



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE FLORESTAS  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA FLORESTAL

**MARCELA DE CASTRO SANTOS**

**MODELAGEM DE AFILAMENTO DO FUSTE DE EUCALIPTO POR CLASSE DE  
DIÂMETRO**

Prof. Dr. MARCO ANTONIO MONTE  
Orientador

SEROPÉDICA, RJ  
JULHO – 2017



UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE FLORESTAS  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA FLORESTAL

**MARCELA DE CASTRO SANTOS**  
**MODELAGEM DE AFILAMENTO DO FUSTE DE EUCALIPTO POR CLASSE DE**  
**DIÂMETRO**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Florestal, como requisito parcial para a obtenção do Título de Engenheiro Florestal, Instituto de Florestas da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro.

Prof. Dr. MARCO ANTONIO MONTE  
Orientador

SEROPÉDICA, RJ  
JULHO – 2017

**MODELAGEM DE AFILAMENTO DO FUSTE DE EUCALIPTO POR CLASSE DE  
DIÂMETRO**

**MARCELA DE CASTRO SANTOS**

Monografia aprovada em 17 de julho de 2017.

Banca Examinadora:

---

Prof. Dr. Marco Antonio Monte – UFRRJ  
Orientador

---

Prof. Dr. Emanuel José Gomes de Araújo – UFRRJ  
Membro

---

Msc. Danilo Henrique do Santos Ataíde – UFRRJ  
Membro

## DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus  
e a toda minha família.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por cada superação, lição, amor e onipresença.

Aos meus pais, por ser o pilar da minha existência; e mesmo que em silêncio, têm sido a voz da sabedoria e do coração.

Ao professor Marco Antonio Monte, pelo voto de confiança, sabedoria, paciência, humildade e generosidade, sem ele este trabalho não seria possível.

A Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro pela experiência fantástica.

Aos professores da UFRRJ, em especial Alexandre Monteiro, Marcio Francelino, João Araújo, Gustavo Lyra, Denise, Paulo Leles, Alexandra, Rogério, Thiago, Acácio, Heber (*in memoriam*) e André Felipe.

Aos grandes amigos de todas as horas, Alexandre Miguel e Tião, talvez não saibam, mas o olhar amoroso de vocês me dava força nesta jornada.

Às minhas grandes inspirações e referências na formação acadêmica e humana: Hugo Barbosa, Tokitika Morokawa, Ricardo Valcarcel e Francisco Cavalcanti.

Ao amigo e professor de grande sabedoria e humildade que viverá para sempre em mim Professor João dos Santos.

Aos funcionários da UFRRJ Paulo César, Zilá, Carmen, Abdala, Jaqueline, Seu Fernando, Sônia pela amizade e por ter aberto a porta de seus lares e ricas conversas.

Aos membros da banca, Professor Emanuel e Engenheiro Florestal Danilo Ataíde, pela contribuição valiosa nesse trabalho.

Aos meus grandes amigos Engenheiros Florestais, Vítor Setúbal e Daniel Zubrinsky por toda imensurável amizade.

À grande amiga e conselheira Adélia Leal, que é um exemplo de vida para mim.

Às amigas, Camila, Amanda, Silvia, Fernanda, Thaynara e Gabrielle do F3-303 e F4-105.

Aos grandes amigos que ganhei em todos esses anos na UFRRJ e na Engenharia Florestal.

À Engenheira Florestal Victória Monteiro, por ter me dado minha Raika e fazer minha vida ter outro sentido.

## RESUMO

O objetivo deste trabalho foi avaliar a precisão de modelos de afilamento, utilizando a estratificação por classe de diâmetro (*dap*). Foram utilizadas 30 árvores por classe de *dap*, variando o centro de classe de 3,75 a 21,25 cm, com amplitude de 2,5 cm. Os modelos utilizados foram o de Hradetzky e o de Schöepfer. Estes modelos também foram ajustados sem considerar a estratificação por classe de *dap*, neste caso foram sorteadas aleatoriamente 30 árvores, em cada classe, a fim de manter a intensidade amostral. A avaliação da precisão das equações foi realizada por meio da análise de resíduos absolutos e padronizados, erro padrão da estimativa ( $S_{yx}^0\%$ ), coeficiente de determinação ajustado ( $R_{aj}^2$ ), *bias* e raiz quadrada do erro médio (*RQEM*). A estratificação favoreceu a precisão das equações, comprovada pela melhoria das estatísticas utilizadas na avaliação da qualidade de ajuste, para os dois modelos utilizados. Nos centros de classes extremos o efeito da estratificação se acentua quando se compara com a equação geral (sem estratificação). A estratificação por classe de diâmetro (*dap*) promove melhorias na acurácia das estimativas de diâmetro (*di*) ao longo do fuste.

**Palavras-chave:** forma de fuste, classes de diâmetro à altura do peito, equações de afilamento.

## ABSTRACT

The objective of this work was to evaluate the accuracy of the taper models, using stratification by diameter class (*dbh*). Thirty trees per dap class were used, varying the class center from 3.75 to 21.25 cm, with amplitude of 2.5 cm. The models used were those of Hradetzky and Schöpfer. These models were also adjusted without considering stratification by *dbh* class, in this case were randomly selected thirty trees, in each class, in order to maintain the sample intensity. The evaluation of the accuracy of the equations was performed through the analysis of absolute and standardized residuals, standard error of estimate ( $S_{yx}\%$ ), adjusted coefficient of determination ( $R^2_{aj}$ ), bias and square root of mean error (RQEM). The stratification favored the accuracy of the equations, as evidenced by the improvement of the statistics used in the evaluation of the fit quality, for the two models used. In extreme class centers the stratification effect is accentuated when compared to the general equation (without stratification). The stratification by diameter class (dap) promotes improvements in the accuracy of diameter estimates (*di*) along the tree trunk.

**Keywords:** tree trunk shape, diameter classes at breast height, equations of taper

## SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS .....	VIII
LISTA DE QUADROS .....	IX
1. INTRODUÇÃO .....	1
2. REVISÃO DE LITERATURA .....	2
2.1. Forma do fuste .....	2
2.1.1. Idade .....	2
2.1.2. Espaçamento .....	3
2.1.3. Tratamentos silviculturais .....	3
2.1.5. Outros fatores que influenciam na forma do fuste .....	4
2.4.1. Tipos de modelo .....	5
3. MATERIAL E MÉTODOS .....	7
3.1. Caracterização dos dados .....	7
3.2. Cubagem rigorosa .....	7
3.3.1. Ajuste e análise do modelo .....	7
4. RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	10
5. CONCLUSÕES .....	16
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	17
APÊNDICE A – QUADRO DAS POTÊNCIAS SELECIONADAS PELO MÉTODO <i>STPEWISE</i> .....	19



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Esquema das formas contidas em um fuste.....	2
Figura 2 - Frequência das árvores cubadas por classe diamétrica.....	7
Figura 3 - Distribuição dos resíduos absolutos obtidos a partir do ajuste do modelo de Schöepfer, para os respectivos centros de classe de <i>dap</i> , 3,75; 6,25; 8,75; 11,25; 13,75; 16,25; 18,75 e 21,25cm. ....	12
Figura 4 - Distribuição dos resíduos absolutos obtidos a partir do ajuste do modelo de Hradetzky, para os respectivos centros de classe de <i>dap</i> , 3,75; 6,25; 8,75; 11,25; 13,75; 16,25; 18,75 e 21,25cm. ....	12
Figura 5 - Distribuição dos resíduos padronizados obtidos a partir do ajuste do modelo de Schöepfer, para os respectivos centros de classe de <i>dap</i> , 3,75; 6,25; 8,75; 11,25; 13,75; 16,25; 18,75 e 21,25cm. ....	13
Figura 6 - Distribuição dos resíduos padronizados obtidos a partir do ajuste do modelo de Hradetzky, para os respectivos centros de classe de <i>dap</i> , 3,75; 6,25; 8,75; 11,25; 13,75; 16,25; 18,75 e 21,25cm. ....	13
Figura 7 - Perfil longitudinal do fuste obtido a partir do ajuste do modelo de Schöepfer e Hradetzky, usando a estratificação por classe de <i>dap</i> (pontilhado) e sem a estratificação (contínuo), para os respectivos centros de classe de <i>dap</i> , 3,75; 6,25; 8,75; 11,25; 13,75; 16,25; 18,75 e 21,25cm. ....	15

## **LISTA DE QUADROS**

Quadro 1 - Estatísticas de qualidade de ajuste dos modelos de afilamento, em relação ao diâmetro, para eucalipto estabelecido no espaçamento 3,0x3,0 m, em Minas Gerais..... 10

## 1. INTRODUÇÃO

O fuste de uma árvore apresenta grandes variações na sua forma entre as espécies florestais e indivíduos. Autores como Scolforo (2004), descreveram o fuste com uma composição de sólidos de revolução, que pode compreender formas como o neiloide, o parabolóide, o cone e o cilindro. Entretanto, os limites iniciais e finais destes sólidos são influenciados pelos diversos fatores que afetam o crescimento da árvore e, conseqüentemente, a forma do fuste. Outra característica importante do fuste é que entre a sua base e o seu topo ocorre uma redução no diâmetro, o que é caracterizado pelo seu afilamento.

O afilamento do fuste é descrito como a taxa de decréscimo de diâmetro ( $d$ ) em relação à altura total, e seu estudo pode subsidiar importantes tomadas de decisão no manejo florestal, principalmente quando se objetiva estimar o sortimento do fuste. O perfil de fuste é descrito por modelos de afilamento, que via integração são capazes de descrever a forma do fuste da árvore (AHRENS e HOLBERT, 1981), permitem obter o volume em qualquer ponto ao longo do fuste, assumindo-se que a seção transversal seja circular (CAMPOS e LEITE, 2013).

Os modelos de afilamento representam todo o perfil do fuste e, nesse caso, os dados necessários para ajustar tais modelos compreendem a medição de diâmetros ( $d$ ) em diferentes alturas ( $h$ ), além do diâmetro a 1,30 m do solo ( $dap$ ) e a altura total ( $Ht$ ), semelhantemente à cubagem rigorosa. É um procedimento bastante demorado, o que pode onerar os custos de inventário florestal. Por isso, são amostradas árvores nas diferentes classes diamétricas, a fim de ter melhor representatividade do povoamento estudado, e ajusta-se uma única equação para representar todo o afilamento. Contudo, isso introduz uma variabilidade de formas de fuste, que pode ocasionar perda de precisão da equação resultante. Este fato pode ser mais drástico quando se deseja avaliar o sortimento do fuste, uma vez que pode causar sub ou superestimativa do volume das seções.

Estudos recentes sobre modelagem de afilamento têm buscado utilizar algumas formas de estratificação visando aumentar a precisão da equação ajustada, assim como David *et al.* (2014) que avaliaram a acurácia de funções de afilamento ajustadas com e sem a estratificação de árvores de *Pinus* sp. Eles concluíram que a equação gerada sem estratificação difere estatisticamente daquelas ajustadas por estrato, e estas propiciam expressivos ganhos na acurácia do ajuste e recomendou a estratificação por fator de forma artificial por ela propiciar, em média, maiores ganhos na acurácia. Kohler, Koehler e Figueiredo Filho (2013) estratificaram por classe de idade e concluíram que o polinômio de potências inteiras e fracionárias e que as equações obtidas para as classes de idades proporcionam maior qualidade nas estimativas dos diâmetros.

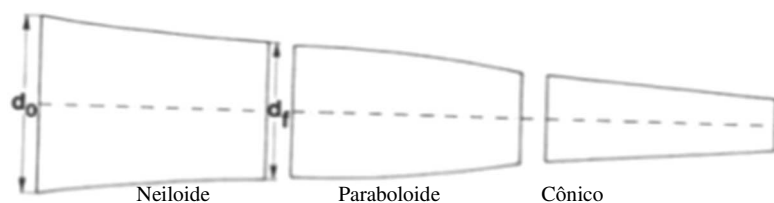
As hipóteses do presente trabalho são: a) a estratificação por classe de diâmetro ( $dap$ ) aumenta a precisão da equação de afilamento; b) os modelos polinomiais apresentam a mesma performance quando se realiza a estratificação por classe de diâmetro ( $dap$ ).

Dessa forma o objetivo principal é avaliar a acurácia de funções de afilamento, para povoamentos do gênero *Eucalyptus*, adotando a estratificação para classes de diâmetro a 1,3 m do solo.

## 2. REVISÃO DE LITERATURA

### 2.1. Forma do fuste

A forma do fuste apresenta variações desde a base até o topo. Chapman e Meyer (1949), Loetsch *et al.* (1973) e Husch *et al.* (2003) indicaram que a forma do fuste é basicamente descrita como um neilóide na base, um parabolóide no meio e um cone no topo (Figura 1). Row e Guttenberg (1966) verificaram que os fustes das árvores raramente apresentam uma forma exata e sim a combinação destas formas.



**Figura 1** – Esquema das formas contidas em um fuste

Fonte: Olaya, 2017, *Temas de valoración forestal de Universidad Del Zulia*

Estudo sobre a forma do fuste é importante na mensuração florestal. Newnham (1988) elucidou sobre duas razões para a importância do estudo da forma do fuste; a primeira, é que não há uma teoria única desenvolvida de forma adequada que explica toda a variedade de forma que as árvores podem assumir. Em segundo lugar, e mais importante, de um ponto de vista prático, é necessária uma função cônica para estimar o volume de árvores em pé para uso múltiplo, algo necessário para planejamento da produção.

A grande variação que a forma do fuste pode assumir está relacionada com fatores que afetam a taxa de crescimento das árvores. Entre os principais fatores que afetam a forma do fuste podemos destacar: idade, espaçamento, tratamento silviculturais entre outros.

#### 2.1.1. Idade

A forma do fuste das árvores varia com a idade e tende a ser mais cilíndrico com o avanço da idade. Machado (1982) verificou que os quocientes de forma da base de árvores permanecerem relativamente constantes com o aumento da idade, enquanto os quocientes de forma para as partes mais superiores das árvores continuam em crescimento com o aumento da idade. Durante o ciclo de vida de uma árvore, ocasionalmente, ocorrem alterações em sua copa e no decorrer da idade as mudanças na forma dos troncos tendem ao equilíbrio da forma cilíndrica, conforme explicam alguns autores.

Figueiredo Filho (1991) relaciona o fator de forma com a idade e mostra que há estabilização com o passar do tempo. Em resumo, nas idades jovens as mudanças são bastante rápidas, enquanto que nas idades avançadas a forma das árvores muda lentamente tendendo a estabilizar. A taxa de mudança de forma da árvore devido à idade pode variar entre as diferentes classes de copas ou posições sociológicas dentro do mesmo povoamento (FRIEDL, 1989).

Entre alguns estudos que estudaram a forma do fuste em relação à idade pode-se mencionar o de Machado (1982) que verificou o efeito cilíndrico da forma do fuste de *Araucaria angustifolia* com o aumento da idade. Scolforo e Figueiredo Filho (1998)

observaram que a conicidade das árvores tende a ser menor nas idades mais adultas. Estes autores afirmaram que muitas vezes árvores jovens, de crescimento livre, têm longas copas (a razão copa fuste é maior) e, conseqüentemente, forte afilamento e quando em competição sua copa tende a reduzir e o fuste tende a aumentar na juventude da árvore, melhorando a forma do tronco principal.

### **2.1.2 Espaçamento**

O efeito do espaçamento na forma do fuste é bastante evidente. Árvores que crescem isoladas mantêm uma copa proporcionalmente mais comprida e o tronco assume então uma forte conicidade. Porém as árvores dominantes de um povoamento podem apresentar crescimento livre, as quais apresentam normalmente uma copa mais vigorosa (FIGUEIREDO FILHO, 1991). Árvores de crescimento livre são similares às árvores jovens que possuem copas compridas com uma forte conicidade.

Segundo Friedl (1989), quando no povoamento as copas se fecham e os raios solares não incidem, inicia-se a concorrência natural, os galhos inferiores morrem e o tronco se torna livre de galhos e, conseqüentemente, mais alto. Grande parte dos autores que analisaram o efeito da densidade conclui que quanto maior a densidade e decréscimo do comprimento da copa, mais o fuste se aproxima do cilindro. Larson (1963) afirma em seu estudo que muitos autores evidenciaram que os povoamentos densos acarretam em um decréscimo no comprimento da copa e conseqüentemente as árvores apresentam formas mais cilíndricas. Yared *et al.* (1993) verificaram a necessidade do uso de equações de volume independentes por espaçamento e, para constatar esta necessidade, construíram um teste de identidade de modelos. Estes autores concluíram que uma mesma equação não é recomendada para todos os espaçamentos.

### **2.1.3 Tratamentos silviculturais**

Alguns tratamentos silviculturais, como o desbaste, influenciam na forma do fuste, pois afetam a densidade de plantio inicial. Pesquisas que estudam o efeito do desbaste sobre a forma das árvores, apresentam que há crescimento da copa e, conseqüentemente, alteração da forma do tronco. Forward e Nolan (1961), citado por Larson (1963), apresentaram que algumas dessas mudanças são imediatas e algumas são desprezíveis e com pouca consequência econômica, mas essas são prontamente detectadas na análise de tronco e de grande significância para o entendimento do desenvolvimento do fuste. De acordo com Larson (1963) os estudos de desbastes se preocupam com questões econômicas, raramente com princípios biológicos e desprezam as diferenças na forma do tronco.

A desrama pode proporcionar efeito oposto ao do desbaste na forma da árvore. A realização da desrama causa modificação no tamanho das copas das árvores, o que poderá refletir na forma do fuste. O efeito de uma poda drástica poderia resultar em um declínio no crescimento de diâmetro ao longo do tronco da árvore, incluindo uma redução no crescimento em altura. Com a diminuição da copa das árvores, estas passam a ter melhor forma, uma vez que ocorre um aumento de incremento na base da copa da árvore. Neste caso o crescimento é proporcionalmente maior na parte superior do tronco, diminuindo a conicidade (SCOLFORO e FIGUEREDO FILHO, 1998).

### 2.1.5 Outros fatores que influenciam na forma do fuste

Além dos fatores comentados anteriormente também merecem destaque a influência da capacidade produtiva na forma do fuste das árvores; em sítios de baixa capacidade produtiva, as árvores normalmente têm maior conicidade ou formas indesejáveis, pois em sítios com baixa capacidade produtiva a altura em árvores de mesmo diâmetro é menor resultando em fuste mais afilado. Figueiredo Filho (1991) afirma que em sítios produtivos, o crescimento é mais concentrado na parte da copa enquanto nos sítios pobres, o crescimento tende a ser uniformemente distribuído no tronco e ainda que a forma esteja relacionada à densidade do povoamento.

Também, a forma do fuste pode variar de acordo com o material genético. Segundo Scolforo e Figueiredo Filho (1998) e Larson (1963), a forma da árvore tem alta correlação com a progênie. Estes autores afirmam que muito embora as características genéticas de uma árvore determinem sua maneira de crescer, o ambiente a modifica no decorrer do tempo. Como é o caso do estudo de Oksbjerg (1959) citado por Larson (1963), que concluiu sendo o ambiente mais importante que a herdabilidade devido a uma comparação de árvores pioneiras com árvores de mesma origem de sementes, mas estabelecidas em grupo. Constatou nas árvores pioneiras uma pior forma do fuste do que nas estabelecidas em grupo. Muito se tem relacionado à forma do tronco à copa da árvore, deixando de lado o papel relativo do ambiente e da herdabilidade.

## 2.2. Modelos de afilamento

Arce (2000) considera a aplicação de técnicas matemáticas visando à solução de problemas do corte, divisão em toras e empacotamento, para tal é necessário que se defina o comprimento útil da tora e alguma função que descreva a redução diamétrica da base para o topo, fazendo-se indispensável uma função de afilamento.

Empregar uma função de afilamento para estimar a altura relativa a um diâmetro mínimo comercial significa estimar o comprimento útil da árvore, de modo que a otimização das estimativas garante melhor uso do fuste e o máximo retorno do valor investido.

Nos levantamentos florestais, a praticidade nos leva a lançar mão de métodos empíricos, tais como fatores de forma, quocientes de forma, funções de afilamento, funções *spline* e até mesmo análise de componentes principais. Conforme Spurr (1952) citado por Scolforo (1993), no século XIX, o volume de árvores individuais era obtido pelo fator de forma e eventualmente valia-se dos quocientes de forma.

Entretanto, muitos dos profissionais que trabalham em mensuração florestal procuram descobrir uma função com uma ou duas variáveis, envolvendo poucos parâmetros, que possa ser usada para representar o perfil inteiro da árvore. De acordo com Ahrens e Holbert (1981), uma função de afilamento é uma descrição matemática do perfil longitudinal de um tronco. Declarando que a seção transversal seja circular em qualquer ponto ao longo do tronco, seu volume pode ser obtido por integração daquela função. Assim em termos geométricos, o tronco é tratado como um sólido de revolução. Uma vez definido um modelo matemático para o afilamento, pode-se determinar o volume de madeira entre quaisquer pontos ao longo do tronco. A natureza do algoritmo viabiliza a obtenção das estimativas de volume necessárias à multiplicidade de usos da madeira.

No início eram modelos relativamente simples, mas com o advento da computação modelos mais complexos foram implementados na busca de melhores resultados. A partir de então uma série de autores como Johnson em 1911, dentre outros, estudaram minuciosamente

a possibilidade do perfil do fuste de árvores ser representado por expressões matemáticas. A partir da década de 60, houve um substancial desenvolvimento no estudo da forma da árvore. Apresentam-se expressões matemáticas como, por exemplo, Modelo de Prodan, 1965; Modelo de Potências Fracionárias (HRADETZKY, 1976); Demaerschalk (1972); Max e Burkhart (1976); Modelo de Clutter, 1980 entre outros.

### 2.2.1. Tipos de modelo

Os modelos propostos na literatura são classificados como segmentados e não segmentados. No primeiro caso, uma única equação descreve todo o fuste da árvore, enquanto no segundo, são utilizadas mais de uma equação para representar o perfil. Os modelos não segmentados são representados por funções lineares e não lineares, sendo os modelos lineares de mais fácil ajuste, uma vez que são expressos por relações polinomiais. Destacam-se nesse grupo o modelo de Kozak (polinômio do segundo grau), modelo de Schöeper (polinômio do quinto grau) e o modelo Hradetzky (polinômio de potências inteiras e fracionárias). Machado et al. (2004) concluiu em seu trabalho que o polinômio de 5º grau representou o perfil do fuste da árvore como um todo de forma satisfatória, mas não representa tão bem o fuste na porção inferior, uma vez que ocorrem mais irregularidades da forma e sinuosidade na base da árvore do que nas partes superiores. Desta forma, Hradetzky (1976) sugeriu a utilização de potências de grau mais elevado para representar a base da árvore, em conjunto com as potências de grau baixo para representar a porção superior do tronco (MACHADO et al., 2004). O modelo de Kozak, segundo Yoshitani Junior et al. (2012), não descrevem consistentemente as extremidades superior e inferior da árvore, não sendo um modelo flexível para essas partes da árvore.

Como os modelos de afilamento representam todo o perfil do fuste, os dados necessários para ajustar tais modelos compreendem a medição de diâmetros ( $d$ ) em diferentes alturas ( $h$ ), além do diâmetro a 1,30 m do solo ( $dap$ ) e a altura total ( $Ht$ ), semelhantemente à cubagem rigorosa. É um procedimento bastante demorado, o que pode onerar os custos de inventário florestal. Por isso, são amostradas árvores nas diferentes classes diamétricas, a fim de ter melhor representatividade do povoamento estudado, e ajusta-se uma única equação para representar todo o afilamento. Contudo, isso introduz uma variabilidade de formas de fuste, que pode ocasionar perda de precisão da equação resultante. Este fato pode ser mais drástico quando se deseja avaliar o sortimento do fuste, uma vez que pode causar sub ou superestimativa do volume das seções.

Os modelos polinomiais caracterizam-se por um ajuste de regressão que relaciona vários diâmetros tomados ao longo do fuste e respectivas alturas, com o  $dap$  e altura total das árvores. Estes modelos são de simples ajuste, entretanto em geral não explicam as formas das extremidades das árvores. Dentre eles, destaca-se o Polinômio do Quinto Grau, modelo do Segundo Grau de Kozak (o mais difundido, segundo Campos e Leite, 2013), Munro e Smith (1969), modelo de Goulding e Murray (1976) e o modelo de Hradetzky (1976).

Hradetzky (1976) obteve uma boa representação do tronco através de polinômios, que exigem uma combinação apropriada de potências e que as mesmas sejam submetidas ao processo de seleção “passo a passo” (*stepwise*), sendo que essas potências variam de 0,005 a 25. Ele ainda propõe polinômios com potências de grau elevado para representar melhor a base da árvore, potências inteiras para representar a porção intermediária da árvore e potências fracionárias para representar o topo da árvore.

Assis (2000) avaliou o desempenho de modelos polinomiais não segmentados de: Schöpfer (1966); Hradetzky (1976); Kozak, Munro e Smith (1969) e o de Goulding e Murray (1976).

Eisfeld *et al.* (2004) comentam que importantes estudos envolvendo modelos polinomiais não-segmentados têm sido desenvolvidos no Brasil, no entanto, dentre os estudos existentes poucos abordam as estimativas volumétricas, quando, na verdade, um modelo que estime diâmetros satisfatoriamente não fornece, necessariamente, boas estimativas de volume.

O modelo de Schöpfer comparado a outros modelos não segmentados foi considerado acurado para estimativa dos diâmetros e volume dos sortimentos para *Eucalyptus grandis* conforme os trabalhos de Schneider *et al.* (1996), Müller (2005) e Mendonça (2007).

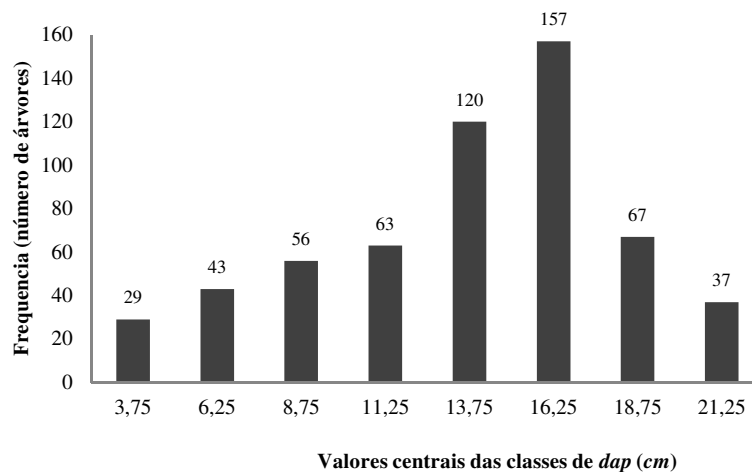
Fischer *et al.* (1998) estudou a eficiência dos modelos polinomiais e das razões de volume na estimativa volumétrica dos sortimentos e do perfil dos fustes de *Pinus taeda* com ajustes por sítio e por classe de diâmetro para descrever o perfil do tronco.



### 3. MATERIAL E MÉTODOS

#### 3.1. Caracterização dos dados

Os dados utilizados no presente estudo foram fornecidos por uma empresa do setor florestal, localizada no Estado de Minas Gerais. São dados provenientes da cubagem rigorosa de 572 árvores, pertencentes a três clones de eucalipto, estabelecido no espaçamento inicial de 3,0 x 3,0 m; estas árvores foram agrupadas em oito classes diamétricas, com amplitude de 2,5 cm, cujos centros de classes variavam de 3,75 a 21,25 cm (Figura 2).



**Figura 2** - Frequência das árvores cubadas por classe diamétrica.

Foram utilizadas no ajuste árvores com idades variando de 7,0 a 9,0 anos, a fim de reduzir o efeito da idade na forma do fuste. Não foi utilizada apenas uma única idade, pelo fato de não suprir o  $n$  de 30 árvores em cada centro de classe de *dap*. As árvores utilizadas apresentavam altura total variando de 4,47 a 34,20 m.

#### 3.2. Cubagem rigorosa

O comprimento das seções para a cubagem rigorosa foi definido com base no percentual da altura total, sendo utilizadas as seguintes proporções: 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 25, e a cada 10% até 95% da altura total, procedimento que é utilizado na empresa.

O volume de cada seção ( $v$ ), em  $m^3$ , foi calculado pelo método de Smalian:  $v = \left(\frac{g_1 + g_2}{2}\right)l$ ; e o volume da ponta ( $v_p$ ), em  $m^3$ , por:  $v_p = \frac{g_n l_p}{3}$ . Em que:  $g_1$  = área transversal na base da tora ( $m^2$ );  $g_2$  = área transversal no topo da tora ( $m^2$ );  $g_n$  = área transversal da base da ponta ( $m^2$ );  $l$  = comprimento da tora (m);  $l_p$  = comprimento da ponta (m).

##### 3.3.1. Ajuste e análise do modelo

O ajuste dos modelos de afilamento foi realizado para cada centro de classe de diâmetro, utilizando 30 árvores em cada ajuste. Nas classes em que  $n > 30$ , foi realizado

sorteio aleatório sem reposição, a fim de selecionar as 30 árvores a serem utilizadas no ajuste. No centro de classe de  $dap$  de 3,75 cm, foram utilizadas as 29 árvores, não sendo realizado o sorteio. A eficiência dessa estratificação foi comparada com o ajuste do modelo geral, no qual foram utilizados dados de todas as classes de  $dap$ , para o ajuste do modelo de afilamento.

Os modelos de afilamento não segmentados utilizados no trabalho foram o de Schöeper (polinômio de quinto grau) e o de Hradetzky (polinômio de potências inteiras e fracionárias).

$$\frac{d_i}{dap} = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{h_i}{Ht}\right) + \beta_2 \left(\frac{h_i}{Ht}\right)^2 + \beta_3 \left(\frac{h_i}{Ht}\right)^3 + \beta_4 \left(\frac{h_i}{Ht}\right)^4 + \beta_5 \left(\frac{h_i}{Ht}\right)^5 + \varepsilon_i$$

$$\frac{d_i}{dap} = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{h_i}{Ht}\right)^{p1} + \beta_2 \left(\frac{h_i}{Ht}\right)^{p2} + \dots + \beta_n \left(\frac{h_i}{Ht}\right)^{pn} + \varepsilon_i$$

Em que,

$d_i$  = diâmetro nas alturas pré-definidas pelo método de cubagem (cm);

$dap$  = diâmetro à altura de 1,30m do solo (cm);

$\beta_i$  = parâmetros a serem estimados,  $i = 1, 2, \dots, p$ ;

$h_i$  = alturas pré-definidas pelo modelo de cubagem ao longo do fuste (m);

$Ht$  = altura total observada (m);

$p_i$  = potências selecionadas para o modelo, inteira ou fracionária;

$\varepsilon_i$  = erro da estimativa,  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ .

A qualidade do ajuste das equações obtidas foi avaliada por meio dos seguintes critérios estatísticos:

a) Erro padrão da estimativa ( $S_{yx}\%$ ):  $S_{yx}\% = \frac{\sqrt{QM_{Residuo}}}{\bar{y}} * 100$

b) Coeficiente de determinação ajustado ( $R_{aj}^2$ ):  $R_{aj}^2 = 1 - \frac{QM_{Residuo}}{QM_{Total}}$

c) Bias ( $B$ ):  $B = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)}{n}$

d) Raiz quadrada do erro médio ( $RQEM$ ):  $RQEM\% = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 / n}}{\bar{y}} * 100$

e) Análise gráfica dos resíduos absolutos ( $e_i = \hat{y}_i - y_i$ ) e padronizados  $e_i = \frac{(\hat{y}_i - y_i)}{\sqrt{QM_{Residuo}}}$ .

$$\left(\frac{n-1}{n-(p+1)}\right) (1-R^2)$$

Em que:

$QM_{Residuo}$ : quadrado médio do resíduo;

$y_i$ : diâmetro observado (cm);

$\bar{y}$ : média dos diâmetros observados (cm);

$\hat{y}_i$ : diâmetro estimado pelo modelo (cm);

$n$ : número de observações;

$p$ : número de parâmetros associados a variável independente.

As análises foram realizadas no Microsoft Excel®, exceto o ajuste do modelo de potências fracionárias que foi feito no Action Stat®, por meio do *stepwise*, que testou as potências 0,005; 0,09; 0,08... 0,01; 0,9...0,1; 1...5; 10; 15; 20 e 25, para a construção do modelo de melhor ajuste.

#### 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

As estatísticas da qualidade de ajuste e os coeficientes estimados a partir dos modelos de Schöpfer e Hradetzky, por classe de diâmetro, encontram-se no Quadro 1. Os coeficientes foram significativos ( $p < 0,01$ ) pelo teste t. As potências selecionadas para o modelo de Hradetzky estão apresentadas no Apêndice A.

**Quadro 1** - Estatísticas de qualidade de ajuste dos modelos de afilamento, em relação ao diâmetro, para eucalipto estabelecido no espaçamento 3,0x3,0 m, em Minas Gerais

Modelos	R <sup>2</sup> <sub>aj</sub>	S <sub>yx</sub> (%)	Bias (cm)	RQEM (%)	Coeficientes							
					β <sub>0</sub>	β <sub>1</sub>	β <sub>2</sub>	β <sub>3</sub>	β <sub>4</sub>	β <sub>5</sub>	β <sub>6</sub>	
Schöpfer (1966)												
2,5 —  5,0	0,9023	9,7487	-5,4039	201,9182	1,3753	-5,8460	31,8008	-83,4307	97,1451	-41,6102	-	-
5,0 —  7,5	0,9716	5,4418	-2,3919	114,6652	1,3405	-5,9084	31,5070	-81,3699	93,7342	-39,8680	-	-
7,5 —  10,0	0,9734	5,1814	-2,0666	109,1787	1,2733	-5,4414	29,8922	-78,8000	91,5131	-38,9751	-	-
10,0 —  12,5	0,9814	4,3589	-1,0406	91,8485	1,2382	-4,9241	26,1800	-68,2208	78,6955	-33,4407	-	-
12,5 —  15,0	0,9810	4,5078	-1,5378	94,9860	1,2288	-4,9290	26,3624	-69,2706	80,5742	-34,4975	-	-
15,0 —  17,5	0,9845	4,1061	-0,8187	86,5216	1,2162	-4,7367	24,4869	-63,1701	72,5904	-30,8385	-	-
17,5 —  20,0	0,9759	5,1023	-3,3194	107,5122	1,2119	-4,9391	26,6148	-70,1041	81,7480	-35,1022	-	-
20,0 —  22,5	0,9847	4,2231	-0,6922	88,9867	1,2078	-4,7131	24,4110	-63,2972	72,9558	-31,0505	-	-
Eq. Geral	0,9222	7,4405	-118,21	161,9920	1,2925	-5,7747	31,3892	-82,4399	96,1256	-41,2427	-	-
Hradetzky (1976)												
2,5 —  5,0	0,9071	9,4960	-5,5482	196,9136	1,3718	1,9923	-3,1592	0,7780	-0,7823	-	-	-
5,0 —  7,5	0,9770	4,8124	-2,5861	101,2884	-934,6376	0,8148	-0,6190	1,943,0791	-2,1196	-1.008,3961	1,7693	-
7,5 —  10,0	0,9815	4,3084	-2,0350	90,7830	-103.826,1831	-3,6056	284.099,3599	-0,2284	-218.636,2758	38.367,0787	-	-
10,0 —  12,5	0,9863	3,7412	-1,0361	78,8328	-253,7796	5,2786	-0,0854	-29,4190	281,4390	-3,3202	-	-
12,5 —  15,0	0,9862	3,8386	-1,5391	80,8841	-1.782,7671	4,0525	-0,2013	3.693,9357	-1.912,1891	-2,8439	-	-
15,0 —  17,5	0,9894	3,3918	-0,8182	71,4697	-1.494,8506	3,3448	-0,2506	3.099,1192	-1.604,9751	-2,4317	-	-
17,5 —  20,0	0,9825	4,3625	-3,2458	91,9243	-10.699,7620	-5,6273	-0,3699	22.546,5860	-11.884,1398	43,1814	-	-
20,0 —  22,5	0,9899	3,4382	-0,6443	72,4473	-86.721,5152	-3,2825	-0,2643	237.346,4198	-182.695,5764	32.074,2415	-	-
Eq. Geral	0,9276	6,8914	-117,62	150,1942	1,3815	0,3284	-2,0786	-0,5788	1,0148	-	-	-

A estratificação por classe de *dap*, para ambos modelos avaliados, promoveu melhorias na qualidade de ajuste das equações de afilamento, para a estimativa de diâmetro ( $d_i$ ) ao longo do fuste, exceto na menor classe de *dap* (3,25cm), na qual não se verificou a mesma precisão observada nas outras classes (Quadro 1). Estas melhorias foram avaliadas por meio do coeficiente de determinação ajustado ( $R^2_{aj}$ ), erro padrão da estimativa ( $S_{yx}$  %), *bias* e raiz quadrada do erro médio (*RQEM*).

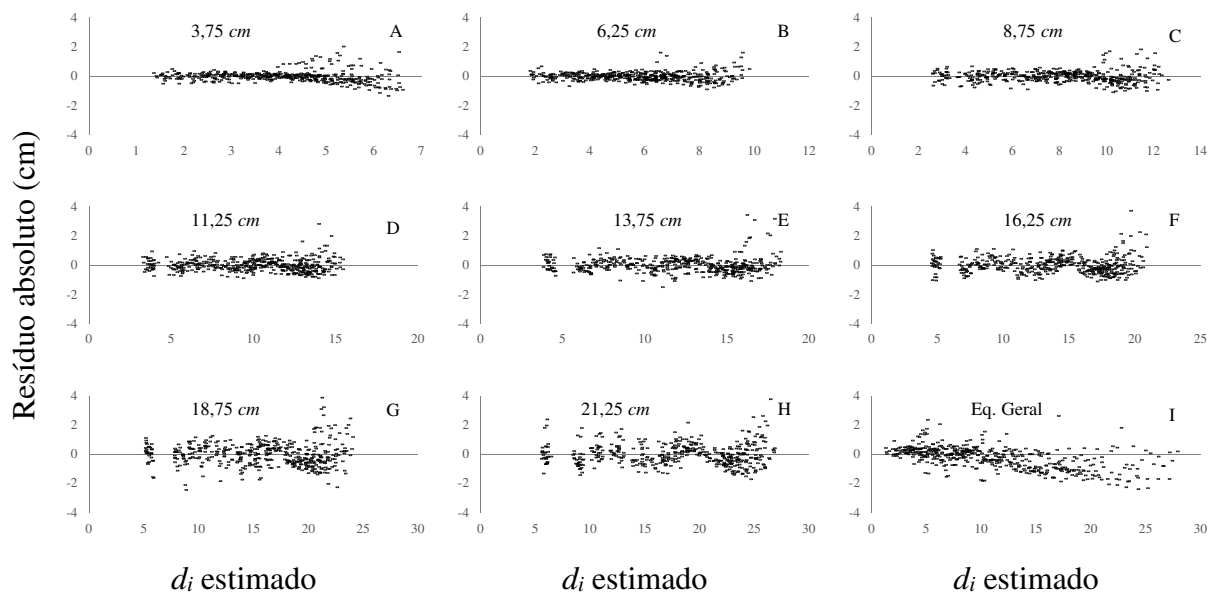
Desconsiderando o centro de classe de 3,25 cm, o ganho promovido com a estratificação foi de 6,2% (0,922 para 0,979) no  $R^2_{aj}$ ; 36,8% (7,44 para 4,70) no  $S_{yx}$  %; 98,6% (-118,2 para -1,70) no *bias*; e 38,8% (162,0 para 100,0) na *RQEM*, para o modelo Schöpfer. Para o modelo de Hradetzky o ganho promovido com a estratificação foi de 6,2% (0,928 para

0,985) no  $R^2_{aj}$ ; 42,2% (6,89 para 3,98) no  $S_{yx}\%$ ; 98,6% (-117,6 para -1,70) nos valores de *bias*; e 44,1% (150,2 para 83,9) na *RQEM*. David et al. (2014) ajustaram o modelo de Hradetzky para fuste de *Pinus*, utilizando também a estratificação por classe de *dap*, e constaram melhorias na acurácia da equação. Contudo, os valores de precisão encontrados no presente trabalho foram superiores aos observados por David et al. (2014), uma vez que foi utilizado amplitude de classe menor. A estratificação, conforme comentado por outros autores, reduz a variabilidade da variável em estudo. Kohler, Koehler, Figueiredo Filho (2013) observaram melhorias na qualidade de ajuste de modelos de afilamento utilizando o modelo de Hradetzky, mas utilizando a idade como fator de estratificação. Os melhores resultados do modelo de Hradetzky sob o de Schöeper, também foi verificado por Machado et al. (2004), para descrever o perfil do fuste de *Pinus oocarpa*, quando se utilizaram diferentes idades e regimes de desbaste.

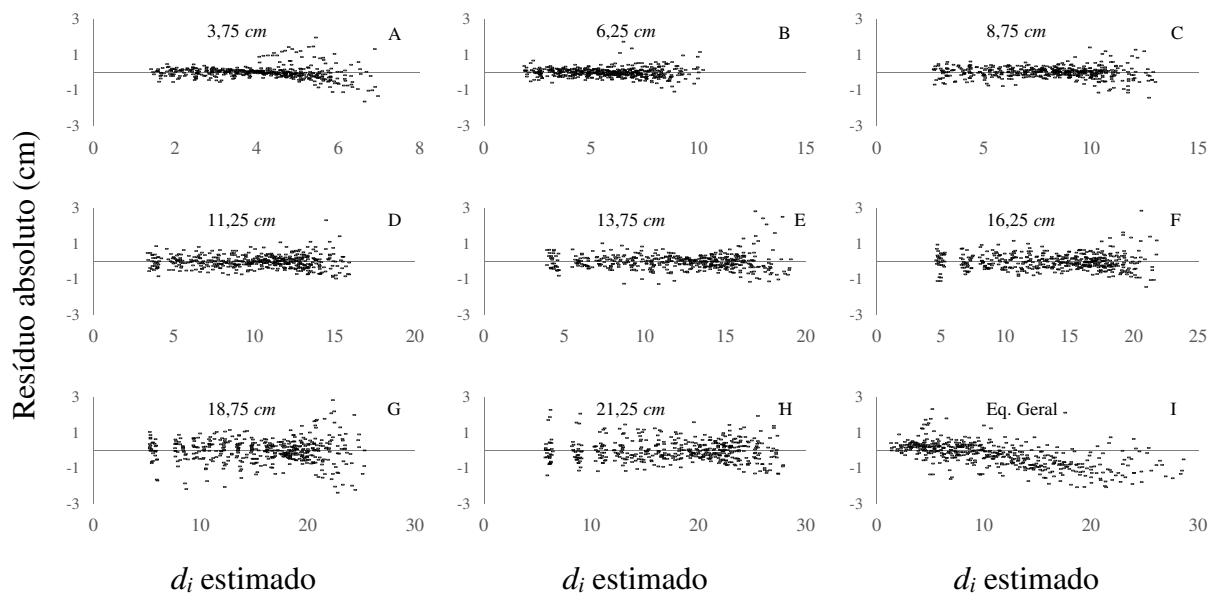
É importante destacar que  $S_{yx}\%$  está relacionado com a precisão da equação e que quanto menores os valores de *bias* e *RQEM*, mais confiável é o modelo ajustado.

Quando ocorre a estratificação em classes de *dap*, percebe-se que os valores de *bias* tendem a zero, se aproximando do pressuposto da regressão, na qual os erros seguem distribuição normal, são independentes, tem média zero e variância homocedástica.

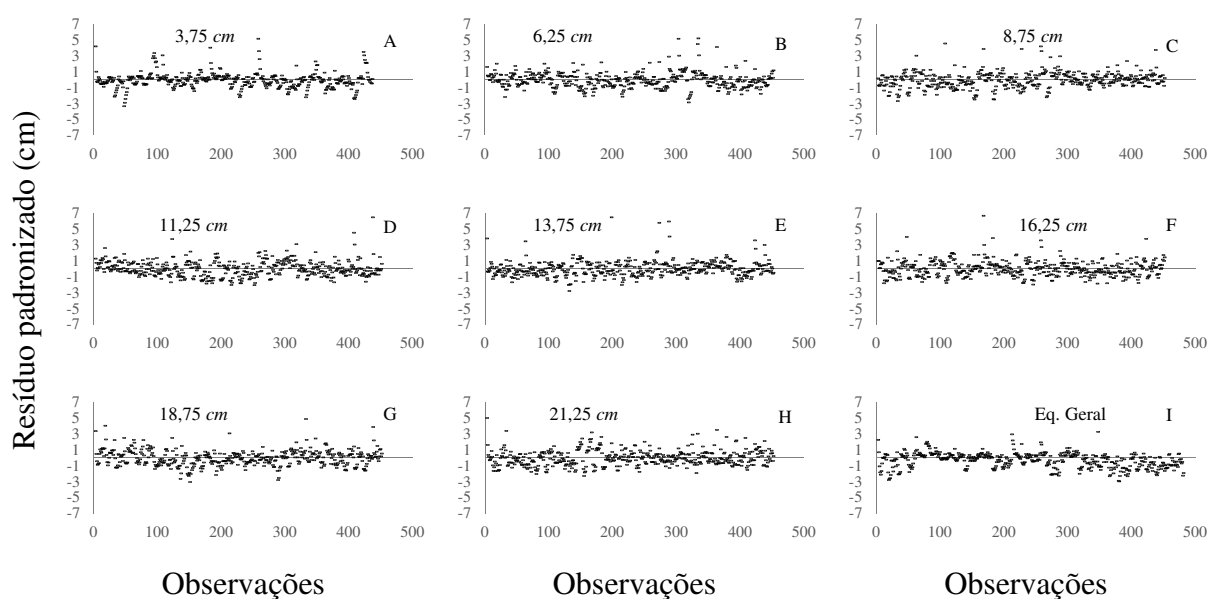
A validação das equações foi complementada com a avaliação gráfica dos resíduos absolutos e padronizados (Figuras 3 a 6). Os resíduos absolutos (Figuras 3 e 4), embora não sejam a forma mais eficiente de avaliar *outliers*, são interessantes para avaliar o seu comportamento em relação à variável estimada. Para ambos os modelos se verifica que há tendência em aumentar os valores residuais para maiores diâmetros ( $d_i$ ). Complementarmente, os resíduos padronizados (Figuras 5 e 6) permitem avaliar a possibilidade de um valor ser um possível *outlier*, quando estão fora do intervalo  $-3 < e_i < 3$  (CORDEIRO e LIMA NETO, 2006). Essa análise corrobora com o fato de que a estratificação por classe de *dap* promoveu melhorias na qualidade do ajuste dos modelos de afilamento, pelo fato de maior uniformidade da distribuição dos resíduos. Quando se utiliza o ajuste sem a estratificação (Figuras 5i e 6i) verifica-se tendência nas estimativas do diâmetro ( $d_i$ ).



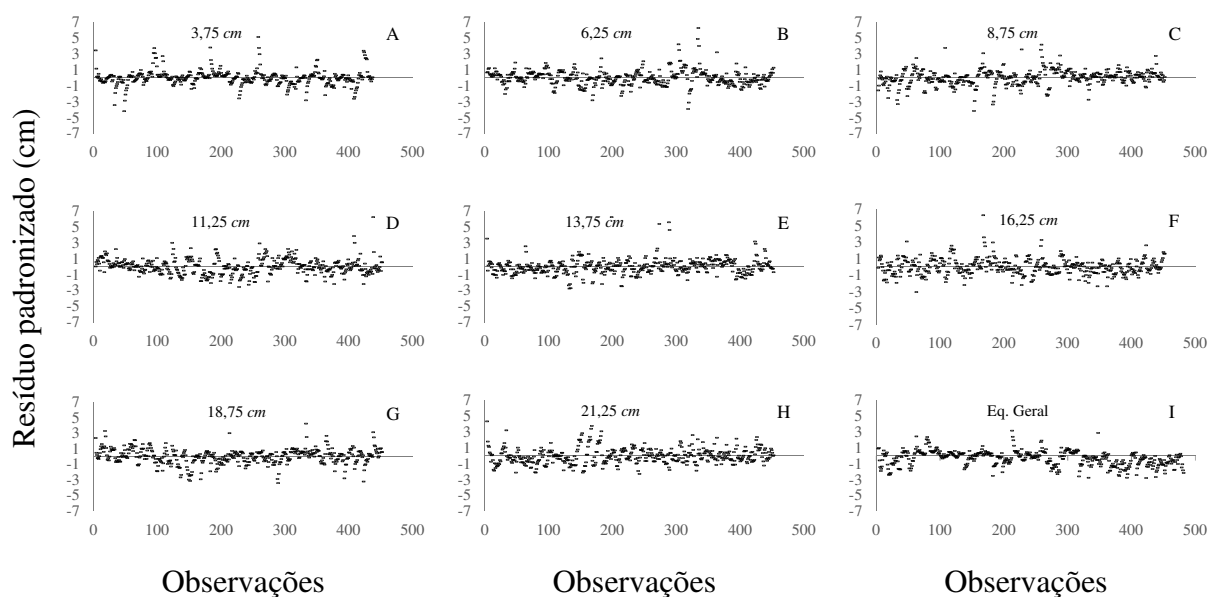
**Figura 3** - Distribuição dos resíduos absolutos obtidos a partir do ajuste do modelo de Schöpfer, para os respectivos centros de classe de *dap*, 3,75; 6,25; 8,75; 11,25; 13,75; 16,25; 18,75 e 21,25cm.



**Figura 4** - Distribuição dos resíduos absolutos obtidos a partir do ajuste do modelo de Hradetzky, para os respectivos centros de classe de *dap*, 3,75; 6,25; 8,75; 11,25; 13,75; 16,25; 18,75 e 21,25cm.



**Figura 5** - Distribuição dos resíduos padronizados obtidos a partir do ajuste do modelo de Schöpfer, para os respectivos centros de classe de *dap*, 3,75; 6,25; 8,75; 11,25; 13,75; 16,25; 18,75 e 21,25cm.



**Figura 6** - Distribuição dos resíduos padronizados obtidos a partir do ajuste do modelo de Hradetzky, para os respectivos centros de classe de *dap*, 3,75; 6,25; 8,75; 11,25; 13,75; 16,25; 18,75 e 21,25cm.

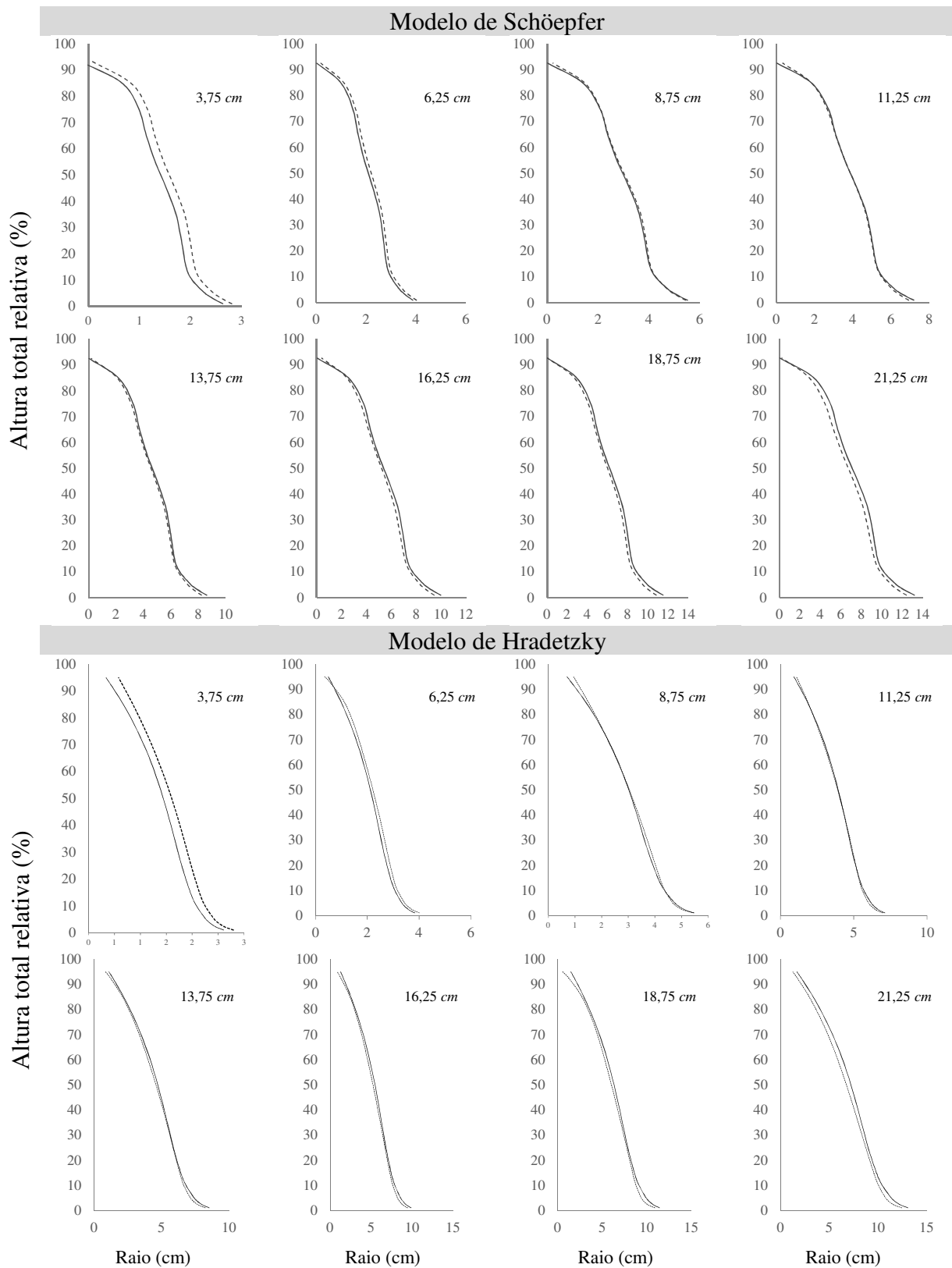
As equações ajustadas foram então utilizadas para esquematizar o perfil teórico do fuste (Figuras 7). O perfil foi estimado para cada centro de classe utilizando uma árvore com característica média, sendo um perfil considerando a equação estratificada e outro sem a estratificação. Para ambos os modelos testados verificou-se maior diferença nos perfis estimados com e sem estratificação para os extremos de classe de *dap*. Em contrapartida, os

perfis nos centros de classe intermediários apresentam maior sobreposição. Este fato pode estar associado com a característica da regressão que representa uma linha média em relação aos dados observados.

Esta informação é relevante quando se deseja avaliar o sortimento do fuste e utilizam-se modelos de afilamento para auxiliar na quantificação de multiprodutos. Conforme observado no presente trabalho, é recomendado ajustar uma equação para os centros de classe de interesse a fim de garantir melhor acurácia da equação, o que possibilita estimar multiprodutos de forma mais consistente.

É importante ressaltar que outros critérios podem ser utilizados na estratificação. No trabalho de David *et al.* (2014), a função de afilamento de Hradetzky, também ajustado suas potências pelo método *stepwise*, foi a mais precisa na estimativa de diâmetros ao longo de fustes de *Pinus* sp., o qual observou que a equação gerada sem estratificação difere estatisticamente daquelas ajustadas por estrato. Ele também concluiu que a estratificação por fator de forma e quociente de forma com alocação de três estratos propiciam expressivos ganhos na acurácia do ajuste e recomendou a estratificação por fator de forma por ela propiciar, em média, maiores ganhos na acurácia.





**Figura 7** - Perfil longitudinal do fuste obtido a partir do ajuste do modelo de Schöepfer e Hradetzky, usando a estratificação por classe de *dap* (pontilhado) e sem a estratificação (contínuo), para os respectivos centros de classe de *dap*, 3,75; 6,25; 8,75; 11,25; 13,75; 16,25; 18,75 e 21,25cm.

## 5. CONCLUSÕES

A estratificação por classe de diâmetro ( $d_{ap}$ ) promove melhorias na acurácia das estimativas de diâmetro ( $d_i$ ) ao longo do fuste.

Os modelos polinomiais de Schöpfer e Hradetzky apresentam comportamento similar com a estratificação, com pequena superioridade do último modelo, uma vez que ele possibilita obter potências específicas para cada conjunto de dados.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHRENS, S.; HOLBERT, D. Uma função para forma de tronco e volume de *Pinus taeda* L. **Boletim de Pesquisa Florestal**, Colombo, n. 3, p. 37-68, 1981.

ÂNGELO, H. et al. Análise de componentes principais e função spline para definir a forma do tronco de *Pinus* sp tropicais. **Floresta**, Paraná, v. 25, n. 1, p. 55-67, 1997.

ARCE, J. E. Um sistema de análise, simulação e otimização do sortimento florestal em função da demanda por multiprodutos e dos custos de transporte. 2000. 121 f. Tese (Doutorado em Engenharia Florestal - Setor de Ciências Agrárias) - Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

ASSIS, A. L. et al. Avaliação de modelos polinomiais não-segmentados na estimativa de diâmetros e volumes comerciais de *Pinus taeda*. **Ciência Florestal**, v. 12, n. 1, p. 89-107, 2002.

CAMPOS, J. C. C.; LEITE, H. G. **Mensuração Florestal**. 4. ed. Viçosa: UFV, 2013. 605 p.

CHAPMAN, H. H.; MEYER, W. H. **Forest Mensuration**. New York: McGraw-Hill, 1949. 522p

CORDEIRO, G. M.; LIMA NETO, E. A. **Modelos paramétricos**. Recife: Universidade Federal Rural de Pernambuco, Departamento de Estatística e Informática, 2006.

CUNHA, T. A.; FINGER, C. A. G. Competição assimétrica e o incremento diamétrico de árvores individuais de *Cedrela odorata* L. na Amazônia Ocidental. **Acta Amazonica**, v. 43, n. 1, p. 09-18, 2013

DAVID, H.C. et al. Critérios de estratificação para o ajuste de funções de afilamento em fustes de *Pinus* sp. **Pesquisa Florestal Brasileira**, v. 34, n. 79, p. 197-206, jul./set. 2014

FIGUEIREDO FILHO, A.; SCHREINER, C.A.; PINHEIRO, C.N.F.; MORES, M. Efeitos da resinagem no crescimento de *Pinus elliottii* var. *elliottii*. **Floresta**, Curitiba. vol.19, 1991.

FRIEDL, R.A. **Dinâmica da forma dos fustes em povoamentos plantados de *Araucária angustifolia* (Bert) Ktze**. Curitiba: UFPR – Setor de Ciências Agrárias, 1989, 166p. (Dissertação – Mestrado em Engenharia Florestal).

FIGUEIREDO-FILHO, A.; BORDERS, B. E.; HITCH, K. L. Taper equations for *Pinus taeda* plantations in Southern Brazil. **Elsevier Forest Ecology and Management**, v. 83, p. 39-46, 1996.

HOHENADL, W. **Der Aufbau der Baumschäfte**. Fw. Cbl.. 1924.

HUSCH, B.; BEERS, T. W.; KERSHAW JR., J. A. **Forest mensuration**. 4.ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley e Sons, 2003. 443p.

KOHLER, S. V.; KOHLER, H. S.; FILHO, A. F. Modelos de afilamento para *Pinus taeda* por Classes de Idade. **Revista Floresta e Ambiente**, v. 20, n. 4, p. 470-479, 2013.

LARSON, P.R. Stern from development of forest tree. **Forest Science Monograph**, Washington, p.1-41, 1963.

LOETSCH, F.; ZOHRER, F.; HALLER, K. E. **Forest inventory Bern**, Verlagsgesellschaft München, 1973. v. 2. 469p.

MACHADO, S. A. Influência da idade na forma do fuste de *Araucaria angustifolia* em plantações no Brasil. In: SEMINÁRIO SOBRE ATUALIDADES E PERSPECTIVAS FLORESTAIS: O uso de funções de forma de tronco em estudo de volumetria de espécies florestais, 5, Curitiba, 1982. **Anais...**Curitiba: EMBRAPA, 1982. p. 51–55 (Documento 9)

MACHADO, S. A. *et al.* Comparação de modelos de afilamento do tronco para diferentes idades e regimes de desbastes em plantações de *Pinus oocarpa* Schiede. **Boletim de Pesquisa Florestal**, Colombo, n. 48, p. 41 - 64. jan/jun 2004.

NEWNHAM, R.M. **A variable-form taper function**. Canadian Forestry Service Petawawa Natl. For. Inst. Inf. Rep. PI-X-83., 1988. 31p

ROW, C.; GUTTENBERG, S. Determining weight-volume relationship for saw logs. **Forest Products Journal**, v. 16, n. 5, p. 39-47. 1966.

SOUZA, C. A. M. et al. Avaliação de modelos de afilamento não-segmentados na estimação da altura e volume comercial de *Eucalyptus* sp. **Ciência Florestal**, v. 18, n. 3, p. 387-399, 2008.

SCOLFORO, J. R. S.; THIERSCH, C. R. **Biometria Florestal: Medição, Volumetria e Gravimetria**. Textos técnicos. UFLA. Lavras. 1998. 310 p.

SCOLFORO, J. R. S.; LIMA, J. T.; SILVA, S. T. Equações de biomassa e volume para cerrado sensu strictu. In: CONGRESSO FLORESTAL PANAMERICANO, 1.; CONGRESSO FLORESTAL BRASILEIRO, 7., 1993, Curitiba. **Anais...** Curitiba: 1993. p.508-510.

YARED, J.A.G.et al. Comportamento silvicultural de castanheira (*Bertholletia excelsa* H. & K.), em diversos locais na Amazônia. In: CONGRESSO FLORESTAL PANAMERICANO, 1 1993, Curitiba-PR. **Anais. Sociedade Brasileira de Silvicultura/ Sociedade Brasileira de Engenheiros Florestais**, 1993. v.2 p.416-418.

YOSHITANI M. J. et al. Funções de afilamento para plantios desbastados de *Pinus taeda*. **Revista Floresta**, Curitiba, PR, v.42, n.1, p.169-176, jan./mar. 2012.

**APÊNDICE A** – Potências selecionadas para o modelo de Hradeztky, a partir do procedimento *stepwise*, para fuste de eucalipto estabelecido no espaçamento 3,0x3,0 m, em Minas Gerais

Classes de <i>dap</i>	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$
2,5 —  5,0	0,08	0,3	0,5	2	-	-
5,0 —  7,5	0,005	0,01	0,5	3	4	5
7,5 —  10,0	0,005	0,02	0,01	0,6	3	-
10,0 —  12,5	0,005	0,08	0,6	1	5	-
12,5 —  15,0	0,005	0,01	0,6	1	10	-
15,0 —  17,5	0,005	0,01	0,6	1	10	-
17,5 —  20,0	0,005	0,01	0,6	0,2	10	-
20,0 —  22,5	0,005	0,01	0,6	0,2	5	-
Equação Geral	0,5	0,2	0,1	3	-	-