91)$$

Pela condição de contorno que estamos adotando para as extremidades, o momento \mathcal{P}_0^σ tem que ser zero. Essa expressão só vai ser zero se, e somente se:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = 0 \quad (3.92)$$

Daqui podemos já tirar um resultado interessante. Vamos relembrar a expressão da velocidade transversal (3.76) e aplicar a condição (3.92), nós obtemos que:

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{v} \quad (3.93)$$

Note que a velocidade \vec{v} das extremidades já é uma velocidade transversal à corda! Porem, agora vamos ver um resultado ainda mais surpreendente. Vamos pegar a condição (3.92) e (3.93), e aplicar no momento (3.90).

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -\frac{T_0}{c^2} \cdot \frac{(c^2 - \vec{v}_\perp^2) \cdot \frac{\partial X_\mu}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \quad (3.94)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -T_0 \cdot \frac{\left(1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}\right) \cdot \frac{\partial X_\mu}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \quad (3.95)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -T_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} \cdot \frac{\partial X_\mu}{\partial s} \quad (3.96)$$

Pela condição de contorno que estamos adotando, esse momento também precisa ser zero. Portanto, essa expressão só vai ser zero se, e somente se:

$$\vec{v} = \vec{v}_\perp = c \quad (3.97)$$

Nas extremidades, a velocidade transversal é a própria velocidade da corda e a velocidade da corda tem o valor da velocidade da luz.

Por agora, terminamos nossa análise da dinâmica das extremidades, entretanto é interessante fazer um pequeno acréscimo. Nós escrevemos uma expressão mais refinada para \mathcal{P}_μ^σ ,

então vamos fazer o mesmo para \mathcal{P}_μ^τ . Vamos tomar as relações em (3.80) e aplicar no momento \mathcal{P}_μ^τ de (3.40). Já vou considerar a condição (3.92) para zerar o termo que leva $X' \cdot \dot{X}$ e vamos considerar também a relação (3.73) para simplificarmos a expressão.

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{T_0}{c} \cdot \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 \cdot \frac{\partial X_\mu}{\partial t}}{c \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \quad (3.98)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{T_0}{c^2} \cdot \frac{\left|\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right|}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \frac{\partial X_\mu}{\partial t} \quad (3.99)$$

Terminamos de refinar a expressão. As relações (3.99) e (3.96) vão ser importantes mais para frente, porque podemos colocá-las na equação de movimento (3.47).

3.6.4 Hamiltoniana da Corda Relativística

A hamiltoniana de um sistema, descreve a energia total do sistema. Portanto, uma grandeza importante de calcularmos é a *Hamiltoniana da Corda Relativística*. Para isso, vamos relembrar como se constrói a Hamiltoniana, mas já adiantando, vamos precisar do momento total da corda relativística.

Primeiro de tudo, a partir da ação em (3.87), nós podemos extrair sua lagrangeana L :

$$L = -T_0 \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(\frac{\partial s}{\partial \sigma} \right) \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} \quad (3.100)$$

E da lagrangeana extraímos a densidade lagrangeana \mathcal{L} :

$$\mathcal{L} = -T_0 \left(\frac{\partial s}{\partial \sigma} \right) \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} \quad (3.101)$$

Pela natureza da mecânica lagrangeana, o momento total do sistema pode ser calculado pela derivada da lagrangeana na velocidade generalizada. De forma análoga, a densidade de momento do sistema, é a derivada da densidade lagrangeana na velocidade generalizada. Deste modo, é imediato que podemos obter a densidade de momento tomando:

$$\vec{\mathcal{P}}(t, \sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}(t, \sigma)}{\partial \vec{v}_\perp} \quad (3.102)$$

Então, derivando a expressão (3.101) em \vec{v}_\perp , nós obtemos a densidade de momento da corda relativística:

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{T_0}{c^2} \frac{\vec{v}_\perp}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \frac{\partial s}{\partial \sigma} \quad (3.103)$$

Integrando em todo o espaço, nós devemos ficar com o momento total da corda relativística:

$$\vec{P} = \frac{T_0}{c^2} \int d\sigma \left(\frac{\partial s}{\partial \sigma} \right) \frac{\vec{v}_\perp}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \quad (3.104)$$

Por definição, a hamiltoniana necessita do momento, a velocidade e a lagrangeana do sistema para compor a sua expressão, deste modo, podemos contruí-la da seguinte maneira:

$$H = \vec{P} \cdot \vec{v}_\perp - L \quad (3.105)$$

Deste modo, usando as expressões (3.100) e (3.104), e fazendo as devidas simplificações, podemos escrever direto a hamiltoniana da corda relativística:

$$H = \int \frac{T_0 ds}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \quad (3.106)$$

Assim temos a hamiltoniana total do sistema. Vamos lembrar que $ds = d\sigma \left(\frac{\partial s}{\partial \sigma} \right)$, de modo que isso torna possível remover a integral $\int d\sigma$ da hamiltoniana. Removendo a integral, nós ficamos com a densidade hamiltoniana da corda relativística:

$$\mathcal{H} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \frac{ds}{d\sigma} \quad (3.107)$$

Com isso concluímos todo o desenvolvimento da hamiltoniana da corda relativística. Nosso próximo passo é obter a equação de onda da corda relativística e terminar de simplificar os momentos \mathcal{P}_μ^τ e \mathcal{P}_μ^σ .

3.6.5 Equação de Onda e Momentos da Corda Relativística

Desenvolver a equação de onda na corda relativística é importante, porque com ela podemos traçar um paralelo com a equação de onda na corda não relativística. Assim podemos identificar grandezas efetivas, tais como tensão efetiva e densidade de massa efetiva, que estão presentes na equação de onda que estudamos no capítulo 2.

Portanto, vamos inicialmente trabalhar somente com as componentes espaciais dos momentos. Usaremos as expressões (3.99) e (3.96). Para sinalizar que só estamos usando as componentes espaciais, tirei o índice μ . Também é importante lembrar que $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{v}_\perp$.

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{P}}^\tau = \frac{T_0}{c^2} \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right| \frac{\vec{v}_\perp}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \\ \vec{\mathcal{P}}^\sigma = -T_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \end{cases} \quad (3.108)$$

Agora vamos colocar esses momentos na equação de movimento (3.47).

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{T_0}{c^2} \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right| \frac{\vec{v}_\perp}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \right] + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[-T_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right] = 0 \quad (3.109)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{T_0}{c^2} \frac{\partial s}{\partial \sigma} \frac{\vec{v}_\perp}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \right] = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[T_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right] \quad (3.110)$$

$$\frac{T_0}{c^2} \cdot \frac{\partial s}{\partial \sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \cdot \frac{\partial \vec{v}_\perp}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[T_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right] \quad (3.111)$$

Aqui vou justificar a passagem de (3.110) para (3.111). O pensamento é até que simples, primeiro devemos pegar as equações (3.99) e (3.96), tomar $\mu = 0$ e jogar na expressão (3.47). Ou seja, teríamos $\frac{\partial \mathcal{P}_0^\tau}{\partial \tau} = -\frac{\partial \mathcal{P}_0^\sigma}{\partial \sigma}$. Contudo, para $\mu = 0$, pela expressão (3.96), vamos ter $\mathcal{P}_0^\sigma = 0$, porque a derivada vai zerar a expressão. Neste caso, ficamos com $\frac{\partial \mathcal{P}_0^\tau}{\partial \tau} = 0$ e abrindo a expressão (3.99) para $\mu = 0$, o que resta é $\frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{T_0}{c} \cdot \frac{\left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \right] = 0$. Isso implica que o argumento dessa derivada é constante, e portanto, nos permite fazer a passagem de (3.110) para (3.111).

Do que obtemos em (3.111), os $\partial \sigma$ vão cortar nos dois lados, o ∂s vai passar do lado esquerdo para o lado direito derivando e também $\frac{\partial \vec{v}_\perp}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2}$.

$$\frac{T_0}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = T_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial s^2} \quad (3.112)$$

Chegamos aonde queríamos! Note que ficou bem fácil de interpretar. Vamos voltar lá no início, onde escrevemos a equação de onda da corda clássica (2.2). Por ela podemos separar T_0 e μ_0 para cada lado da equação e compararmos com a equação que recém obtemos (3.112). Fazendo essa associação, podemos definir uma tensão efetiva T_{eff} e uma densidade de massa efetiva μ_{eff} para a corda relativística:

$$\begin{cases} T_{eff} = T_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} \\ \mu_{eff} = \frac{T_0}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \end{cases} \quad (3.113)$$

Aqui já podemos fazer uma observação notável! A tensão efetiva da corda relativística tende a zero, quando nos aproximamos das extremidades da corda em $\vec{v}_\perp = c$. Feito essas observações, vamos prosseguir com os cálculos em (3.112).

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial s^2} \quad (3.114)$$

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left[\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right] \quad (3.115)$$

Aqui vamos utilizar um passo matemático. Perceba que $\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{d\sigma}{ds} \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{\frac{ds}{d\sigma}} \right)$. Então vamos aplicá-lo!

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right] \cdot \frac{1}{\frac{ds}{d\sigma}} \quad (3.116)$$

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\partial}{\partial s} \left[\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} \cdot \vec{X} \right] \right] \cdot \frac{1}{\frac{ds}{d\sigma}} \quad (3.117)$$

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}} \cdot \vec{X} \right] \frac{1}{\frac{ds}{d\sigma}} \right] \cdot \frac{1}{\frac{ds}{d\sigma}} \quad (3.118)$$

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \cdot \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}}{\frac{ds}{d\sigma}} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right] \cdot \frac{1}{\frac{ds}{d\sigma}} \quad (3.119)$$

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}}{\frac{ds}{d\sigma}} \cdot \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\frac{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}}{\frac{ds}{d\sigma}} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right] \quad (3.120)$$

Daqui para frente será conveniente definirmos um novo parâmetro. Além de facilitar o entendimento, esse parâmetro ajuda a não ficar repetindo um termo grande nos cálculos.

$$A(\sigma) \equiv \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \quad (3.121)$$

Além disso, é fácil de ver que o parâmetro $A(\sigma)$ é independente do tempo, o que implica que é um parâmetro exclusivamente espacial. Note que fixando $A(\sigma) = 1$ nós obtemos uma equação de onda bem notável!

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2} \quad (3.122)$$

Em $A(\sigma) = 1$ temos uma equação de onda onde a velocidade da corda é a velocidade da luz. Isso significa que em $A(\sigma) = 1$ estamos fixando uma das extremidades da corda. Já vimos também que uma das extremidades da corda fica situada em $\sigma = 0$. Agora está ficando muito interessante! Vamos continuar trabalhando em cima dessa ideia.

$$1 = \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \longrightarrow d\sigma = \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \quad (3.123)$$

Devemos lembrar que a hamiltoniana caracteriza a energia de um sistema, então podemos afirmar que $H = E$, com essa notação fica mais intuitivo. Veja como é a expressão da hamiltoniana da corda relativística em (3.106) e compare com a expressão que acabamos de obter. Vamos tomar a variação infinitesimal dessa hamiltoniana para sumir com a integral.

$$dH = \frac{T_0 ds}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \longrightarrow \frac{1}{T_0} dE = \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}} \quad (3.124)$$

Agora juntando (3.123) e (3.124) nós temos um resultado surpreendente! Encontramos uma maneira explícita de parametrizar a corda em função da energia!

$$d\sigma = \frac{1}{T_0} dE \quad (3.125)$$

De imediato, já podemos ver que $\frac{dE}{d\sigma}$ é constante.

$$\frac{dE}{d\sigma} = T_0 \quad (3.126)$$

Contudo, dá para extrair resultados ainda melhores! Vamos integrar a expressão (3.125). No lado esquerdo sabemos que os limites de integração para σ são $\sigma \in [0, \sigma_1]$. Já no lado direito não é necessário saber os limites de integração, basta sabermos que a integral de dE tem que ser a energia total do sistema. Portanto, refinamos ainda mais nossa parametrização:

$$\sigma_1 = \frac{E}{T_0} \quad (3.127)$$

Ainda dá para extrair mais resultados. Vamos elevar ao quadrado a expressão (3.123). Sabemos que $\vec{v}_\perp^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2$. Portanto, nós ficamos com:

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = 1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2} \quad (3.128)$$

$$\left(\frac{d\vec{X}}{d\sigma}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1 \quad (3.129)$$

A expressão (3.129) é uma condição de parametrização, esse é um resultado importante, mas ainda está incompleto. Nós sabemos que os parâmetros τ e σ são perpendiculares entre si, então podemos afirmar que $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0$, sendo essa outra condição de parametrização. Nosso objetivo é compactar as duas condições em uma só, então vamos somar e subtrair zero a partir dessa nova condição. Vou grifar em vermelho o que for nulo.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{X}}{d\sigma}\right)^2 \pm 2 \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 &= 1 \\ \left(\frac{d\vec{X}}{d\sigma} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.130)$$

Chegamos à expressão que compacta as duas condições de parametrização, isso vai ser importante mais para frente, vamos guardar esse resultado.

Por agora, nós tiramos de (3.123) que $\frac{ds}{d\sigma} = \left|\frac{d\vec{X}}{d\sigma}\right| = \sqrt{1 - \frac{\vec{v}_\perp^2}{c^2}}$, desta forma nós podemos substituir a raiz em (3.96) e o numerador em cima da raiz em (3.99), de modo que fazendo as devidas simplificações, nós ficamos com:

$$\begin{cases} \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \cdot \frac{\partial X^\mu}{\partial t} \\ \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -T_0 \cdot \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \end{cases} \quad (3.131)$$

Assim temos as expressões mais reduzidas para os momentos da corda relativística. Nota que se pegarmos a condição de ponto final livre (3.48) das extremidades, pelas equações que obtemos em (3.131), mais especificamente a segunda equação, nós chegamos a seguinte condição de contorno:

$$\left.\frac{d\vec{X}}{d\sigma}\right|_{\sigma=0} = \left.\frac{d\vec{X}}{d\sigma}\right|_{\sigma=\sigma_1} = 0 \quad (3.132)$$

Essa condição de contorno será útil na seção a seguir.

3.7 Movimento Geral da Corda Relativística

Nesta seção, vamos estudar o movimento geral para a corda relativística, tanto para as cordas abertas quanto para as cordas fechadas. Essa é a parte final do que se refere as cordas relativísticas, pois vamos desenvolver precisamente a função $\vec{X}(t, \sigma)$ que descreve o movimento da corda relativística aberta e da corda relativística fechada.

3.7.1 Movimento Geral da Corda Relativística Aberta

Começando pelas cordas abertas, vamos definir uma função de onda e deixar a teoria um pouco mais geral, em termos de funções vetoriais.

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} (\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{G}(ct - \sigma)) \quad (3.133)$$

Agora aplicaremos a condição de contorno $\left. \frac{d\vec{X}}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} = 0$, ficamos com:

$$\vec{F}'(ct) - \vec{G}'(ct) = 0 \quad (3.134)$$

Considerando que ct pode assumir todos os valores possíveis, então ct assume todos os valores de um argumento $u = ct + \sigma$. Deste modo, pela equação acima nós temos:

$$\frac{d\vec{F}(u)}{du} = \frac{d\vec{G}(u)}{du} \longrightarrow \vec{G}(u) = \vec{F}(u) + \vec{a}_0 \quad (3.135)$$

Onde \vec{a}_0 é um vetor constante que vem de uma integração. Com essa construção, nós podemos escrever uma expressão mais geral:

$$\vec{G}(ct \pm \sigma) = \vec{F}(ct \pm \sigma) + \vec{a}_0 \quad (3.136)$$

Prosseguindo, podemos jogar essa relação na função de onda (3.133). Como os vetores \vec{F} são indeterminados, podemos absorver as constantes nele.

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} (\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{F}(ct - \sigma) + \vec{a}_0) \quad (3.137)$$

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} (\vec{F}(ct + \sigma) + \frac{\vec{a}_0}{2} + \vec{F}(ct - \sigma) + \frac{\vec{a}_0}{2}) \quad (3.138)$$

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} (\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{F}(ct - \sigma)) \quad (3.139)$$

Vamos aplicar a condição de contorno $\left. \frac{d\vec{X}}{d\sigma} \right|_{\sigma=\sigma_1} = 0$, para obter:

$$\vec{F}'(ct + \sigma_1) = \vec{F}'(ct - \sigma_1) \quad (3.140)$$

Vai facilitar nossa análise se tomarmos $u = ct - \sigma_1$, porque aí podemos escrever uma relação do tipo $\frac{d\vec{F}(u)}{du} = \frac{d\vec{F}(u+2\sigma_1)}{du}$, que implica o fato da função \vec{F} ser periódica com período de pelo menos $2\sigma_1$. Integrando essa expressão, nós ficamos com:

$$\vec{F}(u + 2\sigma_1) = \vec{F}(u) + \vec{b}_0 \quad (3.141)$$

De novo, \vec{b}_0 é um vetor constante que vem da integração. Sabemos que ele precisa ser um produto envolvendo $2\sigma_1$. Então vamos colocar também uma constante vetorial $\frac{\vec{v}_0}{c}$, de modo que \vec{v}_0 tenha unidade de velocidade. Por agora, nós vamos ficar com:

$$\vec{F}(u + 2\sigma_1) = \vec{F}(u) + 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c} \quad (3.142)$$

Vamos pegar a função de onda (3.139) e aplicar nas condições de parametrização compactadas em (1.130). Assim vamos obter:

$$\left(\frac{1}{2} \left[\vec{F}'(ct + \sigma) - \vec{F}'(ct - \sigma) \right] \pm \frac{1}{2c} \left[c\vec{F}'(ct + \sigma) + c\vec{F}'(ct - \sigma) \right] \right)^2 = 1 \quad (3.143)$$

$$\left(\frac{1}{2} \left[\vec{F}'(ct + \sigma) - \vec{F}'(ct - \sigma) \pm \vec{F}'(ct + \sigma) + \vec{F}'(ct - \sigma) \right] \right)^2 = 1 \quad (3.144)$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2} \left[2\vec{F}'(ct + \sigma) \right] \right)^2 = 1 \longrightarrow \left(\vec{F}'(ct + \sigma) \right)^2 = 1 \\ \left(\frac{1}{2} \left[-2\vec{F}'(ct - \sigma) \right] \right)^2 = 1 \longrightarrow \left(-\vec{F}'(ct - \sigma) \right)^2 = 1 \end{cases} \quad (3.145)$$

$$\left(\pm \vec{F}'(ct \pm \sigma) \right)^2 = 1 \longrightarrow \boxed{\left| \vec{F}'(ct \pm \sigma) \right|^2 = 1} \quad (3.146)$$

Acabamos de demonstrar que \vec{F}' é um vetor unitário. Podemos deixar ainda mais elegante se escrevermos:

$$\left| \frac{d\vec{F}(u)}{du} \right|^2 = 1 \quad (3.147)$$

Deste modo, podemos afirmar que $\vec{F}(u)$ é uma curva parametrizada no espaço e u é o parâmetro de comprimento desta curva. Já sabemos também que a curva é periódica em

$u \rightarrow u + 2\sigma_1$ e o vetor $\vec{F}(u)$ muda pelo vetor constante $\frac{2\sigma_1}{c} \vec{v}_0$. Orientando-se pelas equações (3.147) e (3.142), temos explicitamente a parametrização da corda aberta com extremidades livres. Abaixo vou deixar uma representação mais visual dessa parametrização.

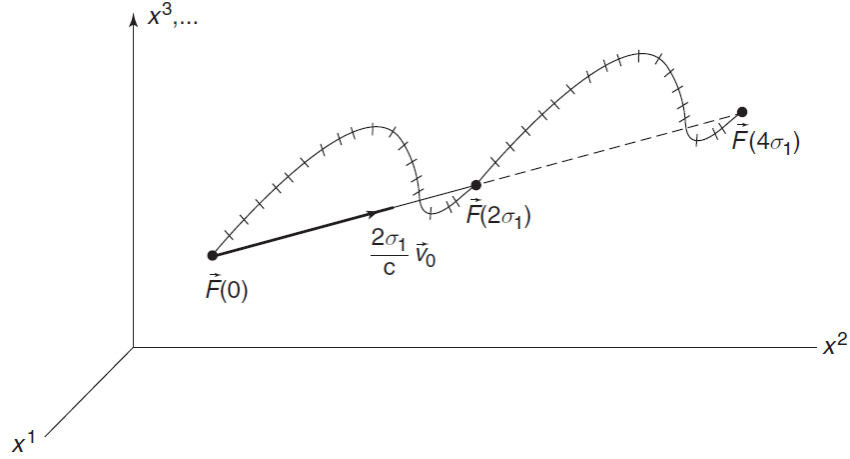


Figura 9 – Representação da Curva Paramétrica de uma Corda Aberta com Extremidades Livres

Nosso objetivo agora é encontrar uma função \vec{F} que satisfaça as equações (3.147) e (3.142). Então faremos uma série de análises até chegar a essa função. Primeiro nós já sabemos que em $\sigma = 0$, temos $\vec{X}(t, 0) = \vec{F}(ct)$ pela expressão (3.139). Isso implica que $u = ct$, ou melhor ainda, $t = \frac{u}{c}$ quando $\sigma = 0$. A interpretação que damos é que $\vec{F}(u)$ é a posição da extremidade $\sigma = 0$ quando $t = \frac{u}{c}$.

Continuando, na posição inicial, temos que $u = 0$, o que implica $t = 0$ na posição inicial. Vamos dizer que na posição final completamos um período, ou seja, $u = 2\sigma_1$, o que implica $t = \frac{2\sigma_1}{c}$ na posição final. Deixando isso claro, vamos aplicar a condição $u = 0$ na equação (3.142).

$$\vec{F}(2\sigma_1) = \vec{F}(0) + \vec{v}_0 t \quad (3.148)$$

Essa equação é bem familiar e também não é uma surpresa! Temos uma equação de movimento clássica do tipo " $S = S_0 + vt$ ". Mais uma vez, obter uma expressão assim não é uma surpresa, mas é sempre bom trabalharmos com o que já conhecemos. Por exemplo, por analogia já sabemos que \vec{v}_0 é uma velocidade média, entretanto, como a função \vec{F} se repete, podemos associar a uma velocidade de repetição da função ω . Pela mesma lógica, podemos dizer que \vec{v}_0 é uma velocidade média de qualquer ponto σ da corda, calculada em qualquer intervalo de tempo $\frac{2\sigma_1}{c}$. Qualquer ponto da corda é uma função periódica no tempo com período $\frac{2\sigma_1}{c}$.

A história ainda melhora se lembrarmos que $\sigma_1 = \frac{E}{T_0}$. Estamos analisando as extremidades da corda num intervalo de tempo $\Delta t = t_f - t_i = \frac{2E}{cT_0}$. Então vamos explorar ainda mais o nosso conhecimento clássico, sabendo que $\vec{X}(t, 0) = \vec{F}(ct)$, onde \vec{F} é uma função periódica, se a corda tem comprimento l e gira com velocidade angular ω , podemos escrever:

$$\vec{X}(t, 0) = \frac{l}{2} (\cos(\omega t), \sin(\omega t)) \quad (3.149)$$

Como $t = \frac{u}{c}$, temos:

$$\vec{F}(u) = \frac{l}{2} \left(\cos\left(\frac{\omega u}{c}\right), \sin\left(\frac{\omega u}{c}\right) \right) \quad (3.150)$$

Por ser uma função periódica a cada $2\sigma_1$, podemos dizer que $\frac{\omega}{c} 2\sigma_1 = 2\pi m$, onde $m \in \mathbb{Z}$. Assim concluímos que $\frac{\omega}{c} = \frac{\pi}{\sigma_1} m$, entretanto, $m = 1$ já nos permite trabalhar em toda a corda. Deste modo, ficamos com:

$$\frac{\omega}{c} = \frac{\pi T_0}{E} \quad (3.151)$$

Guardaremos esse resultado, por agora vamos derivar a função (3.150).

$$\frac{d\vec{F}(u)}{du} = \frac{d}{du} \left[\frac{l}{2} \left(\cos\left(\frac{\omega u}{c}\right), \sin\left(\frac{\omega u}{c}\right) \right) \right] \quad (3.152)$$

$$\frac{d\vec{F}(u)}{du} = \frac{l\omega}{2c} \left(-\sin\left(\frac{\omega u}{c}\right), \cos\left(\frac{\omega u}{c}\right) \right) \quad (3.153)$$

Tomaremos o módulo ao quadrado desse vetor para termos a condição (3.147). Vamos usar essa condição para descobrir quem é o comprimento da corda l .

$$\left| \frac{d\vec{F}(u)}{du} \right|^2 = \left(\frac{l\omega}{2c} \right)^2 \left(\sin^2\left(\frac{\omega u}{c}\right) + \cos^2\left(\frac{\omega u}{c}\right) \right) = 1 \quad (3.154)$$

$$\left(\frac{l\omega}{2c} \right)^2 = 1 \quad (3.155)$$

$$l^2 = \left(\frac{2c}{\omega} \right)^2 \longrightarrow \boxed{l = \frac{2c}{\omega}} \quad (3.156)$$

Lembrando da relação (3.151) que recém obtivemos, temos em mãos o comprimento da corda:

$$l = \frac{2E}{\pi T_0} \quad (3.157)$$

Melhor ainda! Nós temos a energia total da corda.

$$E = \frac{\pi}{2} T_0 l \quad (3.158)$$

Com isso temos tudo que é necessário para escrever a função de onda completa da corda aberta. Vamos abrir a função (3.150) com tudo que já obtemos.

$$\vec{F}(u) = \frac{E}{\pi T_0} \left(\cos \left(\frac{\pi T_0 u}{E} \right), \sin \left(\frac{\pi T_0 u}{E} \right) \right) \quad (3.159)$$

$$\vec{F}(u) = \frac{\sigma_1}{\pi} \left(\cos \left(\frac{\pi u}{\sigma_1} \right), \sin \left(\frac{\pi u}{\sigma_1} \right) \right) \quad (3.160)$$

Agora nosso passo final é usar essa função para construir a função de onda geral (3.139).

$$\begin{aligned} \vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_1}{\pi} \left(\left(\cos \left[\frac{\pi}{\sigma_1} (ct + \sigma) \right], \sin \left[\frac{\pi}{\sigma_1} (ct + \sigma) \right] \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \left(\cos \left[\frac{\pi}{\sigma_1} (ct - \sigma) \right], \sin \left[\frac{\pi}{\sigma_1} (ct - \sigma) \right] \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.161)$$

$$\begin{aligned} \vec{X}(t, \sigma) = \frac{\sigma_1}{2\pi} \left(\cos \left[\frac{\pi}{\sigma_1} (ct + \sigma) \right] + \cos \left[\frac{\pi}{\sigma_1} (ct - \sigma) \right], \right. \\ \left. \sin \left[\frac{\pi}{\sigma_1} (ct + \sigma) \right] + \sin \left[\frac{\pi}{\sigma_1} (ct - \sigma) \right] \right) \end{aligned} \quad (3.162)$$

Abrindo essas somas de senos e cossenos é possível simplificar até chegarmos na seguinte função:

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{\sigma_1}{\pi} \cos \left[\frac{\pi \sigma}{\sigma_1} \right] \left(\cos \left[\frac{\pi ct}{\sigma_1} \right], \sin \left[\frac{\pi ct}{\sigma_1} \right] \right) \quad (3.163)$$

Deste modo chegamos ao fim. Essa função de onda descreve o movimento da corda relativística aberta. O que vale destacar novamente é que nessa função entra $\sigma_1 = \frac{E}{T_0}$ e $E = \frac{\pi}{2} T_0 l$. Fazendo as devidas substituições ela fica completa.

3.7.2 Movimento Geral da Corda Relativística Fechada

Faremos agora uma construção bem semelhante para a corda relativística fechada. Muitos dos cálculos são repetidos, então vou tomar a liberdade de pular alguns passos e reaproveitar construções que fizemos na subseção anterior. Então vamos começar definindo a estrutura da função de onda.

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} (\vec{F}(u) + \vec{G}(v)) \quad (3.164)$$

Onde $u = ct + \sigma$ e $v = ct - \sigma$. Já vamos escrever direto como é essa função de onda na condição de parametrização (3.130).

$$\begin{cases} \left(\frac{d\vec{X}}{d\sigma} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} [\vec{F}'(u) - \vec{G}'(v)] + \frac{1}{c} \left(\frac{1}{2} [c\vec{F}'(u) + c\vec{G}'(v)] \right) \right)^2 = 1 \\ \left(\frac{d\vec{X}}{d\sigma} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} [\vec{F}'(u) - \vec{G}'(v)] - \frac{1}{c} \left(\frac{1}{2} [c\vec{F}'(u) + c\vec{G}'(v)] \right) \right)^2 = 1 \end{cases} \quad (3.165)$$

$$\begin{cases} |\vec{F}'(u)|^2 = 1 \\ |\vec{G}'(v)|^2 = 1 \end{cases} \quad (3.166)$$

Tanto \vec{F}' quanto \vec{G}' são vetores unitários. Vamos falar agora exclusivamente da parametrização de uma corda fechada.

A folha de mundo de uma corda fechada é topologicamente um cilindro, então fazemos uma identificação no espaço dos parâmetros do tipo $(\tau, \sigma) \sim (\tau, \sigma + \sigma_c)$, onde σ_c é a circunferência do círculo. Deste modo, as cordas fechadas podem ser parametrizadas usando qualquer intervalo σ de comprimento σ_c , ou seja, $\sigma \in [0, \sigma_c]$. No nosso caso atual, σ_1 já garante a periodicidade, pois a corda é fechada. Ao percorrer σ_1 voltamos para o mesmo ponto, independentemente da posição em σ . Portanto, faremos a identificação do parâmetro σ como $\sigma \sim \sigma + \sigma_1$. Deste modo:

$$\vec{X}(t, \sigma + \sigma_1) = \vec{X}(t, \sigma) \quad (3.167)$$

$$\frac{1}{2} (\vec{F}(u + \sigma_1) + \vec{G}(v - \sigma_1)) = \frac{1}{2} (\vec{F}(u) + \vec{G}(v)) \quad (3.168)$$

$$\vec{F}(u + \sigma_1) - \vec{F}(u) = \vec{G}(v) - \vec{G}(v - \sigma_1) \quad (3.169)$$

Vamos derivar em u e em v respectivamente:

$$\begin{cases} \vec{F}'(u + \sigma_1) = \vec{F}'(u) \\ \vec{G}'(v - \sigma_1) = \vec{G}'(v) \end{cases} \quad (3.170)$$

Uma observação que vale o destaque é que não importa se σ_1 é positivo ou negativo no argumento dessas funções, pois já que ele é o fator de periodicidade, acrescentar ou tirar σ_1 faz voltar para o mesmo ponto da corda fechada. Sendo assim, já vimos que essas funções são unitárias e agora em (3.170) vemos que as funções são periódicas. Como u e v são duas variáveis independentes, $\vec{F}'(u)$ e $\vec{G}'(v)$ podem ser descritos como duas curvas fechadas parametrizadas

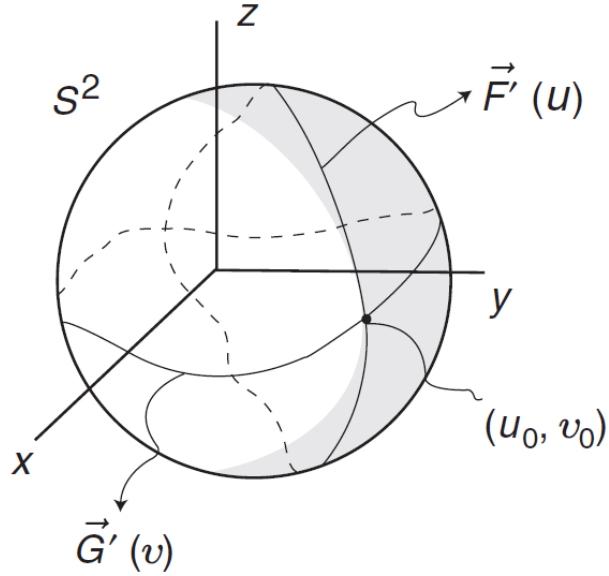


Figura 10 – Representação das Curvas Paramétricas de uma Corda Fechada

independentes na superfície de uma esfera unitária. Abaixo é possível ter uma representação mais visual.

O movimento da corda fechada tem que ser descrito por essas duas curvas parametrizadas. Perceba que há um ponto onde as duas curvas se cruzam, podemos chamar esse ponto de (u_0, v_0) . Neste ponto nós temos $\vec{F}'(u_0) = \vec{G}'(v_0)$. Podemos chamar esse ponto de "origem" e fixar valores para produzi-lo, tais como $t = t_0$ e $\sigma = \sigma_0$. Analizaremos então as derivadas nesse ponto:

$$\begin{cases} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}(t_0, \sigma_0)}{\partial t} = \frac{1}{c} \left(\frac{1}{2} \left[c \vec{F}'(u_0) + c \vec{G}'(v_0) \right] \right) = \vec{F}'(u_0) \\ \frac{d\vec{X}(t_0, \sigma_0)}{d\sigma} = \frac{1}{2} \left[\vec{F}'(u_0) - \vec{G}'(v_0) \right] = \vec{0} \end{cases} \quad (3.171)$$

Agora vamos interpretar com cuidado! A primeira equação nos dá a velocidade no tempo $t = t_0$ e no espaço $\sigma = \sigma_0$. Neste caso, definimos:

$$\vec{v}_{t_0, \sigma_0} \equiv \frac{\partial \vec{X}(t_0, \sigma_0)}{\partial t} = c \vec{F}'(u_0) \quad (3.172)$$

Se \vec{F}' é um vetor unitário, a velocidade da corda fechada em $t = t_0$ e $\sigma = \sigma_0$ tem que ter a velocidade da luz! Em outras palavras, a velocidade da corda na intersecção das curvas paramétricas é c .

Já a segunda equação em (3.171) nos dá uma singularidade. A singularidade não nos permite saber o que acontece no ponto, mas podemos saber o que acontece em sua vizinhança. Vamos fixar $t = t_0$ e expandir em série de Taylor em torno de $\sigma = \sigma_0$.

$$\begin{aligned}\vec{X}(t_0, \sigma) = & \vec{X}(t_0, \sigma_0) + (\sigma - \sigma_0) \frac{\partial \vec{X}(t_0, \sigma_0)}{\partial \sigma} + \frac{1}{2} (\sigma - \sigma_0)^2 \frac{\partial^2 \vec{X}(t_0, \sigma_0)}{\partial \sigma^2} \\ & + \frac{1}{3!} (\sigma - \sigma_0)^3 \frac{\partial^3 \vec{X}(t_0, \sigma_0)}{\partial \sigma^3} + \dots\end{aligned}\quad (3.173)$$

Simplificando nossa análise, podemos definir:

$$\begin{cases} \vec{X}_0 \equiv \vec{X}(t_0, \sigma_0) \\ \vec{T} \equiv \frac{\partial \vec{X}(t_0, \sigma_0)}{\partial \sigma} \\ \vec{R} \equiv \frac{\partial^2 \vec{X}(t_0, \sigma_0)}{\partial \sigma^2} \end{cases}\quad (3.174)$$

Assim finalizamos a expressão:

$$\vec{X}(t_0, \sigma) = \vec{X}_0 + \frac{1}{2} (\sigma - \sigma_0)^2 \vec{T} + \frac{1}{3!} (\sigma - \sigma_0)^3 \vec{R} + \dots\quad (3.175)$$

Faremos algumas análises em cima dessa expressão. Primeiro, é notável que \vec{T} e \vec{R} não sejam nulos em casos gerais e não sejam vetores paralelos. Se crescermos valores de σ até σ_0 , a corda se aproxima de \vec{X}_0 ao longo de \vec{T} e quando σ cresce para valores maiores do que σ_0 , a corda se afasta de \vec{X}_0 ao longo de \vec{T} . Ou seja, perto de \vec{X}_0 , $\sigma - \sigma_0$ é muito pequeno e \vec{T} domina a expansão por conta do expoente. Quando nos afastamos de \vec{X}_0 , $\sigma - \sigma_0$ é maior e \vec{R} domina a expansão. Devido ao termo com \vec{R} se abre um cúspide.

Em outras palavras, na singularidade que se forma em $\sigma = \sigma_0$, a corda forma um "cúspide". De forma análoga, se um cúspide aparece em (u_0, v_0) , também vai aparecer em $(u_0 + m\sigma_1, v_0 + n\sigma_1)$, onde $m, n \in \mathbb{Z}$, devido a periodicidade no espaço da corda fechada. Com isso, os cúspides aparecem e desaparecem periodicamente em vários pontos da corda, com o passar do tempo. Sendo assim, dadas quaisquer duas curvas paramétricas $\vec{F}'(u)$ e $\vec{G}'(v)$ se movendo na esfera, pode haver vários pontos de intersecção diferentes. Cada um dá origem a um conjunto de cúspides.

De forma mais intuitiva, a proximidade dessas curvas ponto-a-ponto aumenta a oscilação do ponto referente na corda, quanto mais próximas as curvas paramétricas estão. A volta também é verdadeira, dois pontos afastados nas curvas paramétricas representam menor oscilação nos respectivos pontos coordenados na corda. No ponto em que essas curvas se cruzam, a oscilação aumenta tanto que naquele ponto, a corda forma um cúspide e a velocidade atinge a velocidade da luz.

3.8 Parâmetro de Inclinação α'

Até o momento, fechamos nossa análise no que se refere ao movimento de uma corda relativística. Temos funções de movimento explícitas tanto para cordas abertas quanto para cordas fechadas, bem como desenvolvemos grandezas importantes, como a energia total da corda, momento, ação e velocidade transversal. Como um bônus a esse capítulo, falaremos de uma grandeza ainda mais importante na teoria de cordas e que será necessária nos capítulos posteriores. Me refiro ao parâmetro de inclinação α' .

O parâmetro de inclinação α' existe desde os primórdios da teoria de cordas. Na década de 1970, quando a teoria de cordas se propunha exclusivamente a investigar a interação forte, o parâmetro de inclinação era medido experimentalmente e aparecia na ação da corda. Ao final dessa seção, vamos reescrever as grandezas conhecidas em função do parâmetro α' , mas por agora, vamos descobrir quem é esse novo personagem.

3.8.1 Momento Angular da Corda Relativística

Para chegar ao momento angular da corda, precisamos entender conceitos como carga e corrente conservadas. O lagrangeano de um sistema pode ser usado para deduzir a existência de quantidades conservadas associadas a uma simetria. Ou seja, a simetria de uma lagrangeana nos garante cargas conservadas e, em cima de uma mesma análise, a simetria de uma densidade lagrangeana nos garante a existência de correntes conservadas. Estes conceitos são fáceis de demonstrar, mas não é o nosso foco. O que é importante frisarmos é que a expressão que nos garante identificar correntes conservadas é dada por:

$$\boxed{\varepsilon^i J_i^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi^a)} \delta \phi^a} \quad (3.176)$$

Nessa expressão ϕ^a é o campo no lagrangeano, ∂_α são derivadas nas coordenadas do espaço-tempo, ε^i são parâmetros da transformação de simetria e J_i^α é a corrente conservada, onde o índice i indica que há uma corrente para cada parâmetro de simetria e o índice α representa as componentes da corrente no espaço-tempo. Vamos guardar essa informação por enquanto, para vermos o que é uma transformação de simetria.

As transformações de simetria são transformações do tipo $X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu$, em que $\delta X^\mu = \varepsilon^{\mu\nu} X_\nu$. Esse $\varepsilon^{\mu\nu}$ é uma matriz de constantes infinitesimais. A invariância de Lorentz exige que $\delta(\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu) = 0$, então vamos seguir daqui para provar que $\varepsilon^{\mu\nu}$ tem que ser uma matriz anti-simétrica.

$$\begin{aligned} \delta(\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu) &= \eta_{\mu\nu} \delta(X^\mu X^\nu) = \eta_{\mu\nu} (\delta(X^\mu) X^\nu + \delta(X^\nu) X^\mu) \\ &= 2 \eta_{\mu\nu} \delta(X^\mu) X^\nu = 2 \varepsilon^{\mu\rho} X_\rho X_\mu = 0 \end{aligned} \quad (3.177)$$

Essa equação só vai dar zero se, e somente se $\varepsilon^{\mu\rho}$ for uma matriz anti-simétrica. Ou seja, $\varepsilon^{\mu\rho} = -\varepsilon^{\rho\mu}$. Saber que essa matriz é anti-simétrica vai ser importante na definição do momento angular. Vamos retornar à equação (3.176) e substituir pelos termos que já conhecemos:

$$\varepsilon^{\mu\nu} J_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu = \mathcal{P}_\mu^\alpha \varepsilon^{\mu\nu} X_\nu \quad (3.178)$$

$$J_{\mu\nu}^\alpha = \mathcal{P}_\mu^\alpha X_\nu \quad (3.179)$$

Chegamos a uma corrente conservada da corda relativística. Aqui nós trataremos $J_{\mu\nu}^\alpha$ como uma matriz anti-simétrica, pois como ele estava sendo multiplicado por $\varepsilon^{\mu\nu}$, se $J_{\mu\nu}^\alpha$ tivesse um termo simétrico a multiplicação iria elimina-lo. Então é razoável tratar $J_{\mu\nu}^\alpha$ como anti-simétrico. Isso implica que:

$$\varepsilon^{\mu\nu} J_{\mu\nu}^\alpha = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu} (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\alpha - \mathcal{P}_\mu^\alpha X_\nu) \quad (3.180)$$

O termo que está entre parêntesis tem dimensão de corrente, então vamos tratar como outra corrente conservada e chamá-la de $\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha$. Essa nova corrente conservada também é anti-simétrica e vamos ver que a carga associada a essa corrente também tem que ser anti-simétrica. Embora não seja nosso foco, podemos demontar que a densidade de carga conservada associada a uma corrente conservada é o termo $\alpha = 0$ da corrente, ou sendo mais geral ainda, são os termos temporais que aqui podemos chamar de τ . Portanto, a carga conservada associada a essa corrente conservada é a integral do termo temporal da corrente em todo o espaço. Sendo ainda mais direto, a carga conservada $M_{\mu\nu}$ é:

$$M_{\mu\nu} = \int_0^{\sigma_1} \mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau d\sigma = \int_0^{\sigma_1} (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\tau - \mathcal{P}_\mu^\tau X_\nu) d\sigma \quad (3.181)$$

Essa carga conservada é o momento angular e agora vamos argumentar o porquê. Vamos considerar essa mesma carga conservada com índices M_{ij} , sendo índices espaciais. Se fixarmos o primeiro índice em zero, M_{0i} , temos as cargas conservadas associadas aos três impulsos básicos no espaço. Isto é, x , y e z . Agora quando $i \neq j$, temos três cargas associadas as três rotações básicas no espaço, Isto é, xy , yz e xz . Deste modo, M_{ij} mede o momento angular L_i no formato que já é conhecido: $L_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} M_{jk}$.

3.8.2 Definição do Parâmetro de Inclinação α'

Embora pareça desconexo, foi necessário desenvolver o momento angular antes de definirmos o parâmetro α' , uma vez que o momento angular está diretamente ligado a definição desse parâmetro. Portanto, se considerarmos uma corda aberta em rotação rígida, α' é a constante

de proporcionalidade que relaciona o quadrado da energia com o momento angular em unidades de \hbar . Em outras palavras:

$$\frac{|M_{ij}|}{\hbar} = \alpha' E^2 \quad (3.182)$$

Sabendo que \hbar tem dimensão de momento angular, então α' tem a dimensão do inverso do quadrado da energia. Vamos imaginar agora uma corda aberta reta, girando rigidamente no plano (x,y). O momento angular é $|M_{12}|$. Portanto, temos que:

$$M_{12} = \int_0^{\sigma_1} (X_1 \mathcal{P}_2^\tau - \mathcal{P}_1^\tau X_2) d\sigma \quad (3.183)$$

Para prosseguir, precisamos das funções $\vec{X}(\tau, \sigma)$ e \mathcal{P}^τ . Para nossa sorte, já calculamos essas funções! Vamos primeiro aplicar (3.163) na primeira equação de (3.131).

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{T_0}{c^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\sigma_1}{\pi} \cos \left[\frac{\pi \sigma}{\sigma_1} \right] \left(\cos \left[\frac{\pi c t}{\sigma_1} \right], \sin \left[\frac{\pi c t}{\sigma_1} \right] \right) \right] \quad (3.184)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{T_0}{c} \cos \left(\frac{\pi \sigma}{\sigma_1} \right) \left(-\sin \left[\frac{\pi c t}{\sigma_1} \right], \cos \left[\frac{\pi c t}{\sigma_1} \right] \right) \quad (3.185)$$

Agora podemos separar todos os termos que entram em (3.183).

$$\begin{cases} X_1 = \frac{\sigma_1}{\pi} \cos \left(\frac{\pi \sigma}{\sigma_1} \right) \cos \left(\frac{\pi c t}{\sigma_1} \right) & X_2 = \frac{\sigma_1}{\pi} \cos \left(\frac{\pi \sigma}{\sigma_1} \right) \sin \left(\frac{\pi c t}{\sigma_1} \right) \\ \mathcal{P}_1^\tau = -\frac{T_0}{c} \cos \left(\frac{\pi \sigma}{\sigma_1} \right) \sin \left(\frac{\pi c t}{\sigma_1} \right) & \mathcal{P}_2^\tau = \frac{T_0}{c} \cos \left(\frac{\pi \sigma}{\sigma_1} \right) \cos \left(\frac{\pi c t}{\sigma_1} \right) \end{cases} \quad (3.186)$$

Prosseguindo com o cálculo do momento angular:

$$M_{12} = \int_0^{\sigma_1} \left(\frac{\sigma_1 T_0}{\pi c} \cos^2 \left(\frac{\pi \sigma}{\sigma_1} \right) \cos^2 \left(\frac{\pi c t}{\sigma_1} \right) + \frac{\sigma_1 T_0}{\pi c} \cos^2 \left(\frac{\pi \sigma}{\sigma_1} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi c t}{\sigma_1} \right) \right) d\sigma \quad (3.187)$$

$$M_{12} = \int_0^{\sigma_1} \frac{\sigma_1 T_0}{\pi c} \cos^2 \left(\frac{\pi \sigma}{\sigma_1} \right) \left(\cos^2 \left(\frac{\pi c t}{\sigma_1} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi c t}{\sigma_1} \right) \right) d\sigma \quad (3.188)$$

$$M_{12} = \frac{\sigma_1 T_0}{\pi c} \int_0^{\sigma_1} \cos^2 \left(\frac{\pi \sigma}{\sigma_1} \right) d\sigma \quad (3.189)$$

$$M_{12} = \frac{\sigma_1^2 T_0}{2\pi c} \quad (3.190)$$

Tendo em mãos o momento angular dessa corda, podemos calcular o parâmetro α' pela definição (3.182). Vamos lembrar também que $\sigma_1 = \frac{E}{T_0}$. Portanto, juntando tudo, ficamos com:

$$\alpha' = \frac{1}{2\hbar\pi c T_0} \quad (3.191)$$

Desta forma, esse é o parâmetro α' em sua essência. Podemos usá-lo para escrever a tensão da corda T_0 .

$$T_0 = \frac{1}{2\hbar\pi c \alpha'} \quad (3.192)$$

Como a tensão T_0 aparece na expressão da ação de Nambu-Goto da corda relativística (3.36), podemos escrever a ação com o parâmetro α' que, até então, era um parâmetro mensurável experimentalmente. Desta forma, a ação fica escrita como:

$$S = -\frac{1}{2\hbar\pi c^2 \alpha'} \int_{t_i}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad (3.193)$$

Podemos concluir este capítulo aqui, pois o nosso próximo passo será encontrar soluções ainda mais gerais para a corda relativística. Veremos no capítulo seguinte a necessidade de adotar um novo sistema de coordenadas para descrever a nossa teoria. Esse novo sistema será mantido quando passarmos a quantizar a corda.

4 CORDAS RELATIVÍSTICAS NO CONE DE LUZ

Nesta seção, vamos desenvolver uma função que descreve o movimento ainda mais geral da corda relativística. Entretanto, nas coordenadas do espaço-tempo de Minkowski. O problema de usar esse sistema de coordenadas é que ele nos entrega tanto resultados físicos quanto resultados não físicos. Para isso é necessário adotarmos o sistema de coordenadas do cone de luz, que limita os resultados para somente os resultados físicos.

4.1 Cordas no Sistema de Coordenadas de Minkowski

No capítulo anterior, já estávamos trabalhando com o sistema de coordenadas de Minkowski, mas neste capítulo vamos obter uma expressão ainda mais geral para descrever o movimento da corda relativística. Veremos a seguir um novo calibre que vai nos ajudar a construir essa generalização.

4.1.1 Calibre Mais Geral

Anteriormente havíamos usado um calibre estático que fixava linhas de τ constante na folha de mundo. Neste novo calibre que vamos trabalhar, τ é uma combinação linear das coordenadas da corda. Nesse caso podemos escrever:

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda \tau \quad (4.1)$$

Note que ao tomarmos $n_\mu = (1, 0, 0, \dots, 0)$ e $\lambda = c$, voltamos para o calibre estático. Então só aqui já vemos que o nosso calibre é bem razoável para uma generalização. Para um mesmo τ , se X_1^μ e X_2^μ , como coordenadas do espaço-tempo, satisfazem a relação, então:

$$n_\mu (X_1^\mu - X_2^\mu) = 0 \quad (4.2)$$

Isso implica que qualquer vetor que une dois pontos no espaço-tempo, é ortogonal ao vetor n_μ . Nessa construção que estamos tomando, será importante que a corda não seja semelhante ao tempo. Ela tem que ser semelhante ao espaço, como em um intervalo ΔX^μ . Esse intervalo não pode ter componente temporal e resolvemos isso tomando um n_μ exclusivamente temporal. Assim tiramos a exclusividade de τ e σ ter dimensão espaço-temporal. A partir de agora, τ e σ são adimensionais. Sendo assim, temos a estrutura do nosso calibre, então agora

vamos mexer nele. Primeiro vamos mudar a constante λ para uma nova constante com $\tilde{\lambda}$ sendo o fator de ajuste. Assim temos:

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \tilde{\lambda} (n \cdot p) \tau \quad (4.3)$$

Nessa equação a escala de n não importa. Então $n \cdot X$ vai ter unidade de comprimento e $n \cdot p$ vai ter unidade de momento. Resta saber qual é a unidade de $\tilde{\lambda}$. Fazendo uma análise dimensional na própria equação (4.3), lembrando que τ agora é adimensional, nós concluímos que $\tilde{\lambda}$ precisa ter unidade de velocidade sobre força. A velocidade e força canônica que carrega a invariância de Lorentz, no nosso estudo, é c e T_0 . Vamos lembrar também que redefinimos T_0 em (3.192). Aqui ainda farei mais um adendo, de agora em diante vamos trabalhar com o sistema de unidades naturais. Em geral, tomaremos $c = 1$ e $\hbar = 1$. Deste modo, temos:

$$\tilde{\lambda} \propto 2\pi\alpha' \quad (4.4)$$

Dentro da nossa construção do calibre, vamos fixar $\tilde{\lambda} = 2\alpha'$ exclusivamente para o caso de cordas abertas. Vamos fixar também $\tilde{\lambda} = \alpha'$ exclusivamente para o caso de cordas fechadas. Assim ficamos com:

$$\begin{cases} n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = 2\alpha' (n \cdot p) \tau \longrightarrow \text{Cordas Abertas} \\ n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \alpha' (n \cdot p) \tau \longrightarrow \text{Cordas Fechadas} \end{cases} \quad (4.5)$$

Agora trabalharemos em um calibre para o momento. Faremos a mesma construção que foi para o caso da posição. No caso do momento, temos:

$$n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma) = n \cdot \mathcal{P}^\tau(\tau, \sigma) \quad (4.6)$$

Além disso, vamos exigir que $\sigma \in [0, \pi]$ para todas as cordas abertas e $\sigma \in [0, 2\pi]$ para todas as cordas fechadas. Vamos considerar também duas parametrizações, sendo elas σ e $\tilde{\sigma}$, pois queremos escolher um parâmetro tal que $n \cdot \mathcal{P}^\tau(\tau, \sigma)$ não dependa de σ . Neste caso, segue que:

$$n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma) = a(\sigma) n \cdot \mathcal{P}^\tau(\tau, \tilde{\sigma}) \quad (4.7)$$

Podemos ir mais além e forçar o valor desse novo parâmetro $\tilde{\sigma}$, de modo que faça $a(\sigma)$ forçar o lado direito a dar algo que dependa somente de τ . Isso parte de ajustarmos a escala de σ também, para cordas abertas e fechadas. Neste caso, teríamos que:

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau(\tau, \sigma) = a(\tau) \quad (4.8)$$

Onde $a(\tau)$ é uma função que só depende de τ . Agora vamos voltar lá trás e comparar duas expressões. Primeiro, observe a estrutura da expressão (3.108) e note que \mathcal{P}^τ pode ser facilmente jogado dentro de (3.104) e fazendo algumas manipulações, nós podemos escrever uma expressão para o momento total.

$$p = \int \mathcal{P}^\tau d\sigma \quad (4.9)$$

Então agora vamos integrar a equação (4.8) e já considerar os limites de integração respectivos para cordas abertas e fechadas.

$$\begin{cases} n \int_0^\pi \mathcal{P}^\tau d\sigma = a(\tau) \int_0^\pi d\sigma \longrightarrow n \cdot p = \pi a(\tau) \longrightarrow \text{Cordas Abertas} \\ n \int_0^{2\pi} \mathcal{P}^\tau d\sigma = a(\tau) \int_0^{2\pi} d\sigma \longrightarrow n \cdot p = 2\pi a(\tau) \longrightarrow \text{Cordas Fechadas} \end{cases} \quad (4.10)$$

Com essa passagem nos vemos que $a(\tau) = \frac{n \cdot p}{\pi}$ para cordas abertas e $a(\tau) = \frac{n \cdot p}{2\pi}$ para cordas fechadas. Então voltando em (4.8) nós temos que:

$$\begin{cases} n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{n \cdot p}{\pi} \longrightarrow \text{Cordas Abertas} \\ n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{n \cdot p}{2\pi} \longrightarrow \text{Cordas Fechadas} \end{cases} \quad (4.11)$$

Note que $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ é constante, isso vai nos permitir descobrir quem é $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$. Vamos reescrever a segunda equação em (3.40) só que multiplicando por n .

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = -\frac{T_0}{c} \cdot \frac{(\dot{X} \cdot X') \cdot \partial_\tau[n \cdot X] - (\dot{X})^2 \cdot \partial_\sigma[n \cdot X]}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \quad (4.12)$$

Em (4.5) podemos ver que tanto para as cordas abertas, quanto para as cordas fechadas, $n \cdot X$ só depende de τ . Isso implica que podemos zerar o último termo que deriva em σ . Logo, ficamos com:

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = -\frac{T_0}{c} \cdot \frac{(\dot{X} \cdot X') \cdot \partial_\tau[n \cdot X]}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}} \quad (4.13)$$

Lembra que $X' \cdot \dot{X} = 0$? Nós usamos essa condição para criar a condição compactada de parametrização (3.130). Pois então vamos usa-la denovo aqui, para no fim chegarmos em:

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0 \quad (4.14)$$

Essa relação vai valer tanto para cordas fechadas, quanto para cordas abertas. Deste modo, terminamos de construir nossos calibres. Vamos juntar (4.5) e (4.11) com um valor β que vai diferenciar as cordas abertas das cordas fechadas.

$$\begin{cases} n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta \alpha' (n \cdot p) \tau \\ n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{\beta (n \cdot p)}{2\pi} \end{cases} \quad (4.15)$$

Assim ficamos com $\beta = 2$ para cordas abertas e $\beta = 1$ para cordas fechadas.

4.1.2 Equação de Onda no Espaço de Minkowski

Nosso objetivo agora é usar os calibres que obtemos para chegar a uma nova equação de onda com soluções ainda mais gerais para a corda relativística. Então primeiro vamos investigar as condições que podemos extrair dos calibres. Vamos retornar à primeira equação em (3.40) e já considerar que $X' \cdot \dot{X} = 0$ e o sistema de unidades naturais.

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = T_0 \cdot \frac{(X')^2 \cdot \dot{X}}{\sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2}} = \frac{1}{2\pi \alpha'} \cdot \frac{(X')^2 \cdot \dot{X}}{\sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2}} \quad (4.16)$$

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{1}{2\pi \alpha'} \cdot \frac{(X')^2 \cdot \partial_\tau [n \cdot X(\tau, \sigma)]}{\sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2}} \quad (4.17)$$

$$\frac{\beta (n \cdot p)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi \alpha'} \cdot \frac{(X')^2 \cdot \beta \alpha' (n \cdot p)}{\sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2}} \quad (4.18)$$

$$\frac{(X')^2}{\sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2}} = 1 \quad (4.19)$$

Por essa expressão (4.19), podemos fazer uma manipulação matemática, considerando que $X'^2 \neq 0$, chegamos a seguinte equação de restrição:

$$X'^2 + \dot{X}^2 = 0 \quad (4.20)$$

Usando o mesmo truque matemático que foi usado em (3.130), nossas equações de restrição são compactadas em uma única equação:

$$(X' \pm \dot{X})^2 = 0 \quad (4.21)$$

Veja agora que a condição (4.20) implica que $X'^2 = -\dot{X}^2$ e $\dot{X}^2 = -X'^2$. Essas relações são cruciais para sumir com o menos dentro da raiz em (4.16). Então vamos continuar com os cálculos.

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi \alpha'} \cdot \frac{(X')^2 \cdot \dot{X}^\mu}{\sqrt{-((-X'^2)(X')^2)}} = \frac{\dot{X}^\mu}{2\pi \alpha'} \quad (4.22)$$

Vamos fazer as mesmas considerações para $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$.

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = T_0 \cdot \frac{(\dot{X})^2 \cdot X'^{\mu}}{\sqrt{-(\dot{X})^2 (X')^2}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \cdot \frac{(\dot{X})^2 \cdot X'^{\mu}}{\sqrt{(\dot{X})^2 (X')^2}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \cdot \frac{(\dot{X})^2 \cdot X'^{\mu}}{(X')^2} \quad (4.23)$$

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \cdot \frac{(\dot{X})^2 \cdot X'^{\mu}}{(-\dot{X}^2)} = -\frac{X'^{\mu}}{2\pi\alpha'} \quad (4.24)$$

Substituindo (4.22) e (4.24) em (3.47), nós chegamos a uma equação de onda!

$$\ddot{X}^{\mu} - X''^{\mu} = 0 \quad (4.25)$$

Na subseção a seguir, nós trabalharemos em soluções para essa equação de onda.

4.1.3 Soluções para a Equação de Onda no Espaço de Minkowski

Iniciando nossa análise, vamos considerar que existe uma D-Brana preenchendo todo o espaço, apenas para já introduzir a ideia das branas no nosso estudo. Sabemos que o $X^{\mu}(\tau, \sigma)$ mais geral que resolve a equação de onda é dado por:

$$X^{\mu}(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^{\mu}(\tau + \sigma) + g^{\mu}(\tau - \sigma)) \quad (4.26)$$

Considerando que as extremidades da corda estão em $\sigma = 0$ e $\sigma = \pi$. Nas condições de contorno de Neumann, temos que:

$$\frac{\partial X^{\mu}(\tau, 0)}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} (f'^{\mu}(\tau) - g'^{\mu}(\tau)) = 0 \quad (4.27)$$

As derivadas coincidem, então para isso dar zero, g^{μ} é igual a f^{μ} a menos de uma constante c^{μ} .

$$g^{\mu} = f^{\mu} + c^{\mu} \quad (4.28)$$

Retornando para a função de onda.

$$X^{\mu}(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^{\mu}(\tau + \sigma) + f^{\mu}(\tau - \sigma) + c^{\mu}) \quad (4.29)$$

Perceba que se f^{μ} é uma função arbitrária, c^{μ} pode ser definido dentro de $f^{\mu}(\tau + \sigma) + f^{\mu}(\tau - \sigma)$. Deste modo, ficamos com uma função até que previsível, após absorver a constante.

$$X^{\mu}(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^{\mu}(\tau + \sigma) + f^{\mu}(\tau - \sigma)) \quad (4.30)$$

Agora veremos a outra condição de contorno de Neumann, onde $\sigma = \pi$.

$$\frac{\partial X^\mu(\tau, \pi)}{\partial \sigma} = \frac{1}{2} (f'^\mu(\tau + \pi) - f'^\mu(\tau - \pi)) = 0 \quad (4.31)$$

Note que $f'^\mu(\tau + \pi) = f'^\mu(\tau - \pi)$. Se essa relação é verdade, f'^μ é periódico com período de 2π . Existe uma série de Fourier geral para funções periódicas. Já vou escrevê-la direto considerando a derivada, pois a periodicidade está na derivada da função $f^\mu(\tau \pm \sigma)$.

$$\boxed{f'^\mu(u) = f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^\mu \cos(nu) + b_n^\mu \sin(nu))} \quad (4.32)$$

Neste caso, u é um parâmetro arbitrário. Agora vamos integrar toda essa expressão.

$$f^\mu(u) = f_0^\mu + f_1^\mu u + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos(nu) + B_n^\mu \sin(nu)) \quad (4.33)$$

Daqui segue que f_0^μ é a constante de integração, A_n^μ e B_n^μ são as novas constantes da integração do seno e do cosseno. Faremos agora a passagem $f^\mu \rightarrow f^\mu(\tau \pm \sigma)$.

$$f^\mu(\tau \pm \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu [\tau \pm \sigma] + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos(n\tau \pm n\sigma) + B_n^\mu \sin(n\tau \pm n\sigma)) \quad (4.34)$$

Com as funções f^μ em mãos, podemos colocá-las na função $X^\mu(\tau, \sigma)$ em (4.30). Já vou abrir direto as somas de senos e cossenos e juntar os somatórios.

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} \left(f_0^\mu + f_0^\mu + f_1^\mu \tau + f_1^\mu \tau + f_1^\mu \sigma - f_1^\mu \sigma + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n^\mu \cos(n\tau) \cos(n\sigma) \right. \right. \\ \left. \left. - A_n^\mu \sin(n\tau) \sin(n\sigma) + B_n^\mu \sin(n\tau) \cos(n\sigma) + B_n^\mu \sin(n\sigma) \cos(n\tau) \right. \right. \\ \left. \left. + A_n^\mu \cos(n\tau) \cos(n\sigma) + A_n^\mu \sin(n\tau) \sin(n\sigma) + B_n^\mu \sin(n\tau) \cos(n\sigma) \right. \right. \\ \left. \left. - B_n^\mu \sin(n\sigma) \cos(n\tau) \right] \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} \left(2f_0^\mu + 2f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \left[2A_n^\mu \cos(n\tau) \cos(n\sigma) + 2B_n^\mu \sin(n\tau) \cos(n\sigma) \right] \right) \quad (4.36)$$

$$X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau)] \cos(n\sigma) \quad (4.37)$$

Faremos mais algumas manipulações, desta vez envolvendo as constantes A_n^μ e B_n^μ . Para facilitar, vamos chamar o termo que está entre chaves dentro do somatório de $\eta(\tau)$ e agora

trabalharemos somente neste termo. Depois de ajustarmos da nossa forma, retornaremos o $\eta(\tau)$ para dentro do somatório.

$$\eta(\tau) \equiv A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau) = A_n^\mu \left(\frac{e^{in\tau} + e^{-in\tau}}{2} \right) + B_n^\mu \left(\frac{e^{in\tau} - e^{-in\tau}}{2i} \right) \quad (4.38)$$

$$\eta(\tau) = -\frac{i}{2} (iA_n^\mu e^{in\tau} + iA_n^\mu e^{-in\tau} + B_n^\mu e^{in\tau} - B_n^\mu e^{-in\tau}) \quad (4.39)$$

$$\eta(\tau) = -\frac{i}{2} ([B_n^\mu + iA_n^\mu] e^{in\tau} - [B_n^\mu - iA_n^\mu] e^{-in\tau}) \quad (4.40)$$

Note que podemos definir duas constantes complexas a partir das constantes A_n^μ e B_n^μ . Nossas constantes serão $a_n^\mu \equiv B_n^\mu - iA_n^\mu$ e $a_n^{*\mu} \equiv B_n^\mu + iA_n^\mu$. O que vale o destaque é que dessas novas constantes que criamos, uma é conjugada da outra.

$$\eta(\tau) = -\frac{i}{2} (a_n^{*\mu} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \quad (4.41)$$

Essa configuração nos permite escolher constantes reais sem tirar a generalização! O ajuste fica em função das constantes complexas e seus conjugados. Portanto, vamos ajustar as constantes reais dessa expressão.

$$\eta(\tau) = -\frac{i\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}} (a_n^{*\mu} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \quad (4.42)$$

Sabemos que $\eta(\tau)$ vai entrar no somatório em (4.37), mas por agora vamos deixar esse resultado guardado. Existem outros termos que ainda podemos manipular. Vamos começar abrindo a densidade de momento $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ (4.22).

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\partial}{\partial\tau} \left[f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \eta(\tau) \cos(n\sigma) \right] \quad (4.43)$$

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{f_1^\mu}{2\pi\alpha'} + \frac{1}{2\pi\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\eta(\tau)}{d\tau} \cos(n\sigma) \quad (4.44)$$

Essa é a densidade de momento, se integrarmos em todo o espaço, obtemos o momento total P^μ da corda.

$$P^\mu = \frac{f_1^\mu}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma + \frac{1}{2\pi\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\eta(\tau)}{d\tau} \int_0^\pi \cos(n\sigma) d\sigma \quad (4.45)$$

Note que a segunda integral zera todo o segundo termo e a primeira integral dá π . Se isolarmos f_1^μ , ficamos com:

$$f_1^\mu = 2\alpha' P^\mu \quad (4.46)$$

Deste modo, agora falta renomear f_0^μ para ficar um pouco mais intuitivo.

$$f_0^\mu \equiv X_0^\mu \quad (4.47)$$

Vamos colocar (4.47), (4.46) e (4.42) na função de movimento $X^\mu(\tau, \sigma)$ em (4.37).

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_0^\mu + 2\alpha' P^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{*\mu} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \frac{\cos(n\sigma)}{\sqrt{n}} \quad (4.48)$$

Essa já é a função de movimento mais geral para a corda relativística no espaço de Minkowski. Lembrando que usamos a condição de contorno de Neumann, então essa solução é geral para essa condição. Podemos ainda tomar mais algumas definições!

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0^\mu \equiv \sqrt{2\alpha'} P^\mu \\ \alpha_n^\mu \equiv a_n^\mu \sqrt{n} \\ \alpha_{-n}^\mu \equiv \alpha_n^{*\mu} = a_n^{*\mu} \sqrt{n} \end{array} \right. \quad (4.49)$$

Vamos por todas essas definições na nossa função de movimento.

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^\mu e^{in\tau} - \alpha_n^\mu e^{-in\tau}) \frac{\cos(n\sigma)}{n} \quad (4.50)$$

Esse somatório pode ser simplificado, porque ele é simétrico. Dá para escrevê-lo como uma soma onde n assume todos os números inteiros diferentes de zero.

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \frac{\cos(n\sigma)}{n} \quad (4.51)$$

Agora sim temos de forma explícita a solução geral da equação de onda na condição de contorno de Neumann. Note que pela nossa definição, é como se o termo $n = 0$ do somatório já estivesse do lado de fora em α_0^μ . Isso não é por acaso! Por agora, vamos ver como são as derivadas desse X^μ que obtemos.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}^\mu = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \\ X'^\mu = -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \sin(n\sigma) \end{array} \right. \quad (4.52)$$

Deixando essas expressões ainda mais elegantes, temos:

$$\begin{cases} \dot{X}^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \\ X'^\mu = -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \sin(n\sigma) \end{cases} \quad (4.53)$$

Chegamos ao resultado que queríamos, porque pela equação de restrição (4.21), é conveniente sabermos quem é $X' \pm \dot{X}$. Vamos calcular quem é esse personagem agora e assim vamos ter todo o acervo matemático necessário para começar a trabalhar a teoria de cordas nas coordenadas do cone de luz.

$$\dot{X} \pm X' = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} (\cos(n\sigma) \mp i \sin(n\sigma)) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} e^{\mp in\sigma} \quad (4.54)$$

$$\dot{X} \pm X' = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (4.55)$$

Com (4.55) em mãos, temos as soluções para a equação de onda. Por agora, o desenvolvimento no espaço de Minkowski para por aqui, porque já extraímos tudo que era interessante extrair. De agora em diante vamos trabalhar no sistema de coordenadas do cone de luz, que será o sistema em que efetivamente vamos estruturar toda a teoria de cordas.

4.2 Cordas no Sistema de Coordenadas do Cone de Luz

A expressão que calculamos para X^μ em (4.51) já é uma função de movimento geral para a corda relativística na condição de contorno de Neumann. Entretanto, ela reúne todos os resultados físicos e também nos dá resultados não físicos. Ter algo assim na nossa teoria é problemático, por isso precisamos limitar os resultados para somente os resultados físicos. Portanto, é exatamente aqui que entra o sistema de coordenadas do cone de luz. Escrevendo nossa teoria nesse sistema de coordenadas, extraímos somente os resultados físicos na nossa solução geral. Então em primeira análise, vamos entender o que é esse novo sistema de coordenadas.

4.2.1 Sistema de Coordenadas do Cone de Luz

O sistema de coordenadas do cone de luz, vai entrar com duas coordenadas novas, que são escritas em função de duas coordenadas do espaço de Minkowski, isto é, a coordenada temporal e uma das coordenadas espaciais. Podemos chamar as coordenadas originais do espaço de Minkowski de X^0 e X^1 e as novas coordenadas do sistema do cone de luz de X^+ e X^- . Portanto, por definição elas são escritas como:

$$\begin{cases} X^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 + X^1) \\ X^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(X^0 - X^1) \end{cases} \quad (4.56)$$

Por essas definições, podemos construir a métrica do cone de luz. Com base na métrica de Minkowski que já conhecemos (3.50), é notável que a nossa nova métrica em vez de ter componetes na diagonal principal na primeira e segunda linha, terá componentes fora da diagonal nessas linhas, que são os termos cruzados. Dá para ir além considerando que dois termos da métrica são idênticos, quando $dX^+ dX^- = dX^- dX^+$. Na construção do intervalo $-ds^2$, a componente que vai entrar no lugar de $(dX^0)^2$ e $(dX^1)^2$ será $-2dX^+ dX^-$. Assim ficamos explicitamente com:

$$-ds^2 = -2dX^+ dX^- + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 + \dots + (dX^d)^2 \quad (4.57)$$

Podemos definir com precisão a nossa métrica do cone de luz, pois ela deve satisfazer a relação (3.51). Chamaremos essa métrica de $\hat{\eta}$ e notavelmente ela deve respeitar:

- $\hat{\eta}_{+-} = \hat{\eta}_{-+} = -1$
- $\hat{\eta}_{++} = \hat{\eta}_{--} = \hat{\eta}_{+i} = \hat{\eta}_{i+} = \hat{\eta}_{-i} = \hat{\eta}_{i-} = 0$
- $\hat{\eta}_{ij} = 1$

Onde i e j são as demais coordenadas espaciais. Vamos escrever a matriz explicitamente.

$$\hat{\eta}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Indo mais além, pela definição de produto escalar (3.52), observamos as propriedades $a_+ = -a^-$ e $a_- = -a^+$. Veremos a seguir que as mesmas definições vão valer para o momento no cone de luz.

4.2.2 Energia do Cone de Luz

Antes de falarmos da energia do cone de luz, vamos fazer a mesma construção para o momento no cone de luz, de forma análoga a que foi feita com as coordenadas.

$$\begin{cases} p^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 + p^1) = -p^- \\ p^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 - p^1) = -p^+ \end{cases} \quad (4.59)$$

Agora vamos interpretar cada informação que temos até o momento.

- X^+ é o tempo do cone de luz.
- X^- é o espaço do cone de luz.
- p^\pm é a energia do cone de luz.

Embora não tenhamos demonstrado a energia, vamos encontrar uma relação para a energia do cone de luz E_{lc} , associada ao momento. Saindo um pouco da teoria de cordas, usaremos a função de onda de uma partícula pontual com energia E e momento \vec{p} como base. Uma função que satisfaz a equação de Schrödinger, na mecânica quântica é dada por:

$$\psi(t, \vec{X}) = e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p} \cdot \vec{X})} = e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{E}{c}ct - \vec{p} \cdot \vec{X}\right)} = e^{\frac{i}{\hbar}(p_0 X^0 + \vec{p} \cdot \vec{X})} = e^{\frac{i}{\hbar}(p_\mu X^\mu)} \quad (4.60)$$

Passaremos para o sistema do cone de luz.

$$\psi(t, \vec{X}) = e^{\frac{i}{\hbar}(p_+ X^+ + p_- X^- + p_2 X^2 + \dots + p_d X^d)} \quad (4.61)$$

Na mecânica quântica, o operador hamiltoniano \hat{H} , responsável por extrair o auto valor da energia do sistema, é definido como $\hat{H} \psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = E \psi$. Passando para a coordenada X^0 do espaço de Minkowski, temos uma situação parecida. $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial X^0} = \frac{E}{c} \psi$. Portanto, assumindo que X^+ é o tempo do cone de luz, passando para as coordenadas do cone de luz, devemos ter uma relação do tipo: $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial X^+} = \frac{E_{lc}}{c} \psi$. Temos algo interessante aqui! Vamos aplicar essa última condição na função de onda (4.61).

$$-p_+ = \frac{E_{lc}}{c} = p^- \quad (4.62)$$

Ou melhor ainda, no sistema de unidades naturais, onde $c = 1$, ficamos com:

$$p^- = E_{lc} \quad (4.63)$$

Deste modo demosntramos que p^- é a própria energia do cone de luz. Assim terminamos toda a introdução ao formalismo do cone de luz. Adiante vamos trabalhar toda a teoria de cordas escrita neste formalismo.

4.2.3 Cordas Relativísticas no Cone de Luz

Voltaremos a trabalhar com as cordas, só que agora vamos passar todo o nosso estudo para o formalismo do cone de luz. Primeiro devemos definir o vetor $n^\mu \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right)$, de modo que nos é garantida duas relações importantes.

$$\begin{cases} n \cdot X = X^+ \\ n \cdot p = p^+ \end{cases} \quad (4.64)$$

Podemos jogá-las nos calibres que desenvolvemos em (4.15). Definindo também $\mathcal{P}^{\tau+} = n \cdot \mathcal{P}^\tau$ e fazendo algumas manipulações, nosso calibre se transforma em:

$$\begin{cases} X^+ = \beta \alpha' p^+ \tau \\ p^+ = \frac{2\pi}{\beta} \mathcal{P}^{\tau+} \end{cases} \quad (4.65)$$

Vamos definir também as coordenadas transversais como $X^I \equiv (X^2, X^3, \dots, X^d)$. Essas definições são para simplificar! Prosseguindo, vamos abrir a equação de restrição (4.21) nas coordenadas do cone de luz. Já vou separa nas respectivas componentes.

$$\begin{cases} \dot{X}^2 = -2\dot{X}^+ \dot{X}^- + (\dot{X}^I)^2 \\ X'^2 = -2X'^+ X'^- + (X'^I)^2 \\ \pm 2\dot{X} \cdot X' = 2(\mp \dot{X}^- \cdot X'^+ \mp \dot{X}^+ \cdot X'^- \pm \dot{X}^I \cdot X'^I) \end{cases} \quad (4.66)$$

Juntando tudo e igualando a zero, temos:

$$-2(\dot{X}^+ \dot{X}^- + X'^+ X'^- \pm \dot{X}^- \cdot X'^+ \pm \dot{X}^+ \cdot X'^-) + (\dot{X}^I)^2 + (X'^I)^2 \pm 2\dot{X}^I \cdot X'^I = 0 \quad (4.67)$$

$$-2(\dot{X}^+ \pm X'^+) (\dot{X}^- \pm X'^-) + (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 = 0 \quad (4.68)$$

Derivando X^+ em (4.65) nós temos que $\dot{X}^+ = \beta \alpha' p^+$ e $X'^+ = 0$. Então continuando a expressão:

$$-2\beta \alpha' p^+ (\dot{X}^- \pm X'^-) + (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 = 0 \quad (4.69)$$

$$(\dot{X}^- \pm X'^-) = \frac{1}{\beta \alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 \quad (4.70)$$

Escrevendo desta maneira estamos assumindo que $p^+ \neq 0$. Essa expressão está colocando tanto \dot{X}^- , quanto X'^- , em termos de X^I . Sabendo disso, podemos deduzir X^- em termos de uma única constante de integração. Vamos chamar essa constante de integração de X_0^- , porque assim, vamos ter os parâmetros livres da nossa teoria. A evolução completa da corda é determinada por $X^I(\tau, \sigma)$, p^+ e X_0^- . Vamos trabalhar em cima disso! Devemos escrever soluções gerais para X^- e X^I que ainda não estão bem determinadas. Mas antes vamos redefinir X^+ . Agora será importante lembrarmos da primeira relação em (4.49), pois isolando o momento total P^μ , ficamos com:

$$P^\mu = \frac{\alpha_0^\mu}{\sqrt{2\alpha'}} \quad (4.71)$$

Por essa expressão, tomando p^+ e substituindo na primeira equação em (4.65), nós vamos obter algo consistente para X^+ . Mas antes, vamos agora particularizar o nosso problema para o caso de cordas abertas, ou seja, quando $\beta = 2$, pois assim podemos comparar com a solução (4.51), que utiliza a condição de contorno de Neumann, assim se referindo as cordas abertas.

$$X^+ = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^+ \tau \quad (4.72)$$

Vamos comparar agora com a solução geral (4.51). Note que caímos em (4.65) se fixarmos $\alpha_0^+ = 1$, $X_0^+ = 0$ e $\alpha_n^+ = 0$. Deste modo, temos explicitamente que:

$$X^+ = \sqrt{2\alpha'} \tau \quad (4.73)$$

Abrindo agora as soluções gerais para X^I e X^- :

$$\begin{cases} X^I(\tau, \sigma) = X_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^I e^{-in\tau} \frac{\cos(n\sigma)}{n} \\ X^-(\tau, \sigma) = X_0^- + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^- e^{-in\tau} \frac{\cos(n\sigma)}{n} \end{cases} \quad (4.74)$$

E também:

$$\begin{cases} \dot{X}^I \pm X'^I = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \\ \dot{X}^- \pm X'^- = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} \end{cases} \quad (4.75)$$

Agora temos algo interessante, por conta da condição que alcançamos em (4.70). Vamos pegar as duas expressões em (4.75) e aplicar nessa condição.

$$\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} \left(\sqrt{2\alpha'} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I e^{-ip(\tau \pm \sigma)} \right)^2 \quad (4.76)$$

$$\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{2p^+} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_q^I e^{-i(p+q)(\tau \pm \sigma)} \quad (4.77)$$

Podemos definir $n \equiv p + q$, já que n está somando em todos os números inteiros, mudar a forma como chamamos n não faz diferença.

$$\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{2p^+} \sum_{n, p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (4.78)$$

$$\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{n, p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \quad (4.79)$$

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \quad (4.80)$$

Agora temos a solução completa! Com ela podemos trabalhar qualquer problema definindo p^+ , X_0^- , X_0^I e as constantes α_n^I . A seguir, vamos definir uma grandeza que será muito importante no estudo da teoria de cordas, lá na frente veremos que essa grandeza está associada a energia de uma corda.

4.2.4 Modo Transversal de Virasoro

Dada a expressão importantíssima que alcançamos em (4.79), aqui será necessário definirmos uma nova grandeza. Essa grandeza será chamada de *Modo Transversal de Virasoro* L_n^\perp . Definiremos como:

$$L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \quad (4.81)$$

Simplificamos a expressão (4.80).

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp \quad (4.82)$$

Tomando $n = 0$ e lembrando da primeira equação em (4.49), nós obtemos outro resultado que será muito importante.

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- = \frac{1}{p^+} L_0^\perp = 2\alpha' p^- \quad (4.83)$$

$$2p^+ p^- = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp \quad (4.84)$$

Vamos guardar bem esse resultado, porque ele vai voltar a aparecer em outros desenvolvimentos! Continuando, da expressão (4.83) podemos definir:

$$\alpha_n^- = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'} p^+} L_n^\perp \quad (4.85)$$

Com isso, podemos jogar esse α_n^- na segunda equação em (4.75).

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (4.86)$$

Também vimos que essa expressão equivale a (4.70) então vamos juntar todas as informações só para deixar bem destacado. Lembrando também que $\beta = 2$, como estamos trabalhando com cordas abertas.

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{4\alpha' p^+} (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 \quad (4.87)$$

Por agora vamos parar por aqui, mas retornaremos a esses cálculos lá na frente. Os modos transversais de Virasoro também são modos de expansão das coordenadas $X^-(\tau, \sigma)$. Isso é até que bem fácil de demonstrar, pois basta substituímos as constantes α_0^- (4.83) e α_n^- (4.85) na função geral X^- (4.74). Vamos obter:

$$X^-(\tau, \sigma) = X_0^- + \frac{1}{p^+} L_0^\perp \tau + \frac{i}{p^+} \sum_{n \neq 0} L_n^\perp e^{-in\tau} \frac{\cos(n\sigma)}{n} \quad (4.88)$$

Demonstramos explicitamente que os modos transversais de virassoro são os modos de expansão das coordenadas X^- . Após deixar isso bem evidente, nosso próximo passo será trabalhar outra grandeza importante que é o quadrado da massa M^2 da corda relativística.

4.2.5 Quadrado da Massa da Corda Relativística M^2

Essa grandeza será a virada de mesa da teoria quando falarmos de quantização, porque ela vai nos ajudar a interpretar os estados das partículas. Portanto, primeiro vamos partir da equação relativística da energia (3.56) e já modifica-la para o sistema de unidades naturais onde $c = 1$.

$$E^2 = \vec{P}^2 + M^2 \quad (4.89)$$

Além disso, a relação $M^2 = -P^2$ tem que ser verdadeira sempre que estivermos trabalhando com o quadrvetor momento.

$$M^2 = -P^2 = 2p^+p^- - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp - p^I p^I \quad (4.90)$$

Note que usamos o resultado (4.84). Pela definição de L_n^\perp em (4.81), tomando $n = 0$, ficamos com:

$$M^2 = \frac{1}{2\alpha'} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I - p^I p^I = \frac{1}{2\alpha'} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2\alpha'} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I - p^I p^I \quad (4.91)$$

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \alpha_p^{*I} \alpha_p^I \right) - p^I p^I \quad (4.92)$$

Também usamos a terceira equação em (4.49) nesse desenvolvimento. Note que o que está dentro do somatório é o módulo ao quadrado de α_p^I , que antes definimos ser uma constante complexa. Desta forma, todos os termos de índices positivos do somatório é exatamente igual a todos os termos de índices negativos, pois é simétrico. Então podemos escrever o somatório como sendo duas vezes ele próprio limitado de 1 até $+\infty$. Vamos também renomear o índice p para n .

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{*I} \alpha_n^I \right) - p^I p^I \quad (4.93)$$

Abrindo os α_0^I pela primeira expressão em (4.49), vemos que o primeiro termo vai cortar com o último termo e no fim, vai restar somente o somatório.

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{*I} \alpha_n^I \quad (4.94)$$

Então vamos agora alcançar a nossa expressão final, escrevendo tudo em função das constantes a_n^I , mais uma vez usando as definições em (4.49).

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{*I} a_n^I \quad (4.95)$$

Essa é a expressão final para o quadrado da massa da corda relativística! Mais para frente vamos ver que essa grandeza será quantizada e terá um papel fundamental na teoria. A mecânica quântica vai adicionar uma constante extra em M^2 , para as cordas abertas e fechadas, de moto que irá nos permitir encontrar estados que batam com as teorias físicas. Podemos então encerrar o estudo sobre as cordas relativísticas por aqui, porque já extraímos todas as informações

necessárias para compreendê-las. Também trabalhamos com sua descrição na métrica do cone de luz, que é a base dessa teoria física. Nosso próximo passo será quantizar a teoria, entretanto, antes de quantizarmos a corda, vamos compreender como é a quantização das partículas pontuais. Esse será o tema do próximo capítulo.

5 TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS E PARTÍCULAS PONTUAIS

A Teoria de Cordas é uma teoria que busca explicar as quatro forças fundamentais da Natureza. Para isso é necessário reformular a natureza das partículas elementares. Entretanto, precisamos entender como é a natureza dessas partículas no modelo de partículas pontuais, para então explicá-las no formalismo da teoria de cordas. Neste capítulo, nós vamos trabalhar exclusivamente com partículas pontuais e demonstrar como construímos o estado de duas partículas extremamente importantes, o *Estado de Fóton* e o *Estado de Gráviton*. Aqui vamos continuar usando a métrica do cone de luz e trabalhar com campos escalares, tais como vamos poder representar o campo eletromagnético e o campo gravitacional.

5.1 Teoria Clássica de Campos

Nosso ponto inicial para esse capítulo é entender o que é um campo escalar, pois ele será fundamental para trabalharmos a dinâmica de uma partícula. Portanto, o campo escalar $\phi(t, \vec{X})$ será uma única função real do espaço-tempo, sendo um campo invariante de Lorentz e um campo que não carrega índices de Lorentz. Veremos a seguir que o campo $\phi(t, \vec{X})$ está diretamente relacionado à densidade de energia das partículas que vamos trabalhar.

5.1.1 Densidades de Energia

Clássicamente falando, nós já sabemos que a energia cinética da partícula é proporcional ao quadrado da velocidade dessa partícula. Tratando uma física de campos escalares, a densidade de energia cinética \mathcal{T} é definida como sendo proporcional ao quadrado da taxa de variação do campo escalar com o tempo, de forma parecida que é definida a energia cinética que já conhecemos em (2.11).

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}(\partial_0 \phi)^2 \quad (5.1)$$

Para qualquer instante t , \mathcal{T} é uma função da posição, de modo que a energia cinética total é a integral de \mathcal{T} no espaço. Devemos definir também uma densidade de energia potencial \mathcal{V} , então vamos adotar uma densidade de energia potencial de ordem quadrática e que seja fácil de identificar o ponto de equilíbrio.

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (5.2)$$

Aqui devemos levantar uma questão, podemos montar uma densidade lagrangeana do tipo $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$? Já adiantando, a resposta é não, porque uma lagrangeana com essa estrutura não seria um escalar de Lorentz. Se a densidade de energia cinética varia no tempo, é razoável supor que custa energia fazer um campo variar no espaço. Então devemos escrever uma contribuição extra, onde variar no espaço é uma perda de energia.

$$\mathcal{V}' = \frac{1}{2}(\partial_i \phi)^2 \quad (5.3)$$

Temos assim nossa densidade lagrangeana.

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}' - \mathcal{V} = \frac{1}{2} \partial_0 \phi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial_i \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (5.4)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (5.5)$$

Tendo a densidade lagrangeana, podemos escrever a ação do campo escalar livre, de massa m . Lembrando que estamos considerando um espaço de $D = d + 1$ dimensões, onde d é o número de dimensões espaciais.

$$S = \int d^D x \left(-\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \quad (5.6)$$

Daremos um nome também para o momento conjugado do campo.

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi \quad (5.7)$$

Já vimos como é a estrutura de uma hamiltoniana em (3.105), então podemos identificar o momento $\vec{p} \rightarrow \Pi$ e a velocidade $\vec{v} \rightarrow \partial_0 \phi$. Entretanto, já vimos que o momento conjugado é a própria velocidade (5.7). Então torna-se imediato escrever a densidade hamiltoniana.

$$\mathcal{H} = \Pi^2 - \mathcal{L} \quad (5.8)$$

$$\mathcal{H} = \partial_0 \phi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} \partial_0 \phi \partial_0 \phi + \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial_i \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 = \frac{1}{2} \partial_0 \phi \partial_0 \phi + \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial_i \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (5.9)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\Pi^2 + \partial_i \phi \partial_i \phi + m^2 \phi^2) \quad (5.10)$$

Essa é a densidade hamiltoniana do campo escalar livre, de massa m . Vamos lembrar que a hamiltoniana é a energia total do sistema, então basta integrar a densidade hamiltoniana em todo o espaço.

$$E = \frac{1}{2} \int d^d x (\Pi^2 + \partial_i \phi \partial_i \phi + m^2 \phi^2) \quad (5.11)$$

Chegamos a energia total do campo escalar livre, de massa m . Nosso próximo passo é encontrar uma equação de movimento para o campo escalar, também conhecida como *Equação de Klein-Gordon*.

5.1.2 Equação de Klein-Gordon

Daqui em diante não tem mistério! Vamos chegar na equação de movimento da mesma forma que chegamos os casos anteriores, tomando a variação da ação $\delta S = 0$.

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^D x (-\eta^{\mu\nu} \delta(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi) - m^2 \delta(\phi \cdot \phi)) = 0 \quad (5.12)$$

$$\frac{1}{2} \int d^D x (-\eta^{\mu\nu} 2 \partial_\mu (\delta \phi) \partial_\nu \phi - m^2 2 \delta(\phi) \phi) = 0 \quad (5.13)$$

Podemos cortar as constantes! Perceba que o primeiro termo do argumento da integral pode ser simplificado por uma integração por partes. Já vou encurtar direto sem necessariamente abrir essa intergral, mas fazendo uma integração por partes no primeiro termo, ficamos com:

$$-\eta^{\mu\nu} [\partial_\nu \phi \delta(\phi)]_{lim} + \int d^D x (+\eta^{\mu\nu} \delta(\phi) \partial_\nu \partial_\mu \phi - m^2 \delta(\phi) \phi) = 0 \quad (5.14)$$

Nos limites de integração, o termo que escapa da integração por partes tem que ser zero, nele temos a variação do campo escalar e já vimos em cálculos anteriores que esse termo sempre zera nos limites da integração. Aqui não será diferente.

$$\int d^D x \delta(\phi) (\eta^{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\mu \phi - m^2 \phi) = 0 \quad (5.15)$$

Considerando que $\delta(\phi)$ não é zero, tudo que está entre parêntesis é zero! Vamos definir também $\partial^2 \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$. Temos então nossa equação de movimento.

$$(\partial^2 - m^2) \phi = 0 \quad (5.16)$$

Essa já é a equação de Klein-Gordon, uma das equações mais importantes da teoria de campos. Veremos então soluções para esta equação. Nela temos a base da descrição das partículas pontuais, como veremos mais adiante.

5.1.3 Soluções para Equação de Klein-Gordon no Cone de Luz

Pela subseção anterior, temos em mãos a equação de movimento do campo escalar. Basta escreve-la nas coordenadas do cone de luz, que é o sistema de coordenadas que vamos usar até o final deste estudo. Além do índice I que usamos para representar individualmente as coordenadas transversais, vamos usar um índice T para representar os vetores que reúnem todas as coordenadas transversais, por exemplo, $\vec{X}_T = (X^2, X^3, \dots, X^d)$. Neste caso, nossa equação fica como:

$$\left(-2 \frac{\partial}{\partial X^+} \frac{\partial}{\partial X^-} + \frac{\partial}{\partial X^I} \frac{\partial}{\partial X^I} - m^2 \right) \phi(X^+, X^-, \vec{X}_T) = 0 \quad (5.17)$$

Nosso campo escalar ainda não está bem representado, pois vamos fundamentar nossa teoria de uma forma melhor, no espaço dos momentos. Um artifício matemático que podemos usar para passar nossa função do espaço das posições para o espaço dos momentos é a *Transformada de Fourier*. Então faremos ela em um espaço com D dimensões.

$$\boxed{\phi(X) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p \phi(p) e^{i p \cdot X}} \quad (5.18)$$

Essa é a forma da transformada de Fourier em D dimensões. Vamos fazer ela para o campo nas coordenadas do cone de luz, entretanto, a coordenada X^+ não será transformada, pois ela tem uma interpretação interessante que nos é bem útil. Ela representa o tempo do cone de luz! Vamos transformar somente as outras coordenadas, isto é, a coordenada X^- vai está associada ao momento p^+ e as coordenadas transversais X^I vão estar associadas aos momentos transversais p^I . Como X^+ não será transformado, duas dimensões vão ficar comprometidas, pois X^0 e X^1 estão amarrados a essa coordenada. Embora o mesmo valha para X^- , que será transformado, vamos deixar evidente que para as coordenadas transversais faremos a transformação em $D - 2$ dimensões.

$$\phi(X^+, X^-, \vec{X}_T) = \frac{1}{2\pi} \int dp^+ \frac{1}{(2\pi)^{D-2}} \int d^{D-2} \vec{P}_T \phi(X^+, p^+, \vec{P}_T) e^{-i X^- \cdot p^+ + i \vec{X}_T \cdot \vec{P}_T} \quad (5.19)$$

Podemos aplicar esse campo na equação de Klein-Gordon (5.17). Já vou simplificar derivando diretamente a exponencial e a constante $\frac{1}{(2\pi)^{D-1}}$ pode sumir pela expressão estar igualada a zero, assim ficamos com:

$$\int dp^+ \int d^{D-2} \vec{P}_T e^{-i X^- \cdot p^+ + i \vec{X}_T \cdot \vec{P}_T} \left(2i p^+ \frac{\partial}{\partial X^+} - p^I p^I - m^2 \right) \phi(X^+, p^+, \vec{P}_T) = 0 \quad (5.20)$$

Para a integral ser zero, o próprio argumento da integral tem que ser zero e sabemos também que a exponencial não é zero. Portanto, ficamos com:

$$\left(2ip^+ \frac{\partial}{\partial X^+} - p^I p^I - m^2\right) \phi(X^+, p^+, \vec{P}_T) = 0 \quad (5.21)$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial X^+} - \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2)\right) \phi(X^+, p^+, \vec{P}_T) = 0 \quad (5.22)$$

Essa equação que obtemos é de primeira ordem no tempo do cone de luz e com uma estrutura formal semelhante a estrutura da *Equação de Schrödinger*. Podemos parametrizar X^+ em função de τ , nosso novo tempo, de modo que $X^+ \equiv \frac{p^+ \tau}{m^2}$.

$$\left(i \frac{m^2}{p^+} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2)\right) \frac{p^+}{m^2} \phi(\tau, p^+, \vec{P}_T) = 0 \quad (5.23)$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{2m^2} (p^I p^I + m^2)\right) \phi(\tau, p^+, \vec{P}_T) = 0 \quad (5.24)$$

Essa equação (5.24) será muito mais interessante de trabalharmos, como vamos ver logo adiante. Essa estrutura entre parêntesis é bem característica por um detalhe muito sutil. Pois então, vamos retornar a esse cálculo, agora isolando P^2 .

Sabemos que $P^2 = -m^2$, por (4.90) e que $P^2 = -2p^+ p^- + p^I p^I$ pela métrica do cone de luz. Se igualarmos ambos os resultados, ao isolar p^- , temos explicitamente que:

$$p^- = \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2) \quad (5.25)$$

Nossas expressões estão começando a ficar cada vez mais amarradas. Por agora não vamos dar um significado, vamos apenas guardar esses resultados, pois mais a frente trataremos com mais detalhes. O que é importante destacar é que (5.24) nos dá uma equação de movimento para o campo, bem semelhante a equação de Schrödinger, e ela foi obtida a partir da equação de Klein-Gordon nas coordenadas do cone de luz. Já a equação (5.25) é uma compactação do momento p^- escrito em função de p^+ e p^I que podemos por na equação de movimento. Mais para frente trataremos com mais detalhes. Agora vamos fazer a transição da *Teoria Clássica de Campos* para a *Teoria Quântica de Campos*.

5.2 Teoria Quântica de Campos

Na teoria quântica de campos, nós transformamos os campos clássicos em operadores de campo, ou seja, os campos são operadores. Isso não é surpresa, uma vez que na mecânica quântica nós tratamos as grandezas como operadores. Então essa é a maior mudança que vamos adotar.

5.2.1 Campo Quântico Representado por Operadores de Criação e Aniquilação

Nesta subseção, veremos em detalhes como a mecânica quântica aparece na teoria de campos, então primeiro vamos resolver um caso, até que razoável de desenvolver. Vamos tomar um campo clássico semelhante a solução de ondas planas $\phi(t, \vec{X}) = a e^{i(\vec{p} \cdot \vec{X} - Et)}$. Sabemos que esse campo aplicado na equação de Klein-Gordon nos entrega a equação relativística do quadrado da energia. Pois bem, se adicionarmos o conjugado neste nosso campo, ele aplicado a mesma equação se limita a dar somente soluções reais, isto é, $E \equiv E_p = +\sqrt{p^2 + m^2}$. Pois então, vamos adicionar um fator de normalização ao campo e no fim temos:

$$\phi_p(t, \vec{X}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a(t) e^{i\vec{p} \cdot \vec{X}} + a^*(t) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{X}} \right) \quad (5.26)$$

O campo é normalizado pelo fator de normalização que vem na frente, o que está entre parêntesis força nosso campo a dar soluções reais e as funções $a(t)$ e $a^*(t)$ são variáveis dinâmicas que determinam a configuração do nosso campo. Por isso, inclusive, a exponencial não carrega um termo temporal, a parte temporal já está contida nas variáveis dinâmicas. Note que construímos uma situação mais geral possível para a solução de ondas planas! Nessa construção, V é o volume do espaço. Vamos imaginar uma caixa de lados L_1, L_2, \dots, L_d , nosso volume tem que ser:

$$V = L_1 L_2 \cdots L_d \quad (5.27)$$

Se considerarmos que o campo é periódico nessa caixa, o que é razoável supor por ser uma onda, vamos exigir que:

$$p_i L_i = 2\pi n_i \quad (5.28)$$

Onde $i = 1, 2, \dots, d$ e $n_i \in \mathbb{Z}$. Note que acabamos de quantizar o momento! Dá para ir além, porque devido a condição de periodicidade, podemos afirmar a seguinte relação:

$$\int_0^{L_1} dX^1 \int_0^{L_2} dX^2 \cdots \int_0^{L_d} dX^d e^{\pm 2i\vec{p} \cdot \vec{X}} = 0 \quad (5.29)$$

Vamos guardar essa relação! Como temos o campo, nosso passo seguinte é aplica-lo na ação (5.6). Deste modo, temos:

$$S = \frac{1}{4V E_p} \int dt \int d^d x \left(\left(\dot{a}(t) e^{i\vec{p} \cdot \vec{X}} + \dot{a}^*(t) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{X}} \right)^2 - \left(i\vec{p} a(t) e^{i\vec{p} \cdot \vec{X}} - i\vec{p} a^*(t) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{X}} \right)^2 - m^2 \left(a(t) e^{i\vec{p} \cdot \vec{X}} + a^*(t) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{X}} \right)^2 \right) \quad (5.30)$$

Note que ao abrir esses quadrados, alguns termos vão cair na relação (5.29). Então podemos remove-los da soma de integrais, pois as integrais desses termos são nulas. Os únicos termos que não cai nessa condição, são os que vem das multiplicações cruzadas e essas por sua vez, matam as exponenciais, já que $e^{i\vec{p}\cdot\vec{X}} e^{-i\vec{p}\cdot\vec{X}} = 1$, portanto, ao fim da nossa análise ficamos com:

$$S = \frac{1}{4VE_p} \int dt \int d^d x \left(2\dot{a}(t)\dot{a}^*(t) - 2p^2 a(t)a^*(t) - 2m^2 a(t)a^*(t) \right) \quad (5.31)$$

$$S = \frac{1}{2VE_p} \int dt \left(\dot{a}(t)\dot{a}^*(t) - (p^2 + m^2) a(t)a^*(t) \right) \int d^d x \quad (5.32)$$

Perceba que $\int d^d x = V$, ou seja, a integral em todo o espaço é o próprio volume do espaço e isso corta com o termo de volume lá na frente da expressão. Além disso, $p^2 + m^2 = E_p^2$. Portanto, simplificando a expressão temos a nossa ação.

$$S = \frac{1}{2E_p} \int dt \left(\dot{a}(t)\dot{a}^*(t) - E_p^2 a(t)a^*(t) \right) \quad (5.33)$$

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2E_p} \dot{a}(t)\dot{a}^*(t) - \frac{E_p}{2} a(t)a^*(t) \right) \quad (5.34)$$

Podemos fazer exatamente o mesmo cálculo para a hamiltoniana, ou energia total em (5.11), todos os passos necessários para este cálculo são exatamente os mesmos, então podemos pular direto para o resultado, já que o cálculo é praticamente idêntico.

$$H = \frac{1}{2E_p} \dot{a}(t)\dot{a}^*(t) + \frac{E_p}{2} a(t)a^*(t) \quad (5.35)$$

Voltando a trabalhar na ação (5.34), vamos lembra que $a(t)$ é uma função complexa. Significa que podemos escrever $a(t) = q_1(t) + iq_2(t)$. Desta forma, a ação fica escrita como:

$$S = \int dt \left(\frac{1}{2E_p} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{E_p}{2} (q_1^2 + q_2^2) \right) \quad (5.36)$$

$$S = \sum_{i=1}^2 \int dt \left(\frac{1}{2E_p} \dot{q}_i^2 - \frac{E_p}{2} q_i^2 \right) \quad (5.37)$$

Nesta análise, q e \dot{q} são o que podemos chamar de *Coordenadas Generalizadas*. Ambas são funções de t , mas estamos omitindo o (t) nos cálculos para não precisar ficar repetindo toda hora. Não é tão importante transportar essa informação o tempo todo. Seguindo adiante, podemos já extrair a lagrangeana da ação que obtemos em (5.37).

$$L = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2E_p} \dot{q}_i^2 - \frac{E_p}{2} q_i^2 \right) \quad (5.38)$$

Essa lagrangeana tem cara de oscilador harmônico! Podemos já extrair o momento conjugado.

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\dot{q}_i}{E_p} \quad (5.39)$$

Voltando para ação, sabemos que sua variação é zero. Portanto, vamos seguir com esse cálculo até chegarmos na equação de movimento.

$$\delta S = \sum_{i=1}^2 \int dt \left(\frac{1}{2E_p} \delta(\dot{q}_i^2) - \frac{E_p}{2} \delta(q_i^2) \right) = 0 \quad (5.40)$$

$$\sum_{i=1}^2 \int dt \left(\frac{1}{2E_p} 2\dot{q}_i \delta\dot{q}_i - \frac{E_p}{2} 2q_i \delta q_i \right) = 0 \quad (5.41)$$

Podemos simplificar e fazer uma integração por partes.

$$[\dot{q}_i \delta q_i]_{lim} + \sum_{i=1}^2 \int dt \left(-\frac{1}{E_p} \delta q_i \ddot{q}_i - E_p q_i \delta q_i \right) = 0 \quad (5.42)$$

Já sabemos que o termo que escapa para fora da integral na integração por partes é nulo e como a integral está igualada a zero, seu argumento precisa ser zero.

$$\sum_{i=1}^2 -\delta q_i \left(\frac{1}{E_p} \ddot{q}_i + E_p q_i \right) = 0 \quad (5.43)$$

Para essa expressão ser verdade, o termo entre parêntesis precisa ser zero!

$$\frac{1}{E_p} \ddot{q}_i + E_p q_i = 0 \quad (5.44)$$

$$\ddot{q}_i = -E_p^2 q_i \quad (5.45)$$

Essa já é a equação de movimento do campo! Com isso também podemos escrever:

$$\ddot{a}(t) = -E_p^2 a(t) \quad (5.46)$$

A solução dessa equação diferencial já é bem conhecida. A solução pode ser escrita como:

$$a(t) = a_p e^{-iE_p t} + a_{-p}^* e^{iE_p t} \quad (5.47)$$

Agora vamos retornar para a hamiltoniana (5.35). Podemos fazer substituições pelo que acabamos de obter.

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2E_p} \left(-iE_p a_p e^{-iE_p t} + iE_p a_{-p}^* e^{iE_p t} \right) \cdot \left(iE_p a_p^* e^{iE_p t} - iE_p a_{-p} e^{-iE_p t} \right) \\ & + \frac{E_p}{2} \left(a_p e^{-iE_p t} + a_{-p}^* e^{iE_p t} \right) \cdot \left(a_p^* e^{iE_p t} + a_{-p} e^{-iE_p t} \right) \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2E_p} \left(E_p^2 a_p a_p^* - E_p^2 a_p a_{-p} e^{-2iE_p t} - E_p^2 a_{-p}^* a_p^* e^{2iE_p t} + E_p^2 a_{-p}^* a_{-p} \right) \\ & + \frac{E_p}{2} \left(a_p a_p^* + a_p a_{-p} e^{-2iE_p t} + a_{-p}^* a_p^* e^{2iE_p t} + a_{-p}^* a_{-p} \right) \end{aligned} \quad (5.49)$$

Note que quando colocamos $\frac{E_p}{2}$ em evidência para todo mundo, os termos com exponencial se anulam.

$$H = \frac{E_p}{2} (2a_p a_p^* + 2a_{-p}^* a_{-p}) = E_p (a_p^* a_p + a_{-p}^* a_{-p}) \quad (5.50)$$

Essa é a hamiltoniana do campo, note que a dependência temporal desapareceu. Isso significa que a energia é conservada. Na teoria quântica, a hamiltoniana deve se tornar um operador, nós fazemos essa passagem tornando a_p e a_{-p} *Operadores de Aniquilação* e a_p^* e a_{-p}^* se tornam *Operadores de Criação*. Os conjugados vão ser denotados por *Dagger* (\dagger). Como estamos lidando com operadores de criação e aniquilação, a relação de comutação padrão deles é dada por:

$$\begin{cases} [a_p, a_k^\dagger] = \delta_{p,k} \\ [a_p, a_k] = [a_p^\dagger, a_k^\dagger] = 0 \end{cases} \quad (5.51)$$

Já generalizamos os índices na relação de comutação. As funções $a(t)$ como operadores, ficam escritas como:

$$\begin{cases} a(t) = a_p e^{-iE_p t} + a_{-p}^\dagger e^{iE_p t} & \dot{a}(t) = -iE_p (a_p e^{-iE_p t} - a_{-p}^\dagger e^{iE_p t}) \\ a^\dagger(t) = a_p^\dagger e^{iE_p t} + a_{-p} e^{-iE_p t} & \dot{a}^\dagger(t) = iE_p (a_p^\dagger e^{iE_p t} - a_{-p} e^{-iE_p t}) \end{cases} \quad (5.52)$$

Vamos reescrever a hamiltoniana (5.50) nesse formalismo também!

$$H = E_p \left(a_p^\dagger a_p + a_{-p}^\dagger a_{-p} \right) \quad (5.53)$$

Existe outro operador que será extremamente importante no nosso estudo. Esse operador é o *Operador Momento Transportado pelo Campo*. Na teoria clássica de campos já existe uma expressão que fornece o momento transportado pelo campo, essa expressão é dada por:

$$\vec{P} = - \int d^d x \partial_0 \phi \partial_i \phi \quad (5.54)$$

O cálculo para essa expressão segue os mesmos passos do cálculo feito para obter a ação do campo em (5.34) e de forma análoga, os mesmos passos do cálculo que se faz para obter a hamiltoniana em (5.35). Nós substituímos o campo escalar que estamos trabalhando, os termos que transportam exponencial vão ser nulos na integral devido a condição (5.29), a integral que vai sobrar será o próprio volume do espaço $\int d^d x = V$ e ao término desses cálculos, vamos obter:

$$\vec{P} = - \frac{i\vec{p}}{2E_p} (\dot{a}^*(t) a(t) - \dot{a}(t) a^*(t)) \quad (5.55)$$

Mais uma vez, nós vamos pular alguns cálculos pois são repetidos. Nosso próximo passo é abrir as funções $a(t)$, usando a solução (5.47). Devemos considerar as derivadas e o conjugado dessa função. O desenvolvimento é idêntico ao que foi feito para obter a hamiltoniana em (5.50), até mesmo a etapa dos termos com exponenciais, que vão se anular e os termos sem exponenciais que vão se somar. No fim, escrevemos o momento da seguinte maneira:

$$\vec{P} = \vec{p} (a_p^* a_p - a_{-p}^* a_{-p}) \quad (5.56)$$

Aqui é importante tomar cuidado para não confundir os momentos. O momento \vec{P} é o momento transportado pelo campo. Já o momento \vec{p} é o momento da partícula descrita pelo campo. Como vamos transformar essa expressão em um operador, substituímos pelos operadores de criação e aniquilação. Então quanticamente, temos:

$$\hat{P} = \vec{p} \left(a_p^\dagger a_p - a_{-p}^\dagger a_{-p} \right) \quad (5.57)$$

Já estamos perto de terminar essa subseção. Nós vamos trabalhar agora efetivamente no *Operador de Campo*. Na prática vamos tomar o campo escalar (5.26) e substituir as funções $a(t)$ e $a^*(t)$ pelas suas versões escritas pelos operadores de criação e aniquilação. Deste modo, nosso operador de campo fica escrito como:

$$\phi_p(t, \vec{X}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a(t) e^{i\vec{p} \cdot \vec{X}} + a^\dagger(t) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{X}} \right) \quad (5.58)$$

O passo seguinte é abrir as funções (5.52), neste campo.

$$\phi_p(t, \vec{X}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[\left(a_p e^{-iE_p t} + a_{-p}^\dagger e^{iE_p t} \right) e^{i\vec{p} \cdot \vec{X}} + \left(a_p^\dagger e^{iE_p t} + a_{-p} e^{-iE_p t} \right) e^{-i\vec{p} \cdot \vec{X}} \right] \quad (5.59)$$

$$\phi_p(t, \vec{X}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left[a_p e^{-iE_p t + i\vec{p} \cdot \vec{X}} + a_{-p}^\dagger e^{iE_p t + i\vec{p} \cdot \vec{X}} + a_p^\dagger e^{iE_p t - i\vec{p} \cdot \vec{X}} + a_{-p} e^{-iE_p t - i\vec{p} \cdot \vec{X}} \right] \quad (5.60)$$

Devemos considerar algumas observações. Primeiro, E_p não muda, independente de trabalharmos com \vec{p} ou $-\vec{p}$, pois $E_p = +\sqrt{p^2 + m^2}$, da forma que foi definido. Segundo, a_{-p} e a_{-p}^* contribuem com sinal negativo para o momento. Note que se invertermos o sinal de p , os termos até trocam de lugar na expressão. Então vamos generalizar e varrer todo o espaço dos momentos.

$$\phi_p(t, \vec{X}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{p}} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_p e^{-iE_p t + i\vec{p} \cdot \vec{X}} + a_p^\dagger e^{iE_p t - i\vec{p} \cdot \vec{X}} \right) \quad (5.61)$$

Esse é o *Campo Quântico* "mais geral" que podemos escrever até o presente momento. O que é importante ressaltar é o fato de termos quantizado o campo escalar. Agora nós estamos trabalhando verdadeiramente com uma teoria quântica de campos! Podemos ir ainda mais além e fazer o mesmo desenvolvimento para o operador hamiltoniano (5.53) e o operador momento transportado pelo campo (5.57).

$$\begin{cases} H = \sum_{\vec{p}} E_p a_p^\dagger a_p \\ \hat{P} = \sum_{\vec{p}} \vec{p} a_p^\dagger a_p \end{cases} \quad (5.62)$$

Por fim, obtemos respectivamente o operador hamiltoniano "mais geral" e o operador momento "mais geral" que podemos escrever até agora. Conseguimos cumprir o objeto de fazer uma representação do campo quântico, escrito pelos operadores de criação e aniquilação. Não somente isso, mas também representamos o operador hamiltoniano, que fornece a energia total do sistema, e o operador momento, pelos operadores de criação e aniquilação. Nosso próximo passo é estudar o *Estado de Vácuo* e como o estado de uma partícula é representado na mecânica quântica.

5.2.2 Estado de Vácuo e Estado de Partículas

Na subseção anterior, vimos que o nosso sistema se comporta como um oscilador harmônico. Então vamos assumir um estado de vácuo $|\Omega\rangle$ como o estado fundamental do

oscilador harmônico. Como o estado de vácuo é o estado de menor energia, aplicar o operador de aniquilação neste estado tem que dar zero, pois não é possível descer para um estado inferior a esse.

$$a_p |\Omega\rangle = 0 \quad (5.63)$$

No nosso estudo também vamos assumir que o vácuo é um estado de energia zero. Isso implica que se aplicarmos o operador hamiltoniano no estado de vácuo, também tem que dar zero.

$$H |\Omega\rangle = 0 \quad (5.64)$$

No estado de vácuo não existe partículas. Para elevarmos o estado para o estado de uma partícula devemos aplicar um operador de criação no estado de vácuo. Deste modo, podemos extrair o momento e a energia da partícula aplicando respectivamente os operadores de momento e o operador hamiltoniano no estado que resulta do operador de criação aplicado no estado de vácuo. Vamos ver como é se aplicarmos o operador momento ao estado de uma partícula.

$$\hat{P} a_p^\dagger |\Omega\rangle = \sum_{\vec{k}} \vec{k} a_k^\dagger a_k a_p^\dagger |\Omega\rangle = \sum_{\vec{k}} \vec{k} a_k^\dagger \left([a_k, a_p^\dagger] + a_p^\dagger a_k \right) |\Omega\rangle \quad (5.65)$$

$$\hat{P} a_p^\dagger |\Omega\rangle = \sum_{\vec{k}} \vec{k} a_k^\dagger \left([a_k, a_p^\dagger] |\Omega\rangle + a_p^\dagger a_k |\Omega\rangle \right) \quad (5.66)$$

Note que pela condição (5.63), o último termo entre parêntesis é zero. Já o primeiro termo, podemos usar a condição (5.51).

$$\hat{P} a_p^\dagger |\Omega\rangle = \sum_{\vec{k}} \vec{k} a_k^\dagger \delta_{p,k} |\Omega\rangle \quad (5.67)$$

$$\hat{P} a_p^\dagger |\Omega\rangle = \vec{p} a_p^\dagger |\Omega\rangle \quad (5.68)$$

Esse resultado é até que esperado! Aplicando o operador momento, extraímos o vetor momento do estado de uma partícula, que se configura por $a_p^\dagger |\Omega\rangle$. Agora se fizermos o mesmo para o operador hamiltoniano em (5.62), realizando os cálculos com as mesmas etapas, vamos obter:

$$H a_p^\dagger |\Omega\rangle = E_p a_p^\dagger |\Omega\rangle \quad (5.69)$$

O que também é um resultado esperado. Ao aplicar o operador hamiltoniano, extraímos a energia total do estado de uma partícula. Pela forma que definimos, o estado $a_p^\dagger |\Omega\rangle$ tem energia

positiva. Ou seja, o estado de uma partícula tem energia positiva. Prosseguindo, para terminar de deixar completo nosso estudo, basta ressaltarmos como é o estado de múltiplas partículas. Não é mistério que serão múltiplos operadores de criação aplicados no estado de vácuo. Cada operador de criação é responsável por criar uma partícula.

$$a_{p_1}^\dagger a_{p_2}^\dagger \cdots a_{p_k}^\dagger |\Omega\rangle \quad (5.70)$$

Antes de falarmos das partículas mais importantes, devemos prestar atenção que o operador momento foi fundamental para a construção da estrutura deste formalismo. Não somente isso, mas também vimos anteriormente que o momento pode ser expresso em coordenadas do cone de luz. Portanto, é interessante definirmos como é o operador momento nas coordenadas do cone de luz.

5.2.3 Operador Momento no Cone de Luz

Antes de escrevermos o operador momento no sistema de coordenadas do cone de luz, devemos escrever como é o estado de uma partícula nesse sistema de coordenadas. A mudança mais significativa é que nosso sistema vai ficar parametrizado em p^+ e \vec{P}_T . Não será necessário parametrizar em p^- , porque p^- já pode ser escrito em função de p^+ e \vec{P}_T , como evidenciado em (4.90).

$$p^- = \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2) \quad (5.71)$$

Desta forma, nestes novos parâmetros, $a_{p^+, \vec{P}_T}^\dagger$ será o operador de criação e a_{p^+, \vec{P}_T} será o operador de aniquilação. Assim o estado de uma partícula pode ser escrito como:

$$a_{p^+, \vec{P}_T}^\dagger |\Omega\rangle \quad (5.72)$$

Seguindo essa linha de pensamento, usando como base o operador momento construído em (5.62), podemos construir os nossos novos operadores momentos no sistema de coordenadas do cone de luz.

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p}^+ = \sum_{p^+, \vec{P}_T} p^+ a_{p^+, \vec{P}_T}^\dagger a_{p^+, \vec{P}_T} \\ \hat{p}^I = \sum_{p^+, \vec{P}_T} p^I a_{p^+, \vec{P}_T}^\dagger a_{p^+, \vec{P}_T} \\ \hat{p}^- = \sum_{p^+, \vec{P}_T} \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2) a_{p^+, \vec{P}_T}^\dagger a_{p^+, \vec{P}_T} \end{array} \right. \quad (5.73)$$

Agora temos as ferramentas necessárias para trabalhar as partículas mais importantes. A seguir vamos ver como se constrói o estado de fóton, a partícula responsável pela força de interação eletromagnética e vamos ver também como se constrói o estado de gráviton, a partícula responsável pela força de interação gravitacional.

5.3 Estados de Fótons e Estados de Grávitons

Nesta seção, é importante recapitularmos o que fizemos na seção anterior, para algumas informações não se perderem. O primeiro ponto é como construímos o estado de uma partícula, que foi fazendo uso de operadores de criação e aniquilação destas partículas. Isso nos leva ao segundo ponto, de onde vem os operadores de criação e aniquilação das partículas? Essa é a informação que muitas vezes passa despercebida, mas se acompanharmos desde o início, esses operadores surgiram do campo quântico, que se originou de um campo escalar que descreve a partícula. Lembra quando usamos a função de ondas planas? Pois então, os operadores de criação e aniquilação de partículas surgem do campo que descreve as partículas. O fóton é a partícula que descreve a força de interação eletromagnética, que é descrito pelo campo eletromagnético ou também conhecido como *Campo de Maxwell*. Significa que os operadores de criação e aniquilação do fóton vão surgir do campo de Maxwell. Já o gráviton é a partícula que descreve a força de interação gravitacional, que é descrita pelo *Campo Gravitacional*. Significa que os operadores de criação e aniquilação do gráviton vão surgir do campo gravitacional.

5.3.1 Campo de Maxwell

Quando falamos de campo de Maxwell, estamos nos referindo ao campo eletromagnético. Uma característica que vale ressaltar é que o campo eletromagnético tem *Invariância de Calibre*, ou seja, ele é invariante sob as transformações de calibre. Vamos explorar muito essa propriedade neste estudo! Na teoria eletromagnética, nós trabalhamos com um potencial vetor $A_\mu(X)$ e a força do campo eletromagnético é dada por:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5.74)$$

Existe uma relação que podemos usar como equação de movimento. Ela é até que bem conhecida e diz que $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$. Abrindo essa relação, nos vamos ter a seguinte equação:

$$\partial^2 A^\mu - \partial^\mu (\partial \cdot A) = 0 \quad (5.75)$$

Onde $\partial^2 = \partial_\nu \partial^\nu$ e $\partial_\nu A^\nu = \partial \cdot A$. Como está igualado a zero, podemos inverter o sinal. Pois bem, temos uma equação de movimento, falta agora definirmos uma cara para o potencial vetor $A^\mu(X)$. Seguindo os passos da seção anterior, vamos usar a transformada de Fourier deste potencial vetor.

$$A^\mu(X) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p A^\mu(p) e^{ip \cdot X} \quad (5.76)$$

Agora podemos aplicar na equação (5.75). Como está igualado a zero, já vamos eliminar a constante!

$$\int d^D p A^\mu(p) \partial^2 [e^{ip \cdot X}] - \int d^D p A^\mu(p) \partial^\mu (\partial [e^{ip \cdot X}]) = 0 \quad (5.77)$$

$$\int d^D p A^\mu(p) (-p^2 e^{ip \cdot X}) - \int d^D p A^\mu(p) \partial^\mu (ip e^{ip \cdot X}) = 0 \quad (5.78)$$

$$\int d^D p A^\mu(p) (p^2 e^{ip \cdot X} + \partial^\mu (ip e^{ip \cdot X})) = 0 \quad (5.79)$$

$$\int d^D p A^\mu(p) (p^2 e^{ip \cdot X} - p \cdot P^\mu e^{ip \cdot X}) = 0 \quad (5.80)$$

Para essa integral ser zero, o argumento dela tem que ser zero. O que com certeza não é zero e podemos cortar da equação é a exponencial.

$$p^2 A^\mu(p) - P^\mu (p \cdot A(p)) = 0 \quad (5.81)$$

Perceba a semelhança entre essa equação e a equação (5.75). Vamos usar muito essa equação! Entretanto, por agora vamos deixar este resultado guardado. Nosso objetivo é terminar de estruturar a matemática do campo de maxwell, portanto, agora falta definir os parâmetros de calibre.

$$\delta A_\mu(X) \equiv \partial_\mu \varepsilon(X) \quad (5.82)$$

Onde $\varepsilon(X)$ é um parâmetro real. No espaço dos momentos a história é outra, pois sai do escopo dos reais e passa estar no escopo dos complexos.

$$\delta A_\mu(p) \equiv iP_\mu \varepsilon(p) \quad (5.83)$$

Neste caso, $\varepsilon(p)$ é um parâmetro complexo e uma consequência é a seguinte propriedade:

$$\varepsilon(-p) = \varepsilon^*(p) \quad (5.84)$$

O fato de $\varepsilon(p)$ ter essa propriedade, garante que $\delta A_\mu(p)$ tenha a mesma propriedade, a definição foi construída para ser assim.

$$(\delta A_\mu(p))^* = -i P_\mu \varepsilon^*(p) = i (-P_\mu) \varepsilon(-p) = \delta A_\mu(-p) \quad (5.85)$$

Tudo que nos é interessante já foi evidenciado nesta subseção. Agora vamos trabalhar o formalismo do campo de Maxwell no cone de luz.

5.3.2 Campo de Maxwell no Cone de Luz

No sistema de coordenadas do cone de luz, teremos os potenciais vetores $A^+(p)$, $A^-(p)$ e $A^I(p)$. Seus parâmetros de calibre são definidos usando (5.83).

$$\begin{cases} \delta A^+(p) = i p^+ \varepsilon \\ \delta A^-(p) = i p^- \varepsilon \\ \delta A^I(p) = i p^I \varepsilon \end{cases} \quad (5.86)$$

Nas transformações de calibre, sempre podemos escolher o valor de ε . Como já sabemos que $p^+ \neq 0$, vamos definir:

$$\varepsilon \equiv \frac{i A^+}{p^+} \quad (5.87)$$

Faremos então uma transformação de calibre para A^+ . Por simplicidade, vamos estar omitindo que A é função de p em alguns termos, mas apenas devemos lembrar que estamos trabalhando no espaço dos momentos.

$$A'^+ = A^+ + \delta A^+ = A^+ + i p^+ \varepsilon = A^+ + i p^+ \frac{i A^+}{p^+} = A^+ - A^+ = 0 \quad (5.88)$$

Pela invariância de calibre, podemos afirmar que:

$$A^+(p) = 0 \quad (5.89)$$

Essa é a primeira condição de calibre do cone de luz para o campo de Maxwell! Agora vamos começar e desamarrar as expressões. Primeiro de tudo, vamos pegar a equação (5.81) e tomar $\mu = +$. De cara, pela condição (5.88), nós zeramos o primeiro termo. Ficamos com o segundo termo igual a zero e como $P^\mu \neq 0$, nós temos que:

$$p \cdot A = 0 \quad (5.90)$$

Abrindo esse produto escalar no sistema de coordenadas do cone de luz, temos:

$$-p^+ A^- - p^- A^+ + p^I A^I = 0 \quad (5.91)$$

Usando a condição (5.89) para cortar o termo do meio, nós obtemos:

$$A^-(p) = \frac{1}{p^+} (p^I A^I) \quad (5.92)$$

Podemos usar (5.90) para reduzir a equação de campo no espaço dos momentos (5.81) em:

$$p^2 A^\mu(p) = 0 \quad (5.93)$$

Não é interessante fazermos essa equação para $\mu = +$, porque é trivial. Veremos como ela se dá para $\mu = I$. Vamos ter duas situações. **Situação 1:** $A^I(p) = 0$ se $p^2 \neq 0$. **Situação 2:** $A^I(p) \neq 0$ se $p^2 = 0$. Ambos os casos devemos olhar com muito cuidado! Primeiro, o $A^-(p)$ é determinado em função de $A^I(p)$, portanto não é interessante que $A^I(p)$ seja nulo. Deste modo, partindo do ponto que a situação 2 seja verdadeira, teremos todos os $A^I(p)$ como graus de liberdade do campo de maxwell, ou seja, $D - 2$ graus de liberdade. Já na situação 1 não existe nenhum grau de liberdade do campo de maxwell na teoria. Sendo assim, tudo aponta que devemos usar a situação 2. Deste modo, todos os cálculos que foram feitos para ϕ_p anteriormente, podem ser feitos para A^I .

5.3.3 Estado de Fóton

Chegamos a uma conclusão surpreendente na subseção anterior, pois podemos definir de imediato como é o estado de fóton. Sabemos que os cálculos já feitos para ϕ_p vão se repetir para o campo $A^I(p)$, com as coordenadas I do cone de luz sendo os graus de liberdade. Neste caso, vamos ter operadores de criação e aniquilação escritos como $a_p^{I\dagger}$ e a_p^I , que também podem ser escritos em p^+ e \vec{P}_T . O estado de vácuo ainda é $|\Omega\rangle$, o que implica que o estado de um fóton é definido por:

$$a_{p^+, \vec{P}_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle \quad (5.94)$$

Neste formalismo, I vai indicar a polarização, pois ele está associado à direção do fóton. Neste caso, vão ter $D - 2$ polarizações possíveis para o fóton. Em outras palavras, existem $D - 2$ estados de um fóton linearmente independente para cada ponto em que $p^2 = 0$. Um estado geral será portanto uma superposição linear:

$$\boxed{\sum_{I=2}^{D-1} \xi_I a_{p^+, \vec{P}_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle} \quad (5.95)$$

Este é o estado geral de um fóton, onde ξ_I é o vetor de polarização do fóton. Como discutimos anteriormente, foi possível obter o estado de fóton a partir do campo de Maxwell, que é o campo responsável pela interação eletromagnética. Nosso próximo objetivo será chegar no estado de gráviton, a partir do campo gravitacional.

5.3.4 Campo Gravitacional

Como vimos anteriormente, definimos o estado de fóton, a partir do campo de Maxwell. Agora nós vamos definir o estado de gráviton, a partir do campo gravitacional. Em primeira análise, a métrica de Minkowski que trabalhamos até aqui (3.51) não leva em consideração os efeitos do campo gravitacional. Isso é devido ao campo gravitacional ser muito fraco, para diversos fenômenos físicos. Portanto, devemos construir uma métrica que leve em consideração os efeitos do campo gravitacional. Vamos chama-la de $g_{\mu\nu}(X)$. Queremos trabalhar com campos gravitacionais fracos, que em geral, é o que acontece para muitos fenômenos físicos, já que a gravidade é a força de interação mais fraca. Para isso, a métrica do campo gravitacional $g_{\mu\nu}(X)$ tem que ser a própria métrica de Minkowski mais uma pequena flutuação na mesma métrica de Minkowski que vamos chamar de $h_{\mu\nu}(X)$.

$$g_{\mu\nu}(X) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(X) \quad (5.96)$$

O termo $h_{\mu\nu}(X)$ é um parâmetro importante para estudarmos ondas gravitacionais, mas este não é o nosso foco. Vamos tomar algumas definições importantes.

$$\begin{cases} h^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} h_{\alpha\beta} \\ h \equiv \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \end{cases} \quad (5.97)$$

Também existem propriedades da métrica do campo gravitacional que devemos destacar! A matriz $g_{\mu\nu}(X)$ é uma matriz simétrica e existe uma relação dela com a delta de Kronecker.

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \\ g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu \end{cases} \quad (5.98)$$

Na *Teoria da Relatividade Geral*, a gravitação é regida pelas *Equações de Einstein*. No caso de campos gravitacionais fracos, as equações de Einstein podem ser expandidas em termos de $h_{\mu\nu}$. Isso vai ser muito importante, porque essa expansão, depois de linearizada, é dada por:

$$\partial^2 h^{\mu\nu}(X) - \partial_\alpha (\partial^\mu h^{\nu\alpha}(X) + \partial^\nu h^{\mu\alpha}(X)) + \partial^\mu \partial^\nu h(X) = 0 \quad (5.99)$$

Seguindo com os cálculos, assim como fizemos anteriormente, só que com outros campos, vamos tomar a transformada de Fourier de $h^{\mu\nu}(X)$.

$$h^{\mu\nu}(X) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D p h^{\mu\nu}(p) e^{ip \cdot X} \quad (5.100)$$

Agora o próximo passo é aplicar essa função na equação de campo (5.99). Já vou cortar o que é constante, porque a equação está igualada a zero e colocar em evidência a integral.

$$\begin{aligned} \int d^D p (h^{\mu\nu}(p) \partial^2 [e^{ip \cdot X}] - h^{\nu\alpha}(p) \partial_\alpha \partial^\mu [e^{ip \cdot X}] - h^{\mu\alpha}(p) \partial_\alpha \partial^\nu [e^{ip \cdot X}] \\ + h(p) \partial^\mu \partial^\nu [e^{ip \cdot X}]) = 0 \end{aligned} \quad (5.101)$$

$$\int d^D p e^{ip \cdot X} (-p^2 h^{\mu\nu}(p) + P_\alpha P^\mu h^{\nu\alpha}(p) + P_\alpha P^\nu h^{\mu\alpha}(p) - P^\mu P^\nu h(p)) = 0 \quad (5.102)$$

Para essa expressão dar zero, o argumento da integral tem que ser zero. Sabemos que a exponencial não é zero, então o que está entre parêntesis é zero. Vou trocar o sinal e simplificar a expressão.

$$p^2 h^{\mu\nu}(p) - P_\alpha (P^\mu h^{\nu\alpha}(p) + P^\nu h^{\mu\alpha}(p)) + P^\mu P^\nu h(p) = 0 \quad (5.103)$$

Essa é a *Equação para Campos Gravitacionais Fracos no Espaço dos Momentos*. Vamos chamar essa equação de $S^{\mu\nu}(p)$. Note a semelhança com a equação (5.99), não é por acaso. Agora devemos tomar a variação do campo $h^{\mu\nu}(p)$. Note que está no espaço dos momentos, então sua variação está no escopo dos complexos. Vamos definir da mesma maneira que definimos a variação de $A_\mu(p)$ em (5.83), só que agora vamos nos atentar aos índices, já que estamos lidando com um campo de dois índices.

$$\delta h^{\mu\nu}(p) = iP^\mu \varepsilon^\nu(p) + iP^\nu \varepsilon^\mu(p) \quad (5.104)$$

Aqui é importante destacar que na gravitação, a invariância de calibre é a invariância de reparametrização. Então de imediato, vamos ver como é a variação de $S^{\mu\nu}(p)$, nossa equação de movimento.

$$\delta S^{\mu\nu}(p) = p^2 \delta h^{\mu\nu}(p) - P_\alpha (P^\mu \delta h^{\nu\alpha}(p) + P^\nu \delta h^{\mu\alpha}(p)) + P^\mu P^\nu \delta h(p) \quad (5.105)$$

O último termo podemos abrir usando a segunda propriedade em (5.97), em seguida abrimos todos os termos usando (5.104).

$$\delta S^{\mu\nu}(p) = p^2 \delta h^{\mu\nu}(p) - P_\alpha (P^\mu \delta h^{\nu\alpha}(p) + P^\nu \delta h^{\mu\alpha}(p)) + P^\mu P^\nu \eta_{\mu\nu} \delta h^{\mu\nu}(p) \quad (5.106)$$

$$\begin{aligned} \delta S^{\mu\nu}(p) = & i p^2 (P^\mu \varepsilon^\nu + P^\nu \varepsilon^\mu) - i P_\alpha P^\mu (P^\nu \varepsilon^\alpha + P^\alpha \varepsilon^\nu) - i P_\alpha P^\nu (P^\mu \varepsilon^\alpha + P^\alpha \varepsilon^\mu) \\ & + i P^\mu P^\nu \eta_{\mu\nu} (P^\mu \varepsilon^\nu + P^\nu \varepsilon^\mu) \end{aligned} \quad (5.107)$$

Perceba que no último termo é possível fazer a distributiva de $\eta_{\mu\nu}$, neste caso, vamos trocar os índices ν por μ do último termo. Vamos fazer a distributiva no que é importante destacar.

$$\begin{aligned} \delta S^{\mu\nu}(p) = & i P^\mu p^2 \varepsilon^\nu + i P^\nu p^2 \varepsilon^\mu - i P^\mu P^\nu P_\alpha \varepsilon^\alpha - i P^\mu P_\alpha P^\alpha \varepsilon^\nu - i P^\nu P^\mu P_\alpha \varepsilon^\alpha \\ & - i P^\nu P_\alpha P^\alpha \varepsilon^\mu + i P^\mu P^\nu P^\mu \varepsilon^\mu + i P^\mu P^\nu P^\mu \varepsilon^\mu \end{aligned} \quad (5.108)$$

Sabendo que $P_\alpha \varepsilon^\alpha = P^\mu \varepsilon^\mu = p \cdot \varepsilon$ e que $P_\alpha P^\alpha = p^2$, podemos simplificar tudo para:

$$\begin{aligned} \delta S^{\mu\nu}(p) = & i P^\mu p^2 \varepsilon^\nu + i P^\nu p^2 \varepsilon^\mu - i P^\mu P^\nu (p \cdot \varepsilon) - i P^\mu p^2 \varepsilon^\nu - i P^\nu P^\mu (p \cdot \varepsilon) \\ & - i P^\nu p^2 \varepsilon^\mu + i P^\mu P^\nu (p \cdot \varepsilon) + i P^\mu P^\nu (p \cdot \varepsilon) = 0 \end{aligned} \quad (5.109)$$

Temos nitidamente que a equação de movimento possui invariância de calibre e isso implica que a equação possui invariância de reparametrização. Todas as informações que nos interessa foram obtidas aqui, agora devemos trabalhar o formalismo do campo gravitacional no cone de luz.

5.3.5 Campo Gravitacional no Cone de Luz

No sistema de coordenadas do cone de luz, vamos ter os campos h^{IJ} , h^{+I} , h^{-I} , h^{+-} , h^{++} e h^{--} . Podemos escrever os parâmetros de calibre usando (5.104).

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta h^{++} = 2i p^+ \varepsilon^+ \\ \delta h^{+-} = i p^+ \varepsilon^- + i p^- \varepsilon^+ \\ \delta h^{+I} = i p^+ \varepsilon^I + i p^I \varepsilon^+ \end{array} \right. \quad (5.110)$$

Resolvi destacar estes três campos porque sempre vamos ter a liberdade de fixar ε^+ , ε^- e ε^I de modo que a invariância de calibre nos permita colocar:

$$\delta h^{++} = \delta h^{+-} = \delta h^{+I} = 0 \quad (5.111)$$

Essa será a condição de calibre do cone de luz para o campo gravitacional. Isso implica que os nossos graus de liberdade ficaram em função de h^{IJ} , h^{-I} e h^{--} . Daqui para frente vamos

abrir a equação de movimento (5.103) e buscar desamararr essas expressões. Um bom ponto de partida é tomarmos $\mu = +$ e $\nu = +$. Todos os termos vão zerar e só vai sobrar o último.

$$(p^+)^2 h = 0 \longrightarrow h = 0 \quad (5.112)$$

Usando a segunda definição em (5.97):

$$h = \eta_{\mu\nu} h^{\mu\nu} = -h^{+-} - h^{-+} + h^{II} = 0 \longrightarrow h^{II} = 0 \quad (5.113)$$

Aqui podemos afirmar que a matriz h^{IJ} não tem traço! Com $h = 0$, a equação de movimento se torna:

$$S^{\mu\nu}(p) = p^2 h^{\mu\nu} - P_\alpha (P^\mu h^{\nu\alpha} + P^\nu h^{\mu\alpha}) = 0 \quad (5.114)$$

Ainda dá para ir além, pois fixando somente $\mu = +$, vamos zerar todos os campos com índices $+$ e o que vai restar será:

$$-p^+ P_\alpha h^{\nu\alpha} = 0 \longrightarrow P_\alpha h^{\nu\alpha} = P_\alpha h^{\mu\alpha} = 0 \quad (5.115)$$

Com essa condição, reduzimos ainda mais a equação de movimento.

$$p^2 h^{\mu\nu} = 0 \quad (5.116)$$

Essa é a equação de movimento do campo gravitacional. Já vamos voltar nela, por agora vamos analisar a condição (5.115). Primeiro vamos abri-la para $\nu = I$.

$$-p^+ h^{I-} - p^- h^{I+} + P_J h^{IJ} = 0 \quad (5.117)$$

Lembrando que $h^{I+} = 0$, ficamos com:

$$h^{I-} = \frac{1}{p^+} P_J h^{IJ} \quad (5.118)$$

Agora em segunda análise vamos abrir a condição (5.115) para $\nu = -$.

$$-p^+ h^{--} - p^- h^{-+} + P_I h^{-I} = 0 \quad (5.119)$$

Lembrando que $h^{-+} = 0$, ficamos com:

$$h^{--} = \frac{1}{p^+} P_I h^{-I} \quad (5.120)$$

Perceba que h^{--} é escrito em função de h^{-I} e h^{-I} é escrito em função de h^{IJ} . Ou seja, se determinarmos h^{IJ} , em princípio, vamos ter todos os campos necessários para descrever o campo gravitacional. Agora vai ficar interessante, porque se abrirmos a equação de movimento (5.116) para h^{IJ} , ficamos com:

$$p^2 h^{IJ} = 0 \quad (5.121)$$

Note que chegamos a uma situação parecida com a que analisamos no caso do campo de Maxwell. Aqui podemos tirar duas conclusões, ou $p^2 = 0$ e $h^{IJ} \neq 0$, ou $p^2 \neq 0$ e $h^{IJ} = 0$. Devemos olhar com cuidado! Primeiro, o fato do campo gravitacional exigir que h^{IJ} seja bem determinado, não é interessante que esse campo seja nulo. Portanto, vamos considerar $p^2 = 0$ e h^{IJ} são os graus de liberdade do campo gravitacional. Em outras palavras, os graus de liberdade do campo gravitacional D-dimensional clássico são transportados por um campo tensorial transversal simétrico e sem traço. As componentes de h^{IJ} satisfazem as equações de movimento de um escalar sem massa. Deste modo, o tensor h^{IJ} tem tantas componentes quanto uma matriz quadrada, simétrica, sem traço, de tamanho $D - 2$. Vamos calcular o número de componentes deste tensor!

$$n(D) = \frac{1}{2} (D - 2) (D - 1) - 1 \quad (5.122)$$

Dessa nossa expressão, $\frac{1}{2}$ está ali porque a matriz é simétrica, o termo $(D - 2) (D - 1)$ é porque estamos considerando as colunas e linhas referentes aos índices $-$ e I , só que tirando o que seria equivalente a uma coluna inteira devido aos elementos da diagonal, devemos lembrar também que as colunas e linhas com $+$ são todas nulas. Por fim, o termo -1 é para não desconsiderar a componente h^{--} da diagonal. Simplificando essa expressão, ficamos com:

$$n(D) = \frac{1}{2} D (D - 3) \quad (5.123)$$

Este é o número de componentes não nulos do tensor $h^{\mu\nu}$ nas coordenadas do cone de luz. Daqui por diante, todos os cálculos que foram feitos para ϕ_p e A^I anteriormente, podem ser feitos para h^{IJ} .

5.3.6 Estado de Gráviton

Estamos construindo conclusões surpreendentes, pois já podemos definir de imediato o estado de gráviton. Sabemos que os cálculos já feitos para ϕ_p e A^I vão se repetir para o campo h^{IJ} , com as coordenadas transversais do cone de luz sendo os graus de liberdade. Neste caso, vamos ter operadores de criação e aniquilação escritos como $a_p^{IJ\dagger}$ e a_p^{IJ} , que também podem ser escritos em p^+ e \vec{P}_T . O estado de vácuo ainda é $|\Omega\rangle$, o que implica que o estado de um gráviton é definido por:

$$a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle \quad (5.124)$$

Da mesma forma que definimos o estado de fóton em (5.95), um estado de um gráviton geral vai ser uma superposição linear, assim teremos:

$$\sum_{I,J=2}^{D-1} \xi_{IJ} a_{p^+, \vec{p}_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle \quad (5.125)$$

Este é o estado geral de um gráviton, onde ξ_{IJ} é o tensor de polarização do gráviton e $\xi_{II} = 0$. A condição clássica de ausência de traço se torna a ausência de traço do tensor de polarização do gráviton na teoria quântica. Deste modo, temos $n(D)$ estados de grávitons linearmente independentes na nossa teoria. Assim fechamos as representações dos estados de uma partícula no modelo da partícula pontual. Nosso objetivo para o capítulo seguinte é representar o estado de uma partícula e chegar no estado de fóton pelo modelo de cordas abertas.

6 TEORIA DE CORDAS ABERTAS QUÂNTICAS RELATIVÍSTICAS

Chegamos a parte que mais nos interessa deste estudo, pois aqui vamos demonstrar efetivamente como a teoria de cordas é uma teoria física que também serve para descrever partículas. Em especial, com a teoria de cordas abertas, vamos ser capazes de descrever os estados de fóton. Aqui vamos ver também que a teoria de cordas abertas não se sustenta sozinha, ela está amarrada a uma teoria de cordas fechadas. Vamos ver a teoria de cordas fechadas no capítulo 7 e ela será necessária para descrever o estado de gráviton. Por agora, nosso objetivo é montar uma teoria quântica de cordas abertas. Nessa teoria, será muito importante considerarmos a presença de uma D-Brana que preenche todo o espaço.

6.1 Dinâmica das Coordenadas Transversais

No capítulo anterior, vimos que as coordenadas transversais são os graus de liberdade necessários para descrever uma partícula, isso considerando a métrica do cone de luz. Embora tenhamos usado para descrever partículas pontuais, com as cordas não será diferente. Por isso vai ser muito importante chegar em um operador $X^I(\tau, \sigma)$ para a corda aberta. Com uma expressão dessas vamos saber como é a dinâmica da corda aberta nas coordenadas transversais.

6.1.1 Hamiltoniano da Corda Aberta no Cone de Luz

Lembra do capítulo 3, quando construímos a teoria de cordas relativística e exigimos que ela deveria ser uma teoria invariante de reparametrização? Pois então, a hora de cobrarmos isso chegou, porque se construímos expressões invariantes de reparametrização e invariantes de Lorentz, todas essas expressões que valem para os calibres que estávamos adotando, vão valer para o calibre do cone de luz. Neste capítulo vamos revisar muitas das expressões que desenvolvemos lá atrás. Começando pela relação (4.70), considerando $\beta = 2$ que é para cordas abertas, vamos abrir essa expressão.

$$(\dot{X}^- \pm X'^-) = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \dot{X}^I + X'' X'' \pm \dot{X}^I X'' \pm X'' \dot{X}^I) \quad (6.1)$$

$$(\dot{X}^- \pm X'^-) = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \dot{X}^I + X'' X'') \pm \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I X'' + X'' \dot{X}^I) \quad (6.2)$$

Essa equação é muito fácil de decompor devido ao \pm . Com isso, temos:

$$\begin{cases} \dot{X}^- = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \dot{X}^I + X'^I X'^I) \\ X'^- = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I X'^I + X'^I \dot{X}^I) \end{cases} \quad (6.3)$$

Vamos lá atrás resgatar a expressão (4.22). Fazendo $\mu = -$ e substituindo pela primeira equação em (6.3), vamos ficar com:

$$\mathcal{P}^{\tau-} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \dot{X}^I + X'^I X'^I) \quad (6.4)$$

Também é imediato que fazendo $\mu = I$ em (4.22), vamos ter:

$$\mathcal{P}^{\tau I} = \frac{\dot{X}^I}{2\pi\alpha'} \longrightarrow \dot{X}^I = 2\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau I} \quad (6.5)$$

Essa equação é importante, porque podemos jogá-la em (6.4). Fazendo as devidas simplificações, vamos obter:

$$\mathcal{P}^{\tau-} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} \left((2\pi\alpha')^2 \mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{(2\pi\alpha')^2}{(2\pi\alpha')^2} X'^I X'^I \right) \quad (6.6)$$

$$\mathcal{P}^{\tau-} = \frac{\pi}{2p^+} \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X'^I X'^I}{(2\pi\alpha')^2} \right) \quad (6.7)$$

Vamos deixar esse resultado guardado, daqui a pouco vamos usá-lo. Faremos uma pausa para deduzir a hamiltoniana. Na mecânica quântica o operador hamiltoniano é definido como $H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$. Em unidades naturais o \hbar desaparece e vamos desaparecer também com o i . Isso não significa que a hamiltoniana não é complexa, mas sim que esse i pode estar aparecendo em outros termos que compõe a hamiltoniana. Por razões lógicas, vamos trocar t por τ , pois é o parâmetro associado ao tempo que estamos trabalhando. Se analisarmos o operador momento na mecânica quântica, $P = i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, podemos fazer a mesma análise, só que diferente da hamiltoniana, vamos associar o momento p^- à derivada na coordenada X^+ do cone de luz. Então ficamos com:

$$\begin{cases} H \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \tau} \\ p^- \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial X^+} \end{cases} \quad (6.8)$$

Prosseguindo com os cálculos, vamos relembrar também do X^+ em (4.65), quando $\beta = 2$.

$$H = \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial X^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = \frac{\partial}{\partial \tau} [2\alpha' p^+ \tau] p^- \quad (6.9)$$

$$H = 2\alpha' p^+ p^- \quad (6.10)$$

Podemos ir além e abrir p^- usando a definição (4.9). Vamos lembrar que os limites da corda aberta vão de $\sigma = 0$ até $\sigma = \pi$.

$$H = 2\alpha' p^+ \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^{\tau-}(\tau, \sigma) \quad (6.11)$$

Essa é a hamiltoniana da corda aberta. Agora é nítido onde vai entrar a equação (6.7). Vou escrever toda a expressão e já fazer as simplificações.

$$H(\tau) = 2\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left(\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) + \frac{X'^I(\tau, \sigma) X'^I(\tau, \sigma)}{(2\pi\alpha')^2} \right) \quad (6.12)$$

Escrevemos a hamiltoniana da corda aberta em operadores que dependem do tempo τ . Devemos dar atenção a isso! Pois bem, vale destacar é que a hamiltoniana que obtivemos em (6.10) é exatamente igual ao modo transversal de Virasoro L_0^\perp em (4.84). Ou seja:

$$H = L_0^\perp \quad (6.13)$$

Não vai ser importante agora, porém mais adiante vamos trabalhar nisso. Por agora tiramos bons resultados para a hamiltoniana. Nosso próximo passo é fazer uma análise de como as condições de contorno da corda aberta vão ficar na mecânica quântica, mas antes devemos definir o pilar mais importante, que são os operadores e algumas relações de comutação.

6.1.2 Operadores e Relações de Comutação Canônicas

Podemos começar essa subseção falando dos operadores mais importantes que vamos usar. No capítulo 4 vimos as variáveis dinâmicas do nosso sistema, que agora serão tratadas como operadores. As mais importantes são X_0^- , X^I , p^+ e p^I . Porém, há uma questão a se considerar, estes operadores podem depender do tempo ou não. Em geral, podemos tratar a mecânica quântica de duas formas. Podemos usar a *Representação de Schrödinger* que é quando o estado de um sistema evolui no tempo e os operadores ficam inalterados. Ou podemos usar também a *Representação de Heisenberg* que é quando os operadores evoluem no tempo o estado do sistema fica inalterado. A grosso modo, vamos ter duas versões de operadores, sendo elas suas versões dependentes do tempo e as que não dependem do tempo. Vamos chama-las respectivamente de *Operadores de Heisenberg* e *Operadores de Schrödinger*. A relação é até que simples de passar de um para o outro, vamos ver como funciona na prática!

Seja $\alpha(t)$ um operador de Heisenberg e α o operador de Schrödinger correspondente, sempre vamos poder escrever:

$$\boxed{\alpha(t) = e^{iHt} \alpha e^{-iHt}} \quad (6.14)$$

Prosseguindo com o estudo, vamos postular algumas relações de comutação. Na mecânica quântica, a relação de comutação canônica entre a posição e momento numa mesma direção é $i\hbar$, enquanto que em direções diferentes é zero. Isso é muito importante destacar, porque os operadores de posição e momento não vão comutar se forem ambos da mesma direção. Deixando isso claro, como os operadores vão carregar os índices do cone de luz, eles não vão comutar se compartilharem o mesmo índice do cone de luz, com exceção dos índices $+$ e $-$ que são amarrados. Resolvemos essas questões dos índices colocando a matriz $\eta^{\mu\nu}$ do cone de luz no comutador. Podemos ir além e deixar ainda mais completo, porque os operadores carregam a informação σ , que vai indicar em qual ponto da corda estamos trabalhando. Faz sentido a posição e o momento não comutar no mesmo ponto, mas comutar em pontos distintos da corda. Neste caso, vamos colocar uma delta de Dirac no comutador para garantir que posição e momento não comutem no mesmo ponto da corda, mas comutem em pontos diferentes. Feito essas considerações vamos postular nossas relações de comutação.

$$\left\{ \begin{array}{l} [X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^J(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \\ [X_0^-, p^+] = -i \\ [X^I(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')] = [\mathcal{P}^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^J(\tau, \sigma')] = 0 \\ [X_0^-, X^I(\tau, \sigma)] = [X_0^-, \mathcal{P}^I(\tau, \sigma)] = 0 \\ [p^+, X^I(\tau, \sigma)] = [p^+, \mathcal{P}^I(\tau, \sigma)] = 0 \end{array} \right. \quad (6.15)$$

Faremos aqui duas ressalvas, a primeira delas é que no exemplo usamos operadores de Heisenberg, mas as mesmas relações vão valer para os operadores de Schrödinger, uma vez que a passagem (6.14) não muda essas relações de comutação, isso é até que fácil de demonstrar. A segunda ressalva é que foi proposital escrevermos X_0^- e p^+ como operadores que não dependem do tempo, porque se compararmos essas relações de comutação e a hamiltoniana que obtivemos em (6.12), esses operadores comutam com a hamiltoniana e por isso eles não tem dependência temporal. Deixando estas relações bem esclarecidas, vamos agora trabalhar as condições de contorno da corda aberta.

6.1.3 Condições de Contorno da Corda Aberta na Mecânica Quântica

Neste capítulo, estamos transformando o que antes eram grandezas escalares ou vetoriais, em operadores. Deste modo, as condições de contorno da corda aberta vão se tornar equações

de operadores. Trabalhamos bastante da condição de contorno de Neumann (2.8) e como as coordenadas transversais são os graus de liberdade do nosso sistema, a condição de contorno de Neumann será:

$$\partial_\sigma X^I(\tau, \sigma) = 0 \quad (6.16)$$

Sempre que $\sigma = 0$ e $\sigma = \pi$. Essa condição diz que o operador $\partial_\sigma X^I(\tau, \sigma)$ desaparece nas extremidades da corda aberta. Agora vamos desenvolver outras expressões importantes usando os comutadores que postulamos em (6.15). Vamos tomar a primeira relação de comutação e aplicar a expressão (6.5).

$$\left[X^I(\tau, \sigma), \frac{\dot{X}^J(\tau, \sigma')}{2\pi\alpha'} \right] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.17)$$

$$[X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.18)$$

Agora derivamos em σ os dois lados da equação.

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} [X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = \frac{\partial}{\partial\sigma} [2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma')] \quad (6.19)$$

$$\left[\frac{\partial X^I(\tau, \sigma)}{\partial\sigma}, \dot{X}^J(\tau, \sigma') \right] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.20)$$

$$[X'^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.21)$$

Vamos reescrever essa equação acima de um jeito diferente, trocando os índices I e J de lugar, colocando um sinal negativo e também trocando de lugar os parâmetros σ e σ' . A regra será mantida, a equação só será reescrita.

$$- [X'^J(\tau, \sigma'), \dot{X}^I(\tau, \sigma)] = -2\pi\alpha' i\eta^{JI} \frac{\partial}{\partial\sigma'} \delta(\sigma' - \sigma) \quad (6.22)$$

Uma propriedade da delta de Dirac, é que se inverter o sinal do argumento, ela tem que dar a mesma coisa. Ou seja, $\delta(\sigma' - \sigma) = \delta(\sigma - \sigma')$. O sinal ao lado de fora também pode entrar no argumento da derivada da delta, ou seja, $-\frac{\partial}{\partial\sigma} \delta(\sigma' - \sigma) = \frac{\partial}{\partial\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$. Além disso, podemos fazer as derivadas independer do parâmetro, de modo que $\frac{\partial}{\partial\sigma'} \delta(\sigma' - \sigma) = \frac{\partial}{\partial\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$. Com isso, fazendo essas três manipulações, podemos fazer o lado direito da equação voltar para a forma original em (6.21). Já no lado esquerdo, vamos inverter a ordem do comutador, que vai fazer ele ficar negativo e cancelar os sinais de menos.

$$[\dot{X}^I(\tau, \sigma), X'^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i \eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.23)$$

Somando a equação (6.23) com a equação (6.21), dobramos o lado direito.

$$[\dot{X}^I(\tau, \sigma), X'^J(\tau, \sigma')] + [X''(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 4\pi\alpha' i \eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.24)$$

Prosseguindo, precisamos simplificar essa soma de comutadores. Agora vamos mexer somente no lado esquerdo da equação. Por facilidade, vamos dizer que $[\dot{X}^I(\tau, \sigma), X'^J(\tau, \sigma')] + [X''(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] \equiv B$, só para não ter que ficar repetindo essa soma toda hora.

$$B = \dot{X}^I(\tau, \sigma) X'^J(\tau, \sigma') - X'^J(\tau, \sigma') \dot{X}^I(\tau, \sigma) + X''(\tau, \sigma) \dot{X}^J(\tau, \sigma') - \dot{X}^J(\tau, \sigma') X''(\tau, \sigma) \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} B = & \dot{X}^I(\tau, \sigma) X'^J(\tau, \sigma') + X''(\tau, \sigma) \dot{X}^J(\tau, \sigma') \\ & - \dot{X}^J(\tau, \sigma') X''(\tau, \sigma) - X'^J(\tau, \sigma') \dot{X}^I(\tau, \sigma) \end{aligned} \quad (6.26)$$

Vamos somar zero nessa equação:

$$\begin{cases} \dot{X}^I(\tau, \sigma) \dot{X}^J(\tau, \sigma') - \dot{X}^I(\tau, \sigma) \dot{X}^J(\tau, \sigma') = 0 \\ X''(\tau, \sigma) X'^J(\tau, \sigma') - X''(\tau, \sigma) X'^J(\tau, \sigma') = 0 \end{cases} \quad (6.27)$$

Uma observação importante, a ordem dos termos acima pode ser invertida, devido ao terceiro comutador em (6.15). Se $X^I(\tau, \sigma)$ comuta com $X^J(\tau, \sigma')$, suas derivadas também vão comutar. Dito isso, jogaremos (6.27) em (6.26) e ficamos com:

$$\begin{aligned} B = & \dot{X}^I(\tau, \sigma) X'^J(\tau, \sigma') + X''(\tau, \sigma) \dot{X}^J(\tau, \sigma') + \dot{X}^I(\tau, \sigma) \dot{X}^J(\tau, \sigma') + X''(\tau, \sigma) X'^J(\tau, \sigma') \\ & - \dot{X}^J(\tau, \sigma') X''(\tau, \sigma) - X'^J(\tau, \sigma') \dot{X}^I(\tau, \sigma) - \dot{X}^J(\tau, \sigma') \dot{X}^I(\tau, \sigma) - X'^J(\tau, \sigma') X''(\tau, \sigma) \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$B = \{\dot{X}^I + X''\}(\tau, \sigma) \{\dot{X}^J + X'^J\}(\tau, \sigma') - \{\dot{X}^J + X'^J\}(\tau, \sigma') \{\dot{X}^I + X''\}(\tau, \sigma) \quad (6.29)$$

$$B = [\{\dot{X}^I + X''\}(\tau, \sigma), \{\dot{X}^J + X'^J\}(\tau, \sigma')] \quad (6.30)$$

Chegamos aonde queríamos, porque definimos B como sendo o lado esquerdo da equação (6.24). Desta forma, podemos escrever:

$$[\{\dot{X}^I + X'^I\}(\tau, \sigma), \{\dot{X}^J + X'^J\}(\tau, \sigma')] = 4\pi\alpha' i \eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.31)$$

E se fizermos a subtração? Já vou adiantar o resultado.

$$[\{\dot{X}^I - X'^I\}(\tau, \sigma), \{\dot{X}^J - X'^J\}(\tau, \sigma')] = -4\pi\alpha' i \eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.32)$$

A explicação do desenvolvimento de (6.32) é bem imediata. Lembra dos termos que somam zero que usamos em (6.27)? Pois então, os termos positivos de (6.27) vão se agrupar com os termos cruzados negativos e os termos cruzados positivos vão se agrupar com os termos negativos de (6.27). Isso significa que estamos trabalhando com a mesma soma em módulo, o que implica que em módulo o resultado tem que ser o mesmo. Entretanto, embora o módulo não mude, a ordem dos sinais dos termos cruzados mudam. Como os termos que vem de (6.27) não vão interferir no resultado, inverter o sinal dos termos cruzados vai significar inverter o sinal do resultado. Portanto, podemos juntar (6.31) com (6.32) e generalizar essas expressões.

$$[\{\dot{X}^I \pm X'^I\}(\tau, \sigma), \{\dot{X}^J \pm X'^J\}(\tau, \sigma')] = \pm 4\pi\alpha' i \eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.33)$$

Esse resultado por si só já é muito bom, contudo dá para extrair ainda mais informações. Uma vez que só os termos cruzados contribuem para o comutador, eliminar os termos cruzados significa que o comutador vai dar zero. Assim podemos escrever:

$$[\{\dot{X}^I \pm X'^I\}(\tau, \sigma), \{\dot{X}^J \mp X'^J\}(\tau, \sigma')] = 0 \quad (6.34)$$

Com isso temos todas as ferramentas necessárias para desenvolver a dinâmica das coordenadas transversais de uma corda aberta quântica relativística. Vamos ver adiante, como escrever $X^I(\tau, \sigma)$ em termos dos operadores de criação e aniquilação.

6.1.4 Coordenadas Transversais em Termos dos Operadores de Criação e Aniquilação

No capítulo anterior, vimos a importância de escrever os operadores responsáveis pelo movimento de uma partícula em termos dos operadores de criação e aniquilação. Na teoria de cordas não será diferente, só que o operador responsável pelo movimento da corda aberta é o $X^I(\tau, \sigma)$. No capítulo 4 desenvolvemos uma expressão para esse operador (4.74), porém essa expressão não era quantizada. Nesta subseção vamos quantizar essa expressão! Nosso ponto de partida será a primeira equação em (4.75), destacando que $\sigma \in [0, \pi]$ para cordas abertas. Vamos mexer nessa equação, de modo a mudar os limites de σ . Neste caso, quero que $\sigma \in [-\pi, 0]$. Então vou escrever:

$$\dot{X}^I - X'^I(\tau, -\sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau+\sigma)} \equiv A^I(\tau, \sigma) \quad (6.35)$$

Por agora vai ser uma vantagem chamar toda essa expressão de um operador $A^I(\tau, \sigma)$. Mais para frente vamos nos livrar dessa nomenclatura, mas por enquanto vai simplificar nossos cálculos. Perceba que $A^I(\tau, \sigma + 2\pi) = A^I(\tau, \sigma)$, essa periodicidade é muito importante. Se fizermos $A^I(\tau, \sigma)$ ter um intervalo de $\sigma \in [-\pi, \pi]$, podemos escrever:

$$A^I(\tau, \sigma) = \begin{cases} \dot{X}^I + X'^I(\tau, \sigma), & \sigma \in [0, \pi] \\ \dot{X}^I - X'^I(\tau, -\sigma), & \sigma \in [-\pi, 0] \end{cases} \quad (6.36)$$

Se quisermos calcular o comutador $[A^I(\tau, \sigma), A^J(\tau, \sigma')]$ é necessário calcular quatro tipos de comutadores. Vou listá-los abaixo.

$$\left\{ \begin{array}{ll} [\{\dot{X}^I + X'^I\}(\tau, \sigma), \{\dot{X}^J + X'^J\}(\tau, \sigma')] , & \sigma, \sigma' \in [0, \pi] \\ [\{\dot{X}^I + X'^I\}(\tau, \sigma), \{\dot{X}^J - X'^J\}(\tau, -\sigma')] , & \sigma \in [0, \pi], \sigma' \in [-\pi, 0] \\ [\{\dot{X}^I - X'^I\}(\tau, -\sigma), \{\dot{X}^J + X'^J\}(\tau, \sigma')] , & \sigma \in [-\pi, 0], \sigma' \in [0, \pi] \\ [\{\dot{X}^I - X'^I\}(\tau, -\sigma), \{\dot{X}^J - X'^J\}(\tau, -\sigma')] , & \sigma, \sigma' \in [-\pi, 0] \end{array} \right. \quad (6.37)$$

O primeiro comutador nós já calculamos em (6.31). O último também é fácil de ver ao usar a equação (6.32) e a propriedade da delta de Dirac de poder trocar livremente o sinal do argumento.

$$[\{\dot{X}^I - X'^I\}(\tau, -\sigma), \{\dot{X}^J - X'^J\}(\tau, -\sigma')] = -4\pi\alpha' i \eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial(-\sigma)} \delta(-\sigma + \sigma') \quad (6.38)$$

$$[\{\dot{X}^I - X'^I\}(\tau, -\sigma), \{\dot{X}^J + X'^J\}(\tau, \sigma')] = 4\pi\alpha' i \eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.39)$$

O último comutador dá o mesmo resultado que o primeiro comutador, só que com limites diferentes para σ . Resta agora avaliar os comutadores do meio. Seguindo a mesma linha de raciocínio, usando a equação (6.34), dá para ver que os comutadores do meio vão ser nulos. Portanto, somente o primeiro e o último comutador vão contribuir e assim podemos escrever:

$$[A^I(\tau, \sigma), A^J(\tau, \sigma')] = 4\pi\alpha' i \eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \quad \sigma, \sigma' \in [-\pi, \pi] \quad (6.40)$$

Podemos abrir os operadores $A^I(\tau, \sigma)$ e $A^J(\tau, \sigma')$ pela definição em (6.35).

$$\left[\sqrt{2\alpha'} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m^I e^{-im(\tau+\sigma)}, \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^J e^{-in(\tau+\sigma')} \right] = 4\pi \alpha' i \eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.41)$$

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} e^{-im(\tau+\sigma)} e^{-in(\tau+\sigma')} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] = 2\pi i \eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.42)$$

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} e^{-im\sigma} e^{-in\sigma'} e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] = 2\pi i \eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.43)$$

A partir daqui, vamos trabalhar a equação (6.43) separadamente. Vamos realizar a operação $\frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{ia\sigma} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{ib\sigma'}$ nos dois lados da equação, onde $a, b \in \mathbb{Z}$. O lado esquerdo vai ser chamado de B e o lado direito vai ser chamado de C . Deste modo, vamos ter:

$$\left\{ \begin{array}{l} B \equiv \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{ia\sigma} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{ib\sigma'} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} e^{-im\sigma} e^{-in\sigma'} e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] \\ C \equiv \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{ia\sigma} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{ib\sigma'} 2\pi i \eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \end{array} \right. \quad (6.44)$$

Essa construção é tal que $B = C$, respeitando a relação (6.43). Fazer essa separação vai facilitar os cálculos. Então por agora, vamos trabalhar em B e depois trabalhamos em C .

$$B = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{ia\sigma} e^{-im\sigma} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{ib\sigma'} e^{-in\sigma'} e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] \quad (6.45)$$

$$B = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(a-m)\sigma} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{i(b-n)\sigma'} e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] \quad (6.46)$$

Vamos separar do somatório a parte da soma em que $m = a$ e $n = b$. Veja que as exponenciais que transportam σ e σ' vão desaparecer no termo extraído do somatório.

$$\begin{aligned} B &= \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ m \neq a \\ n \neq b}} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(a-m)\sigma} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{i(b-n)\sigma'} e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] \\ &\quad + \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\sigma \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{-i(a+b)\tau} [\alpha_a^I, \alpha_b^J] \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned}
B = & \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ m \neq a \\ n \neq b}} \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{i(a-m)} \left[e^{i(a-m)\sigma} \right]_{2\pi}^0 \frac{1}{i(b-n)} \left[e^{i(b-n)\sigma'} \right]_{2\pi}^0 e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] \\
& + \frac{1}{4\pi^2} [\sigma]_{2\pi}^0 [\sigma']_{2\pi}^0 e^{-i(a+b)\tau} [\alpha_a^I, \alpha_b^J]
\end{aligned} \tag{6.48}$$

$$\begin{aligned}
B = & \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ m \neq a \\ n \neq b}} \frac{-1}{4\pi^2 (a-m)(b-n)} \left\{ e^{i2\pi(a-m)} - 1 \right\} \left\{ e^{i2\pi(b-n)} - 1 \right\} e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] \\
& + \frac{1}{4\pi^2} 2\pi 2\pi e^{-i(a+b)\tau} [\alpha_a^I, \alpha_b^J]
\end{aligned} \tag{6.49}$$

Esses termos entre chaves são zero e a justificativa é bem simples. Se abrirmos a exponencial como função trigonométrica, o argumento vai ser múltiplo de 2π , porque $a, b, m, n \in \mathbb{Z}$. Portanto, a parte que compõe o seno vai zerar junto com a parte imaginária e a parte que compõe o cosseno vai ser 1, que vai se cancelar com o -1 fora da exponencial. Em outras palavras, estamos afirmando que $\left\{ e^{i2\pi(a-m)} - 1 \right\} = \left\{ e^{i2\pi(b-n)} - 1 \right\} = 0$. Significa que todo o somatório vai ser nulo, restando somente a parte que está fora do somatório.

$$B = e^{-i(a+b)\tau} [\alpha_a^I, \alpha_b^J] \tag{6.50}$$

Tendo em vista que a e b são valores inteiros arbitrários, podemos mudar o nome para $a = m$ e $b = n$. Por fim, ficamos com:

$$B = e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] \tag{6.51}$$

Concluimos aqui a simplificação de B . Agora vamos trabalhar em C (6.44).

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{ia\sigma} \int_0^{2\pi} d\sigma' e^{ib\sigma'} i\eta^{IJ} \frac{\partial}{\partial \sigma} \delta(\sigma - \sigma') \tag{6.52}$$

$$C = \frac{i\eta^{IJ}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{ia\sigma} \frac{d}{d\sigma} \left[\int_0^{2\pi} d\sigma' e^{ib\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') \right] \tag{6.53}$$

$$C = \frac{i\eta^{IJ}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{ia\sigma} \frac{d}{d\sigma} [e^{ib\sigma}] \tag{6.54}$$

$$C = \frac{i\eta^{IJ}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{ia\sigma} ib e^{ib\sigma} \tag{6.55}$$

$$C = -\frac{b \eta^{IJ}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(a+b)\sigma} \quad (6.56)$$

Lembrando que podemos mudar os nomes de a e b . Em (6.51) mudamos para $a = m$ e $b = n$.

$$C = -\frac{n \eta^{IJ}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(m+n)\sigma} \quad (6.57)$$

Vamos analisar essa integração! Aqui temos dois casos, o primeiro é quando $m + n = 0$ e neste caso a exponencial vai desaparecer e a integral vai dar 2π .

$$\int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(m+n)\sigma} \Big|_{m+n=0} = \int_0^{2\pi} d\sigma = [\sigma]_{2\pi}^0 = \{2\pi - 0\} = 2\pi \quad (6.58)$$

O segundo caso é quando $m + n \neq 0$ e a exponencial não desaparece. Vamos resolver este caso.

$$\int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(m+n)\sigma} \Big|_{m+n \neq 0} = \frac{1}{i(m+n)} \left[e^{i(m+n)\sigma} \right]_{2\pi}^0 = \frac{1}{i(m+n)} \left\{ e^{i2\pi(m+n)} - 1 \right\} \quad (6.59)$$

Veja que caímos numa passagem parecida em que vimos em (6.49). O termo entre chaves vai ser zero usando literalmente a mesma justificativa. Neste caso $\left\{ e^{i2\pi(m+n)} - 1 \right\} = 0$ e isso implica que a integração é zero quando $m + n \neq 0$.

$$\int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(m+n)\sigma} \Big|_{m+n \neq 0} = 0 \quad (6.60)$$

Juntando o resultado que obtemos em (6.58) com o resultado recém obtido (6.60), podemos determinar essa integração por meio de uma delta de Kronecker.

$$\int_0^{2\pi} d\sigma e^{i(m+n)\sigma} = 2\pi \delta_{m+n,0} \quad (6.61)$$

Determinamos a integral, agora vamos substituir em (6.57). Já vou deixar simplificado.

$$C = -n \eta^{IJ} \delta_{m+n,0} \quad (6.62)$$

Não queremos zerar toda a nossa expressão, então podemos já fixar que $m + n = 0$ e isso implica que $m = -n$. Portanto, também podemos escrever:

$$C = m \eta^{IJ} \delta_{m+n,0} \quad (6.63)$$

A presença da delta de Kronecker nos permite essa escrita. Agora podemos juntar (6.63) com o que obtemos em (6.51). Lembrando que $B = C$, de modo a respeitar a relação (6.43).

$$e^{-i(m+n)\tau} [\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m \eta^{IJ} \delta_{m+n,0} \quad (6.64)$$

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m \eta^{IJ} \delta_{m+n,0} e^{i(m+n)\tau} \quad (6.65)$$

Perceba que é irrelevante manter a exponencial nessa expressão, porque se $m+n \neq 0$, independente do valor da exponencial, a delta de Kronecker vai zerar tudo. Se $m+n = 0$, a exponencial vai desaparecer e a delta de Kronecker também. Ou seja, ter essa exponencial ali ou não, não muda o resultado, então podemos simplificar tirando a exponencial.

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m \eta^{IJ} \delta_{m+n,0} \quad (6.66)$$

Essa é uma relação de comutação fundamental, devemos guardar bem essa informação, porque vamos usa-la bastante. Devemos agora relembrar nosso objetivo. Queremos escrever o operador responsável pelo movimento da corda aberta $X^I(\tau, \sigma)$ em termos dos operadores de criação e aniquilação da corda. Para isso, precisamos provar quem são os operadores de criação e aniquilação da corda. Já podemos ter uma ideia pois estamos usando uma notação proposital, mas ainda não é evidente, então vamos provar efetivamente. Deixando isso claro, será importante calcular alguns comutadores. Vamos começar pelo comutador entre $X^I(\tau, \sigma)$ e $\dot{X}^J(\tau, \sigma')$ (6.18), vou integrar em σ os dois lados da equação.

$$\int_0^\pi d\sigma [X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = \int_0^\pi d\sigma 2\pi \alpha' i \eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.67)$$

$$\left[\int_0^\pi d\sigma X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma') \right] = 2\pi \alpha' i \eta^{IJ} \int_0^\pi d\sigma \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.68)$$

Pelas propriedades da delta de Dirac, sabemos que $\int_0^\pi d\sigma \delta(\sigma - \sigma') = 1$.

$$\left[\int_0^\pi d\sigma X^I(\tau, \sigma), \dot{X}^J(\tau, \sigma') \right] = 2\pi \alpha' i \eta^{IJ} \quad (6.69)$$

Vamos guardar o lado direito da equação e abrir somente o comutador. Primeiro, vamos ver como se comporta essa integração. Usaremos a primeira equação em (4.74).

$$\int_0^\pi d\sigma X^I(\tau, \sigma) = \int_0^\pi d\sigma \left(X_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^I e^{-in\tau} \frac{\cos(n\sigma)}{n} \right) \quad (6.70)$$

$$\int_0^\pi d\sigma X^I(\tau, \sigma) = X_0^I \pi + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau \pi + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^I e^{-in\tau} \frac{[\sin(n\sigma)]_\pi^0}{n} \quad (6.71)$$

Como n é um número inteiro diferente de zero, temos que $[\sin(n\sigma)]_\pi^0 = 0$. Deste modo, todo o termo que carrega o somatório é zerado.

$$\int_0^\pi d\sigma X^I(\tau, \sigma) = X_0^I \pi + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau \pi \quad (6.72)$$

Podemos já inserir o resultado dessa integração em (6.69).

$$\left[X_0^I \pi + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau \pi, \dot{X}^J(\tau, \sigma') \right] = 2\pi \alpha' i \eta^{IJ} \quad (6.73)$$

$$\left[X_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau, \dot{X}^J(\tau, \sigma') \right] = 2\alpha' i \eta^{IJ} \quad (6.74)$$

Vamos lembrar de quem é α_0^I . Nós podemos determinar a partir de (4.71).

$$\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'} p^I \quad (6.75)$$

Não é um mistério p^I comutar com \dot{X}^I , pois dando uma interpretação para esses operadores, p^I é o momento nas direções I e \dot{X}^I são as velocidades associadas a este momento e canonicamente, momento comuta com sua respectiva velocidade. Portanto, podemos determinar que:

$$[\alpha_0^I, \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 0 \quad (6.76)$$

Deste modo, em (6.74) vai restar:

$$[X_0^I, \dot{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\alpha' i \eta^{IJ} \quad (6.77)$$

Agora é a hora de expandir $\dot{X}^J(\tau, \sigma')$. Usaremos a primeira equação em (4.53).

$$\dot{X}^I(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \quad (6.78)$$

Essa expressão será jogada no comutador (6.77), só que vamos dar novos nomes. Faremos n se chamar n' e σ' pode ser chamado de σ .

$$\left[X_0^I, \sqrt{2\alpha'} \sum_{n' \in \mathbb{Z}} \alpha_{n'}^I e^{-in'\tau} \cos(n'\sigma) \right] = 2\alpha' i \eta^{IJ} \quad (6.79)$$

$$\sum_{n' \in \mathbb{Z}} e^{-in'\tau} \cos(n'\sigma) [X_0^I, \alpha_{n'}^J] = \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ} \quad (6.80)$$

Vamos mexer no somatório. Veja que vai dar a mesma coisa! Nós vamos extrair o termo $n' = 0$ que faz o cosseno e a exponencial darem 1 e vamos manipular os sinais da exponencial e do índice n' no comutador para dar a mesma coisa, de modo a mudar os limites do somatório. Não vamos precisar fazer essa manipulação para o cosseno, porque o sinal no argumento do cosseno não importa. Se o argumento do cosseno for positivo ou negativo, ele vai dar o mesmo valor. Pois bem, vamos para as modificações.

$$[X_0^I, \alpha_0^J] + \sum_{n'=1}^{\infty} [X_0^I, \alpha_{n'}^J e^{-in'\tau} + \alpha_{-n'}^J e^{in'\tau}] \cos(n'\sigma) = \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ} \quad (6.81)$$

Agora vamos realizar a operação $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\pi) = 0$. De imediato o primeiro termo no lado esquerdo e todo o lado direito da equação vai zerar. Vamos ficar com:

$$\sum_{n'=1}^{\infty} [X_0^I, \alpha_{n'}^J e^{-in'\tau} + \alpha_{-n'}^J e^{in'\tau}] \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\pi) \cos(n'\sigma) = 0 \quad (6.82)$$

Essas manipulações foram propositalmente para eliminar o somatório. A integração que se formou vai ser zero quando $n \neq n'$. Porém essa integral dá $\frac{1}{2}$ quando $n = n'$. Deste modo, nessa construção o lado esquerdo da equação vai zerar para todos os valores do somatório, exceto para $n = n'$. Vamos prosseguir com esse único termo do somatório e também já vamos eliminar as constantes por estar igualado a zero.

$$[X_0^I, \alpha_n^J e^{-in\tau} + \alpha_{-n}^J e^{in\tau}] = 0 \quad (6.83)$$

$$[X_0^I, \alpha_n^J] e^{-in\tau} + [X_0^I, \alpha_{-n}^J] e^{in\tau} = 0 \quad (6.84)$$

$$[X_0^I, \alpha_n^J] e^{-in\tau} = -[X_0^I, \alpha_{-n}^J] e^{in\tau} \quad (6.85)$$

$$[X_0^I, \alpha_n^J] (-e^{-2in\tau}) = [X_0^I, \alpha_{-n}^J] \quad (6.86)$$

Agora entra uma análise sutil. Os comutadores são constantes quando fixamos o valor de n . Entretanto, a exponencial não é constante ao fixar o valor n porque τ é variável. Temos então um valor constante vezes um valor variável sendo igual a um valor constante. Essa relação só vai se sustentar se ambos os comutadores forem zero. Zero vezes um valor variável vai dar zero. Lembra que em (6.81) extraímos do somatório os termos em que $n' = n = 0$? Pois então,

os valores de n que estamos trabalhando em (6.86) são todos $n \neq 0$. Isso implica que esses comutadores vão ser nulos para todo $n \neq 0$.

$$[X_0^I, \alpha_n^J] \big|_{n \neq 0} = 0 \quad (6.87)$$

Esse resultado é importantíssimo, porque por ele, podemos zerar todo o somatório em (6.81). Assim ficamos com:

$$[X_0^I, \alpha_0^J] = \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ} \quad (6.88)$$

Lembrando da relação (6.75):

$$[X_0^I, \sqrt{2\alpha'} p^J] = \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ} \quad (6.89)$$

$$[X_0^I, p^J] = i \eta^{IJ} \quad (6.90)$$

Um resultado assim era até que esperado. Como nas relações de comutação canônicas, podemos dizer que na mecânica quântica, os operadores X_0^I e p^J são hermitianos. Ou seja, $X_0^I = X_0^{I\dagger}$ e $p^J = p^{J\dagger}$. Já estamos bem perto de identificar os operadores de criação e aniquilação da teoria. Por agora, vamos lembrar da origem do α_n^I desenvolvida no capítulo 4 (4.49). Como estamos fazendo uma abordagem quântica, o conjugado vai se tornar um dagger (\dagger).

$$\begin{cases} \alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'} p^I \\ \alpha_n^I = a_n^I \sqrt{n} \\ \alpha_{-n}^I = \alpha_n^{I\dagger} = a_n^{I\dagger} \sqrt{n} \end{cases} \quad (6.91)$$

Prosseguindo, vamos revisitar a relação de comutação canônica (6.66). Nela devemos analisar dois casos. O primeiro caso é quando m e n são números inteiros positivos. Esse é bem fácil de visualizar, porque $m+n$ nunca vai dar zero, a não ser que ambos sejam zero. Neste caso a delta de Kronecker sempre vai zerar a expressão e mesmo que ambos sejam zero, ter $m=0$ também zera a expressão.

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = [\alpha_m^{I\dagger}, \alpha_n^{J\dagger}] = 0 \quad (6.92)$$

Usando as passagens em (6.91):

$$[a_m^I, a_n^J] = [a_m^{I\dagger}, a_n^{J\dagger}] = 0 \quad (6.93)$$

O segundo caso é quando m e n são números inteiros e de sinais opostos.

$$[\alpha_m^I, \alpha_{-n}^J] = m \eta^{IJ} \delta_{m-n,0} = m \eta^{IJ} \delta_{m,n} \quad (6.94)$$

De novo, usando as passagens em (6.91):

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^{J\dagger}] = m \eta^{IJ} \delta_{m,n} \quad (6.95)$$

$$[a_m^I \sqrt{n}, a_n^{J\dagger} \sqrt{n}] = m \eta^{IJ} \delta_{m,n} \quad (6.96)$$

$$[a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \frac{m}{\sqrt{mn}} \eta^{IJ} \delta_{m,n} \quad (6.97)$$

A delta de Kronecker vai zerar sempre que $n \neq m$, então podemos fazer $m = n$ só para cortar a fração e não mexer na delta e nem nos índices do comutador. Assim ficamos com:

$$[a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \eta^{IJ} \delta_{m,n} \quad (6.98)$$

Estão bem aqui os operadores de criação e aniquilação! O primeiro caso (6.93) e o segundo caso (6.98) nos dão a definição canônica dos operadores de criação e aniquilação da corda aberta. Basta comparar com a definição deles no caso das partículas pontais em (5.51). Portanto, agora $a_n^{I\dagger}$ será o nosso operador de criação e a_n^I será o nosso operador de aniquilação. Chegamos a um resultado muito importante, porque temos tudo para determinar quanticamente o operador de coordenada $X^I(\tau, \sigma)$. Usaremos a primeira equação em (4.74) e vamos aplicar (6.75) nessa equação.

$$X^I(\tau, \sigma) = X_0^I + 2\alpha' p^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^I e^{-in\tau} \frac{\cos(n\sigma)}{n} \quad (6.99)$$

Faremos a mesma modificação no somatório que fizemos em (6.81), só que agora como esse somatório tem um termo $\frac{1}{n}$, isso deve ser levado em conta. Na prática vamos ter que garantir a aparição dos termos negativos.

$$X^I(\tau, \sigma) = X_0^I + 2\alpha' p^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^I e^{-in\tau} - \alpha_{-n}^I e^{in\tau}) \frac{\cos(n\sigma)}{n} \quad (6.100)$$

Por fim, usamos as passagens em (6.91).

$$X^I(\tau, \sigma) = X_0^I + 2\alpha' p^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^I \sqrt{n} e^{-in\tau} - a_n^{I\dagger} \sqrt{n} e^{in\tau}) \frac{\cos(n\sigma)}{n} \quad (6.101)$$

$$X^I(\tau, \sigma) = X_0^I + 2\alpha' p^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^I e^{-in\tau} - a_n^{I\dagger} e^{in\tau} \right) \frac{\cos(n\sigma)}{\sqrt{n}} \quad (6.102)$$

Este é o operador de coordenadas transversais da corda aberta escrito em termos dos operadores de criação e aniquilação. Com este operador é possível determinar a dinâmica das cordas abertas. Chegamos a um resultado muito importante, pois estamos cada vez mais perto de representar as partículas por meio dessa teoria. Nosso próximo passo será trabalhar uma álgebra que também é muito importante na teoria de cordas. Vamos desenvolver a *Álgebra de Virasoro*.

6.2 Álgebra de Virasoro

Determinar a álgebra de Virasoro será um passo fundamental para o desenvolvimento da teoria. Aqui nós vamos revisar os modos transversais de Virasoro, que determinamos no capítulo 4. Esses modos transversais de Virasoro aqui vão se chamar *Operadores Transversais de Virasoro*, uma vez que estamos tratando com uma abordagem quântica. Em seguida, vamos calcular alguns comutadores importantes, envolvendo este operador, para depois determinarmos a *Álgebra de Virasoro Extendida Centralmente*. Com isso vamos ter o real comportamento da álgebra de Virasoro. Nosso objetivo aqui é construir uma base matemática importante para determinar a dimensionalidade do espaço-tempo na próxima seção.

6.2.1 Operador Transversal de Virasoro e Operador de Massa ao Quadrado

Primeiro de tudo, vamos desenvolver os operadores transversais de Virasoro. Para isso, podemos reaproveitar o desenvolvimento dos modos transversais de Virasoro (4.81). A ideia é a mesma, entretanto, vimos na subseção anterior que os operadores α_p^I podem não comutar. Neste caso, a ordem do termo $\alpha_{n-p}^I \alpha_p^I$ dentro do operador de Virasoro importa. Pelo comutador (6.94) nós já podemos afirmar que a ordem não vai importar para os $n \neq 0$ do operador de Virasoro. A ordem só vai importar quando $n = 0$. Portanto, o único operador que vamos modificar é o L_0^\perp .

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I \quad (6.103)$$

A soma $\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I$ atua muito bem no estado de vácuo, porque primeiro ela aniquila e depois ela cria, devido a essa propriedade, é importante darmos prioridade a essa soma. Faremos então uma modificação na última soma.

$$\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^I \alpha_p^I + [\alpha_p^I, \alpha_{-p}^I]) \quad (6.104)$$

Aqui aplicamos a passagem (6.94):

$$\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^I \alpha_p^I + p \eta^{II}) \quad (6.105)$$

Muita atenção neste trecho, porque é um ponto de extrema importância. O que vamos ressaltar aqui, lá na frente vai se tornar o ponto determinante para definir a dimensionalidade do espaço-tempo. Nesta passagem, vamos ver lá na frente que a teoria de cordas exige um espaço de 26 dimensões. A parte em que temos $p \eta^{II}$, implica que o p vai se repetir uma quantidade equivalente à quantidade de coordenadas transversais, quando somamos os operadores de Virasoro para todas as coordenadas transversais. Ou seja, o p vai se repetir $D - 2$ vezes. Aqui a dimensão já está aparecendo nos nossos cálculos. Teremos então:

$$\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^I \alpha_p^I + p (D - 2)) \quad (6.106)$$

$$\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p (D - 2) \quad (6.107)$$

Desta expressão, é nítido que $\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p (D - 2)$ diverge. Essa é uma soma que vai para infinito. Por agora, isso é muito problemático, esse infinito aparecer nos nossos cálculos. Vamos tira-lo do operador transversal de Virasoro e definir este operador somente até a parte que converge. Deste modo, temos:

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I \quad (6.108)$$

Vamos lembrar das relações (6.91).

$$L_0^\perp = \alpha' p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty} p \alpha_p^{I\dagger} \alpha_p^I \quad (6.109)$$

Este vai ser o nosso operador transversal de Virasoro definitivo. Agora não há problema neste operador, entretanto, não podemos ignorar o termo divergente que tiramos do operador. Vai ser necessário fazermos uma modificação. Em todas as expressões onde anteriormente aparecia o modo transversal de Virasoro L_0^\perp , agora vai aparecer o operador transversal de Virasoro mais uma constante indeterminada referente ao termo divergente $L_0^\perp + a$. Por exemplo, vamos modificar a expressão (4.84):

$$2 \alpha' p^- = \frac{1}{p^+} L_0^\perp \longrightarrow 2 \alpha' p^- \equiv \frac{1}{p^+} (L_0^\perp + a) \quad (6.110)$$

Agora faremos a modificação no operador massa ao quadrado M^2 (4.90).

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(L_0^\perp + a \right) - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} \left(\alpha' p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty} p a_p^{I\dagger} a_p^I + a \right) - p^I p^I \quad (6.111)$$

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(a + \sum_{p=1}^{\infty} p a_p^{I\dagger} a_p^I \right) \quad (6.112)$$

Este será nosso operador massa ao quadrado definitivo, perceba que a constante a influencia na massa, por isso devemos dar bastante atenção ao termo divergente. Para nossa teoria, estes dois operadores que deduzimos L_0^\perp e M^2 vão ser os operadores mais importantes. Agora vamos calcular alguns comutadores que vão fazer parte dos nossos cálculos futuros.

6.2.2 Propriedades de Comutação do Operador Transversal de Virasoro

Antes de partirmos para os cálculos é importante destacar que devido as propriedades (6.91), podemos afirmar que o operador transversal de Virasoro também vai ter a seguinte propriedade: $L_{-n}^\perp = (L_n^\perp)^\dagger$. Essa propriedade é bem fácil de demonstrar! Não podemos esquecer que para $n \neq 0$ continua valendo a relação (4.81), ou seja, $L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I$. Agora vamos ver as propriedades de comutação dos operadores de Virasoro. Começaremos pelo comutador $[L_m^\perp, \alpha_n^J]$.

$$[L_m^\perp, \alpha_n^J] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} [\alpha_{m-p}^I \alpha_p^I, \alpha_n^J] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\alpha_{m-p}^I [\alpha_p^I, \alpha_n^J] + [\alpha_{m-p}^I, \alpha_n^J] \alpha_p^I) \quad (6.113)$$

Usando a relação de comutação fundamental (6.66):

$$[L_m^\perp, \alpha_n^J] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\alpha_{m-p}^I p \eta^{IJ} \delta_{p+n,0} + (m-p) \eta^{IJ} \delta_{m-p+n,0} \alpha_p^I) \quad (6.114)$$

$$[L_m^\perp, \alpha_n^J] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (p \delta_{p+n,0} \alpha_{m-p}^J + (m-p) \delta_{m-p+n,0} \alpha_p^J) \quad (6.115)$$

Devido as deltas de Kronecker, na primeira soma só vai sobreviver o termo em que $p = -n$ e na segunda soma só sobreviver o termo em que $p = m+n$. Assim eliminamos o somatório.

$$[L_m^\perp, \alpha_n^J] = \frac{1}{2} (-n \alpha_{m+n}^J - n \alpha_{m+n}^J) = \frac{1}{2} (-2n \alpha_{m+n}^J) \quad (6.116)$$

$$[L_m^\perp, \alpha_n^J] = -n \alpha_{m+n}^J \quad (6.117)$$

Essa é a primeira relação de comutação. Agora vamos calcular a próxima relação de comutação, que será $[L_m^\perp, X_0^I]$.

$$[L_m^\perp, X_0^I] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} [\alpha_{m-p}^J \alpha_p^J, X_0^I] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\alpha_{m-p}^J [\alpha_p^J, X_0^I] + [\alpha_{m-p}^J, X_0^I] \alpha_p^J) \quad (6.118)$$

Pelos resultados (6.87) e (6.88), a primeira soma só vai haver termo não nulo quando $p = 0$ e a segunda soma só vai haver termo não nulo quando $p = m$. Assim ficamos com:

$$[L_m^\perp, X_0^I] = \frac{1}{2} (\alpha_m^J [\alpha_0^J, X_0^I] + [\alpha_0^J, X_0^I] \alpha_m^J) = -[X_0^I, \alpha_0^J] \alpha_m^J = -i\sqrt{2\alpha'} \eta^{IJ} \alpha_m^J \quad (6.119)$$

$$[L_m^\perp, X_0^I] = -i\sqrt{2\alpha'} \alpha_m^I \quad (6.120)$$

Esta é a segunda relação de comutação. Nosso próximo passo é fazer o comutador de dois operadores transversais de Virasoro. Fazendo este comutador vamos determinar a nossa álgebra de Virasoro. Pois bem, a estrutura do operador transversal de Virasoro que estamos adotando é aquela que determinamos lá no capítulo 4 em (4.81). Entretanto, vai ser bom fazermos uma modificação nessa expressão, de modo a ordena-la normalmente, ou seja, fazê-la atuar bem no estado de vácuo. A ordem normal é quando algo primeiro aniquila e depois cria. Deste modo, podemos escrever a mesma expressão da seguinte maneira:

$$L_m^\perp = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \alpha_{m-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} \alpha_k^I \alpha_{m-k}^I \quad (6.121)$$

Este é o operador transversal de Virasoro ordenado normalmente para atuar bem no estado de vácuo. Agora vamos calcular quem é $[L_m^\perp, L_n^\perp]$.

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} [\alpha_{m-k}^I \alpha_k^I, L_n^\perp] + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} [\alpha_k^I \alpha_{m-k}^I, L_n^\perp] \quad (6.122)$$

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, L_n^\perp] &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} \left(\alpha_{m-k}^I [\alpha_k^I, L_n^\perp] + [\alpha_{m-k}^I, L_n^\perp] \alpha_k^I \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} \left(\alpha_k^I [\alpha_{m-k}^I, L_n^\perp] + [\alpha_k^I, L_n^\perp] \alpha_{m-k}^I \right) \end{aligned} \quad (6.123)$$

Usando a primeira relação de comutação desenvolvida em (6.117), temos:

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, L_n^\perp] &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} (k \alpha_{m-k}^I \alpha_{n+k}^I + (m-k) \alpha_{m-k+n}^I \alpha_k^I) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} ((m-k) \alpha_k^I \alpha_{m-k+n}^I + k \alpha_{n+k}^I \alpha_{m-k}^I) \end{aligned} \quad (6.124)$$

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, L_n^\perp] &= \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} k \alpha_{m-k}^I \alpha_{n+k}^I + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} k \alpha_{n+k}^I \alpha_{m-k}^I + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} (m-k) \alpha_{m-k+n}^I \alpha_k^I \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k < 0} (m-k) \alpha_k^I \alpha_{m-k+n}^I \end{aligned} \quad (6.125)$$

Agora veremos alguns casos que é importante levar em conta. Além disso, devemos garantir a ordenação normal para a expressão continuar atuando bem no estado de vácuo. Então vamos trabalhar cada caso, o primeiro deles é quando $m+n \neq 0$. A estrutura que montamos em (6.125), nesta ordem, é proposital, pois este é um dos casos que vamos poder juntar os somatórios.

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] \Big|_{m+n \neq 0} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \alpha_{m-k}^I \alpha_{n+k}^I + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (m-k) \alpha_{m+n-k}^I \alpha_k^I \quad (6.126)$$

Na primeira soma, podemos fazer $k \rightarrow k-n$. Não vai mudar a soma, pois k vai passar por todos os números inteiros.

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] \Big|_{m+n \neq 0} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (k-n) \alpha_{m+n-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (m-k) \alpha_{m+n-k}^I \alpha_k^I \quad (6.127)$$

Note que algumas somas vão se cancelar. No fim, ficamos com:

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] \Big|_{m+n \neq 0} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (m-n) \alpha_{m+n-k}^I \alpha_k^I = (m-n) \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_{m+n-k}^I \alpha_k^I \quad (6.128)$$

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] \Big|_{m+n \neq 0} = (m-n) L_{m+n}^\perp \quad (6.129)$$

Chegamos ao primeiro comutador que nos dá uma álgebra interessante. Essa é a *Álgebra de Virasoro Sem Extensão Central*, também conhecida como *Álgebra de Witt*. Agora trataremos o próximo caso, que será trabalhando a expressão (1.125), só que para $m+n=0$. Neste caso, vamos ter $n=-m$.

$$\begin{aligned}
[L_m^\perp, L_{-m}^\perp] &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} k \alpha_{m-k}^I \alpha_{k-m}^I + \frac{1}{2} \sum_{k<0} k \alpha_{k-m}^I \alpha_{m-k}^I + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k<0} (m-k) \alpha_k^I \alpha_{-k}^I
\end{aligned} \tag{6.130}$$

Vamos fazer algumas modificações. Na primeira soma faremos $k \rightarrow m+k$. Na segunda soma faremos $k \rightarrow m-k$. A terceira soma vamos manter inalterada $k \rightarrow k$. Por fim, na quarta soma faremos $k \rightarrow -k$. Devemos ficar bem atentos aos limites do somatório ao fazer as modificações! Deste modo, vamos ter:

$$\begin{aligned}
[L_m^\perp, L_{-m}^\perp] &= \frac{1}{2} \sum_{k=-m}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I
\end{aligned} \tag{6.131}$$

Desta expressão, todos os termos tem ordem normal, exceto a primeira soma. Por conta disso, vamos mexer na primeira soma e depois voltar para o cálculo do comutador.

$$\frac{1}{2} \sum_{k=-m}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (m-k) \alpha_k^I \alpha_{-k}^I + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \tag{6.132}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{k=-m}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (m-k) (\alpha_{-k}^I \alpha_k^I + [\alpha_k^I, \alpha_{-k}^I]) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I
\end{aligned} \tag{6.133}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{k=-m}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (m-k) [\alpha_k^I, \alpha_{-k}^I] \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I
\end{aligned} \tag{6.134}$$

Já fizemos um cálculo semelhante anteriormente, mas sempre é bom dar destaque porque estamos lidando com passos bem delicados. Vamos usar a passagem (6.94) no segundo somatório do lado direito.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{k=-m}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (m-k) k \eta^{II} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I
\end{aligned} \tag{6.135}$$

Lembrando que o η^I vai se tornar o número de dimensões transversais $D - 2$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=-m}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + (D-2) \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m k (m-k) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \end{aligned} \quad (6.136)$$

Vamos dar um nome para a soma que vamos trabalhar separadamente mais tarde.

$$A(m) \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m k (m-k) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m k (m-k) = \frac{1}{2} m \sum_{k=1}^m k - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m k^2 \quad (6.137)$$

Por agora, podemos retornar as expressões (6.136) e a definição (6.137) para dentro do comutador que estavamos trabalhando anteriormente em (6.131). Vou reordenar os somatórios.

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, L_{-m}^\perp] &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + (D-2) A(m) \end{aligned} \quad (6.138)$$

Os dois primeiros somatórios podem se juntar e os dois últimos somatórios também!

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, L_{-m}^\perp] &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + (D-2) A(m) \end{aligned} \quad (6.139)$$

Novamente, os dois primeiros somatórios podem se juntar!

$$[L_m^\perp, L_{-m}^\perp] = \sum_{k=0}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + (D-2) A(m) \quad (6.140)$$

Já estamos bem próximo de terminar de definir nossa álgebra. Agora devemos identificar quem é $A(m)$. Existem dois cálculos matemáticos que mostram que:

$$\boxed{\begin{cases} \sum_{k=1}^m k = \frac{1}{2} m (m+1) \\ \sum_{k=1}^m k^2 = \frac{1}{6} m (m+1) (2m+1) \end{cases}} \quad (6.141)$$

Substituindo esses resultados em (6.137) e fazendo as devidas simplificações, vamos ter:

$$A(m) = \frac{1}{12} (m^3 - m) \quad (6.142)$$

Temos $A(m)$ bem determinado, podemos voltar para o cálculo do comutador (6.140). Vamos extrair o termo $k = 0$ do primeiro somatório.

$$[L_m^\perp, L_{-m}^\perp] = m \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{k=1}^{\infty} (m-k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \sum_{k=1}^{\infty} (m+k) \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{(D-2)}{12} (m^3 - m) \quad (6.143)$$

Note que dessa expressão, algumas somas vão se cancelar, então podemos simplificar um pouco mais. Cortando as somas que se cancelam, os somatórios resultantes podem se juntar em um só.

$$[L_m^\perp, L_{-m}^\perp] = m \alpha_0^I \alpha_0^I + 2m \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k}^I \alpha_k^I + \frac{(D-2)}{12} (m^3 - m) \quad (6.144)$$

Agora vamos colocar $2m$ em evidência!

$$[L_m^\perp, L_{-m}^\perp] = 2m \left(\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{-k}^I \alpha_k^I \right) + \frac{(D-2)}{12} (m^3 - m) \quad (6.145)$$

Perceba quem é a expressão que está entre parêntesis. Este é o L_0^\perp que determinamos (6.108). Vamos lembrar também, que quando começamos a calcular este comutador, determinamos que $[L_m^\perp, L_n^\perp] \big|_{m+n=0} = [L_m^\perp, L_{-m}^\perp]$, pois se $m+n=0$, então $m=-n$. Deste modo, chegamos ao seguinte resultado:

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] \big|_{m+n=0} = 2m L_0^\perp + \frac{(D-2)}{12} (m^3 - m) \quad (6.146)$$

Com isso, podemos juntar os dois casos para escrever uma expressão mais geral. Vamos juntar o primeiro caso (6.129) com o segundo caso (6.146). Deste modo vamos ter nossa álgebra bem construída.

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n) L_{m+n}^\perp + \frac{(D-2)}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0} \quad (6.147)$$

Com isso, o conjunto de operadores L_n^\perp , com $n \in \mathbb{Z}$, que satisfazem essa expressão, definem a *Álgebra de Virasoro Extendida Centralmente*. O segundo termo da expressão é chamado de termo central porque ele comuta com todos os operadores dessa álgebra. Esse mesmo termo vai desaparecer quando $m=0$ e quando $m=\pm 1$. Assim finalizamos as propriedades de comutação do operador transversal de Virasoro, que será importante neste estudo.

6.3 Dimensionalidade da Espaço-Tempo

Nesta seção, faremos um dos cálculos mais importantes da teoria, pois ele vai determinar a quantidade de dimensões que a teoria de cordas precisa ter para ser consistente. De início, vamos trabalhar com uma quantidade conservada que obtemos lá no capítulo 3, em (3.181). Vimos que as cargas $M_{\mu\nu}$ nos fornecem o momento da corda relativística, ou melhor dizendo, estas cargas são os momentos da corda relativística. Demonstramos que a depender dos índices de Lorentz, elas podem representar tanto os momentos lineares quanto os momentos angulares. A partir daqui, já ficou bem claro quem são os $M_{\mu\nu}$. São os geradores de Lorentz! Vamos partir daqui e determinar uma expressão mais geral. Essa informação é importante, porque existe uma álgebra na qual os geradores de Lorentz devem respeitar. Essa álgebra é conhecida como *Álgebra de Lie de Lorentz* e nós não vamos deduzi-la, porque este resultado já é conhecido.

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - i\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + i\eta^{\mu\sigma} M^{\rho\nu} - i\eta^{\nu\sigma} M^{\rho\mu} \quad (6.148)$$

Essa equação deve ser satisfeita pelos mesmos operadores $M^{\mu\nu}$ de qualquer teoria quântica invariante de Lorentz. Satisfazer essa relação é crucial para a quantização da corda, porque se não for possível construir esses operadores a teoria não é invariante de Lorentz. Então vamos partir daqui, não vou abrir todos os comutadores mas tem um que vai ser interessante de ser aberto. Veremos como é o comutador entre M^{-I} e M^{-J} nas coordenadas do cone de luz.

$$[M^{-I}, M^{-J}] = i\eta^{--} M^{IJ} - i\eta^{I-} M^{-J} + i\eta^{-J} M^{-I} - i\eta^{IJ} M^{--} = 0 \quad (6.149)$$

Perceba que esse comutador dá zero, pela álgebra de Lie de Lorentz nas coordenadas do cone de luz. O nosso grande objetivo neste momento é determinar quem é o $[M^{-I}, M^{-J}]$ da teoria de cordas e garantir que ele dê zero. Esse vai ser um cálculo importante, porque para garantir que este comutador dê zero, vamos precisar fixar a quantidade de dimensões do espaço-tempo da nossa teoria. Por agora, devemos determinar quem é o operador $M^{\mu\nu}$ da teoria de cordas abertas, antes de coloca-lo para comutar. Vamos usar a expressão (3.181), considerando os limites de integração da corda aberta sendo $\sigma \in [0, \pi]$ e substituindo (4.22) na expressão.

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi (X^\mu \dot{X}^\nu - X^\nu \dot{X}^\mu) d\sigma \quad (6.150)$$

Vamos abrir X^μ usando (4.51) e \dot{X}^μ usando a primeira equação em (4.52). Devemos nos atentar a uma informação, da forma com que construímos $M^{\mu\nu}$, essa grandeza era uma carga conservada, ou seja, não pode depender do tempo. Isso significa que devemos eliminar tudo que depende do tempo na expressão. Não é tão trivial, mas vamos olhar para ambas as expressões. Veremos o primeiro termo de X^μ , que é X_0^μ , ele só vai ser independente do tempo quando multiplicado pelo primeiro termo de \dot{X}^μ , que é $\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu$. Vejamos o segundo termo

de X^μ , que é $\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau$, esse nunca vai ser independente do tempo, não importa com qual termo ele agrupe de \dot{X}^μ , portanto, esses termos não vão entrar na expressão. Por fim, o terceiro termo de X^μ , que é o somatório, só vai ser independente do tempo, quando multiplicarmos pelo somatório de \dot{X}^μ assumindo que $n = -n$, para cancelar as exponenciais que carregam a dependência temporal. Em geral, vamos ter que:

$$X^\mu \dot{X}^\nu = X_0^\mu \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\nu + i2\alpha' \sum_{n \neq 0} \alpha_n^\mu \alpha_{-n}^\nu \frac{\cos^2(n\sigma)}{n} + [\dots] \quad (6.151)$$

Tudo que está dentro de $[\dots]$ tem dependência temporal e portanto não contribui para o gerador de Lorentz $M^{\mu\nu}$. Deste modo, ficamos com:

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \left[\sqrt{2\alpha'} (X_0^\mu \alpha_0^\nu - X_0^\nu \alpha_0^\mu) + i2\alpha' \sum_{n \neq 0} \frac{\cos^2(n\sigma)}{n} (\alpha_n^\mu \alpha_{-n}^\nu - \alpha_n^\nu \alpha_{-n}^\mu) \right] \quad (6.152)$$

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \left[\pi \sqrt{2\alpha'} (X_0^\mu \alpha_0^\nu - X_0^\nu \alpha_0^\mu) + i\alpha' \pi \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^\mu \alpha_{-n}^\nu - \alpha_n^\nu \alpha_{-n}^\mu) \right] \quad (6.153)$$

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \left[\pi \sqrt{2\alpha'} (X_0^\mu \alpha_0^\nu - X_0^\nu \alpha_0^\mu) + i\alpha' \pi \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^\mu \alpha_{-n}^\nu - \alpha_n^\nu \alpha_{-n}^\mu) \right] \quad (6.154)$$

Vamos aplicar a primeira relação de (4.49).

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \left[\pi 2\alpha' (X_0^\mu P^\nu - X_0^\nu P^\mu) + i\alpha' \pi \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^\mu \alpha_{-n}^\nu - \alpha_n^\nu \alpha_{-n}^\mu) \right] \quad (6.155)$$

$$M^{\mu\nu} = (X_0^\mu P^\nu - X_0^\nu P^\mu) + \frac{i}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^\mu \alpha_{-n}^\nu - \alpha_n^\nu \alpha_{-n}^\mu) \quad (6.156)$$

$$M^{\mu\nu} = X_0^\mu P^\nu - X_0^\nu P^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \quad (6.157)$$

Chegamos a uma ótima estrutura para o gerador $M^{\mu\nu}$. Agora vamos deduzir quem é o gerador M^{-I} . Um bom ponto de partida é a expressão que acabamos de obter em (6.157).

$$M^{-I} = X_0^- p^I - X_0^I p^- - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-)$$

Entretanto, existem alguns problemas nessa estrutura. Para termos um M^{-I} satisfatório, ele precisa ser hermitiano e de ordem normal. Vamos garantir as duas condições, começando pela hermiticidade. O primeiro termo é hermitiano, porque X_0^- comuta com p^I e o terceiro termo, aquele do somatório, também é hermitiano. Entretanto, o segundo termo não é hermitiano, porque X_0^I não comuta com p^- , uma vez que p^- tem p^I na composição. Então podemos tornar tudo hermitiano se fizermos a seguinte modificação no termo do meio:

$$M^{-I} = X_0^- p^I - \frac{1}{2} (X_0^I p^- + p^- X_0^I) - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^- \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I \alpha_n^-)$$

Ainda falta garantirmos a ordenação normal, ou seja, o operador precisa atuar bem no estado de vácuo. vamos garantir isso entrando com os operadores transversais de Virasoro, que já foram ordenados normalmente. Usaremos (6.110) para substituir os p^- e usaremos também (4.85) para substituir os α_n^- .

$$M^{-I} = X_0^- p^I - \frac{1}{4\alpha' p^+} \left(X_0^I (L_0^\perp + a) + (L_0^\perp + a) X_0^I \right) - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n^\perp) \quad (6.158)$$

$$M^{-I} = X_0^- p^I - \frac{1}{4\alpha' p^+} \left(X_0^I L_0^\perp + L_0^\perp X_0^I + 2a X_0^I \right) - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n^\perp) \quad (6.159)$$

Nessa estrutura podemos ver que M^{-I} tem ordenação normal e portanto, ele é satisfatório. Agora temos tudo que é necessário para calcular o comutador $[M^{-I}, M^{-J}]$. Esse não é um cálculo trivial, mas ele vai fazer uso de todos os comutadores que viemos trabalhando até aqui. Embora seja um cálculo muito longo, os passos que vamos utilizar são idênticos ao que viemos trabalhando até o momento. Por conta disso, vou por direto o resultado.

$$[M^{-I}, M^{-J}] = -\frac{1}{\alpha' (p^+)^2} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \cdot \left\{ m \left[1 - \frac{D-2}{24} \right] + \frac{1}{m} \left[\frac{D-2}{24} + a \right] \right\} \quad (6.160)$$

Agora vem o grande ponto alto desses cálculos, pois vimos em (6.149) que o comutador $[M^{-I}, M^{-J}]$ tem que dar zero. Esse comutador só vai dar zero se o termo que está entre chaves der zero. Ou seja, temos:

$$m \left[1 - \frac{D-2}{24} \right] + \frac{1}{m} \left[\frac{D-2}{24} + a \right] = 0 \quad (6.161)$$

Para essa expressão dar zero, precisamos fixar:

$$\begin{cases} D = 26 \\ a = -1 \end{cases} \quad (6.162)$$

Perceba que a partir de uma única expressão, nós determinamos a dimensionalidade do espaço-tempo e o valor da constante a . Na teoria de cordas, nós vamos trabalhar com um espaço-tempo de 26 dimensões. A teoria posterior a essa, isto é, a teoria de supercordas vai determinar um espaço-tempo de 10 dimensões por meio de um cálculo similar. Nós não vamos entrar na teoria de supercordas neste estudo, então vamos ficar com as 26 dimensões. Por agora, com o valor da constante $a = 1$, podemos reformular algumas expressões. Primeiro, a expressão (6.110) vai se tornar:

$$2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} (L_0^\perp - 1) \quad (6.163)$$

Também vamos mexer na hamiltoniana da corda aberta, que determinamos em (6.13).

$$H = L_0^\perp \longrightarrow H \equiv L_0^\perp + a = L_0^\perp - 1 \quad (6.164)$$

Por fim, vamos mexer também no operador massa ao quadrado (6.112).

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{p=1}^{\infty} p a_p^{I\dagger} a_p^I \right) \quad (6.165)$$

Com isso estamos um passo mais próximo de mostrar como a teoria de cordas vai ser usada para representar as partículas. Em espacial, a teoria de cordas abertas vai poder ser usada para representar o estado de fóton. Sendo assim, nosso próximo passo será trabalhar no espaço de estados da teoria.

6.4 Estado de Fóton na Teoria de Cordas Abertas

Nesta seção, vamos mostrar com clareza, como a teoria de cordas pode ser usada para descrever as partículas. Em espacial, a teoria de cordas abertas vai poder ser usada para descrever o estado de fóton. Além disso, desta teoria vamos deduzir os estados de táquions, que seriam estados hipotéticos de partículas com massa negativa. Para ser mais rigoroso, o quadrado da massa que é negativo. Lá na frente vamos falar dos táquions, por agora nosso objetivo é definir o espaço de estados.

6.4.1 Espaço de Estados da Teoria de Cordas Abertas

Devemos construir os estados fundamentais da corda quântica. Já temos em mãos os pares de operadores canônicos que trabalhamos, sendo eles (X_0^I, p^I) e (X_0^-, p^+) . Deste modo, vamos definir os estados fundamentais para todos os valores dos momentos como $|p^+, \vec{P}_T\rangle$ e este também vai ser o estado de vácuo para todos os operadores de criação e aniquilação da teoria de cordas. Deste modo:

$$a_n^I |p^+, \vec{P}_T\rangle = 0 \quad (6.166)$$

Onde $n \geq 1$ e I sendo as dimensões transversais vamos dizer que $I = 2, \dots, 25$. Ao todo, tem 24 dimensões transversais, porque fixamos a dimensionalidade do espaço-tempo em $D = 26$ e as outras duas são as dimensões referentes as coordenadas $+$ e $-$ do cone de luz. Seguindo adiante, já sabemos que criamos estados a partir do estado de vácuo com operadores de criação. Entretanto, na teoria temos infinitos operadores de criação para cada uma das 24 coordenadas transversais do cone de luz, uma vez que o índice n vai de 1 até infinito. Com essas informações, vamos escrever um estado base geral $|\lambda\rangle$, que será determinado como todos os operadores de criação possíveis aplicados no estado fundamental.

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} \left(a_n^{I\dagger} \right)^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (6.167)$$

Onde $\lambda_{n,I}$ é o número de vezes que o operador de criação aparece. Esse estado base geral informa quantas vezes os operadores de criação atuam no estado fundamental. Importante ressaltar também que a ordem entre eles não importa, uma vez que todos os operadores de criação comutam entre si. Contudo, queremos um número finito de operadores de criação atuando no estado fundamental. Isso significa que para cada $|\lambda\rangle$, tem que haver finitos $\lambda_{n,I} \neq 0$. A teoria de cordas descreve um número infinito de partículas diferentes, porque o espaço de Hilbert das cordas é um espaço vetorial de dimensão infinita, ele é gerado por um conjunto infinito de estados base linearmente independentes.

6.4.2 Operador Número N^\perp

Existe uma soma que veio aparecendo nas nossas expressões anteriores e ela tem um comportamento interessante. Essa soma aparece no operador M^2 em (6.165) e no operador L_0^\perp em (6.109). Vamos dar um nome para este somatório! Ele será o operador número N^\perp .

$$N^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I \quad (6.168)$$

Esse somatório representa a soma dos operadores números padrão para cada operador de criação e aniquilação da corda. Vejamos algumas propriedades de comutação deste operador. Vamos coloca-lo para comutar com o operador de aniquilação $[N^\perp, a_n^I]$.

$$[N^\perp, a_n^I] = n [a_n^{I\dagger} a_n^I, a_n^I] = n \left(a_n^{I\dagger} [a_n^I, a_n^I] + [a_n^{I\dagger}, a_n^I] a_n^I \right) \quad (6.169)$$

Vamos lembrar que dois operadores de aniquilação comutam entre si, portanto vamos ter $[a_n^I, a_n^I] = 0$ e pela relação (6.98) sabemos que $[a_n^{I\dagger}, a_n^I] = -1$.

$$[N^\perp, a_n^I] = -n a_n^I \quad (6.170)$$

Agora faremos o comutador com o operador de criação, este é até mais simples, uma vez que já calculamos (6.170).

$$[N^\perp, a_n^{I\dagger}] = [N^\perp, a_{-n}^I] = n a_{-n}^I \quad (6.171)$$

$$[N^\perp, a_n^{I\dagger}] = n a_n^{I\dagger} \quad (6.172)$$

Vamos guardar estes resultados! Outra propriedade importante é que pelo operador N^\perp ser de ordem normal, ele aniquila o estado de vácuo.

$$N^\perp |p^+, \vec{P}_T\rangle = 0 \quad (6.173)$$

Agora vamos reescrever os operadores L_0^\perp (6.109) e M^2 (6.165), em função do operador número que acabamos de definir.

$$\begin{cases} L_0^\perp = \alpha' p^I p^I + N^\perp \\ M^2 = \frac{1}{\alpha'} (-1 + N^\perp) \end{cases} \quad (6.174)$$

Perceba que N^\perp entra aditivamente na expressão de M^2 . Dá para ver facilmente que para todos os estados da corda, vamos ter $M^2 \geq -\frac{1}{\alpha'}$. Aqui já podemos ver que existem estados com M^2 negativo, porque o menor estado possível para M^2 é menor do que zero. Embora isso já nos chame atenção, vamos fechar nossos olhos por enquanto, porque voltaremos aqui logo logo. Por agora, falta vermos como o operador número vai operar no estado base. Primeiro vamos ver seu comportamento ao operar em alguns operadores de criação no estado fundamental. Começaremos com o estado $a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle$.

$$N^\perp a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle = \left([N^\perp, a_2^{I\dagger}] + a_2^{I\dagger} N^\perp \right) |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (6.175)$$

Vamos lembrar das relações (6.173) e (6.172) que recém obtemos.

$$N^\perp a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle = [N^\perp, a_2^{I\dagger}] |p^+, \vec{P}_T\rangle + a_2^{I\dagger} N^\perp |p^+, \vec{P}_T\rangle = 2 a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (6.176)$$

Note que o resultado é um autoestado de N^\perp com autovalor 2. Vamos fazer o mesmo para $a_3^{J\dagger} a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle$.

$$N^\perp a_3^{J\dagger} a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle = \left([N^\perp, a_3^{J\dagger}] + a_3^{J\dagger} N^\perp \right) a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (6.177)$$

$$N^\perp a_3^{J\dagger} a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle = [N^\perp, a_3^{J\dagger}] a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle + a_3^{J\dagger} N^\perp a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (6.178)$$

$$N^\perp a_3^{J\dagger} a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle = 3 a_3^{J\dagger} a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle + a_3^{J\dagger} 2 a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle = (3 + 2) a_3^{J\dagger} a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (6.179)$$

$$N^\perp a_3^{J\dagger} a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle = 5 a_3^{J\dagger} a_2^{I\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (6.180)$$

Pelas equações (6.176) e (6.179), já é possível ver que existe uma relação de recorrência. Por essa relação, já podemos ter uma noção de como N^\perp atua no estado base geral. Ele vai atuar da seguinte forma:

$$N^\perp |\lambda\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I} |\lambda\rangle \quad (6.181)$$

De modo que os autovalores associados a este autoestado é:

$$N_\lambda^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I} \quad (6.182)$$

Com isso temos a descrição mais geral do operador número atuando nos estados base. Nosso próximo passo é ver efetivamente onde aparecem as partículas. Começaremos com o táquion, para depois partirmos para o fóton e por fim falar brevemente das partículas com massa positiva.

6.4.3 Estados de Táquions Representados por Cordas Abertas

Neste formalismo que construímos, o estado mais simples é o estado fundamental, considerando que o estado fundamental descreve alguma classe de partículas, vamos aplicar o operador M^2 a este estado para descobrir qual é a massa ao quadrado das partículas neste estado.

$$M^2 \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle = \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + N^\perp \right) \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle = -\frac{1}{\alpha'} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle + \frac{1}{\alpha'} N^\perp \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle \quad (6.183)$$

$$M^2 \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle = -\frac{1}{\alpha'} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle \quad (6.184)$$

Chegamos a um resultado um tanto estranho, pois o autovalor de M^2 no estado $\left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle$ deu um valor negativo. Ou seja, este estado fornece partículas com autovalores de massa ao quadrado negativos. Os campos escalares que tem o quadrado da massa negativo, são chamados de táquions. Isso é problemático porque o quadrado da massa ser negativo é um forte sinal de instabilidade.

$$M^2 = -\frac{1}{\alpha'} < 0 \quad (6.185)$$

Vamos voltar a falar dos táquions mais a frente. Aqui foi importante identificarmos a possível existência deles. O passo seguinte é encontrar os estados de fótons e como já sabemos, o fóton é uma partícula sem massa.

6.4.4 Estados de Fótons Representados por Cordas Abertas

Partiremos agora para os estados excitados, vamos aplicar um operador de criação no estado fundamental e descobrir qual é o quadrado da massa das partículas no estado $a_1^{I\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle$.

$$M^2 a_1^{I\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle = \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + N^\perp \right) a_1^{I\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle \quad (6.186)$$

$$M^2 a_1^{I\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle = -\frac{1}{\alpha'} a_1^{I\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle + \frac{1}{\alpha'} N^\perp a_1^{I\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle \quad (6.187)$$

$$M^2 a_1^{I\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle = -\frac{1}{\alpha'} a_1^{I\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle + \frac{1}{\alpha'} 1 a_1^{I\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle = \frac{1}{\alpha'} (-1 + 1) a_1^{I\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle \quad (6.188)$$

$$M^2 a_1^{I\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle = 0 \quad (6.189)$$

Esse resultado é interessante, porque os estados $a_1^{I\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle$ são estados de partículas sem massa. Como esse estado pode existir para qualquer $I = 2, \dots, 25$, existem 24 estados sem massa. Deste modo, o estado geral sem massa tem que ser uma combinação linear de todos os estados base.

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle \quad (6.190)$$

Este é o estado geral sem massa, desenvolvido pela teoria de cordas abertas. Devido a sua semelhança com o estado de fóton em (5.95), este será o nosso estado de fóton da teoria de cordas abertas. Com esse resultado, até o momento, podemos afirmar que os estados quânticos da teoria de cordas abertas incluem estados de táquions e estados de fótons. Assim como na interpretação anterior, o vetor ξ_I será o vetor de polarização do fóton e a grande diferença é que quem carrega as informações dos momentos da partícula agora é o estado e não mais os operadores, como foi no capítulo anterior. Aqui nós obtivemos um resultado surpreendente, pois usando o modelo de cordas abertas, chegamos a descrição do estado de uma partícula bem importante. Com tudo que desenvolvemos até aqui, vou falar brevemente na próxima subseção sobre os estados de partículas com massa positiva.

6.4.5 Estados de Partículas com Massa Positiva

Os estados de partículas com massa positiva, são os próximos estados excitados, onde o operador número vai extrair autovalores maiores do que 1. Vou falar exclusivamente dos estados onde o operador número extrai autovalor 2, mas dado o estudo que fizemos até aqui, já temos uma base forte para saber como são os estados com massa positiva posteriores. Pois bem, vamos falar dos estados $a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle$ e $a_2^{I\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle$. O primeiro em especial, tem um nome, eles são chamados de *Estados Tensores de Uma Partícula*. Então vamos fazer algumas análises rápidas. Ambos vão nos dar $+\frac{1}{\alpha'}$ como autovalor de M^2 . O número de estados total de partículas com essa massa, tem que ser a soma de numeros de estados para ambas as configurações que vão dar estados de partículas com essa massa.

Pois bem, começando pelo mais simples, o estado $a_2^{I\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle$ só depende de um índice para coordenadas transversais e portanto, essa configuração vai fornecer $D - 2$ estados. Já o estado $a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle$ depende dos índices I e J . Fazendo um cálculo rápido e considerando a comutação entre os operadores de criação, vemos que essa configuração vai ter $\frac{1}{2} (D - 2) (D - 1)$ estados. Somando ambos e considerando que $D = 26$ na nossa teoria, no total vamos ter 324 estados para partículas com massa ao quadrado igual a $\frac{1}{\alpha'}$. Cada estado $|\lambda\rangle$ da corda quântica vai representar o estado de uma partícula de momento fixo. Assim se faz os cálculos para estados de partículas com massa positiva.

6.5 Equações de Movimento do Táquion e do Fóton

Na seção anterior, a teoria de cordas nos levou à estruturas que descrevem partículas como táquions e fótons. Nosso objetivo principal, em princípio, foi alcançado, porque desde

o começo queríamos mostrar que existem outras formas de descrever as partículas e a teoria de cordas é um modelo que se propõe a descrever partículas. Portanto, nosso próximo passo é escrever equações de movimento para essas partículas. Vamos começar escrevendo um estado geral dependente do tempo. Definiremos um estado base, sendo ele:

$$a_{n_1}^{I_1^\dagger} \dots a_{n_k}^{I_k^\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (6.191)$$

Com isso é até que imediato escrevermos um estado geral dependente do tempo.

$$|\psi, \tau\rangle = \int dp^+ d\vec{P}_T \psi_{I_1 \dots I_k}(\tau, p^+, \vec{P}_T) a_{n_1}^{I_1^\dagger} \dots a_{n_k}^{I_k^\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (6.192)$$

Essa construção é bem conhecida, por isso é imediata. Tendo essa base, podemos escrever um estado de táquion e um estado de fóton, ambos dependentes do tempo, com base no que já vimos na seção anterior.

$$\begin{cases} |\psi, \tau\rangle_{\text{taquion}} = \int dp^+ d\vec{P}_T \psi(\tau, p^+, \vec{P}_T) |p^+, \vec{P}_T\rangle \\ |\psi, \tau\rangle_{\text{foton}} = \int dp^+ d\vec{P}_T \psi_I(\tau, p^+, \vec{P}_T) a_1^{I^\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle \end{cases} \quad (6.193)$$

Agora vamos trabalhar na hamiltoniana. Devemos lembrar que na mecânica quântica existe a relação $i\frac{\partial}{\partial\tau}|\psi, \tau\rangle = H|\psi, \tau\rangle$. Também já sabemos quem é o operador hamiltoniano (6.164) e ainda podemos ir além, pois usando a primeira equação de (6.174), podemos escrever o operador hamiltoniano como:

$$H = \alpha' p^I p^I + N^\perp - 1 \quad (6.194)$$

Deste modo, temos a seguinte relação para um estado geral:

$$i\frac{\partial}{\partial\tau}\psi_{I_1 \dots I_2} = (\alpha' p^I p^I + N^\perp - 1) \psi_{I_1 \dots I_2} \quad (6.195)$$

Daqui tiramos facilmente como é essa relação para os estados de táquions e para os estados de fótons. Não vou mudar o nome porque não é necessário, mas o N^\perp da relação é seu próprio autovalor quando aplicado o operador número no estado. Isso significa que para o estado de táquions vamos ter $N^\perp = 0$ e para os estados de fótons teremos $N^\perp = 1$. Assim podemos já escrever de imediato:

$$\begin{cases} i\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = (\alpha' p^I p^I - 1) \psi \\ i\frac{\partial\psi_I}{\partial\tau} = \alpha' p^I p^I \psi_I \end{cases} \quad (6.196)$$

Onde a primeira equação é para o estado de táquion e a segunda equação é para o estado de fóton. Estas já são as equações de movimento do táquion e do fóton. Contudo, apenas a nível de comparação, vamos relembrar como é a equação de campo nas coordenadas do cone de luz. No capítulo anterior, desenvolvemos uma equação de campo no sistema de coordenadas do cone de luz em (5.22). Já sabemos quem é X^+ pelos calibres que construímos em (4.65). Lembrando que para as cordas abertas, teremos $\beta = 2$. Pois bem, juntando essas relações, vamos ter:

$$\left(\frac{i}{2\alpha' p^+} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2) \right) 2\alpha' p^+ \phi(\tau, p^+, \vec{P}_T) = 0 \quad (6.197)$$

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \alpha' (p^I p^I + m^2) \right) \phi(\tau, p^+, \vec{P}_T) = 0 \quad (6.198)$$

Sabemos que o quadrado da massa do táquion é $m^2 = -\frac{1}{\alpha'}$ e o fóton é uma partícula sem massa, ou seja, $m^2 = 0$. Então teremos as respectivas equações de campo para o táquion e para o fóton.

$$\begin{cases} \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \alpha' (p^I p^I - \frac{1}{\alpha'}) \right) \phi_{taquion}(\tau, p^+, \vec{P}_T) = 0 \\ \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \alpha' (p^I p^I + 0) \right) \phi_{foton}(\tau, p^+, \vec{P}_T) = 0 \end{cases} \quad (6.199)$$

$$\begin{cases} \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \alpha' p^I p^I + 1 \right) \phi_{taquion}(\tau, p^+, \vec{P}_T) = 0 \\ \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \alpha' p^I p^I \right) \phi_{foton}(\tau, p^+, \vec{P}_T) = 0 \end{cases} \quad (6.200)$$

Agora compare essas equações de campo com as equações de movimento que escrevemos em (6.196). Vou até reescreve-las para ficar mais nítido.

$$\begin{cases} \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \alpha' p^I p^I + 1 \right) \psi = 0 \\ \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \alpha' p^I p^I \right) \psi_I = 0 \end{cases} \quad (6.201)$$

Para ficar ainda mais parecido, devemos lembrar do capítulo anterior, que podemos escrever, exclusivamente para o caso do fóton, o campo como sendo $\phi_{foton}(\tau, p^+, \vec{P}_T) = A^I(\tau, p^+, \vec{P}_T)$, que são as componentes trasnversais do campo de calibre. Assim, a equação de campo do fóton fica escrita como:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \alpha' p^I p^I \right) A^I(\tau, p^+, \vec{P}_T) = 0 \quad (6.202)$$

Acabamos de mostrar a correspondência entre as funções de onda da mecânica quântica e as funções de campo da teoria de campos. Vimos no caso do fóton que as funções de onda têm

índices, o que implica que para a correspondência ser mantida, as funções de campo também têm que ter índices. Com isso concluímos nossa análise sobre as equações de movimento. Agora dedicaremos o fim deste capítulo à uma das perguntas que ficou em aberto. Afinal, quem são os táquions?

6.6 Táquions e Decaimento da D25-Brana

Vamos concluir o capítulo 6 falando sobre a física dos táquions, pois desde a descoberta da teoria de cordas abertas, o táquion era um grande mistério. Vários desenvolvimentos iniciados em 1999 esclareceram o papel do táquion de corda aberta e aqui vamos entender com clareza qual é esse papel e como o táquion de corda aberta é crucial para manter a teoria.

Já sabemos que o campo associado ao estado de táquion é um campo escalar, pois ele não carrega índices. Deste modo, vamos considerar a densidade lagrangeana de um campo escalar clássico (5.5). Nós vimos como é o potencial deste campo escalar em (5.2), então vamos entrar mais a fundo nisso e observar seu comportamento.

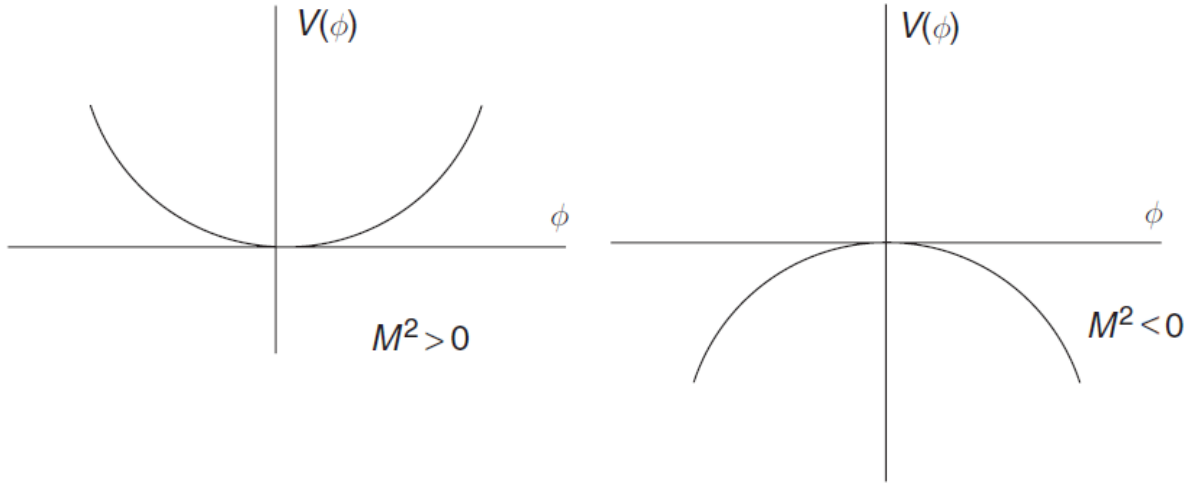


Figura 11 – Potencial do Campo para $M^2 > 0$ Figura 12 – Potencial do Campo para $M^2 < 0$

O caso do táquion é o caso da figura 12, então vamos observar a primeira grande diferença. Na figura 11, o ponto $\phi = 0$ é um ponto de equilíbrio estável, enquanto na figura 12, o ponto $\phi = 0$ é um ponto de equilíbrio instável. De imediato temos uma instabilidade na teoria do campo escalar do táquion, então vamos entender essa instabilidade. Primeiro vamos considerar somente a parte livre do táquion lagrangeano e entrar com as interações depois. Para isso, vamos usar o potencial (5.2) e posteriormente muda-lo com a inclusão de interações. Para simplificar ainda mais a nossa análise, faremos o campo depender somente do tempo, ou seja, $\phi = \phi(t)$. Neste caso, teremos $\nabla^2 \phi(t) = 0$. Pois bem, aplicaremos este campo na equação de Klein-Gordon (5.16).

$$-\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} - M^2 \phi t = 0 \quad (6.203)$$

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} + M^2 \phi t = 0 \quad (6.204)$$

Se M^2 for positivo, a solução dessa equação diferencial será:

$$\phi(t) = C \sin(Mt + \alpha_0) \quad (6.205)$$

Onde C e α_0 são constantes. Perceba que com M^2 positivo o campo pode permanecer em $\phi = 0$ para sempre, ou simplesmente ficar oscilando em torno de $\phi = 0$, isso é um ponto de equilíbrio estável. Agora vamos ver o caso do táquion, quando M^2 é negativo. Podemos escrever que $M^2 = -\beta^2$, onde $\beta^2 > 0$. Assim vamos ter a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} - \beta^2 \phi t = 0 \quad (6.206)$$

A solução dessa equação será:

$$\phi(t) = A \cosh(\beta t) + B \sinh(\beta t) \quad (6.207)$$

Note que nesta solução, a medida que o tempo vai para infinito, o campo vai para infinito. O táquion até pode permanecer em $\phi = 0$ para sempre, mas qualquer perturbação infinitesimal faz ele tender a esses infinitos, isso é um ponto de equilíbrio instável. Acaba sendo contraintuitivo esperar que o táquion permaneça em $\phi = 0$. Será muito problemático para a teoria o potencial do táquion não ter um ponto de equilíbrio estável e já vamos ver o porquê. O táquion já foi motivo para a teoria de cordas ser desacreditada, durante um período de tempo.

Por agora, sabemos que o quadrado da massa do táquion é $M^2 = -\frac{1}{\alpha'}$ e com isso podemos escrever a parte livre do potencial do táquion (5.2).

$$V(\phi) = -\frac{1}{2\alpha'} \phi^2 \quad (6.208)$$

Este termo tem que entrar no potencial total do táquion, então vamos deixa-lo guardado. Devemos entender melhor a teoria que estamos construindo. A teoria de cordas abertas que estamos estudando é uma teoria de cordas de uma D25-Brana. Significa que existe uma D25-Brana que preenche todas as dimensões do espaço. A D25-Brana é um objeto físico que possui uma densidade de energia constante T_{25} , que pode ser calculada com exatidão. A partir disso, podemos até afirmar que essa teoria de cordas abertas é a própria teoria da brana D25. Vimos no capítulo 3 que as cordas abertas possuem suas extremidades ligadas a uma D-Brana, isso implica

que os táquions são estados de cordas ligados a uma D-Brana. Podemos dizer que uma D-Brana com cordas abertas presas é um estado excitado da D-Brana sem as cordas. Então aqui vem o pulo do gato, porque uma vez que o táquion só possui um ponto de equilíbrio instável e qualquer perturbação pode fazê-lo cair para os infinitos, o estado de táquion representa uma excitação que pode diminuir a energia da D-Brana. A própria existência do táquion diz que a brana é instável. Dá para notar o quanto os táquions já foram problemáticos?

Se o táquion contribui para descrever a física da D25-Brana, a densidade de energia dessa brana é uma contribuição para a energia potencial do sistema e deve ser incorporada ao potencial do táquion. Se tivéssemos que escrever um potencial para o táquion, teríamos portanto:

$$V_{\text{taquion}}(\phi) = T_{25} - \frac{1}{2\alpha'} \phi^2 + \rho \phi^3 + \dots \quad (6.209)$$

Todos os termos cúbicos ou de ordem superior vão representar o efeito das interações. Neste potencial que construímos, em $\phi = 0$ vai ter somente a D25-Brana, com densidade de energia T_{25} . Se a D25-brana for instável, ela vai decair. Se ela decair infinitamente, teríamos um mundo sem D25-Brana e aí a teoria de cordas abertas cai por terra! Portanto, o potencial do táquion deve ter algum ponto de equilíbrio estável em $\phi = \phi^*$, de modo que $V_{\text{taquion}}(\phi^*) = 0$. Neste ponto, a instabilidade da brana vai desaparecer.

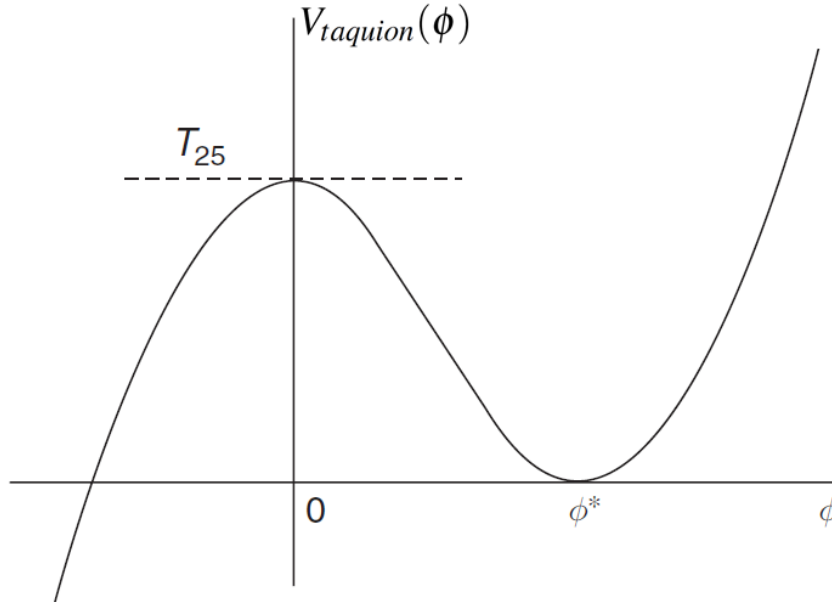


Figura 13 – Potencial do Táquion de Corda Aberta

Essa proposta representada pela equação (6.209) e o gráfico da figura 13 foi verificada de forma convincente pela teoria de campos de cordas abertas. Perceba que quando o táquion alcança o mínimo estável, a D25-Brana desaparece. Todas as cordas abertas também devem desaparecer, porque suas extremidades estão confinadas às D-Branas. Entretanto, já sabemos que as cordas fechadas podem existir na ausência de D-Branas. Deste modo, podemos considerar que

toda a energia armazenada inicialmente na D-25 Brana vai para cordas fechadas e as partículas que surgem como excitações de cordas abertas desaparecem. Já ficou claro que a teoria de cordas está incompleta sem a inclusão de cordas fechadas, ainda não explicamos o estado de gráviton e a explicação deste estado, só vai aparecer na teoria quando incluirmos as cordas fechadas. Com isso podemos fechar este capítulo com essa motivação, para no próximo, desenvolvermos a teoria quântica das cordas fechadas.

7 TEORIA DE CORDAS FECHADAS QUÂNTICAS RELATIVÍSTICAS

Chegamos ao ponto alto do nosso estudo e agora vamos falar do que falta para a teoria de cordas estar bem amarrada. A grande característica do modelo proposto pela teoria de cordas, em comparação com os outros modelos conhecidos, é que o modelo de cordas é um modelo de gravitação quântica. Em outras palavras, a teoria de cordas se compromete a trazer um estado de gráviton para ser introduzido junto com os estados das demais partículas. Nós ainda vamos ver neste capítulo que entre as excitações de cordas fechadas, há estados sem massa com spin 2. Nenhum hádron conhecido tem essa propriedade. Estes estados sem massa de spin 2 vão poder ser identificado como estados de grávitons.

Vimos no capítulo anterior que a teoria de cordas abertas exige a inclusão de uma teoria de cordas fechadas. Em razão disso, dedicaremos este capítulo ao desenvolvimento de uma teoria quântica de cordas fechadas.

7.1 Dinâmica das Cordas Fechadas e seus Operadores

A grande vantagem de termos detalhado bem o capítulo anterior é que neste vamos poder pular muitos cálculos, já que vários desenvolvimentos que foram feitos para as cordas abertas, também vão valer para as cordas fechadas, com pequenas diferenças que vou sinalizar. Então primeiro vamos deduzir um operador que descreve o movimento geral da corda fechada, escrito em termos de operadores de criação e aniquilação, para depois falar dos operadores transversais de Virasoro da corda fechada. Tendo tudo isso bem construído, podemos partir para o operador de massa ao quadrado e o operador hamiltoniano.

7.1.1 Movimento Geral da Corda Fechada

Uma corda fechada tem caráter periódico na extensão dela própria, ou seja, vai existir uma periodicidade na coordenada σ da corda. Desta forma, tratando com uma maior simplicidade, podemos considerar que uma corda fechada são duas cordas abertas, porém em vez de ter suas extremidades fixas a uma D-Brana, as extremidades estão fixas umas nas outras, formando um segmento fechado. Em que essa interpretação simplifica? Podemos tratar o movimento de uma corda fechada como uma superposição de dois tipos de movimentos, um movimento que vai pela esquerda $X_L^\mu(\tau + \sigma)$ e um movimento que vai pela direita $X_R^\mu(\tau - \sigma)$. O movimento à esquerda vai no sentido de $-\sigma$ e o movimento à direita vai no sentido de $+\sigma$.

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma) \quad (7.1)$$

Devemos lembrar que para as cordas fechadas, fixamos $\sigma \in [0, 2\pi]$. A condição de contorno que vamos utilizar, será uma condição de periodicidade, ou seja, podemos dizer que:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) \quad (7.2)$$

Vamos definir também duas novas variáveis.

$$\begin{cases} u = \tau + \sigma \\ v = \tau - \sigma \end{cases} \quad (7.3)$$

De modo que:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v) \quad (7.4)$$

Perceba que em $\sigma \rightarrow \sigma + 2\pi$, as variáveis u e v aumentam e diminuem em 2π . Portanto, pela condição de periodicidade (7.2), temos:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v) = X_L^\mu(u + 2\pi) + X_R^\mu(v - 2\pi) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) \quad (7.5)$$

$$X_L^\mu(u + 2\pi) - X_L^\mu(u) = X_R^\mu(v) - X_R^\mu(v - 2\pi) \quad (7.6)$$

Por este resultado podemos ver que os movimentos que ocorrem para a esquerda e para a direita são dependentes um do outro. Também é possível afirmar que as derivadas destes movimentos são periódicas. Os cálculos que seguem daqui são bem semelhantes ao caso das cordas abertas, no sentido literal mesmo, os passos são exatamente os mesmos, com a única ressalva de que aqui estamos tratando duas cordas abertas unidas uma na outra pelas extremidades. Muitas das relações que desenvolvemos anteriormente continuam valendo aqui. Os calibres em (4.15) ainda valem, com atenção de que para cordas fechadas temos $\beta = 1$. As equações de restrição em (4.20) e (4.21) também são válidas aqui. As densidades de momento (4.22) e (4.24) continuam valendo. Então vou escrever direto as expansões das derivadas, já que os cálculos são repetidos.

$$\begin{cases} X_L'^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu} \\ X_R'^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-inv} \end{cases} \quad (7.7)$$

A primeira equação é derivada em u e a segunda é derivada em v . O passo seguinte é integrar ambas as equações em suas respectivas variáveis.

$$\begin{cases} X_L^\mu = \frac{1}{2} X_0^{L\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_0^\mu u + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu} \\ X_R^\mu = \frac{1}{2} X_0^{R\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^\mu v + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-inv} \end{cases} \quad (7.8)$$

Note as semelhanças com as expressões (4.53) e (4.51). Agora devemos usar as expressões em (7.8) para aplicar a condição de periodicidade (7.6). Muitos termos vão se cancelar, mas fazendo estes cálculos, vai restar:

$$\bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu \quad (7.9)$$

Só existe um operador α_n^μ de modo zero na teoria de cordas fechadas. Vamos guardar esse resultado! Agora escreveremos o operador (7.4) completamente.

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) = & \frac{1}{2} X_0^{L\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_0^\mu (\tau + \sigma) + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in(\tau + \sigma)} \\ & + \frac{1}{2} X_0^{R\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_0^\mu (\tau - \sigma) + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau - \sigma)} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Simplificando e usando a condição (7.9):

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (X_0^{L\mu} + X_0^{R\mu}) + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}) \quad (7.11)$$

Devemos lembrar que $X_0^{L\mu}$ e $X_0^{R\mu}$ são constantes de integração. Além disso, o fato de analisarmos o movimento da corda pela esquerda ou pela direita, não tem que importar. Isso significa que sem perda de generalidade, podemos afirmar que $X_0^{L\mu} = X_0^{R\mu} \equiv X_0^\mu$. Com essa afirmação, temos $X_0^{L\mu} + X_0^{R\mu} = 2X_0^\mu$ e portanto, o operador que descreve o movimento da corda fechada fica escrito como:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}) \quad (7.12)$$

Este já é o operador que determina o movimento geral da corda fechada. Por agora faremos um último cálculo, antes de passar para a próxima subseção. Vamos ver quem é o operador α_0^μ , mas já adianto que o resultado é previsível, pois dará algo semelhante ao caso da corda aberta (4.71). Pela nossa análise feita a partir dos cálculos em (4.9), vemos que uma expressão capaz de calcular o momento total, pode ser escrita como:

$$P^\mu = \int \mathcal{P}^{\tau\mu} d\sigma \quad (7.13)$$

Aqui já escrevi direto a operação que fizemos lá trás, pois lá havíamos construído o raciocínio. Essa expressão continua valendo, entretanto devemos lembrar que os limites de integração da corda fechada vão estar em $\sigma \in [0, 2\pi]$. Pois bem, aplicaremos (4.22) e em seguida vamos derivar o operador que recém obtemos em (7.12).

$$P^\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \quad (7.14)$$

$$P^\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{1}{2\pi\alpha'} \left(\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} e^{-in\tau} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}) \right) \quad (7.15)$$

Perceba que ao integrar dentro do somatório nestes limite de integração, o resultado será nulo, ou seja, todo o somatório desaparece na integração.

$$P^\mu = \frac{\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma = \frac{\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu}{2\pi\alpha'} 2\pi = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^\mu \quad (7.16)$$

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} P^\mu \quad (7.17)$$

Como vimos para as cordas abertas, um resultado assim já era esperado. Seguindo em frente, vamos trabalhar nos operadores de criação e aniquilação da corda fechada, mas já adianto que também não será tão diferente do caso da corda aberta.

7.1.2 Operadores de Criação e Aniquilação da Corda Fechada

A diferença mais expressiva que vamos ver nestes operadores, se comparados com as cordas abertas, é que a corda fechada vai ter dois tipos de operadores, tanto para criação,

quanto para aniquilação. Mais para frente vamos ver que a mesma característica vai ocorrer para os operadores transversais de Virasoro e os operadores números da corda fechada. Por agora, falaremos dos operadores de criação e aniquilação. Primeiro de tudo, as relações de comutação vistas em (6.15) vão se manter e o mesmo para os comutadores (6.33) e (6.34). Perceba que a estrutura que usamos para definir as relações de comutação entre os operadores de criação e aniquilação e consequentemente chegar na própria definição canônica de operadores de criação e aniquilação é exatamente a mesma. Os cálculos são literalmente os mesmos! A grande diferença é que o operador $\bar{\alpha}_n^\mu$ está associado ao movimento à esquerda e o operador α_n^μ está associado ao movimento à direita. Mas isso não muda o desenvolvimento das expressões e a relação de comutação fundamental (6.66) se mantém para ambos os operadores.

$$\begin{cases} [\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = m \eta^{IJ} \delta_{m+n,0} \\ [\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m \eta^{IJ} \delta_{m+n,0} \end{cases} \quad (7.18)$$

Também acaba sendo um tanto óbvio que os operadores referentes ao movimento à esquerda comuta com os operadores referentes ao movimento à direita. Deste modo:

$$[\alpha_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = 0 \quad (7.19)$$

A segunda e terceira relação de (6.91) vai continuar valendo, só que agora para ambos os operadores. Devemos lembrar também que essas relações vão valer para $n \geq 1$.

$$\begin{cases} \alpha_n^I = a_n^I \sqrt{n}, & \alpha_{-n}^I = a_n^{I\dagger} \sqrt{n} \\ \bar{\alpha}_n^I = \bar{a}_n^I \sqrt{n}, & \bar{\alpha}_{-n}^I = \bar{a}_n^{I\dagger} \sqrt{n} \end{cases} \quad (7.20)$$

Já podemos afirmar que $a_n^{I\dagger}$ e $\bar{a}_n^{I\dagger}$ são operadores de criação, enquanto que a_n^I e \bar{a}_n^I são operadores de aniquilação. Deste modo, as relações (6.93) e (6.98) continuam valendo.

$$\begin{cases} [\bar{a}_m^I, \bar{a}_n^{J\dagger}] = \eta^{IJ} \delta_{m,n} \\ [a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \eta^{IJ} \delta_{m,n} \\ [\bar{a}_m^I, \bar{a}_n^J] = [\bar{a}_m^{I\dagger}, \bar{a}_n^{J\dagger}] = [a_m^I, a_n^J] = [a_m^{I\dagger}, a_n^{J\dagger}] = 0 \end{cases} \quad (7.21)$$

Alcançamos o objetivo desta subseção, que era determinar os operadores de criação e aniquilação e suas relações de comutação. Veremos mais algumas relações de comutação apenas para deixar o estudo um pouco mais completo e em seguida vamos falar dos operadores transversais de Virasoro. Pois bem, como será o comutador entre X_0^I e α_0^J ? Vamos montar o comutador e já aplicar a relação (7.17).

$$[X_0^I, \alpha_0^J] = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} [X_0^I, p^J] = i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \eta^{IJ} \quad (7.22)$$

Compare este resultado com o caso das cordas abertas em (6.88). Veja como é parecido! De forma análoga às cordas abertas em (6.87), temos também:

$$[X_0^I, \alpha_n^J] \big|_{n \neq 0} = [X_0^I, \bar{\alpha}_n^J] \big|_{n \neq 0} = 0 \quad (7.23)$$

Da para ver que a estrutura da teoria de cordas fechadas é bem parecida com a estrutura da teoria de cordas abertas. Veremos agora os operadores transversais de Virasoro.

7.1.3 Operadores Transversais de Virasoro da Corda Fechada

De início, é razoável esperarmos dois tipos de operadores transversais de Virasoro, sendo eles um para os modos com barra \bar{L}_0^\perp e outro para os modos sem barra L_0^\perp . Faremos da mesma maneira que fizemos com as cordas abertas, primeiro definiremos os modos transversais de Virasoro, quando não nos preocupamos com entidades que comutam ou não comutam e depois definiremos os operadores transversais de Virasoro, quando a comutação passa a importar, seguindo os mesmos passos do capítulo anterior. Pois bem, no capítulo 4 desenvolvemos a expressão (4.70), vamos começar por aqui. Sabemos que para as cordas fechadas, $\beta = 1$.

$$(\dot{X}^- \pm X'^-) = \frac{1}{\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 \quad (7.24)$$

Vamos derivar $X^\mu(\tau, \sigma)$ (7.12) para $\mu = I$.

$$\begin{aligned} (\dot{X}^- \pm X'^-) &= \frac{1}{\alpha'} \frac{1}{2p^+} \left(\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} e^{-in\tau} (\alpha_n^I e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^I e^{-in\sigma}) \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} e^{-in\tau} (\bar{\alpha}_n^I e^{-in\sigma} - \alpha_n^I e^{in\sigma}) \right)^2 \end{aligned} \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned} (\dot{X}^- \pm X'^-) &= \frac{1}{\alpha'} \frac{1}{2p^+} \left(\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\tau} (\alpha_n^I e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^I e^{-in\sigma}) \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\tau} (\bar{\alpha}_n^I e^{-in\sigma} - \alpha_n^I e^{in\sigma}) \right)^2 \end{aligned} \quad (7.26)$$

$$(\dot{X}^- \pm X'^-) = \frac{1}{4p^+} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\tau} ((\alpha_n^I e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^I e^{-in\sigma}) \pm (\bar{\alpha}_n^I e^{-in\sigma} - \alpha_n^I e^{in\sigma})) \right)^2 \quad (7.27)$$

$$\begin{cases} (\dot{X}^- + X'^-) = \frac{1}{4p^+} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\tau} ((\alpha_n^I e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^I e^{-in\sigma}) + (\bar{\alpha}_n^I e^{-in\sigma} - \alpha_n^I e^{in\sigma})) \right)^2 \\ (\dot{X}^- - X'^-) = \frac{1}{4p^+} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\tau} ((\alpha_n^I e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^I e^{-in\sigma}) - (\bar{\alpha}_n^I e^{-in\sigma} - \alpha_n^I e^{in\sigma})) \right)^2 \end{cases} \quad (7.28)$$

$$\begin{cases} (\dot{X}^- + X'^-) = \frac{1}{4p^+} \left(2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^I e^{-in\tau} e^{-in\sigma} \right)^2 \\ (\dot{X}^- - X'^-) = \frac{1}{4p^+} \left(2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in\tau} e^{in\sigma} \right)^2 \end{cases} \quad (7.29)$$

$$\begin{cases} (\dot{X}^- + X'^-) = \frac{1}{p^+} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^I e^{-in(\tau+\sigma)} \right)^2 \\ (\dot{X}^- - X'^-) = \frac{1}{p^+} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau-\sigma)} \right)^2 \end{cases} \quad (7.30)$$

$$\begin{cases} (\dot{X}^- + X'^-) = \frac{1}{p^+} \sum_{n,p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^I \bar{\alpha}_p^I e^{-i(n+p)(\tau+\sigma)} \\ (\dot{X}^- - X'^-) = \frac{1}{p^+} \sum_{n,p \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I \alpha_p^I e^{-i(n+p)(\tau-\sigma)} \end{cases} \quad (7.31)$$

Como está somando em todos os números inteiros, podemos fazer $n = n - p$ e continuar a soma no somatório.

$$\begin{cases} (\dot{X}^- + X'^-) = \frac{1}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_{n-p}^I \bar{\alpha}_p^I \right) e^{-in(\tau+\sigma)} \\ (\dot{X}^- - X'^-) = \frac{1}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \right) e^{-in(\tau-\sigma)} \end{cases} \quad (7.32)$$

Vamos aparecer com $\frac{1}{2}$ lá dentro dos parêntesis.

$$\begin{cases} (\dot{X}^- + X'^-) = \frac{2}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_{n-p}^I \bar{\alpha}_p^I \right) e^{-in(\tau+\sigma)} \\ (\dot{X}^- - X'^-) = \frac{2}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \right) e^{-in(\tau-\sigma)} \end{cases} \quad (7.33)$$

Chegamos a definição dos modos transversais de Virasoro da corda fechada. Eles são os termos que estão entre parêntesis. Note que são idênticos ao que desenvolvemos em (4.81). Isso é um excelente resultado, porque como os modos de Virasoro da corda fechada são idênticos ao modo de Virasoro da corda aberta, os passos para se chegar nos operadores transversais de Virasoro da corda fechada também tem que ser idênticos aos passos que foram usados para chegar no operador transversal de Virasoro da corda aberta! Isso significa que os resultados vão ser bem semelhantes, até mesmo para os operadores números. Falaremos disso mais adiante, por agora podemos já definir os modos de Virasoro.

$$\begin{cases} \bar{L}_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_{n-p}^I \bar{\alpha}_p^I \\ L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \end{cases} \quad (7.34)$$

Retornando para a expressão (7.33).

$$\begin{cases} (\dot{X}^- + X'^-) = \frac{2}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{L}_n^\perp e^{-in(\tau+\sigma)} \\ (\dot{X}^- - X'^-) = \frac{2}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau-\sigma)} \end{cases} \quad (7.35)$$

Vamos trabalhar agora no lado esquerdo da equação. Devemos derivar $X^\mu(\tau, \sigma)$ (7.12), desta vez para $\mu = -$.

$$\begin{aligned} (\dot{X}^- \pm X'^-) &= \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} e^{-in\tau} (\alpha_n^- e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^- e^{-in\sigma}) \\ &\pm \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} e^{-in\tau} (\bar{\alpha}_n^- e^{-in\sigma} - \alpha_n^- e^{in\sigma}) \end{aligned} \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} (\dot{X}^- \pm X'^-) &= \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\tau} (\alpha_n^- e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^- e^{-in\sigma}) \\ &\pm \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\tau} (\bar{\alpha}_n^- e^{-in\sigma} - \alpha_n^- e^{in\sigma}) \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$(\dot{X}^- \pm X'^-) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\tau} ((\alpha_n^- e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^- e^{-in\sigma}) \pm (\bar{\alpha}_n^- e^{-in\sigma} - \alpha_n^- e^{in\sigma})) \quad (7.38)$$

$$\begin{cases} (\dot{X}^- + X'^-) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^- e^{-in(\tau+\sigma)} \\ (\dot{X}^- - X'^-) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau-\sigma)} \end{cases} \quad (7.39)$$

Podemos igualar as expressões em (7.39) com (7.35).

$$\begin{cases} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^- e^{-in(\tau+\sigma)} = \frac{2}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{L}_n^\perp e^{-in(\tau+\sigma)} \\ \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau-\sigma)} = \frac{2}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau-\sigma)} \end{cases} \quad (7.40)$$

$$\begin{cases} \sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_n^- = \frac{2}{p^+} \bar{L}_n^\perp \\ \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{2}{p^+} L_n^\perp \end{cases} \quad (7.41)$$

Chegamos a outro resultado semelhante ao caso das cordas abertas (4.83). Ainda dá para ir além, pois se $\bar{\alpha}_0^- = \alpha_0^-$ por (7.9), então se fizermos $n = 0$ em (7.41) e aplicarmos essa condição, podemos afirmar que:

$$\bar{L}_0^\perp = L_0^\perp \quad (7.42)$$

Muita atenção aqui! Estamos trabalhando com modos transversais de Virasoro, mas logo vamos ver que eles vão se tornar operadores. Por definição, esses operadores não são iguais! Mas a atuação deles no espaço de estados pode ser. Deste modo, teríamos algo do tipo:

$$\bar{L}_0^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle = L_0^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle \quad (7.43)$$

Onde $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ vai representar nosso espaço de estados. Bom, isso é assunto para a próxima seção, agora nosso objetivo é transformar os modos transversais de Virasoro em operadores transversais de Virasoro. Para a nossa felicidade, já sabemos como fazer isso, pois o processo é idêntico ao que foi feito para cordas abertas. Nas cordas fechadas vamos obter:

$$\begin{cases} \bar{L}_0^\perp = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + \bar{N}^\perp \\ L_0^\perp = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + N^\perp \end{cases} \quad (7.44)$$

Onde:

$$\begin{cases} \bar{N}^\perp \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \bar{a}_n^{I\dagger} \bar{a}_n^I \\ N^\perp \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} n a_n^{I\dagger} a_n^I \end{cases} \quad (7.45)$$

Perceba que $\bar{N}^\perp = N^\perp$, isso vai ser importante. Outra coisa, apenas para mostrar a semelhança, veja como essas expressões são parecidas com a primeira equação em (6.174) e a definição do operador número em (6.168). Além disso, vimos no capítulo 6 que onde antes havia um modo de viroso, depois passou a haver um operador de Virasoro mais uma constante a , que depois descobrimos que $a = -1$. Aqui não vai ser diferente, por exemplo, as expressões (7.41) vão ser reescritas como:

$$\begin{cases} \sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_n^- = \frac{2}{p^\pm} (\bar{L}_n^\perp - 1) \\ \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{2}{p^\pm} (L_n^\perp - 1) \end{cases} \quad (7.46)$$

Na teoria de cordas abertas, tínhamos um espaço-tempo de 26 dimensões, isso também tem que se manter na teoria de cordas fechadas, porque uma corda aberta pode se fechar para formar uma corda fechada. Ambas têm que coincidir no número de dimensões e como o número de dimensões está amarrado ao valor da constante a , ambas as teorias também têm que coincidir neste valor. Por agora podemos dar por concluída as nossas análises referentes ao operador transversal de Virasoro da corda fechada.

No capítulo anterior falamos bastante das propriedades de comutação dos operadores transversais de Virasoro, pois nosso objetivo era construir uma base matemática necessária para calcular o comutador $[M^{-I}, M^{-J}]$, que ia nos dar a dimensionalidade do espaço tempo. Aqui não será necessário fazermos estas análises, mas a título de curiosidade, todos os cálculos são bem parecidos. Alguns resultados são os mesmos porque os operadores L_n^\perp e \bar{L}_n^\perp satisfazem a álgebra de Virasoro. Embora não vamos utilizar estes resultados, vou deixa-los abaixo apenas para título de curiosidade.

$$\begin{cases} [\bar{L}_m^\perp, \bar{\alpha}_n^J] = -n \bar{\alpha}_{m+n}^J & [L_m^\perp, \alpha_n^J] = -n \alpha_{m+n}^J \\ [\bar{L}_m^\perp, \alpha_n^J] = 0 & [L_m^\perp, \bar{\alpha}_n^J] = 0 \\ [\bar{L}_m^\perp, X_0^I] = -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \bar{\alpha}_m^I & [L_m^\perp, X_0^I] = -i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \alpha_m^I \end{cases} \quad (7.47)$$

O próximo passo é construir o operador de massa ao quadrado da corda fechada.

7.1.4 Operador de Massa ao Quadrado da Corda Fechada

Nosso ponto de partida será encontrar quem é o p^- da corda fechada. Então vamos visualizar as expressões em (7.46). Faremos $n = 0$, onde valem as relações (7.9) e (7.42). Vamos manipular essas expressões!

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^- = \frac{1}{p^+} (2L_0^\perp - 2) = \frac{1}{p^+} (L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2) \quad (7.48)$$

Agora vamos substituir α_0^- usando a relação (7.17). Já vou simplificar as constantes.

$$\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} (L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2) \quad (7.49)$$

$$p^- = \frac{1}{\alpha' p^+} (L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2) \quad (7.50)$$

Partindo daqui ficou fácil, pois sabemos que o operador massa ao quadrado tem que respeitar a relação (4.90), então vamos substituir p^- nesta relação.

$$M^2 = 2p^+ \frac{1}{\alpha' p^+} (L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2) - p^I p^I = \frac{2}{\alpha'} (L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2) - p^I p^I \quad (7.51)$$

Agora abrimos os operadores de Virasoro usando (7.44).

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} \left(\frac{\alpha'}{4} p^I p^I + N^\perp + \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + \bar{N}^\perp - 2 \right) - p^I p^I \quad (7.52)$$

$$M^2 = \frac{1}{2} p^I p^I + \frac{2}{\alpha'} N^\perp + \frac{1}{2} p^I p^I + \frac{2}{\alpha'} \bar{N}^\perp - \frac{4}{\alpha'} - p^I p^I \quad (7.53)$$

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} N^\perp + \frac{2}{\alpha'} \bar{N}^\perp - \frac{4}{\alpha'} \quad (7.54)$$

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2) \quad (7.55)$$

Chegamos por fim no operador massa ao quadrado que vamos utilizar na teoria de cordas fechadas. Vamos concluir esta seção falando agora do operador hamiltoniano.

7.1.5 Operador Hamiltoniano da Corda Fechada

O operador hamiltoniano pode ser derivado de forma ainda mais simples, pois podemos reaproveitar o raciocínio construído em (6.9), com a diferença que para a corda fechada, teremos $\beta = 1$. Ficamos então com:

$$H = \alpha' p^+ p^- \quad (7.56)$$

Agora substituímos p^- pelo que obtemos em (7.50).

$$H = \alpha' p^+ \frac{1}{\alpha' p^+} \left(L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2 \right) = L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2 \quad (7.57)$$

Por fim, abrimos os operadores de Virasoro usando (7.44).

$$H = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + N^\perp + \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + \bar{N}^\perp - 2 \quad (7.58)$$

$$H = \frac{\alpha'}{2} p^I p^I + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2 \quad (7.59)$$

Chegamos a uma expressão satisfatória para o operador hamiltoniano. Com isso, determinamos todos os operadores importantes para o entendimento da teoria de cordas fechadas. O próximo e último passo será trabalharmos no espaço de estados, para começar a determinar os estados das partículas.

7.2 Estado de Gráviton na Teoria de Cordas Fechadas

Nosso grande objetivo é chegar nos estados de gráviton e isso vai ser possível pela teoria de cordas fechadas. Faremos a construção do espaço de estados de forma similar ao que foi feito com as cordas abertas. A grande diferença é que na teoria de cordas fechadas, existem dois tipos de operadores de criação e aniquilação.

7.2.1 Espaço de Estados da Teoria de Cordas Fechadas

Na teoria de cordas fechadas, o estado fundamental ainda é representado por $|p^+, \vec{P}_T\rangle$, que também vai ser o estado de vácuo para todos os operadores de criação e aniquilação da teoria das cordas fechadas. O estado base geral para se criar partículas na teoria de cordas fechadas, exige atuação dos dois tipos de operadores de criação $a_n^{I\dagger}$ e $\bar{a}_m^{J\dagger}$ no estado fundamental. Deste modo, faremos a mesma construção feita em (6.167) para determinar o estado base geral da teoria de cordas fechadas.

$$|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} \left(a_n^{I\dagger} \right)^{\lambda_{n,I}} \right] \cdot \left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{J=2}^{25} \left(\bar{a}_m^{J\dagger} \right)^{\bar{\lambda}_{m,J}} \right] |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (7.60)$$

Dessa construção, $\lambda_{n,I}$ e $\bar{\lambda}_{m,J}$ possuem o mesmo papel visto na teoria de cordas abertas, estes valores vão representar o número de vezes que os seus respectivos operadores de criação

vão atuar no estado fundamental. Estas não são as únicas semelhanças entre as duas teorias, pois com essa construção e tendo em vista que o operador número manteve o mesmo formato, podemos determinar sua atuação no estado base geral. A atuação dos operadores números precisa ser igual ao que foi visto em (6.181).

$$\begin{cases} N^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I} |\lambda, \bar{\lambda}\rangle \\ \bar{N}^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{J=2}^{25} m \bar{\lambda}_{m,J} |\lambda, \bar{\lambda}\rangle \end{cases} \quad (7.61)$$

Partindo daqui, podemos já determinar os estados das partículas. Já temos todas as ferramentas necessárias!

7.2.2 Estados de Táquions Representados por Cordas Fechadas

O primeiro estado que vamos analisar é o estado fundamental $|p^+, \vec{P}_T\rangle$. Começaremos aplicando o operador massa ao quadrado (7.55) no estado fundamental.

$$M^2 |p^+, \vec{P}_T\rangle = \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2) |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (7.62)$$

$$M^2 |p^+, \vec{P}_T\rangle = \frac{2}{\alpha'} (N^\perp |p^+, \vec{P}_T\rangle + \bar{N}^\perp |p^+, \vec{P}_T\rangle - 2 |p^+, \vec{P}_T\rangle) \quad (7.63)$$

Assim como foi para as cordas abertas, o operador número aniquila o estado fundamental.

$$M^2 |p^+, \vec{P}_T\rangle = -\frac{4}{\alpha'} |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (7.64)$$

Deste modo, chegamos os estados de táquions de corda fechada. Perceba que o autovalor do operador massa ao quadrado aplicado no estado fundamental é $-\frac{4}{\alpha'}$, ou seja, quatro vezes mais do que o quadrado da massa dos táquions de corda aberta (6.184). Esses táquions de corda fechada ainda são pouco compreendidos, e o potencial dos táquions de corda fechada ainda não foi calculado de forma confiável. Espera-se que a instabilidade desses táquions seja a instabilidade do próprio espaço-tempo. Não vamos entrar em muitos detalhes, nosso objetivo está na próxima subseção.

7.2.3 Estados de Grávitons Representados por Cordas Fechadas

O próximo estado que vamos analisar será o estado $a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle$. Lembra que os estados da teoria de cordas fechadas são construídos com operadores de criação atuando em pares

no estado fundamental. Deste modo, para esta configuração existem $(D-2)^2$ estados possíveis. Vejamos qual é o quadrado da massa das partículas neste estado.

$$M^2 a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle = \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2) a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (7.65)$$

Já sabemos como é a atuação do operador número, então vou escrever direto os autovalores que eles vão extrair deste estado.

$$M^2 a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle = \frac{2}{\alpha'} (1 + 1 - 2) a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (7.66)$$

$$M^2 a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle = 0 \quad (7.67)$$

Esse estado fornece partículas sem massa! Em primeira análise parece um candidato promissor para o estado de gráviton. Vamos escrever o estado geral para estas partículas sem massa, como sendo uma combinação linear de todos os estados base que garantem este resultado.

$$\sum_{I,J=2}^{25} R_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (7.68)$$

Nessa construção, R_{IJ} é uma matriz quadrada qualquer de dimensão $(D-2)$, uma vez que I e J possuem $(D-2)$ dimensões. Por comparação, já poderíamos associar este estado geral (7.68), ao estado de gráviton que desenvolvemos em (5.125), essas associações seriam semelhantes ao que fizemos com o estado de fóton. De antemão seria muito bom se o estado geral do gráviton já viesse bem determinado assim, mas devemos tomar cuidado com um detalhe crucial. Em (5.125), o tensor de polarização do gráviton ξ_{IJ} é uma matriz simétrica sem traço, enquanto que no estado que recém obtemos em (7.68) a matriz R_{IJ} é uma matriz quadrada arbitrária. As duas coisas não podem se associar diretamente, devemos mexer ainda na matriz R_{IJ} .

Faremos a partir daqui algumas manipulações em cima desta matriz, afim de obter uma matriz que seja possível de ser associada ao tensor de polarização do gráviton. Pois bem, toda matriz quadrada se decompõe em uma parte simétrica e uma parte anti-simétrica. A parte simétrica de R_{IJ} vamos chamar de S_{IJ} e a parte anti-simétrica será chamada de A_{IJ} .

$$R_{IJ} = S_{IJ} + A_{IJ} \quad (7.69)$$

Vamos tratar agora somente a parte simétrica. Podemos escrever:

$$S_{IJ} = \left(S_{IJ} - \frac{1}{D-2} \delta_{IJ} S \right) + \frac{1}{D-2} \delta_{IJ} S \quad (7.70)$$

Onde $S \equiv S^{II} = \delta^{IJ} S_{IJ}$. Perceba que podemos escrever a parte simétrica dessa maneira, pois os termos que foram acrescentado se anulam e a equação se torna trivial. A vantagem de escrever desta forma é que acabamos de decompor a parte simétrica de R_{IJ} em mais duas matrizes. O que está entre parêntesis representa uma matriz e o que está fora do parêntesis representa outra matriz. Ambas precisam ser simétricas, então agora vem o pulo do gato! Se aplicarmos δ^{IJ} em qualquer uma dessas matrizes, forçamos elas a assumirem somente os elementos da diagonal. Vamos ver o que acontece quando forçamos a matriz entre parêntesis a assumir os elementos da diagonal, aplicando δ^{IJ} .

$$\delta^{IJ} S_{IJ} - \frac{1}{D-2} \delta^{IJ} \delta_{IJ} S = S - \frac{1}{D-2} (D-2) S = S - S = 0 \quad (7.71)$$

Forçando o termo entre parêntesis a assumir somente os valores da diagonal, o resultado é nulo. Isso significa que a matriz entre parêntesis é uma matriz simétrica sem traço. Em outras palavras, em (7.70) podemos afirmar que a parte simétrica de R_{IJ} é uma matriz simétrica sem traço mais um múltiplo da matriz unitária. Vamos dar nomes! A parte simétrica sem traço será chamada de \hat{S}_{IJ} , e vamos definir $S' = \frac{S}{D-2}$. Deste modo, a parte simétrica fica decomposta em:

$$S_{IJ} = \hat{S}_{IJ} + S' \delta_{IJ} \quad (7.72)$$

Deste modo, decomparamos a matriz R_{IJ} em três partes, sendo elas uma parte simétrica sem traço, uma parte anti-simétrica e uma parte com somente elementos na diagonal.

$$R_{IJ} = \hat{S}_{IJ} + A_{IJ} + S' \delta_{IJ} \quad (7.73)$$

Finalmente, \hat{S}_{IJ} será nosso candidato ideal para o tensor de polarização do gráviton. Com tudo isso, o estado que estávamos trabalhando em (7.68) se subdivide em três grupos de estados linearmente independentes.

$$\sum_{I,J=2}^{25} (\hat{S}_{IJ} + A_{IJ} + S' \delta_{IJ}) a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (7.74)$$

$$\sum_{I,J=2}^{25} \hat{S}_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle + \sum_{I,J=2}^{25} A_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle + \sum_{I,J=2}^{25} S' \delta_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (7.75)$$

$$\sum_{I,J=2}^{25} \hat{S}_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle + \sum_{I,J=2}^{25} A_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle + \sum_{I=2}^{25} S' a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{I\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (7.76)$$

Falaremos a seguir de um por um. Começando pelo terceiro conjunto de estados:

$$\sum_{I=2}^{25} S' a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{I\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle \quad (7.77)$$

Estes são os *Estados de Dilaton*, que representam os estados de uma partícula de um campo escalar sem massa. O campo de dilaton possui propriedades surpreendentes e exige um estudo mais avançado. Apenas para título de curiosidade, o valor esperado do campo de dilaton controla o acoplamento das cordas. O acoplamento das cordas é um número adimensional que define a força das interações das cordas.

Agora falaremos do segundo conjunto de estados:

$$\sum_{I,J=2}^{25} A_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle \quad (7.78)$$

O segundo conjunto de estados representam os estados de uma partícula do *Campo de Kalb-Ramond*, um campo tensorial anti-simétrico com dois índices. Para falar do campo de Kalb-Ramond também é necessário um estudo mais avançado, porém podemos dizer que este campo se acopla nas cordas de forma análoga como o campo de Maxwell se acopla nas partículas.

Por fim, falaremos do primeiro conjunto de estados:

$$\sum_{I,J=2}^{25} \hat{S}_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle \quad (7.79)$$

Finalmente chegamos aos tão esperados estados de grávitons! Podemos comparar com os estados desenvolvidos em (5.125). Perceba que ambos os estados têm os mesmos índices de Lorentz e vimos que o vetor de polarização do gráviton também pode ser representado por \hat{S}_{IJ} . Ambos os estados carregam o mesmo momento e a ausência de massa. Esse resultado é surpreendente porque mostra que a teoria de cordas fechadas tem estados de grávitons. Apareceu os estados quânticos do campo gravitacional na teoria! Podemos dar por concluído os principais objetivos do nosso estudo.

7.3 Equação de Movimento para os Estados sem Massa

Semelhante a construção que fizemos em (6.192), podemos escrever os estados gerais dependentes do tempo para as partículas sem massa da seguinte maneira:

$$|\psi, \tau\rangle = \int dp^+ d\vec{P}_T \psi_{IJ}(\tau, p^+, \vec{P}_T) a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} \left| p^+, \vec{P}_T \right\rangle \quad (7.80)$$

Pois bem, vamos lembrar do operador hamiltoniano (7.59) e aplica-lo ao estado de partículas sem massa.

$$H a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle = \frac{\alpha'}{2} p^I p^I a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle + (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2) a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (7.81)$$

Pelos cálculos que fizemos em (7.66), já sabemos que o segundo termo vai dar zero!

$$H a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle = \frac{\alpha'}{2} p^I p^I a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{P}_T\rangle \quad (7.82)$$

De imediato vemos que para os estados de partículas sem massa, o operador hamiltoniano pode ser escrito como:

$$H = \frac{\alpha'}{2} p^I p^I \quad (7.83)$$

Porém, sabemos também que $H = i \partial_\tau$. Podemos juntar as duas expressões e aplicar o estado ψ_{IJ} , que representa o estado de partículas sem massa das cordas fechadas.

$$i \partial_\tau \psi_{IJ}(\tau, p^+, \vec{P}_T) = \frac{\alpha'}{2} p^K p^K \psi_{IJ}(\tau, p^+, \vec{P}_T) \quad (7.84)$$

Neste caso, ψ_{IJ} contém os estados de grávitons, Kalb-Ramond e dilaton. Vamos agora escrever a equação de campo referente a estes estados. Aqui seguiremos os mesmos passos que fizemos para os estados de táquions e os estados de fótons na teoria de cordas abertas. Vamos tomar a equação de campo no sistema de coordenadas do cone de luz em (5.22), tendo em mente já quem é X^+ , pelos calibres em (4.65). Lembrando que para as cordas fechadas, teremos $\beta = 1$.

$$\left(\frac{i}{\alpha' p^+} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{1}{2 p^+} (p^I p^I + m^2) \right) \alpha' p^+ \phi(\tau, p^+, \vec{P}_T) = 0 \quad (7.85)$$

Como estamos trabalhando com estados de partículas sem massa, teremos $m^2 = 0$.

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\alpha'}{2} p^I p^I \right) \phi(\tau, p^+, \vec{P}_T) = 0 \quad (7.86)$$

Essa é a equação de campo para as partículas sem massa da teoria de cordas fechadas. Chegamos ao fim do nosso estudo e o que podemos dar um destaque importante é que nos estados sem massa da corda fechada, encontramos campo de grávitons, campo de Kalb-Ramond e campo de dilaton. Embora desde o início nos quiséssemos encontrar somente os estados de grávitons, encontrar estados a mais, torna a teoria ainda mais elegante e muito mais rica.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Chegamos ao fim da jornada, com um importante resultado demonstrado. Desde o começo, nosso objetivo era fazer uma introdução à teoria de cordas e mostrar que o modelo proposto pela teoria pode ser capaz de unificar as interações fundamentais da Natureza. O modelo é bem ambicioso em se propor a unificar todas as interações fundamentais. No nosso estudo, mostramos como chegar ao estado do fóton e ao estado do gráviton usando a teoria de cordas. Como consequência, mostramos que a teoria de cordas é capaz de descrever uma teoria de gravitação quântica. Se formos fazer uma análise geral de tudo que vimos até aqui, nós conseguimos juntar a interação eletromagnética e a interação gravitacional em um único modelo, que faz uso de cordas abertas e cordas fechadas e ainda tratamos essa unificação quânticamente. Isso por si só é surpreendente!

Embora não tenhamos falado em nosso estudo, nessa mesma teoria que trabalhamos, vão surgir bósons de calibre não-abeliano, necessários para transportar a interação das forças nucleares fraca e forte. Com isso, temos consolidada a *Teoria de Cordas Bosônicas*, que garante a obtenção dos estados das partículas que transportam as forças de interações fundamentais da Natureza. Essa teoria exige um espaço-tempo de 26 dimensões e seus estados quânticos podem representar os bósons que conhecemos, incluindo o gráviton.

O próximo passo é introduzir a supersimetria na teoria. A supersimetria é uma simetria que relaciona os bósons com os férmions. Devemos lembrar que os bósons transportam força de interação e os férmions são partículas que constituem a matéria, tais como os elétrons e os quarks. Deste modo, a supersimetria unifica a matéria com forças de interação. Introduzindo a supersimetria na teoria de cordas, nós obtemos a teoria de supercordas, que surgiu entre o final da década de 1970 e o início da década de 1980. Na teoria de supercordas surgem estados fermiônicos, tais como os estados de quarks e os estados de léptons, e ela reduz o número de dimensões do espaço-tempo para dez. Com isso, é possível dar mais um passo para uma teoria de grande unificação.

Embora não tenhamos feito a grande unificação neste estudo, tudo que foi construído aqui pode ser uma base de grande valor para sustentar uma possível continuação. Afinal, partimos da descrição de um modelo de cordas clássicas não relativísticas, passamos pela descrição das cordas relativísticas e chegamos a sua quantização. Ao longo deste estudo, portanto, mostramos o caminho para se chegar à teoria de cordas bosônicas.

REFERÊNCIAS

- CHUNG, K. *Introdução à física nuclear*. Rio de Janeiro: EdUERJ, 2001. 13
- GREEN, M. B.; SCHWARZ, J. H.; WITTEN, E. *Superstring Theory: Volume 1, Introduction*. New York: Cambridge University Press, 1987.
- JOHNSON, C. V. *D-Branes*. New York: Cambridge University Press, 2003.
- MUKHI, S. String theory: A perspective over the last 25 years. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 28, n. 15, p. 153001, 2011.
- ORTÍN, T. *Gravity and Strings*. New York: Cambridge University Press, 2004.
- SCHWARZ, J. H. The early years of string theory: A personal perspective. *arXiv preprint arXiv:0708.1917*, 2007.
- ZWIEBACH, B. *A First Course in String Theory*. New York: Cambridge University Press, 2009.